ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 1ης ΠΡΟΟΔΟΥ

Θέμα 1ο.

(α) Για να αληθεύει ότι $\{b\} \subset X$, πρέπει να αληθεύει ότι $\{b\} \subseteq X$, δηλαδή, κάθε στοιχείο του συνόλου $\{b\}$ να ανήκει στο X. Αυτό όμως δεν αληθεύει, αφού το b, το μοναδικό στοιχείο του $\{b\}$, δεν είναι στοιχείο του X (υπενθυμίζουμε ότι είναι άλλο το b και άλλο το $\{b\}$, που πράγματι ανήκει στο X).

(β) Επειδή το c είναι πράγματι στοιχείο του X, το σύνολο $\{c\}$ θα είναι υποσύνολο του X και άρα ανήκει στο $\mathcal{P}(X)$, δηλαδή, το δυναμοσύνολο του X.

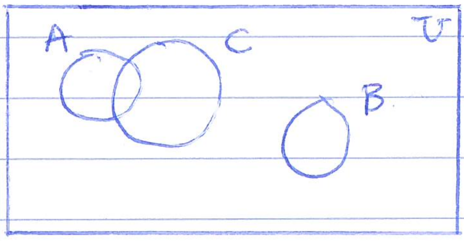
(γ) Για να αληθεύει ότι $\{\phi\} \subset \mathcal{P}(X)$ θα πρέπει να αληθεύουν (i) $\{\phi\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και (ii) $\{\phi\} \neq \mathcal{P}(X)$.

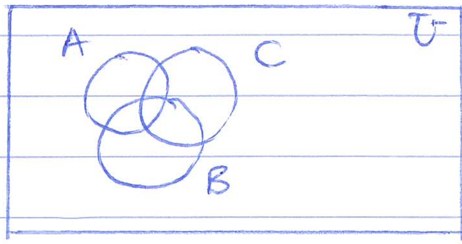
Το (i) αληθεύει, διότι το ϕ, που είναι το μοναδικό στοιχείο του $\{\phi\}$, είναι υποσύνολο του X, οπότε το ϕ ανήκει στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$.

Το (ii) αληθεύει, διότι το $\mathcal{P}(X)$ έχει στοιχεία που δεν ανήκουν στο $\{\phi\}$ (όπως έχουμε πει, το $\mathcal{P}(X)$ θα έχει $2^3=8$ στοιχεία).

Θέμα 2ο.

(α) Υπάρχουν πολλά διαγράμματα Venn που αντιστοιχούν στις (όλες) συνθήκες που δίνονται. Δίνουμε δύο παραδείγματα:





(β) $\{\phi\} \cap \phi = \phi$, διότι $X \cap \phi = \phi$, για κάθε σύνολο X

$\{\phi\} \cup \phi = \{\phi\}$, διότι $X \cup \phi = X$, για κάθε σύνολο X

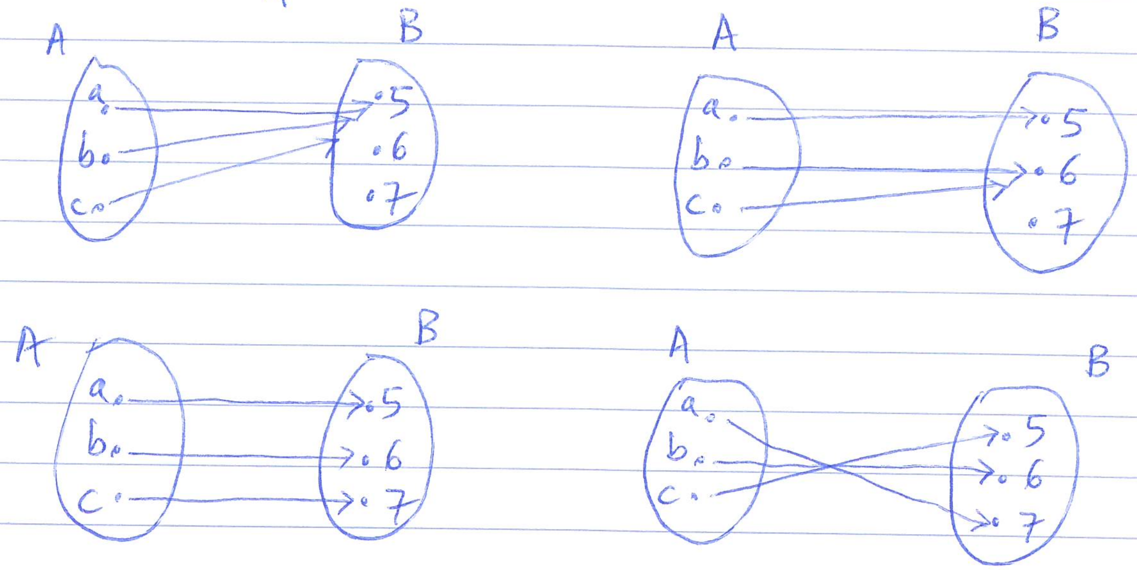
$\mathcal{P}(\{\phi\}) - \{\phi\} = \{\phi, \{\phi\}\} - \{\phi\} = \{\{\phi\}\}$

Διευκρίνηση για το τελευταίο: Επειδή το σύνολο $\{\phi\}$ έχει ένα στοιχείο, το δυναμοσύνολό του θα έχει $2^1=2$ στοιχεία. Έχουμε αναφέρει ότι, για κάθε σύνολο X, το ϕ και το X περιλαμβάνονται στα στοιχεία του $P(X)$. Επομένως, τα (μόνα) στοιχεία του $P(\{\phi\})$ είναι τα ϕ, $\{\phi\}$.

Θέμα 3ο.

(α) Επειδή το A έχει 3 στοιχεία και το B έχει 3 στοιχεία, το καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$ θα έχει $3.3=9$ στοιχεία. Το πλήθος των σχέσεων από το A στο B ισούται με τον αριθμό στοιχείων του $P(A\times B)$, δηλαδή το πλήθος των υποσυνόλων του $A\times B$. Το πλήθος των υποσυνόλων είναι 2^9 (ή 512), άρα το πλήθος των δυνατών σχέσεων είναι 512.

(β) Το πλήθος των δυνατών συναρτήσεων από το A στο B είναι $3.3.3=27$, διότι καθένα από τα ορίσματα a, b, c μπορεί να πάρει ως τιμή ένα από τα στοιχεία του B, δηλαδή τα 5, 6, 7. Μερικές από τις 27 συναρτήσεις είναι οι ακόλουθες:



(γ) Από τις 27 δυνατές συναρτήσεις από το A στο B, οι 6 είναι 1-1, για τον ακόλουθο λόγο: το όρισμα a έχει 3 υποψήφιες τιμές (5, 6, 7). Έχοντας επιλέξει τιμή για το a, το όρισμα b έχει 2 υποψήφιες τιμές και, στη συνέχεια, για το όρισμα c έχει απομείνει μόνο 1 υποψήφια τιμή.

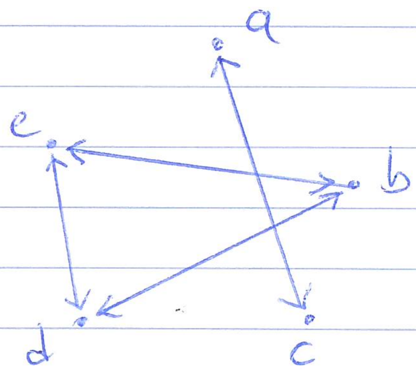
Έτσι, οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών είναι 3.2.1=6.
Για παράδειγμα, οι δύο συναρτήσεις που αναφέραμε στο βήμα (β) είναι 1-1.
(δ) Όλες οι 1-1 συναρτήσεις από το A στο B είναι επί.

Θέμα 4ο.

(α) Για να είναι η ζητούμενη σχέση R ανακλαστική, πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τα 5 ζεύγη

$$\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle.$$

Αφού λοιπόν θέλουμε η R να έχει 13 διατετ. ζεύγη, πρέπει να προσθέσουμε 8 ζεύγη. Επειδή όμως η R πρέπει να είναι και συμμετρική, ουσιαστικά πρέπει να αποφασίσουμε ποια 4 ζεύγη θα προσθέσουμε (γιατί τα αντίστροφά τους θα μπουν οπωσδήποτε). Πρέπει όμως να προσέξουμε ποια 4 θα βάλουμε, γιατί η R πρέπει να είναι και μεταβατική. Ένα παράδειγμα σχέσης είναι:



(β) Όπως έχουμε αναφέρει, η διαμέριση προκύπτει ως εξής: θα βρούμε τις κλάσεις ισοδυναμίας κάθε στοιχείου του A, κάποιες από τις οποίες θα συμπίπτουν (σε κάθε κλάση θα ανήκουν τα στοιχεία που συνδέονται με το στοιχείο του οποίου την κλάση βρίσκουμε).

$[a]_R=\{a,c\}$
$[b]_R=\{b,d,e\}$
$[c]_R=\{a,c\}$
$[d]_R=\{b,d,e\}$
$[e]_R=\{b,d,e\}$

Επομένως τα στοιχεία της διαμέρισης είναι τα σύνολα $\{a,c\}$ και $\{b,d,e\}$. Έχουμε, δηλαδή, τη διαμέριση

$$\Delta_R=\{\{a,c\},\{b,d,e\}\}.$$

Θέμα 5ο.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το $\mathbb{N}_3$ είναι (απ)αριθμήσιμο και το $\mathbb{N}_5$ είναι (απ)αριθμήσιμο.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_3$ με $f(x) = 3x$. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.

(α) Για να δείξουμε ότι η f είναι 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.
Έστω λοιπόν ότι $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή, $3x_1 = 3x_2$. Τότε, με απλοποίηση, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο, δηλαδή, ότι $x_1 = x_2$.

(β) Για να δείξουμε ότι η f είναι επί, αρκεί να δείξουμε ότι, αν $y \in \mathbb{N}_3$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ τέτοιο που $y = f(x)$.
Έστω λοιπόν ότι $y \in \mathbb{N}_3$. Επειδή το y είναι πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι ο αριθμός $y/3$ θα είναι φυσικός. Παίρνοντας λοιπόν ως x το $y/3$ θα έχουμε

$$f(x) = f\left(\frac{y}{3}\right) = 3 \cdot y/3 = y,$$

οπότε ισχύει το ζητούμενο.

(β) Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathbb{N}_5$ είναι (απ)αριθμήσιμο.

(γ) Έπεται λοιπόν ότι $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_3$ και $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_5$. Με βάση άσκηση που λύσαμε στο μάθημα, έπεται ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_5 \times \mathbb{N}_3$.
Όμως έχουμε αναφέρει ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ και συνεπώς, επειδή η $\sim$ είναι (γενικευμένη) σχέση ισοδυναμίας, έπεται ότι $\mathbb{N}_5 \times \mathbb{N}_3 \sim \mathbb{N}$, δηλαδή, το σύνολο $\mathbb{N}_5 \times \mathbb{N}_3$ είναι (απ)αριθμήσιμο.