# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
## 2ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
## 6/6/2014.

**Άσκηση 1.** Καθορίστε τις ιδιότητες της σχέσης "ο x είναι γείτονας (άνδρας) του(της) y" στο σύνολο των ανθρώπων. Θα αλλάξουν κάποιες από τις απαντήσεις σας, αν η σχέση οριστεί στο σύνολο των ανδρών; (1,5 μον.)

**Άσκηση 2.** Δώστε παράδειγμα σχέσης στο σύνολο $A=\{a,b,c,d\}$ που είναι ολική και ανακλαστική, αλλά όχι συμμετρική. (1 μον.)

**Άσκηση 3.** Θεωρούμε τη σχέση R στο σύνολο των Ελλήνων ψηφοφόρων που ορίζεται ως:

$xRy$ αν ο x ψήφισε στις Ευρωεκλογές το κόμμα που ψήφισε ο y.

Είναι η R σχέση ισοδυναμίας και γιατί; Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας υπάρχουν; (1,5 μον.)

**Άσκηση 4.** Έστω A το σύνολο $\{a,b,c,d,e\}$.

α) Ποιά είναι η διαμέριση που επάγει στο A η σχέση ισοδυναμίας $\{\langle a,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle a,d\rangle, \langle e,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle d,e\rangle, \langle e,a\rangle, \langle d,a\rangle\}$;

β) Βρείτε τη σχέση ισοδυναμίας στο A που επάγει στο A την ακόλουθη διαμέριση:

$$\Delta = \{\{a,e\},\{d\},\{b,c\}\}.$$

(1,5 μον.)

**Άσκηση 5.** Είναι απαριθμήσιμο και γιατί το σύνολο

$$\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \ldots\right\};$$

(1 μον.)

Άσκηση 6. Είναι το σύνολο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ απαριθμήσιμο και γιατί;
(1,5 μον.)

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι το $(-1,1]$ είναι ισοπληθικό με το $[-4,8)$.
(2 μον.)

Παράδοση λύσεων. Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν στον διδάσκοντα (κλασικά ή ηλεκτρονικά) μέχρι την έναρξη του μαθήματος την Παρασκευή, 13/6/2014.

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.
## ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1. Συμβολίζουμε με $R_\gamma$ τη σχέση, με $A$ το σύνολο των ανθρώπων και με $B$ το σύνολο των ανδρών. Θα ασχοληθούμε πρώτα με τις ιδιότητες της σχέσης στο σύνολο των ανθρώπων.

α) Έστω τυχών άνθρωπος $a$. Αν ο $a$ είναι άνδρας, τότε προφανώς ο $a$ είναι γείτονας του εαυτού του, άρα ισχύει $aR_\gamma a$. Αν όμως ο $a$ είναι γυναίκα, τότε δεν ισχύει ότι ο άνθρωπος $a$ είναι γείτονας (άνδρας) του εαυτού του. Άρα η $R_\gamma$ δεν είναι ανακλαστική.

β) Έστω $a, b$ άνθρωποι τέτοιοι που $aR_\gamma b$, δηλ. ο $a$ είναι γείτονας του/της $b$. Επειδή ο $b$ μπορεί να είναι άνδρας ή γυναίκα, δεν ισχύει κατ' ανάγκην το αντίστροφο, δηλ. ότι $bR_\gamma a$ (αν $b$ είναι άνδρας, ισχύει και $bR_\gamma a$· αν όμως $b$ είναι γυναίκα, δεν ισχύει $bR_\gamma a$). Συνεπώς η $R_\gamma$ δεν είναι συμμετρική.

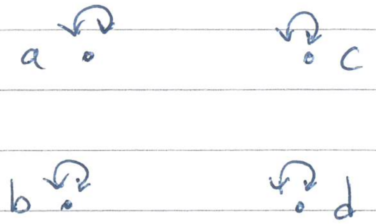
γ) Έστω $a, b, c$ άνθρωποι τέτοιοι που $aR_\gamma b$ και $bR_\gamma c$. Παρατηρούμε ότι και ο $a$ και ο $b$ είναι άνδρες (με βάση τον ορισμό της σχέσης). Αφού $a$ γείτονας του $b$ και $b$ γείτονας του/της $c$, έπεται ότι $a$ γείτονας του/της $c$, δηλ. ότι $aR_\gamma c$. Άρα η $R_\gamma$ είναι μεταβατική.

δ) Έστω $a, b$ τυχόντες (διαφορετικοί) άνθρωποι. Βλέπουμε εύκολα ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι $aR_\gamma b$ ή $bR_\gamma a$. Πράγματι, ο $a$ μπορεί να μένει στην Αθήνα και ο $b$ να μένει στη Ρώμη, οπότε οι $a, b$ δεν μπορεί να είναι γείτονες. Συνεπώς η $R_\gamma$ δεν είναι ολική.

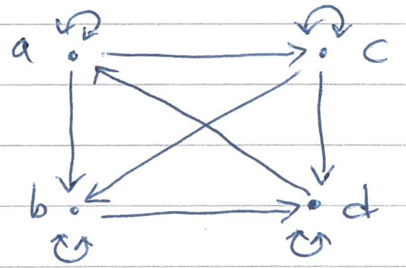
Ας έρθουμε τώρα στις ιδιότητες που έχει η $R_\gamma$ στο σύνολο των ανδρών. Αυτή τη φορά, η $R_\gamma$ είναι ανακλαστική (αφού κάθε άνδρας είναι γείτονας του εαυτού του) και συμμετρική (αφού αν ο άνδρας $a$ είναι γείτονας του άνδρα $b$, τότε και ο άνδρας $b$ είναι γείτονας του άνδρα $a$). Η $R_\gamma$ παραμένει μεταβατική και όχι ολική.

Άσκηση 2. Για ευκολία, θα χρησιμοποιήσουμε διάγραμμα με 4 κορυφές, που αντιστοιχούν στα στοιχεία του συνόλου $A$.
Επειδή θέλουμε η σχέση να είναι ανακλαστική, κάθε στοιχείο θα

σχετίζεται με τον εαυτό του, δηλαδή το διάγραμμα θα περιέχει τους βρόχους που αντιστοιχούν σε όλα τα στοιχεία του A:

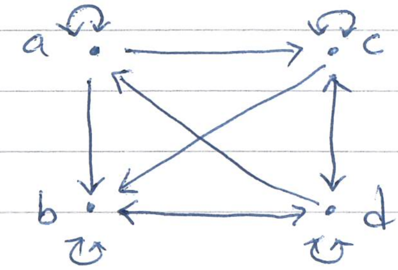



Επειδή θέλουμε η σχέση να είναι ολική, πρέπει να υπάρχει συσχετισμός κάθε στοιχείου του A με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του A. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, ένας από τους οποίους είναι ο ακόλουθος (έχουμε συμπεριλάβει τους βρόχους για την ανακλαστικότητα):




Διάγραμμα 1

Τέλος, για να μην είναι συμμετρική η σχέση, αρκεί να υπάρχει τουλάχιστον ένα βελάκι που δεν αντιστρέφεται. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται ήδη· θα ικανοποιείτο όμως ακόμη κι αν κάποια βελάκια αντιστρέφονταν, δηλαδή και στο ακόλουθο διάγραμμα:




Διάγραμμα 2

Μια σχέση λοιπόν όπως ζητείται στην άσκηση είναι η ακόλουθη (δες Διάγραμμα 1):

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle d,a\rangle,\langle b,d\rangle,$
$\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\},$

αλλά και η ακόλουθη (δες Διάγραμμα 2)

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle d,a\rangle,\langle b,d\rangle,$
$\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,b\rangle\}.$

Άσκηση 3. Ας δούμε πρώτα αν η $R$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

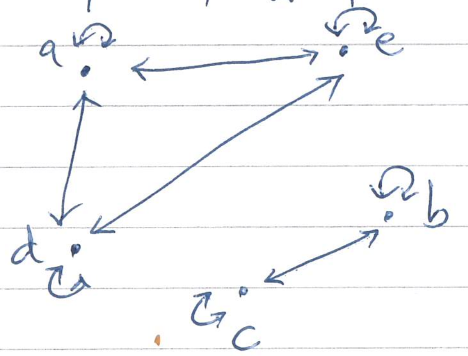
α) Προφανώς κάθε ψηφοφόρος $x$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $x$, άρα ισχύει $xRx$, για κάθε ψηφοφόρο $x$. Συνεπώς η $R$ είναι ανακλαστική.

β) Έστω $x, y$ ψηφοφόροι τέτοιοι που $xRy$, δηλαδή ο $x$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $y$. Τότε και ο $y$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $x$, δηλαδή ισχύει $yRx$. Άρα η $R$ είναι συμμετρική.

γ) Έστω $x, y, z$ ψηφοφόροι τέτοιοι που $xRy$ και $yRz$. Τότε ο $x$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $y$ και ο $y$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $z$. Έπεται ότι ο $x$ ψήφισε το κόμμα που ψήφισε ο $z$, δηλαδή ισχύει $xRz$. Συνεπώς η $R$ είναι μεταβατική.

Άρα η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ψηφοφόρων, οπότε επάγει μια διαμέριση στο σύνολο αυτό. Με άλλα λόγια, το σύνολο των ψηφοφόρων διαμερίζεται σε κομμάτια, καθένα από τα οποία περιέχει ακριβώς τους ψηφοφόρους που ψήφισαν το ίδιο κόμμα. Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας είναι το πλήθος των κομμάτων που έλαβαν τουλάχιστον μία ψήφο. Θεωρητικά, το πλήθος αυτό μπορεί να είναι μικρότερο από το πλήθος των κομμάτων που συμμετείχαν στις εκλογές· πράγματι, δεν αποκλείεται κάποιο κόμμα να συμμετείχε στις εκλογές, αλλά να μην το ψήφισε κανείς από τους ψηφοφόρους (θα μπορούσε το κόμμα X να μην έλαβε καμιά ψήφο, ούτε καν από τους υποψήφιους βουλευτές του).

Άσκηση 4. α) Σύμφωνα με τη θεωρία, κάθε "κύτταρο" της διαμέρισης περιέχει τα στοιχεία που σχετίζονται και μόνο αυτά. Για ευκολία, ας δούμε τη σχέση σε διάγραμμα:




Υπάρχουν λοιπόν δύο "κύτταρα", το σύνολο $\{a,e,d\}$ και το σύνολο $\{c,b\}$. Επομένως, η διαμέριση που επάγει στο $A$ η σχέση ισοδυναμίας είναι η $\Delta_R = \{\{a,e,d\},\{c,b\}\}$.

б) Η σχέση ισοδυναμίας θα περιέχει τα διατεταγμένα ζεύγη που προκύπτουν από κάθε "κύτταρο" της διαμέρισης.
Από το $\{a,e\}$ προκύπτουν τα ζεύγη $\langle a,a\rangle, \langle e,e\rangle, \langle a,e\rangle, \langle e,a\rangle$.
Από το $\{d\}$ προκύπτει το ζεύγος $\langle d,d\rangle$ και από το $\{b,c\}$ προκύπτουν τα ζεύγη $\langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle$.
Άρα η ζητούμενη σχέση ισοδυναμίας είναι η
$R=\{\langle a,a\rangle, \langle e,e\rangle, \langle a,e\rangle, \langle e,a\rangle, \langle d,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$

<u>Άσκηση 5.</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{N}\to A$, όπου $A$ είναι το σύνολο που δόθηκε, με τύπο $f(n) = -\frac{1}{2n+3}$. Ουσιαστικά, αυτό που έχουμε στο μυαλό μας είναι η ακόλουθη εικόνα:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N}=\{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots & \} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
A=\{ & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{5}, & -\frac{1}{7}, & -\frac{1}{9}, & \ldots, & -\frac{1}{2n+3}, & \ldots & \}.
\end{array}$$

<u>Η $f$ είναι 1-1</u>
Θέλουμε να δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε $n,k\in\mathbb{N}$, αν $n\neq k$, τότε $f(n)\neq f(k)$. Έστω λοιπόν ότι $n\neq k$, αλλά ότι $f(n)=f(k)$. Τότε $-\frac{1}{2n+3}=-\frac{1}{2k+3}$, άρα $2n+3=2k+3$, οπότε $n=k$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς η $f$ είναι 1-1.
<u>Η $f$ είναι επί</u>
Θέλουμε να δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε $a\in A$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο που $f(n)=a$. Έστω λοιπόν τυχόν $a\in A$. Για να βρούμε $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f(n)=a$, θα λύσουμε ως προς $n$ την εξίσωση $-\frac{1}{2n+3}=a$. Από την εξίσωση προκύπτει $2n+3=-\frac{1}{a}$,

άρα $2n=-\frac{1}{a}-3$, οπότε $n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}-3\right)$ (*).
Ως παράδειγμα, ας βρούμε $n$ τέτοιο που $f(n)=-\frac{1}{17}$.
Με βάση τον τύπο (*), έχουμε:

$$n=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{17}\right)}-3\right)=\frac{1}{2}(17-3)=\frac{1}{2}\cdot 14=7.$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι $f(7)=-\frac{1}{2\cdot 7+3}=-\frac{1}{14+3}=-\frac{1}{17}$

Αφού λοιπόν βρήκαμε συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $A$, που είναι 1-1 και επί, έπεται ότι $\mathbb{N} \sim A$, οπότε το $A$ είναι απαριθμήσιμο.

Άσκηση 6. Από τη θεωρία ξέρουμε ότι $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ και $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, δηλ. ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f: \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{N}$ και $g: \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{N}$.

Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $h: \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξής

$$h(\langle q, z\rangle) = \langle f(q), g(z)\rangle,$$

δηλαδή στο διατεταγμένο ζεύγος με πρώτη συντεταγμένη τον ρητό αριθμό $q$ και δεύτερη συντεταγμένη τον ακέραιο αριθμό $z$ αντιστοιχούμε το διατεταγμένο ζεύγος με πρώτη συντεταγμένη τον φυσικό αριθμό $f(q)$ και δεύτερη τον φυσικό αριθμό $g(z)$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $h$ είναι 1-1 και επί (θεωρείται δύσκολο για το συγκεκριμένο μάθημα).

Έπεται λοιπόν ότι $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Όμως στη θεωρία είδαμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ είναι απαριθμήσιμ

Άσκηση 7. Δείχνουμε πρώτα (όπως στο μάθημα, δηλαδή χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα κτλ.) ότι $(-1,1] \sim (-4,6]$.

Όμως $(-4,6] \subseteq [-4,8)$, άρα $(-4,6] \precsim [-4,8)$ (δηλαδή το διάστημα $(-4,6]$ έχει πλήθος στοιχείων μικρότερο ή ίσο προς το πλήθος των στοιχείων του $[-4,8)$). Έπεται ότι $(-1,1] \precsim [-4,8)$ (1).

Όπως πριν, δείχνουμε ότι $[-4,8) \sim [0,1)$. Όμως $[0,1) \subseteq (-1,1]$, άρα $[0,1) \precsim (-1,1]$ (δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του διαστήματος $[0,1)$ είναι μικρότερο ή ίσο προς το πλήθος των στοιχείων του $(-1,1]$). Έπεται ότι $[-4,8) \precsim (-1,1]$ (2).

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα Schröder-Bernstein, από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $(-1,1] \sim [-4,8)$, δηλαδή ότι το $(-1,1]$ είναι ισοπληθικό με το $[-4,8)$.

Σημείωση. Αντί για το διάστημα $(-4,6]$ θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει οποιοδήποτε διάστημα που α) είναι ανοικτό αριστερά και κλειστό δεξιά και β) περιέχεται στο διάστημα $[-4,8)$.

Αντίστοιχα, αντί για το διάστημα $[0,1)$ θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει οποιοδήποτε διάστημα που α) είναι κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά και β) περιέχεται στο διάστημα $(-1,1]$.