ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 1.

8/3/2016.

__Άσκηση 1.__ Θεωρούμε τα σύνολα $A=\{2,3,4\}$, $B=\{x\in N \mid x \text{ άρτιος}\}$, $C=\{x\in N \mid (2x-4)\cdot(x+3)=0\}$. Ποιές από τις ακόλουθες δηλώσεις αληθεύουν και γιατί;

$B\subset A, \quad A\cap C=\emptyset, \quad B \nsubseteq C, \quad A-C\subseteq B-C$ (2 μον.)

__Σημείωση.__ Με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών.

__Άσκηση 2.__ Βρείτε τα στοιχεία των δυναμοσυνόλων

$\mathcal{P}(\{\{a\}\})$, $\mathcal{P}(\{0,\{0\}\})$. (2 μον.)

__Άσκηση 3.__ Έστω A το σύνολο $\{a,b,c\}$. Ποιές από τις ακόλουθες δηλώσεις αληθεύουν και γιατί;

$A\in\mathcal{P}(A), \quad A\subset\mathcal{P}(A), \quad \{A\}\in\mathcal{P}(A), \quad \{A\}\subseteq\mathcal{P}(A)$.
(2 μον.)

__Άσκηση 4.__ Κατασκευάστε διαγράμματα Venn για να "αποδείξετε" το νόμο επιμεριστικότητας:

$X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$. (2 μον.)

__Άσκηση 5.__ Χρησιμοποιώντας νόμους της άλγεβρας συνόλων, να απλοποιήσετε την έκφραση $A\cup(A\cup B')'$, όπου A, B είναι τυχόντα σύνολα.
(2 μον.)

__Παράδοση λύσεων.__ Οι λύσεις των ασκήσεων (χειρόγραφες ή γραμμένες σε υπολογιστή) πρέπει να παραδοθούν μέχρι τις 6μ.μ. την Τρίτη, 15/3/2016. Η παράδοση γίνεται α) ηλεκτρονικά (cdimitr@phs.uoa.gr) ή β) στο γραφείο του διδάσκοντα (αν λείπει, ρίξτε τις κάτω από την πόρτα) ή γ) στη γραμματοθυρίδα του διδάσκοντα (απέναντι από την είσοδο της Γραμματείας του Τμήματος ΜΙΘΕ).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.
ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

Άσκηση 1. Τα σύνολα A και B ορίζονται με αναγραφή των στοιχείων τους ως $A=\{2,3,4\}$ και $B=\{0,2,4,6,8,\ldots\}$. Για να βρούμε τα στοιχεία του C λύνουμε την εξίσωση που το ορίζει:

$$(2x-4)\cdot(x+3)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \text{ ή } x+3=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-3.$$

Επειδή αναζητούμε λύσεις που είναι φυσικοί αριθμοί, η τιμή -3 απορρίπτεται, ενώ απομένει η τιμή 2. Έτσι έχουμε $C=\{2\}$. Τώρα πλέον είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο ερώτημα που τέθηκε.

α) Η δήλωση $B\subset A$ είναι ψευδής, διότι δεν ισχύει ούτε η ασθενέστερη δήλωση $B\subseteq A$ (πράγματι, υπάρχουν στοιχεία του B, π.χ. το 6, που δεν είναι στοιχεία του A).

β) Η δήλωση $A\cap C=\emptyset$ είναι επίσης ψευδής. Πράγματι, το σύνολο $A\cap C$ ισούται με το $\{2\}$, που δεν είναι το κενό σύνολο.

γ) Η δήλωση $B\not\subseteq C$ είναι αληθής· πράγματι, υπάρχουν στοιχεία του B, π.χ. το 8, που δεν ανήκουν στο σύνολο C.

δ) Καταρχάς βρίσκουμε ότι $A-C=\{3,4\}$ και $B-C=\{0,4,6,\ldots\}$. Προκύπτει λοιπόν ότι η δήλωση $A-C\subseteq B-C$ είναι ψευδής· πράγματι, ο αριθμός 3 είναι στοιχείο του συνόλου $A-C$, αλλά δεν είναι στοιχείο του $B-C$.

Άσκηση 2. Θα βρούμε πρώτα τα στοιχεία του $\mathcal{P}(\{\{a\}\})$. Επειδή το σύνολο που έχουμε είναι μονοσύνολο (πράγματι, το $\{\{a\}\}$ είναι το σύνολο με μόνο στοιχείο το $\{a\}$), το δυναμοσύνολό του θα έχει $2^1=2$ στοιχεία. Έχουμε όμως δει ότι κάθε δυναμοσύνολο περιέχει το $\emptyset$ και το ίδιο το σύνολο που έχουμε υπόψη. Άρα τα στοιχεία του $\mathcal{P}(\{\{a\}\})$ είναι το $\emptyset$ και το $\{\{a\}\}$. Με άλλα λόγια,

$$\mathcal{P}(\{\{a\}\})=\{\emptyset,\{\{a\}\}\}.$$

Ας έρθουμε τώρα στα στοιχεία του $\mathcal{P}(\{0,\{0\}\})$. Επειδή το σύνολο $\{0,\{0\}\}$ έχει δύο στοιχεία (συγκεκριμένα, το 0 και το $\{0\}$), το δυναμοσύνολό του θα έχει $2^2=2\cdot 2=4$ στοιχεία. Τα στοιχεία είναι τα ϕ, $\{0,\{0\}\}$, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathcal{P}(\{0,\{0\}\}) = \{\phi, \{0,\{\phi\}\}, \{0\}, \{\{0\}\}\}.$$

<u>Άσκηση 3.</u> Αν και δεν είναι απαραίτητο, θα ορίσουμε το $\mathcal{P}(A)$ με αναγραφή των στοιχείων του. Επειδή το A έχει 3 στοιχεία, το $\mathcal{P}(A)$ θα έχει $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$ στοιχεία. Πράγματι:

$\mathcal{P}(A)=\{\phi, A, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

Τώρα είμαστε σε θέση να απαντήσουμε εύκολα στο ερώτημα.

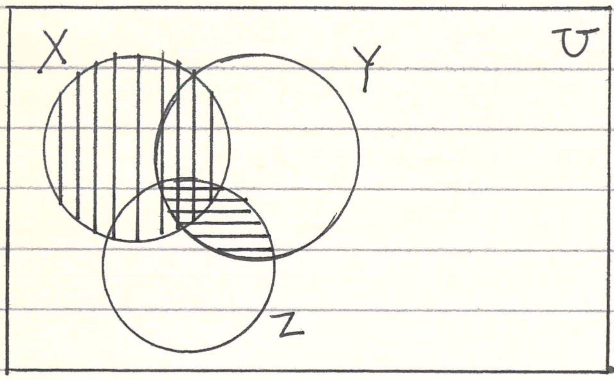
α) Η δήλωση $A\in\mathcal{P}(A)$ είναι αληθής, διότι το A είναι πράγματι ένα από τα στοιχεία του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ (η συγκεκριμένη δήλωση αληθεύει για <u>όλα τα</u> σύνολα A).

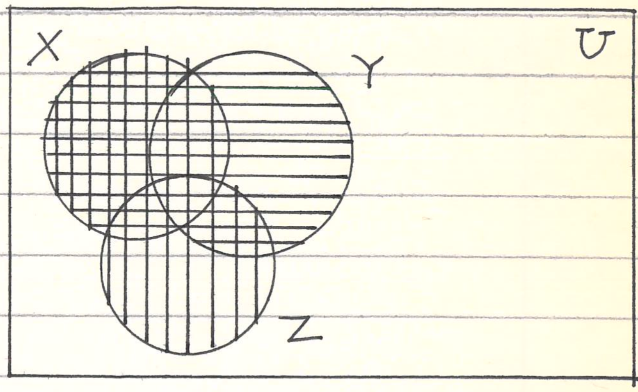
β) Η δήλωση $A\subset\mathcal{P}(A)$ είναι ψευδής. Πράγματι, ακόμη και η ασθενέστερη δήλωση $A\subseteq\mathcal{P}(A)$ είναι ψευδής, διότι υπάρχουν στοιχεία του A, π.χ. το a, που δεν είναι στοιχείο του $\mathcal{P}(A)$ (υπενθυμίζουμε ότι το a <u>δεν</u> πρέπει να συγχέεται με το $\{a\}$).

γ) $\{A\}\in\mathcal{P}(A)$: η δήλωση αυτή είναι ψευδής, διότι το $\{A\}$ <u>δεν</u> είναι στοιχείο του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ (προσοχή, το A είναι στοιχείο του $\mathcal{P}(A)$, αλλά δεν ταυτίζεται με το $\{A\}$).

δ) Η δήλωση $\{A\}\subseteq\mathcal{P}(A)$ είναι αληθής, διότι κάθε στοιχείο του $\{A\}$ είναι στοιχείο και του $\mathcal{P}(A)$ (πράγματι, το μοναδικό στοιχείο του $\{A\}$, δηλαδή το A, ανήκει στο σύνολο $\mathcal{P}(A)$).

<u>Άσκηση 4.</u> Θα κατασκευάσουμε δύο διαγράμματα Venn, ένα για το σύνολο που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της ισότητας και ένα για το σύνολο που εμφανίζεται στο δεξιό μέρος.





Στο πρώτο διάγραμμα, το σύνολο $Y \cap Z$ εμφανίζεται σκιασμένο με οριζόντιες γραμμές, ενώ το σύνολο X εμφανίζεται σκιασμένο με κατακόρυφες γραμμές. Έτσι, το σύνολο $X \cup (Y \cap Z)$ είναι αυτό που είναι σκιασμένο ή με οριζόντιες ή με κατακόρυφες γραμμές.

Στο δεύτερο διάγραμμα, το σύνολο $X \cup Y$ εμφανίζεται σκιασμένο με οριζόντιες γραμμές, ενώ το σύνολο $X \cup Z$ εμφανίζεται σκιασμένο με κατακόρυφες γραμμές. Έτσι, το σύνολο $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ είναι αυτό που είναι σκιασμένο και με οριζόντιες και με κατακόρυφες γραμμές.

Παρατηρώντας τα δύο διαγράμματα, διαπιστώνουμε ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα (επειδή αντιστοιχούν στις ίδιες περιοχές του συνολοθεωρητικού σύμπαντος U).

<u>Άσκηση 5.</u>

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cup B')' &= (\text{ν. De Morgan})\ A \cup (A' \cap (B')') \\
&= (\text{ν. συμπληρώματος})\ A \cup (A' \cap B) \\
&= (\text{ν. επιμεριστικότητας})\ (A \cup A') \cap (A \cup B) \\
&= (\text{ν. συμπληρώματος})\ U \cap (A \cup B) \\
&= (\text{ν. αντιμεταθετικότητας})\ (A \cup B) \cap U \\
&= (\text{ν. ταυτότητας})\ A \cup B.
\end{aligned}
$$