ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
1ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
6/5/2014.

<u>Άσκηση 1:</u> Έστω $A=\{0,\{1\}\}$. Ποιές από τις ακόλουθες δηλώσεις αληθεύουν και γιατί;

$$\{0\}\subset A\,,\quad \{1\}\in A\,,\quad \{1\}\subseteq A.$$ (1,5 μον.)

<u>Άσκηση 2:</u> Ορίστε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα σύνολα

$$\phi\cap\{\phi\}\,,\quad \{\phi\}\cup\{\phi\},\quad \{\phi,\{\phi\}\}-\phi.$$ (1 μον.)

<u>Άσκηση 3:</u> Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα

$A=\{x\in\mathbb{N}\mid x=2^k, \text{όπου } k \text{ τυχών φυσικός}\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}\mid \text{ο } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 4\}$

$C=\{x\in\mathbb{N}\mid \text{ο } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 6\}$

Ορίστε τα σύνολα $A\cap B$, $A-C$ και $B\cup C$ με α) αναγραφή των στοιχείων τους και β) με περιγραφή των στοιχείων τους. (1,5 μον.)

<u>Άσκηση 4:</u> Βρείτε τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$. (1,5 μον.)

<u>Άσκηση 5:</u> Έστω $A=\{b,c,2\}$ και $B=\{2,3\}$. Ορίστε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα σύνολα $(A\cup B)\times A$, $(A-B)\times(B-A)$. (1,5 μον.)

<u>Άσκηση 6:</u> Έστω $A=\{a,b,c\}$ και $B=\{5\}$. Πόσες (διαφορετικές) σχέσεις υπάρχουν από το A στο B. Ποιές είναι οι σχέσεις που είναι συναρτήσεις από το A στο B; Ποιές από τις συναρτήσεις είναι 1-1 και ποιές είναι επί; (1,5 μον.)

Άσκηση 7. Έστω $A=\{1,2,3,4\}$ και R η σχέση στο A με:

$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

α) Είναι η R ανακλαστική; συμμετρική; μεταβατική; ολική;

β) Είναι η R^{-1} ανακλαστική; συμμετρική; μεταβατική; ολική; (πρώτα βρείτε τα στοιχεία της R^{-1}).

(1,5 μον.)

Παράδοση λύσεων: Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν στον διδάσκοντα μέχρι την έναρξη του μαθήματος τη Δευτέρα, 12/5/2014.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

<u>Άσκηση 1.</u>

α) $\{0\} \subset A$ αληθής, διότι $\{0\} \subseteq A$ (κάθε στοιχείο του $\{0\}$ είναι και στοιχείο του A) και υπάρχει στοιχείο του A που δεν ανήκει στο $\{0\}$.

β) $\{1\} \in A$ ~~α~~ αληθής, διότι το $\{1\}$ είναι στοιχείο του A.

γ) $\{1\} \subseteq A$ ψευδής, διότι το στοιχείο 1 του $\{1\}$ δεν ανήκει στο A (προσοχή, το 1 δεν ταυτίζεται με το $\{1\}$).

<u>Άσκηση 2.</u>

$\phi \cap \{\phi\} = \phi$ (διότι $\phi \cap X = \phi$, για οποιοδήποτε σύνολο X).

$\{\phi\} \cup \{\phi\} = \{\phi\}$ (διότι $X \cup X = X$, για οποιοδήποτε σύνολο X)

$\{\phi, \{\phi\}\} - \phi = \{\phi, \{\phi\}\}$ (αφαιρώντας τα στοιχεία του ϕ, δηλαδή τίποτε, από το σύνολο $\{\phi, \{\phi\}\}$ δεν επηρεάζει καθόλου το $\{\phi, \{\phi\}\}$).

<u>Άσκηση 3.</u> Με αναγραφή των στοιχείων τους, βλέπουμε ότι

$A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

$B = \{4\cdot 0, 4\cdot 1, 4\cdot 2, 4\cdot 3, \dots\} = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$

$C = \{6\cdot 0, 6\cdot 1, 6\cdot 2, 6\cdot 3, \dots\} = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$

α) $A \cap B = \{4, 8, 16, \dots\}$

$A - C = \{1, 2, 4, 8, \dots\} = A$

$B \cup C = \{0, 4, 6, 8, 12, 18, \dots\}$.

β) $A \cap B = \{x \mid$ ο x είναι δύναμη του 2 <u>και</u> πολλαπλάσιο του 4$\}$

$A - C = \{x \mid$ ο x είναι δύναμη του 2 και όχι πολλαπλάσιο του $6\}$

$B \cup C = \{x \mid$ ο x είναι πολλαπλάσιο του 4 ή πολλαπλάσιο του $6\}$.

Άσκηση 4.

Θα βρούμε πρώτα το $\mathcal{P}(\{a,b\})$, δηλαδή το δυναμοσύνολο του $\{a,b\}$. Επειδή το $\{a,b\}$ έχει 2 στοιχεία, το $\mathcal{P}(\{a,b\})$ θα έχει $2^2=4$ στοιχεία. Έχουμε λοιπόν

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$, δηλαδή το δυναμοσύνολο του $\mathcal{P}(\{a,b\})$. Επειδή το $\mathcal{P}(\{a,b\})$ έχει 4 στοιχεία, το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ θα έχει $2^4 = 2.2.2.2 = 16$ στοιχεία. Έχουμε

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\})) = \{\underbrace{\emptyset}_{1}, \underbrace{\{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}}_{2}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{3}, \underbrace{\{\{a,b\}\}}_{4}, \underbrace{\{\{a\}\}}_{5},$$
$$\underbrace{\{\{b\}\}}_{6}, \underbrace{\{\emptyset, \{a,b\}\}}_{7}, \underbrace{\{\emptyset, \{a\}\}}_{8}, \underbrace{\{\emptyset, \{b\}\}}_{9}, \underbrace{\{\{a,b\}, \{a\}\}}_{10},$$
$$\underbrace{\{\{a,b\}, \{b\}\}}_{11}, \underbrace{\{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}\}}_{12}, \underbrace{\{\emptyset, \{a,b\}, \{b\}\}}_{13}, \underbrace{\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}}_{14},$$
$$\underbrace{\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}}_{15}, \underbrace{\{\{a\}, \{b\}\}}_{16}\}.$$

Άσκηση 5.

$A \cup B = \{b, c, 2, 3\}$, $A - B = \{b, c\}$ και $B - A = \{3\}$.

$$(A \cup B) \times A = \{b,c,2,3\} \times \{b,c,2\} = \{\langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,b\rangle,$$
$$\langle c,c\rangle, \langle c,2\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,b\rangle, \langle 3,c\rangle, \langle 3,2\rangle\}.$$

$$(A - B) \times (B - A) = \{b,c\} \times \{3\} = \{\langle b,3\rangle, \langle c,3\rangle\}.$$

Άσκηση 6.

Υπάρχουν τόσες σχέσεις από το A στο B όσα είναι τα υποσύνολα του $A\times B$, δηλαδή όσα είναι τα στοιχεία του $\mathcal{P}(A\times B)$. Επειδή το A έχει 3 στοιχεία και το B 1 στοιχείο, το $A\times B$ θα έχει $3\cdot 1=3$ στοιχεία, οπότε το $\mathcal{P}(A\times B)$ θα έχει $2^3=8$ στοιχεία. Υπάρχουν λοιπόν 8 σχέσεις από το A στο B, συγκεκριμένα οι ακόλουθες:

$R_1=\emptyset$

$R_2=\{\langle a,5\rangle,\langle b,5\rangle,\langle c,5\rangle\}$

$R_3=\{\langle a,5\rangle\}$

$R_4=\{\langle b,5\rangle\}$

$R_5=\{\langle c,5\rangle\}$

$R_6=\{\langle a,5\rangle,\langle c,5\rangle\}$

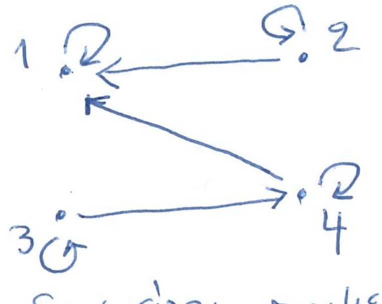
$R_7=\{\langle a,5\rangle,\langle b,5\rangle\}$

$R_8=\{\langle b,5\rangle,\langle c,5\rangle\}$.

Από τις 8 αυτές σχέσεις, συνάρτηση από το A στο B είναι μόνο η R_2. Βλέπουμε εύκολα ότι η R_2 είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1.

Άσκηση 7.

α) Για ευκολία, θα παραστήσουμε την R με ένα διάγραμμα:



Παρατηρούμε ότι η R είναι ανακλαστική, αφού κάθε στοιχείο του A σχετίζεται με τον εαυτό του.

Όμως η R δεν είναι συμμετρική, αφού (π.χ.) το 4 σχετίζεται με το 1, αλλά το 1 δεν σχετίζεται με το 4.

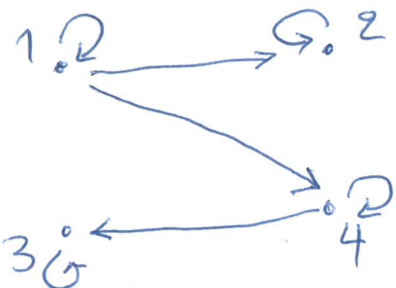
Επίσης η R δεν είναι μεταβατική, αφού το 3 σχετίζεται με το 4 και το 4 σχετίζεται με το 1, αλλά το 3 δεν σχετίζεται με το 1.

Τέλος, η R δεν είναι ολική, αφού ούτε το 2 σχετίζεται με το 4 ούτε το 4 σχετίζεται με το 2.

β) Θα βρούμε πρώτα τα στοιχεία της R^{-1}. Από τον ορισμό της αντίστροφης σχέσης, θα είναι ό,τι προκύψει από την R, αν αντιστρέψουμε τις συντεταγμένες των διατεταγμένων ζευγών. Έτσι παίρνουμε ότι

$$R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}.$$

Όπως πριν, μπορούμε να αναπαραστήσουμε την R με ένα διάγραμμα:



Όπως για την R, βλέπουμε ότι η R^{-1} είναι ανακλαστική, δεν είναι συμμετρική, δεν είναι μεταβατική, δεν είναι ολική.