ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
4ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
7/7/2014.

<u>Άσκηση 1.</u> Χρησιμοποιώντας κανόνες φυσικής παραγωγής, δείξτε ότι οι ακόλουθες επιχειρηματικές μορφές είναι έγκυρες (με δύο τρόπους για καθεμιά):

$$\begin{array}{l} (\sim(p \,\&\, r)) \to q \\ \underline{(p \,\&\, r) \to q} \\ q \end{array} \qquad (2 \text{ μον.})$$

$$\begin{array}{l} (s \,\&\, r) \vee (p \,\&\, q) \\ \underline{(\sim r) \vee (\sim s)} \\ p \end{array} \qquad (2 \text{ μον.})$$

$$\begin{array}{l} \underline{(p \vee q) \to (p \vee r)} \\ p \vee (q \to r) \end{array} \qquad (2 \text{ μον.})$$

$$\begin{array}{l} \underline{\sim(p \to (q \vee r))} \\ (q \vee r) \to p \end{array} \qquad (2 \text{ μον.})$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to r \\ \underline{q \to s} \\ r \vee s \end{array} \qquad (2 \text{ μον.})$$

<u>Άσκηση 2.</u> Εκφράσετε με συμβολική μορφή το ακόλουθο επιχείρημα και αποδείξτε την εγκυρότητα της αντίστοιχης επιχειρηματικής μορφής: "Αν τα ναρκωτικά νομιμοποιηθούν, θα υπάρχουν χρήματα για τη νοσηλεία εξαρτημένων ατόμων, θα υπάρχουν λιγότερες εγκληματικές πράξεις σχετιζόμενες με τα ναρκωτικά και οι κακοποιοί θα χάσουν την κύρια πηγή εσόδων τους. Χωρίς αυτή την πηγή χρημάτων, οι κακοποιοί θα εκλείψουν. Συνεπώς τα ναρκωτικά ποτέ δεν θα νομιμοποιηθούν, αφού οι κακοποιοί ποτέ δεν θα εκλείψουν."

(2 μον.)

<u>Παράδοση λύσεων.</u> Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν, κλασικά ή ηλεκτρονικά, <u>μέχρι το μάθημα της Δευτέρας, 14/7/2014.</u>

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ 4ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

Άσκηση 1. α)

1.	$(\sim(p \& r)) \rightarrow q$	υπόθεση
2.	$(p \& r) \rightarrow q$	"
3.	$\sim q$	βοηθ. υπόθεση
4.	$\sim(\sim(p \& r))$	1,3, M.T.
5.	$\sim(p \& r)$	2,3, M.T.
6.	$(p \& r)$	4, ν. διπλής άρνησης

Επειδή οι τύποι 5. και 6. αποτελούν αντίφαση, έχουμε ελέγξει (με έμμεση απόδειξη) ότι η επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Με άλλο τρόπο (άμεση απόδειξη)

1.	$(\sim(p \& r)) \rightarrow q$	υπόθεση
2.	$(p \& r) \rightarrow q$	"
3.	$(\sim q) \rightarrow (\sim(p \& r))$	1, ν. αντιθετοαναστροφής
4.	$(\sim q) \rightarrow q$	3,1, Υποθ. Συλλ.
5.	$(\sim(\sim q)) \vee q$	4, ν. αντικατ. συνεπαγωγής
6.	$q \vee q$	5, ν. διπλής άρνησης
7.	q	ν. αυτοπάθειας

β) 1ος τρόπος (άμεση απόδειξη)

1.	$(s \& r) \vee (p \& q)$	υπόθεση
2.	$(\sim r) \vee (\sim s)$	υπόθεση
3.	$\sim(r \& s)$	2, ν. DeMorgan
4.	$\sim(s \& r)$	3, ν. αντιμεταθετ.
5.	$(p \& q)$	1,4, Διαζ. Συλλ.
6.	p	5, Απλοποίηση.

2ος τρόπος (έμμεση απόδειξη)

1.	$(s \& r) \vee (p \& q)$	υπόθεση
2.	$(\sim r) \vee (\sim s)$	υπόθεση

3. $(\sim p)$ βοηθ. υπόθεση
4. $(\sim p)\vee(\sim q)$ 3, πρόσθεση
5. $\sim(p\&q)$ 4, ν. DeMorgan
6. $(p\&q)\vee(s\&r)$ 1, ν. αντιμεταθ.
7. $s\&r$ 5,6, Διαζ. Συλλ.
8. $\sim(r\&s)$ 2, ν. DeMorgan
9. $r\&s$ 7, ν. αντιμεταθ.

Παρατηρούμε τώρα ότι οι 8. και 9. αποτελούν αντίφαση.

γ) <u>1ος τρόπος (υποθετική απόδειξη)</u>

Επειδή ο προτασιακός τύπος $p\vee(q\to r)$ γράφεται και ως $(\sim(\sim p))\vee(q\to r)$, με βάση το νόμο διπλής άρνησης, ή ως $(\sim p)\to(q\to r)$, με βάση το νόμο αντικατάστασης συνεπαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{array}{l} (p\vee q)\to(p\vee r) \\ (\sim p) \\ \hline q\to r \end{array}$$

Επειδή πάλι το επιθυμητό συμπέρασμα έχει μορφή συνεπαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{array}{l} (p\vee q)\to(p\vee r) \\ (\sim p) \\ q \\ \hline r \end{array}$$

πράγμα που δείχνουμε, με άμεση απόδειξη, ως εξής:

1. $(p\vee q)\to(p\vee r)$ υπόθεση
2. $(\sim p)$ βοηθ. υπόθεση
3. q βοηθ. υπόθεση
4. $q\vee p$ 3, Πρόσθεση
5. $p\vee q$ 4, ν. αντιμεταθετ.
6. $p\vee r$ 1,5, M.P.
7. r 6, 2, Διαζ. Συλλ.

2ος τρόπος (έμμεση απόδειξη)

1. $(p \vee q) \to (p \vee r)$ υπόθεση
2. $\sim(p \vee (q \to r))$ βοηθ. υπόθεση
3. $(\sim p) \& (\sim(q \to r))$ 2, ν. DeMorgan
4. $\sim p$ 3, Απλοποίηση
5. $\sim(q \to r)$ 4, Απλοποίηση (ν. αντιμεταθ.)
6. $q \& (\sim r)$ 5, ν. άρνησης συνεπαγωγής
7. q 6, Απλοποίηση
8. $q \vee p$ 7, Πρόσθεση
9. $p \vee q$ 8, ν. αντιμεταθ.
10. $p \vee r$ 1, 9, M.P.
11. r 4, 10, Διαζ. Συλλ.
12. $(\sim r)$ 6, Απλοποίηση (ν. αντιμεταθ.)

Όμως οι 11. και 12. αποτελούν αντίφαση.

δ) 1ος τρόπος (άμεση απόδειξη)

1. $\sim(p \to (q \vee r))$ υπόθεση
2. $p \& (\sim(q \vee r))$ 1, ν. άρνησης συνεπαγωγής
3. $(\sim(q \vee r))$ 2, Απλοποίηση (ν. αντιμεταθ.)
4. $(\sim(q \vee r)) \vee p$ 3, Πρόσθεση
5. $(q \vee r) \to p$ 4, ν. αντικατ. συνεπαγωγής

2ος τρόπος (υποθετική απόδειξη)

1. $\sim(p \to (q \vee r))$ υπόθεση
2. $q \vee r$ βοηθ. υπόθεση
3. $p \& (\sim(q \vee r))$ 1, ν. άρνησης συνεπαγωγής
4. p 3, Απλοποίηση

ε) <u>1ος τρόπος (έμμεση απόδειξη)</u>

1. $p \vee q$ υπόθεση
2. $p \to r$ "
3. $q \to s$ "
4. $\sim(r \vee s)$ βοηθ. υπόθεση
5. $(\sim r) \& (\sim s)$ 4, ν. DeMorgan
6. $\sim r$ 5, Απλοποίηση
7. $\sim s$ 5, Απλοποίηση (ν. αντιμεταθ.)
8. $\sim p$ 2,6, Μ.Τ.
9. q 1,8, Διαζ. Συλλ.
10. s 3,9, Μ.Ρ.

όμως οι 7. και 10. αποτελούν αντίφαση.

<u>2ος τρόπος (υποθετική απόδειξη)</u>

1. $p \vee q$ υπόθεση
2. $p \to r$ "
3. $q \to s$ "
4. $\sim r$ βοηθ. υπόθεση
5. $\sim p$ 2,4, Μ.Τ.
6. q 1,5, Διαζ. Συλλ.
7. s 3,6, Μ.Ρ.

πήραμε την $(\sim r)$ ως βοηθητική υπόθεση και φτάσαμε στο συμπέρασμα s, επειδή το επιθυμητό συμπέρασμα $r \vee s$ γράφεται ως $(\sim(\sim r)) \vee s$ (με βάση το νόμο διπλής άρνησης), το οποίο γράφεται ως $(\sim r) \to s$ (με βάση το νόμο αντικατάστασης συνεπαγωγής.

<u>Άσκηση 2.</u> Αρχίζουμε επιλέγοντας προτασιακές μεταβλητές, για να συμβολίσουμε τις ατομικές/στοιχειώδεις προτάσεις, από τις οποίες είναι κατασκευασμένες οι προκείμενες και

το συμπέρασμα του επιχειρήματος. Με p συμβολίζουμε την πρόταση "Τα ναρκωτικά θα νομιμοποιηθούν", με q την πρόταση "Θα υπάρχουν χρήματα για τη νοσηλεία εξαρτημένων ατόμων", με r την πρόταση "Θα υπάρχουν λιγότερες εγκληματικές πράξεις σχετιζόμενες με τα ναρκωτικά", με s την πρόταση "Οι κακοποιοί θα χάσουν την κύρια πηγή εσόδων τους" και με t την πρόταση "Οι κακοποιοί θα εκλείψουν". Σημειώνουμε ότι η πρόταση/έκφραση "Χωρίς αυτή την πηγή χρημάτων" ουσιαστικά χρησιμοποιείται ως συνώνυμη της πρότασης "Οι κακοποιοί θα χάσουν την κύρια πηγή εσόδων τους". Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αυτό, το επιχείρημα παίρνει την ακόλουθη συμβολική μορφή:

προκείμενη 1: $p \to (q \& (r \& s))$

προκείμενη 2: $s \to t$

συμπέρασμα: $(\neg t) \to (\neg p)$.

Επειδή το (επιθυμητό) συμπέρασμα έχει τη μορφή συνεπαγωγής, μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, δηλαδή να πάρουμε τον προτασιακό τύπο $(\neg t)$ ως βοηθητική υπόθεση και να καταλήξουμε στον προτασιακό τύπο $(\neg p)$. Κατασκευάζουμε λοιπόν την ακόλουθη απόδειξη:

1.	$p \to (q \& (r \& s))$	υπόθεση
2.	$s \to t$	υπόθεση
3.	$\neg t$	βοηθ. υπόθεση
4.	$\neg s$	2, 3, MP
5.	$(\neg s) \vee (\neg r)$	4, Πρόσθεση
6.	$((\neg s) \vee (\neg r)) \vee (\neg q)$	5, Πρόσθεση
7.	$(\neg q) \vee ((\neg r) \vee (\neg s))$	6, ν. αντιμεταθετικότητας

8.	$\neg(q\&(r\&s))$	7, ν. De Morgan
9.	$\neg p$	1, 8, Modus Tollens.

Επειδή η παραπάνω απόδειξη ήθελε λίγη φαντασία (και επιπλέον βήματα), ας κάνουμε και μια απόδειξη χρησιμοποιώντας τη μέθοδο "απαγωγής στο άτοπο", δηλαδή παίρνοντας ως βοηθητική υπόθεση την άρνηση του συμπεράσματος και προσπαθώντας να καταλήξουμε σε αντίφαση.

1.	$p \to (q\&(r\&s))$	υπόθεση
2.	$s \to t$	υπόθεση
3.	$\neg[(\neg t) \to (\neg p)]$	βοηθ. υπόθεση
4.	$(\neg t)\&(\neg(\neg p))$	3, ν. άρνησης συνεπαγωγής
5.	$(\neg t)\& p$	4, ν. διπλής άρνησης
6.	p	5, Απλοποίηση (και ν. αντιμεταθετ.)
7.	$q\&(r\&s)$	1, 6, Modus Ponens
8.	$r\&s$	7, Απλοποίηση (και ν. αντιμεταθ.)
9.	s	8, " (")
10.	t	2, 9, Modus Ponens
11.	$\neg t$	5, Απλοποίηση.

Παρατηρούμε ότι οι προτασιακοί τύποι 10. και 11. αποτελούν αντίφαση. Άρα, με βάση τη μέθοδο έμμεσης απόδειξης, αποδείξαμε ότι από τις προκείμενες

$$p \to (q\&(r\&s))$$
$$s \to t$$

έπεται ως συμπέρασμα ο προτασιακός τύπος

$$(\neg t) \to (\neg p).$$