ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 2.

28/3/2016.

Άσκηση 1. Έστω A το σύνολο $\{b, c, 2\}$ και B το σύνολο $\{2, 3\}$. Ορίστε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα σύνολα
$(A \cup B) \times A$, $(A - B) \times (B - A)$. (2 μον.)

Άσκηση 2. Έστω $A = \{1\}$ και $B = \{a, b, c\}$. Πόσες (διαφορετικές) σχέσεις υπάρχουν από το A στο B και γιατί; Πόσες από τις σχέσεις αυτές είναι συναρτήσεις από το A στο B και γιατί; Ποιές από τις συναρτήσεις είναι 1-1 και ποιές είναι επί; (2 μον.)

Άσκηση 3. Προσδιορίστε τις ιδιότητες της σχέσης "ο x είναι γείτονας (άνδρας) του/της y" στο σύνολο A των ανθρώπων. Θα αλλάξουν κάποιες από τις απαντήσεις σας, αν η σχέση περιοριστεί στο σύνολο A των ανδρών και γιατί; Εξηγήστε. (2 μον.)

Άσκηση 4. Δώστε παράδειγμα σχέσης στο σύνολο $A = \{a, b, c, d\}$ που είναι (ταυτόχρονα) ολική και ανακλαστική, αλλά όχι συμμετρική. (2 μον.)

Άσκηση 5. Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Προσδιορίστε τις ιδιότητες καθεμιάς από τις παρακάτω σχέσεις στο A, καθεμιάς από τις αντίστροφες και καθεμιάς από τις συμπληρωματικές τους.

$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$.

Βρείτε τη σχέση ισοδυναμίας που επάγει στο A την ακόλουθη διαμέριση: $\Delta = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. (2 μον.)

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

<u>Άσκηση 1.</u> Βρίσκουμε καταρχάς τα στοιχεία των συνόλων $A\cup B$, $A-B$ και $B-A$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$A\cup B=\{b,c,2,3\}$$
$$A-B=\{b,c\}$$
$$B-A=\{3\}.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα σύνολα που αναφέρονται στην άσκηση.

$$(A\cup B)\times A=\{\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,b\rangle,\text{[illegible]}\rangle,\langle c,2\rangle,$$
$$\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,b\rangle\text{[illegible]},c\rangle,\langle 3,2\rangle\}.$$
$$(A-B)\times(B-A)=\{\langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}.$$

<u>Άσκηση 2.</u> [illegible] σύνολο A στο σύνολο B είναι ένα (τυχόν) υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A\times B$. Επομένως, το πλήθος των σχέσεων από το A στο B ισούται με το πλήθος των στοιχείων του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A\times B)$. Το $A\times B$ έχει $1\cdot 3=3$ στοιχεία, οπότε το $\mathcal{P}(A\times B)$ έχει $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$ στοιχεία. Συνεπώς υπάρχουν οκτώ (8) σχέσεις από το A στο B.

Από τις 8 αυτές σχέσεις, μόνο τρεις (3) είναι συναρτήσεις από το A στο B, επειδή το μοναδικό στοιχείο 1 του A μπορεί να απεικονιστεί ακριβώς σε μία από τις τρεις υποψήφιες εικόνες, δηλαδή τα στοιχεία του B. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις από το A στο B είναι οι ακόλουθες:

$$f_1=\{\langle 1,a\rangle\},\quad f_2=\{\langle 1,b\rangle\}\quad\text{και}\quad f_3=\{\langle 1,c\rangle\}.$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι 1-1, αφού δεν υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία του A που αντιστοιχούν στην ίδια εικόνα. Επίσης παρατηρούμε ότι καμιά από τις συναρτήσεις δεν είναι επί· πράγματι, περισσεύουν στοιχεία του B, δηλ. υπάρχουν στοιχεία του B που δεν αποτελούν εικόνες κάποιων στοιχείων του A (π.χ. τα στοιχεία b, c του B δεν αποτελούν εικόνες μέσω της συνάρτησης f_1).

Άσκηση 3. Στο πρώτο μέρος, θα εξετάσουμε τις ιδιότητες της σχέσης, που θα συμβολίζουμε με R_γ, στο σύνολο των ανθρώπων, που θα συμβολίσουμε με H. Υπενθυμίζουμε ότι ο ορισμός της σχέσης είναι:

$\langle x,y\rangle \in R_\gamma \Leftrightarrow$ ο x είναι άνδρας και είναι γείτονας του ανθρώπου y.

α) Η R_γ δεν είναι ανακλαστική στο H, αφού δεν ανήκουν στην R_γ όλα τα ζεύγη της μορφής $\langle x,x\rangle$, όπου $x\in H$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι στη x παίρνουμε μια γυναίκα, η γυναίκα αυτή δεν βρίσκεται στη σχέση R_γ με τον εαυτό της (διότι δεν είναι άνδρας, παρόλο που είναι γειτόνισσα του εαυτού της).

β) Η R_γ δεν είναι συμμετρική στο H, αφού δεν ισχύει ότι για κάθε $x,y\in H$, αν $\langle x,y\rangle\in R_\gamma$, τότε $\langle y,x\rangle\in R_\gamma$. Πράγματι, ας φανταστούμε ότι ο Ανδρέας είναι γείτονας της Αγγελικής. Τότε ισχύει $\langle$Ανδρέας, Αγγελική$\rangle\in R_\gamma$, αλλά δεν ισχύει ότι $\langle$Αγγελική, Ανδρέας$\rangle\in R_\gamma$, αφού η Αγγελική δεν είναι άνδρας (οπότε δεν ισχύει ο ορισμός της R_γ για $x=$ Αγγελική και $y=$ Ανδρέας).

γ) Η R_γ είναι μεταβατική στο H. Πράγματι, ας πάρουμε τρεις ανθρώπους x,y,z για τους οποίους ισχύει ότι $\langle x,y\rangle\in R_\gamma$ και $\langle y,z\rangle\in R_\gamma$. Τότε, από τον ορισμό της R_γ, θα ισχύει ότι

(i) x είναι άνδρας και είναι γείτονας του ανθρώπου y

(ii) y είναι άνδρας και είναι γείτονας του ανθρώπου z.

Προφανώς τότε θα ισχύει ότι ο x είναι άνδρας και είναι γείτονας του ανθρώπου z, δηλαδή ότι $\langle x,z\rangle\in R_\gamma$.

δ) Η R_γ δεν είναι ολική, αφού δεν ισχύει ότι για δύο τυχόντες ανθρώπους x,y, έχουμε $\langle x,y\rangle\in R_\gamma$ ή $\langle y,x\rangle\in R_\gamma$. Πράγματι, μπορούμε να φανταστούμε πολλά ζεύγη ανθρώπων, ακόμη και ανδρών, που δεν ζουν στην ίδια γειτονιά.

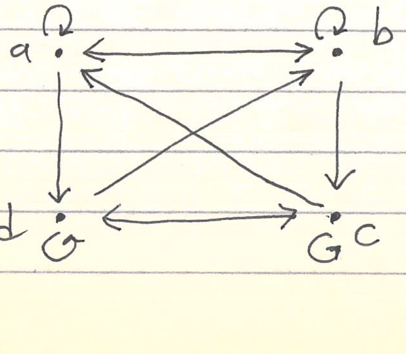
Ερχόμαστε τώρα στο δεύτερο μέρος, όπου θα εξετάσουμε τις ιδιότητες της σχέσης R_γ, αλλά στο σύνολο των ανδρών M αυτή τη φορά!

α) Η $R_γ$ είναι ανακλαστική, αφού ισχύει $\langle x,x\rangle \in R_γ$, για κάθε άνδρα x.
β) Η $R_γ$ είναι συμμετρική στο M. Πράγματι, ας πάρουμε δύο τυχόντες άνδρες x,y τέτοιους που $\langle x,y\rangle \in R_γ$. Αφού οι x,y είναι γείτονες, δεν παίζει ρόλο ποιος θα αναφερθεί πρώτος, άρα ισχύει και $\langle y,x\rangle \in R_γ$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
γ) Η $R_γ$ είναι μεταβατική (όπως και προηγουμένως).
δ) Η $R_γ$ δεν είναι ολική (όπως και προηγουμένως, μπορούμε να φανταστούμε ζεύγη ανδρών που δεν είναι γείτονες).

<u>Άσκηση 4.</u> Έστω R η σχέση που αναζητάμε.
α) Για να είναι η R ανακλαστική, πρέπει σε αυτήν να ανήκουν όλα τα ζεύγη της μορφής $\langle x,x\rangle$, όπου x στοιχείο του συνόλου A. Επομένως η R πρέπει να περιέχει τα ζεύγη $\langle a,a\rangle$, $\langle b,b\rangle$, $\langle c,c\rangle$ και $\langle d,d\rangle$.
β) Για να είναι η R ολική, θα πρέπει να σχετίζονται με κάποιο τρόπο τα στοιχεία x,y, όπου x,y είναι τυχόντα διαφορετικά στοιχεία του A. Έτσι, π.χ., θα πρέπει το a να σχετίζεται κάπως με το b, επίσης κάπως με το c και κάπως με το d.
γ) Για να μην είναι η R συμμετρική, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι στοιχείων x,y του A, που να σχετίζεται με ένα βελάκι, αλλά όχι και με το αντίστροφο.
Με βάση τα α, β, γ παραπάνω, μια σχέση όπως τη ζητάει η άσκηση είναι η ακόλουθη
(i) με ορισμό με αναγραφή των στοιχείων της

$$R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle c,a\rangle\}$$

(ii) με ορισμό με διάγραμμα



Άσκηση 5. Θα βρούμε πρώτα τις αντίστροφες σχέσεις:

$$R_1^{-1} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,4\rangle\}$$

$$R_2^{-1} = \{\langle 4,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,4\rangle\}.$$

Τώρα θα βρούμε τις συμπληρωματικές σχέσεις, δηλαδή τα σύνολα $(A\times A)-R_1$ και $(A\times A)-R_2$. Επειδή ισχύει ότι

$$A\times A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\},$$

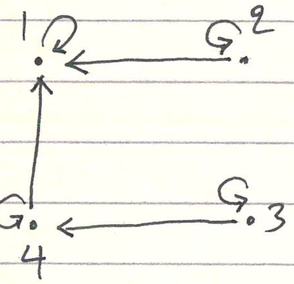
έχουμε ότι

$$R_1' = (A\times A) - R_1 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}.$$

$$R_2' = (A\times A) - R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}.$$

Για να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες των R_1, R_2 θα κάνουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα (για ευκολία):

R_1:



Βλέπουμε λοιπόν ότι

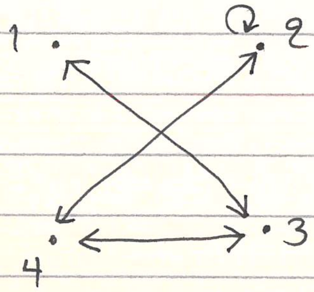
α) η R_1 είναι ανακλαστική

β) η R_1 δεν είναι συμμετρική

γ) η R_1 δεν είναι μεταβατική (αφού ισχύει $\langle 3,4\rangle \in R_1$ και $\langle 4,1\rangle \in R_1$, αλλά δεν ισχύει ότι $\langle 3,1\rangle \in R_1$)

δ) η R_1 δεν είναι ολική (αφού τα στοιχεία 2,3 του A δεν σχετίζονται καθόλου).

R_2:



Βλέπουμε λοιπόν ότι

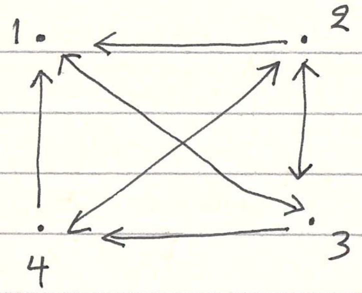
α) η R_2 δεν είναι ανακλαστική (αφού, π.χ. ισχύει $\langle 1,1\rangle \notin R_2$)

β) η R_2 είναι συμμετρική (αφού όλα τα βελάκια αντιστρέφονται)

γ) η R_2 δεν είναι μεταβατική (αφού, π.χ. $\langle 1,3\rangle \in R_2$ και $\langle 3,4\rangle \in R_2$, αλλά δεν ισχύει ότι $\langle 1,4\rangle \in R_2$)

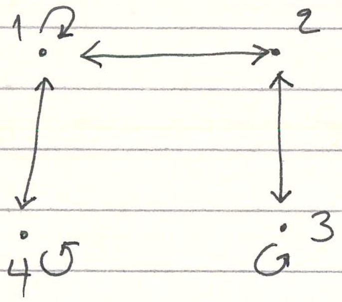
δ) η R_2 δεν είναι ολική (αφού, π.χ., τα στοιχεία 1,4 του A δεν σχετίζονται καθόλου).
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι R_1^{-1}, R_2^{-1} έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τις R_1, R_2 (αντίστοιχα).
Τέλος, για να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες των R_1', R_2', θα κάνουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα (για ευκολία):

R_1':



α) Η R_1' δεν είναι ανακλαστική
β) Η R_1' δεν είναι συμμετρική (αφού, π.χ. ισχύει $\langle 2,1\rangle \in R_1'$, αλλά δεν ισχύει $\langle 1,2\rangle \in R_1'$)
γ) η R_1' δεν είναι μεταβατική (αφού ισχύει $\langle 4,2\rangle \in R_1'$ και $\langle 2,3\rangle \in R_1'$, αλλά δεν ισχύει $\langle 4,3\rangle \in R_1'$)
δ) η R_1' είναι ολική (αφού οποιαδήποτε δύο στοιχεία του A σχετίζονται με κάποιο τρόπο).

R_2':



Βλέπουμε λοιπόν ότι
α) Η R_2' δεν είναι ανακλαστική (αφού δεν ισχύει $\langle 2,2\rangle \in R_2'$)
β) Η R_2' είναι συμμετρική (αφού όλα τα βελάκια αντιστρέφονται)
γ) Η R_2' δεν είναι μεταβατική (αφού, π.χ., ισχύει $\langle 4,1\rangle \in R_2'$ και $\langle 1,2\rangle \in R_2'$, αλλά δεν ισχύει ότι $\langle 4,2\rangle \in R_2'$)
δ) η R_2' δεν είναι ολική (αφού τα στοιχεία 4,3 του A δεν σχετίζονται καθόλου).
Τώρα προχωράμε στο δεύτερο μέρος της Άσκησης. Όπως έχουμε δει (στο μάθημα), η σχέση που ζητάμε θα έχει ως στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη που προκύπτουν από κάθε μέρος της διαμέρισης, με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.
Από το μέρος $\{1\}$ της διαμέρισης, προκύπτει το ζεύγος $\langle 1,1\rangle$.
Από το μέρος $\{2,3\}$ της διαμέρισης, προκύπτουν τα ζεύγη $\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle$.

Τέλος, από το μέρος {4} της διαμέρισης, προκύπτει το ζεύγος <4,4>.
Συνεπώς η σχέση έχει τα ακόλουθα στοιχεία:
<1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>, <4,4>.
Σε διάγραμμα, η εικόνα έχει ως εξής: