ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ «ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ»

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

Η «Υπόθεση του Συνεχούς» είναι μια πρόταση που έχει μελετηθεί εντατικά από την εποχή της δημιουργίας της θεωρίας συνόλων από τον Georg Cantor. Η ακριβής διατύπωση της πρότασης αυτής, που συμβολίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως CH (Continuum Hypothesis), είναι η ακόλουθη:

> Δεν υπάρχει σύνολο του οποίου το μέγεθος (δηλαδή το πλήθος στοιχείων) να βρίσκεται αυστηρά μεταξύ του μεγέθους (δηλαδή του πλήθους στοιχείων) του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και του μεγέθους του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Επειδή αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Schröder-Bernstein, ότι «το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$», η CH αποτελεί ειδική περίπτωση της «Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς» (Generalized Continuum Hypothesis), η οποία συμβολίζεται ως GCH και είναι η ακόλουθη:

> Για κάθε άπειρο σύνολο A, δεν υπάρχει σύνολο του οποίου το μέγεθος να βρίσκεται αυστηρά μεταξύ του μεγέθους (δηλαδή του πλήθους στοιχείων) του συνόλου A και του μεγέθους του δυναμοσυνόλου του A.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $A =_c B$ για να δηλώσουμε ότι τα σύνολα A, B είναι ισοπληθικά, δηλαδή ότι υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση από το A στο B, και τον συμβολισμό $A \leq_c B$ για να δηλώσουμε ότι υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το A στο B (π.χ., [MO93], 7-8), η CH διατυπώνεται συμβολικά ([MO93], 21) ως

$$\forall X \subseteq \mathbb{R}\ (X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathbb{R}),$$

ενώ η GCH διατυπώνεται ως

$$\forall A\ [\text{«A άπειρο»} \rightarrow \forall X \subseteq A\ (X \leq_c A \vee X =_c \wp(A))],$$

όπου με $\wp(A)$ συμβολίζουμε το δυναμοσύνολο του A.

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε, εν συντομία, στα βασικά αποτελέσματα που αποτέλεσαν ορόσημα στη μελέτη της CH και της GCH. Στο άρθρο του [CA74], ο Cantor απέδειξε δύο βασικά θεωρήματα, δηλαδή τα ακόλουθα:

Θεώρημα 1. Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ (των στοιχείων) του $\mathbb{N}$ και (των στοιχείων) του A, όπου με A συμβολίζεται το σύνολο των αλγεβρικών πραγματικών αριθμών (δηλαδή των πραγματικών αριθμών που αποτελούν ρίζες μη μηδενικών πολυωνύμων με συντελεστές στο σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$).

Θεώρημα 2. Δεν υπάρχει καμία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ (των στοιχείων) του $\mathbb{N}$ και (των στοιχείων) του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2, που περιέχεται στο άρθρο που μόλις αναφέρθηκε, δεν είναι αυτή που συνήθως περιέχουν τα διδακτικά εγχειρίδια στις μέρες μας, δηλαδή αυτή που στηρίζεται στο λεγόμενο «διαγώνιο επιχείρημα». Πράγματι, το Θεώρημα 2 προκύπτει ως πόρισμα του ακόλουθου αποτελέσματος: «Δεδομένης οποιασδήποτε ακολουθίας πραγματικών αριθμών ω_1, ω_2, ..., ω_ν, ... και τυχόντος διαστήματος (α, β), υπάρχει αριθμός η που ανήκει στο διάστημα, αλλά δεν εμφανίζεται ως όρος της δεδομένης ακολουθίας».

Ο Cantor διατύπωσε για πρώτη φορά τη CH στο άρθρο του [CA78], με τον ακόλουθο τρόπο:

> Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei Klassen bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich fast, welche sich auf die Form: functio ips. ν (wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchlauft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips. x (wo x alle reellen Werthe ≥ 0 und ≤ 1 annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι γραμμικές πολλαπλότητες θα αποτελούνται από δύο κλάσεις, η πρώτη από τις οποίες περιέχει όλες τις πολλαπλότητες που μπορούν να τεθούν στη μορφή: functio ips. ν (όπου το ν διατρέχει όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς), ενώ η δεύτερη αποτελείται από όλες εκείνες τις πολλαπλότητες που μπορούν να αναχθούν

στη μορφή: functio ips. x (όπου το x μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές που είναι ≥ 0 και ≤ 1). Σε αντιστοιχία με αυτές τις δύο κλάσεις, υπάρχουν μόνο δύο πληθικότητες για τις άπειρες γραμμικές πολλαπλότητες· την επακριβή διερεύνηση της ερώτησης αυτής θα αφήσουμε για μια άλλη ευκαιρία.

Ο Cantor πίστευε ότι η CH είναι αληθής και προσπάθησε επί πολλά χρόνια να την αποδείξει. Η απόδειξη της CH αποτελούσε τόσο μεγάλη πρόκληση για τους μαθηματικούς στο τέλος του 19ου αιώνα, που αποτέλεσε το πρώτο από τα είκοσι τρία προβλήματα που διατύπωσε ο David Hilbert το 1900 ([HI00]). Ο Hilbert συμπεριέλαβε στην περίφημη λίστα προβλημάτων, που διατύπωσε κατά τη διάρκεια του Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών που πραγματοποιήθηκε στο Παρίσι τον Αύγουστο εκείνη τη χρονιά, όλα τα προβλήματα που θεωρούσε σημαντικά για τον αιώνα που μόλις άρχιζε. Ας δούμε πώς ο Hilbert αναφέρθηκε στη CH:

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums

Zwei Systeme, d.h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen (oder Punkten) heissen nach Cantor aequivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden konnen, dass einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untesuchungen von Cantor über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch Niemanden gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d.h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt) menge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämmtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d.h. etwa den Punkten einer Strecke aequivalent; im Sinne der Aequivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Continuum.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

1. Το πρόβλημα του Cantor για την πληθικότητα του συνεχούς

Δύο συστήματα, δηλαδή δύο σύνολα με στοιχεία συνηθισμένους πραγματικούς αριθμούς (ή σημεία) καλούνται, σύμφωνα με τον Cantor, ισοδύναμα ή της ίδιας πληθικότητας, όταν είναι δυνατό να συσχετιστούν με τέτοιο τρόπο, που κάθε αριθμός (στοιχείο) του ενός συνόλου αντιστοιχεί σε έναν και μόνο έναν συγκεκριμένο αριθμό (στοιχείο) του άλλου συνόλου. Οι έρευνες του Cantor για τέτοια σύνολα σημείων καθιστούν πολύ πιθανή μια πρόταση της οποίας την απόδειξη, ωστόσο, παρά τις έντονες προσπάθειες που έχουν καταβληθεί, κανείς δεν κατάφερε να πετύχει· αυτή η πρόταση διατυπώνεται ως εξής:

Κάθε σύστημα απείρως πολλών πραγματικών αριθμών, δηλαδή κάθε άπειρο σύνολο αριθμών (ή σημείων) ταυτίζεται ή με το σύνολο των ακέραιων φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ... ή με το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών και, κατά συνέπεια, με το συνεχές, δηλαδή είναι ισοδύναμο με το σύνολο σημείων μιας ευθείας· με την έννοια της ισοδυναμίας, υπάρχουν λοιπόν δύο σύνολα αριθμών, δηλαδή το αριθμήσιμο σύνολο και το συνεχές.

Ο Hilbert θεωρούσε την επίλυση των προβλημάτων που έθεσε όχι μόνο επιθυμητή αλλά και απόλυτα εφικτή, όπως φαίνεται και από το ακόλουθο απόσπασμα από την ίδια εργασία:

> Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischern Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus!

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> Αυτή η πεποίθηση για την επιλυσιμότητα κάθε μαθηματικού προβλήματος αποτελεί έντονο κίνητρο για την εργασία μας· ακούμε μέσα μας διαρκώς τη φωνή: Να το πρόβλημα, αναζήτησε τη λύση. Μπορείς να τη βρεις μέσω της καθαρής σκέψης· διότι στα μαθηματικά δεν υπάρχει Ignorabimus!

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι προσπάθειες να αποδειχθεί η CH συνεχίστηκαν, αλλά όλες αποτύγχαναν. Μήπως το γεγονός αυτό μας θυμίζει κάτι παρόμοιο από την ιστορία των μαθηματικών; Κατά τη γνώμη μας, αυτό θυμίζει το τι συνέβη με το λεγόμενο πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, δηλαδή την πρόταση «Για τυχούσα ευθεία και τυχόν σημείο εκτός αυτής, υπάρχει μόνο μία ευθεία που περιέχει το σημείο και είναι παράλληλη προς τη δοθείσα ευθεία». Ακριβώς, όπως ουδείς κατάφερε να αποδείξει την πρόταση αυτή από τα υπόλοιπα αξιώματα της γεωμετρίας -διότι απλώς η πρόταση αυτή είναι, όπως λέμε, «ανεξάρτητη» από τα υπόλοιπα αξιώματα, όπως απέδειξαν οι János Bolyai και Nikolai Lobachevsky–, έτσι και η CH δεν ήταν δυνατόν να αποδειχθεί από τις συνολοθεωρητικές αρχές που ήταν παραδεκτές στο τέλος του 19ου και στην αρχή του 20ού αιώνα. Ίσως αυτή η σκέψη πέρασε από το μυαλό του Kurt Gödel, ο οποίος ασχολήθηκε με τη CH σε μια σειρά εργασιών του, συγκεκριμένα στις [GO38], [GO39α], [GO39β] και [GO40].

Η [GO38] ουσιαστικά περιέχει μια ανακοίνωση των αποτελεσμάτων, ενώ η [GO39α] μια περίληψη. Στην [GO39β] δίνονται πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, ενώ στην [GO40] η πλήρης απόδειξη ότι δεν αποδεικνύεται η άρνηση της CH από ένα σύνολο αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων, που συμβόλισε με Σ, αλλά το οποίο συμβολίζεται με BG στις μέρες μας (προς τιμήν των Paul Bernays και Gödel). Εδώ και αρκετές δεκαετίες, το δημοφιλέστερο σύστημα αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων συμβολίζεται με ZF και είναι γνωστό ως «συνολοθεωρία Zermelo-Fraenkel». Πριν προχωρήσουμε, θα ασχοληθούμε, με συντομία, με τις βασικές διαφορές των συστημάτων BG και ZF.

Το σύστημα αξιωμάτων ZF προέρχεται από το σύστημα του άρθρου [ZE08], στο οποίο έχουν γίνει οι ακόλουθες τροποποιήσεις:

(1) Ενώ τα αρχικά αξιώματα του Ernst Zermelo επέτρεπαν την ύπαρξη «ατόμων» (urelemente), δηλαδή αντικειμένων που αποτελούν στοιχεία συνόλων, χωρίς να είναι τα ίδια σύνολα, η ZF επιτρέπει μόνο «αγνά» (pure) σύνολα.
(2) Ενώ ο Zermelo υιοθέτησε το Αξιωματικό Σχήμα «Διαχωρισμού» (separation), όπου οι επιτρεπόμενες ιδιότητες είναι αυτές που ονόμασε «συγκεκριμένες» (definit), το αντίστοιχο σχήμα στη ZF αφορά μόνο ιδιότητες που εκφράζονται στην τυπική γλώσσα της θεωρίας συνόλων, σύμφωνα με την πρόταση που έκανε ο Thoralf Skolem στην εργασία [SK23]. Υπενθυμίζουμε ότι το αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού λέει ότι, για κάθε σύνολο x και ιδιότητα P, υπάρχει σύνολο y του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία του x που έχουν την ιδιότητα P.
(3) Για να αποκλειστεί η ύπαρξη συνόλων με παθολογικό χαρακτήρα, προστέθηκε το Αξίωμα «Θεμελίωσης» (foundation), δηλαδή η πρόταση που εκφράζει ότι «κάθε μη κενό σύνολο x έχει ένα στοιχείο y που δεν έχει κοινά στοιχεία με το x». Σημειώνουμε ότι το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με την πρόταση «για κάθε σύνολο x, το x δεν περιέχει άπειρη $\in$-ακολουθία προς τα κάτω».
(4) Προστέθηκε το Αξιωματικό Σχήμα «Αντικατάστασης» (replacement), δηλαδή η πρόταση που εκφράζει ότι «για κάθε σύνολο x και συνάρτηση F με πεδίο ορισμού το x, υπάρχει σύνολο y που έχει ως μέλη ακριβώς τις τιμές της F όταν τα ορίσματα ανήκουν στο x».

Στο σύστημα BG υπάρχουν δύο είδη μεταβλητών, ένα για σύνολα και ένα για κλάσεις (διαισθητικά, οι κλάσεις είναι συλλογές συνόλων). Σύμφωνα με τα αξιώματα του BG, κάθε σύνολο είναι κλάση, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν «γνήσιες κλάσεις» (proper classes), δηλαδή συλλογές συνόλων που είναι «πολύ μεγάλες» για να αποτελέσουν σύνολα.

Παρά τις διαφορές που έχει το σύστημα BG από το ZF, το πρώτο αποτελεί «συντηρητική επέκταση του δεύτερου», δηλαδή για κάθε πρόταση φ (της τυπικής γλώσσας) του συστήματος ZF ισχύει ότι:

Η φ είναι θεώρημα (δηλαδή αποδεικνύεται από τα αξιώματα) του BG ⇔

Η φ είναι θεώρημα (δηλαδή αποδεικνύεται από τα αξιώματα) του ZF.

Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια θα αναφερόμαστε μόνο στο σύστημα ZF, χωρίς να αλλάζει η ουσία των λεγομένων μας.

Ο Gödel απέδειξε ότι η άρνηση της CH δεν αποδεικνύεται ούτε αν δεχθούμε, επιπλέον, το καλούμενο «Αξίωμα Επιλογής» (Axiom of Choice, AC), δηλαδή την πρόταση «Το καρτεσιανό γινόμενο μιας τυχούσας συλλογής μη κενών συνόλων είναι μη κενό», που διατύπωσε ο Zermelo στο [ZE04]. Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν πολλές προτάσεις που είναι ισοδύναμες, έχοντας ως βάση τη ZF, με το AC· παραδείγματος χάρη, η «Αρχή Καλής Διάταξης», δηλαδή η πρόταση «Κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς». Αυτό που πέτυχε ο Gödel ήταν μια «απόδειξη σχετικής συνέπειας» (relative consistency proof), δηλαδή το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3. Αν η ZF είναι συνεπής θεωρία, τότε και ZFC+CH είναι συνεπής θεωρία (όπου με ZFC συμβολίζουμε τη θεωρία ZF+AC).

Στην πραγματικότητα, ο Gödel απέδειξε κάτι καλύτερο, δηλαδή ότι:

Θεώρημα 4. Αν η ZF είναι συνεπής θεωρία, τότε και ZFC+GCH είναι συνεπής θεωρία, όπου GCH είναι, όπως είπαμε, η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς.

Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι η CH μπορεί, εναλλακτικά, να διατυπωθεί ως η πρόταση «Ο πληθάριθμος $2^{\aleph_0}$ ταυτίζεται με τον πληθάριθμο $\aleph_1$», όπου με $\aleph_0$ συμβολίζεται ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών, με $\aleph_1$ ο επόμενος άπειρος πληθάριθμος και με $2^{\aleph_0}$ ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικών αριθμών (που αποδεικνύεται ότι ταυτίζεται με τον πληθάριθμο του δυναμοσυνόλου του συνόλου των φυσικών αριθμών). Όμοια, η GCH διατυπώνεται εναλλακτικά ως η πρόταση «Για κάθε διατακτικό αριθμό α, ο πληθάριθμος $2^{\aleph_\alpha}$ ταυτίζεται με τον πληθάριθμο $\aleph_{\alpha+1}$», όπου $\aleph_\alpha$, αντίστοιχα $\aleph_{\alpha+1}$, είναι ο α-οστός, αντίστοιχα (α+1)-οστός, πληθάριθμος στην ακολουθία των άπειρων πληθαρίθμων.

Σημείωση. Η συνέπεια της θεωρίας ZFC+GCH ισοδυναμεί με την πρόταση «Η ¬GCH δεν αποδεικνύεται από τη θεωρία ZFC», όπου με ¬GCH συμβολίζουμε την άρνηση της GCH.

Στη συνέχεια, θα αποπειραθούμε να σκιαγραφήσουμε τη βασική ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 4 που έδωσε ο Gödel. Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας ότι το σύμπαν του John von Neumann των συνόλων συμβολίζεται συνήθως με V και ορίζεται μέσω του ακόλουθου αναδρομικού ορισμού:

$V_0 = \varnothing$

$V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$, για τυχόντα διατακτικό αριθμό α (όπου, όπως ήδη αναφέρθηκε, $\wp$ είναι ο τελεστής του δυναμοσυνόλου).

$V_\kappa = \cup_{\alpha<\kappa} V_\alpha$, για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό κ.

Η κλάση V ορίζεται $V = \cup_{\alpha \text{ διατακτικός}} V_\alpha$ και η ιεραρχία $(V_\alpha)_{\alpha \text{ διατακτικός}}$ καλείται «συσσωρευτική ιεραρχία» (cumulative hierarchy). Η δομή $<V,\in^V>$ αποτελεί το διαισθητικά πιο κατανοητό μοντέλο της συνολοθεωρίας ZF. Η συσσωρευτική ιεραρχία ορίστηκε αρχικά από τον Dmitry Mirimanoff στο [MI17], αλλά δεν χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά για χρόνια, μέχρι που τη χρησιμοποίησε ο Von Neumann στο [VON29], αν και με πολύ συγκεχυμένο τρόπο.

Πριν από τον Gödel, είχαν προηγηθεί έρευνες μοντελοθεωρητικού χαρακτήρα στη θεωρία συνόλων, στο πλαίσιο προσπαθειών για να απαντηθούν ερωτήματα που έθεσε ο Zermelo στο άρθρο του [ZE08]. Συγκεκριμένα, ο Zermelo έθεσε το ερώτημα της συνέπειας του συνόλου αξιωμάτων του, λέγοντας ([VAN67], 200-201):

> I have not yet even been able to prove rigorously that my axioms are consistent, though this is certainly very essential ...

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας,

> Δεν έχω ακόμη καταφέρει να αποδείξω αυστηρά ότι τα αξιώματά μου είναι συνεπή, αν και αυτό είναι σίγουρα πολύ ουσιώδες ...

Στο ίδιο άρθρο, ο Zermelo παρατήρησε ότι τα αξιώματά του φαίνονταν ότι ήταν ανεξάρτητα ([VAN67], 200):

> Now in the present paper I intend to show how the entire theory created by Cantor and Dedekind can be reduced to a few definitions and seven principles, or axioms, which appear to be mutually independent.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας,

> Στο παρόν άρθρο σκοπεύω να δείξω πώς ολόκληρη η θεωρία που δημιουργήθηκε από τον Cantor και τον Dedekind μπορεί να αναχθεί σε λί-

γους ορισμούς και επτά αρχές, ή αξιώματα, τα οποία φαίνονται να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Με τα ερωτήματα που έθεσε ο Zermelo ασχολήθηκε ο Abraham Fraenkel στα άρθρα [FR22α], [FR22β] και ο Skolem στο [SK23].

Στη συνέχεια, πριν από την εργασία του Gödel, δημοσιεύθηκαν δύο εργασίες, που περιείχαν αποδείξεις σχετικής συνέπειας. Πρόκειται για:

(α) το άρθρο [VON29], στο οποίο ο Von Neumann απέδειξε ότι, αν η θεωρία συνόλων χωρίς το Αξίωμα Θεμελίωσης είναι συνεπής, τότε παραμένει συνεπής, αν προστεθεί το αξίωμα αυτό, και

(β) το άρθρο [AC37] του Wilhelm Ackermann, ο οποίος απέδειξε ότι, αν η θεωρία αριθμών είναι συνεπής, τότε είναι συνεπής η ZFC χωρίς το αξίωμα του απείρου.

Κάτι άλλο, που προηγήθηκε του ορισμού του Gödel και σχετίζεται με την ιδέα του, είναι η «Διακλαδισμένη Θεωρία Τύπων» (Ramified Theory of Types) των Bertrand Russell και Alfred North Whitehead. Όπως ο ίδιος ο Gödel λέει ρητά στο [GO44], η ιεραρχία που όρισε μπορεί να θεωρηθεί ως φυσική επέκταση της Διακλαδισμένης Θεωρίας Τύπων σε υπερπεπερασμένα επίπεδα.

Ο Gödel όρισε ένα μικρότερο συνολοθεωρητικό σύμπαν, δηλαδή μια κλάση συνόλων που περιέχεται στην κλάση Von Neumann. Η μέθοδος που ακολούθησε ο Gödel ονομάστηκε αργότερα «μέθοδος εσωτερικού μοντέλου» (inner model method). Κατά κάποιον τρόπο, ο Gödel συνδύασε την έννοια της συσσωρευτικής ιεραρχίας με την ιδέα του Skolem για τον περιορισμό των επιτρεπόμενων ιδιοτήτων σε αυτές που ορίζονται από τύπους της πρωτοβάθμιας γλώσσας της θεωρίας συνόλων, για να φτάσει στον ορισμό της δικής του ιεραρχίας.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η ιδέα του Gödel, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός. Έστω $<X,\in^X>$ μια δομή για την πρωτοβάθμια γλώσσα LST της θεωρίας συνόλων, δηλαδή τη γλώσσα με μόνο ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\in$ (και, επιπλέον, τα υπόλοιπα σύμβολα που διαθέτει κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα, δηλαδή τις μεταβλητές, τους συνδέσμους, τους ποσοδείκτες κτλ.). Για τυχόν στοιχείο a του X, λέμε ότι το a είναι «ορίσιμο στη $<X,\in^X>$», αν υπάρχει τύπος $\varphi(x)$ της LST που ικανοποιείται από το a και μόνο από αυτό στη $<X,\in^X>$. Το σύνολο των ορίσιμων στοιχείων της κλάσης X συμβολίζεται με $\mathrm{Def}(X)$.

Η ιδέα είναι ότι ορίσιμο είναι ένα στοιχείο που είναι το μόνο που ικανοποιεί μια ιδιότητα (που εκφράζεται στην τυπική LST) στο πλαίσιο της δομής $<X,\in^X>$.

Παρατήρηση. Τα στοιχεία που ορίζονται σε μια δομή είναι, εν γένει, πολύ λιγότερα από τα στοιχεία που περιέχει το σύμπαν της δομής, αφού το πλήθος των τύπων (με μια ελεύθερη μεταβλητή) είναι αριθμήσιμο και κάθε τύπος μπορεί να ορίζει το πολύ ένα στοιχείο.

Το σύμπαν που θεώρησε ο Gödel συμβολίζεται συνήθως με L και ορίζεται μέσω του ακόλουθου αναδρομικού ορισμού:

$L_0 = \varnothing$

$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$, για τυχόντα διατακτικό αριθμό α.

$L_\kappa = \cup_{\alpha<\kappa} L_\alpha$, για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό κ.

Η κλάση L ορίζεται $L = \cup_{\alpha \text{ διατακτικός}} L_\alpha$ και η ιεραρχία $(L_\alpha)_{\alpha \text{ διατακτικός}}$ καλείται «κατασκευαστική ιεραρχία» (constructible hierarchy). Παρόλο που η δομή $\langle L,\in^L\rangle$ έχει «μικρότερο» σύμπαν από τη δομή $\langle V,\in^V\rangle$, όλα τα αξιώματα της ZF ικανοποιούνται σε αυτή. Συγκεκριμένα, ο Gödel απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5. Αν ZF είναι συνεπής θεωρία, τότε και ZF+V = L είναι συνεπής θεωρία, οπότε το κατασκευάσιμο σύμπαν υπάρχει (ως κλάση) και η δομή $\langle L,\in^L\rangle$ ικανοποιεί τη θεωρία ZFC+GCH.

Σημείωση. Όπως αναφέραμε και πριν, η συνέπεια της θεωρίας ZFC+GCH ισοδυναμεί με την πρόταση «Η άρνηση της GCH δεν αποδεικνύεται από τη θεωρία ZFC».

Το επόμενο μεγάλο βήμα προόδου στη μελέτη της GCH έγινε το 1963 από τον Paul Cohen, στον οποίο απονεμήθηκε το 1966 το Μετάλλιο Fields για αυτό του το επίτευγμα. Συγκεκριμένα, στις εργασίες [CO63] και [CO64], ο Cohen απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6. Αν η ZFC είναι συνεπής θεωρία, τότε και η θεωρία ZFC+¬GCH είναι συνεπής θεωρία.

Σημείωση. Η συνέπεια της θεωρίας ZFC+¬GCH ισοδυναμεί με την πρόταση «Η GCH δεν αποδεικνύεται από τη θεωρία ZFC».

Άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 5 και 6 αποτελεί το ακόλουθο.

Πόρισμα. Αν η ZFC είναι συνεπής θεωρία, τότε η GCH είναι πρόταση ανεξάρτητη από τη ZFC.

Στη συνέχεια, θα επιδιώξουμε να περιγράψουμε με συντομία την κύρια ιδέα μιας απόδειξης του Θεωρήματος 6. Ο ίδιος ο Cohen χρησιμοποίησε τη μέθοδο «επιβολής» ή «εξαναγκασμού» (forcing), η οποία κατόπιν έτυχε ευρείας χρήσης, για διάφορους σκοπούς. Όμως, η μέθοδος αυτή είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο των «μοντέλων με τιμές Boole» (Boolean-valued models), η οποία είναι περισσότερο διαισθητική, οπότε θα προτιμήσουμε αυτή τη μέθοδο στα παρακάτω.

Η κύρια ιδέα είναι να αντικατασταθεί η έννοια της δομής Tarski με την έννοια της δομής Boole. Δεδομένου ενός συνόλου A, με την οπτική Tarski, το να ανήκει κάτι στο A μπορεί να είναι ή αληθές ή ψευδές, ενώ με την οπτική Boole το να ανήκει κάτι στο A αντιστοιχεί σε μια πιθανότητα, δηλαδή λαμβάνει μια τιμή σε μια άλγεβρα Boole (θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα σύνολα είναι ασαφή [fuzzy], όταν θεωρούνται ως σύνολα τιμών Boole).

Σημείωση. Τα μοντέλα με τιμές Boole εισήχθησαν από τους Dana Scott και Robert Solovay ([SS69]), σε μια απόπειρα να γίνει περισσότερο κατανοητή η μέθοδος επιβολής. Παρόμοια προσπάθεια είχε γίνει και από τον Petr Vopěnka την ίδια εποχή.

Πριν προχωρήσουμε, θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό της έννοιας «άλγεβρα Boole».

Ορισμός. Έστω $\langle A,\vee,\wedge,-,0,1\rangle$ μια δομή που αποτελείται από ένα (μη κενό) σύνολο A, τις διθέσιες συναρτήσεις $\vee$ και $\wedge$ στο A, τη μονοθέσια συνάρτηση $-$ στο A και τα στοιχεία 0, 1 του A. Λέμε ότι η δομή αυτή είναι «άλγεβρα Boole», αν ικανοποιούνται σε αυτήν

- η προσεταιριστική, αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα για τις $\vee$ και $\wedge$,
- η ιδιότητα ότι τα 0 και 1 είναι ουδέτερα στοιχεία για τις $\vee$ και $\wedge$ (αντίστοιχα),
- η ιδιότητα αυτοπάθειας για τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$, δηλαδή ότι $\forall x(x\vee x = x)$ και $\forall x(x\wedge x = x)$,
- η ιδιότητα απορρόφησης για τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$, δηλαδή ότι $\forall x(x\vee(x\wedge y) = x)$ και $\forall x(x\wedge(x\vee y) = x)$,
- οι νόμοι De Morgan για τις πράξεις $\vee$, $\wedge$ και $-$, δηλαδή ότι $\forall x\forall y(-(x\vee y) = (-x)\wedge(-y))$ και $\forall x\forall y(-(x\wedge y) = (-x)\vee(-y))$,
- οι ιδιότητες $\forall x(x\wedge 0 = 0)$, $\forall x(x\vee 1 = 1)$, $0 \neq 1$, $\forall x(x\vee(-x) = 1)$, $\forall x(x\wedge(-x) = 0)$ και $\forall x(-(-(x)) = x)$.

Σημείωση. Ειδική περίπτωση άλγεβρας Boole είναι αυτή που έχει ως σύμπαν το σύνολο $\{0,1\}$ και πράξεις ορισμένες με βάση τους πίνακες αλήθειας των προτασιακών συνδέσμων που αντιστοιχούν στη διάζευξη, τη σύζευξη και την άρνηση (θεωρώντας ότι το 0 αντιστοιχεί στην τιμή «ψευδής» και το 1 στην τιμή «αληθής»).

Το σύμπαν που θεώρησαν οι Scott-Solovay συμβολίζεται συνήθως με V^B, όπου B είναι άλγεβρα Boole, και ορίζεται μέσω του ακόλουθου αναδρομικού ορισμού:

$V_0{}^B = \varnothing$

$V_{\alpha+1}{}^B = V_\alpha{}^B \to B$, για τυχόντα διατακτικό αριθμό α (όπου με $V_\alpha{}^B \to B$ συμβολίζεται το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $V_\alpha{}^B$ στο B).

$V_\kappa{}^B = \cup_{\alpha<\kappa} V_\alpha{}^B$, για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό κ.

Η κλάση V^B ορίζεται $V^B = \cup_{\alpha\ \text{διατακτικός}} V_\alpha^B$ και η ιεραρχία $(V_\alpha^B)_{\alpha\ \text{διατακτικός}}$ καλείται «γενικευμένη ιεραρχία» (generic hierarchy).

Προκειμένου να διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα του Cohen, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Έστω B τυχούσα άλγεβρα Boole και X υποσύνολο της B. Λέμε ότι:

- είναι πλήρης (complete), αν κάθε υποσύνολό της B έχει supremum,
- το X είναι αντι-αλυσίδα (anti-chain), αν για κάθε x, y∈X με x ≠ y ισχύει ότι $x \wedge y = 0$,
- η B ικανοποιεί τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας (countable chain condition), αν κάθε αντι-αλυσίδα στη B είναι αριθμήσιμη.

O Cohen απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7. Αν η ZFC είναι συνεπής θεωρία, τότε, για οποιαδήποτε άλγεβρα Boole B που είναι πλήρης και ικανοποιεί τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας, το σύμπαν V^B υπάρχει και η δομή $< V^B, \in^{V^B} >$ ικανοποιεί τη θεωρία ZFC+¬CH.

Σημείωση. Ο ορισμός του σύμπαντος των Scott-Solovay ταυτίζεται ουσιαστικά με τον ορισμό της συσσωρευτικής ιεραρχίας του Von Neumann, στην ειδική περίπτωση που η άλγεβρα Boole που θεωρούμε είναι αυτή που ορίζεται στο σύνολο {0,1} (με τις πράξεις ορισμένες όπως αναφέραμε παραπάνω). Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $V^{\{0,1\}}$ στο σύνολο {0,1} ταυτίζεται ουσιαστικά με το δυναμοσύνολο του $V^{\{0,1\}}$, αφού κάθε υποσύνολο του $V^{\{0,1\}}$ μπορεί ουσιαστικά να ταυτιστεί με την αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση που ανήκει στο σύνολο $V^{\{0,1\}} \to \{0,1\}$.

Επειδή η CH συνδέεται στενά με διάφορες προτάσεις στην ανάλυση, την τοπολογία και τη θεωρία μέτρου, ως συνέπεια της ανεξαρτησίας της από τη ZFC προέκυψε η ανεξαρτησία από τη θεωρία αυτή πολλών άλλων προτάσεων.

Σύμφωνα με μια από τις κύριες απόψεις που διατυπώθηκαν μετά την απόδειξη του Cohen, υπέρμαχος της οποίας ήταν ο ίδιος, το Θεώρημα 7 δείχνει ότι το αρχικό ερώτημα, δηλαδή το εάν η CH αποδεικνύεται ή όχι από τη θεωρία ZFC, έχει λυθεί, με την έννοια ότι αποδείχθηκε ότι δεν έχει απάντηση. Με άλλα λόγια, μπορούμε να υιοθετήσουμε για τη θεωρία συνόλων ένα αξιωματικό σύστημα που να περιέχει τη CH και ένα που να περιέχει τη ¬CH, χωρίς να ασχολούμαστε με το ποιο από τα δύο είναι το «σωστό».

Η άλλη άποψη, υπέρ της οποίας τάχθηκε ο Gödel, ήδη από την εποχή που απέδειξε το Θεώρημα 5, ήταν ότι κάθε αποτέλεσμα ανεξαρτησίας δείχνει απλώς πως τα αξιώματα που έχουμε υιοθετήσει δεν επαρκούν για να προσδιορίσουν τη μαθηματική αλήθεια, οπότε υπάρχει ανάγκη εντοπισμού νέων αξιωμάτων, που να είναι εύλογα και, ταυτόχρονα, να μας δίνουν τη δυνατότητα να αποδείξουμε την πρόταση που μας απασχολεί ή την άρνησή της.

Την άποψη αυτή διατύπωσε ο Gödel στην υποσημείωση 48[a] του άρθρου [GO31], την οποία, κατά πάσα πιθανότητα, πρόσθεσε στο άρθρο εκ των υστέρων. Η άποψη αυτή φαινομενικά αφορούσε άλλο σύστημα, συγκεκριμένα αυτό των *Principia Mathematica*, αλλά ουσιαστικά αναφερόταν και στην ανεξαρτησία της CH από τη θεωρία ZFC. Συγκεκριμένα, ο Gödel λέει στην υποσημείωση αυτή:

> ... the true reason for the incompleteness inherent in all formal systems of mathematics is that the formation of ever higher types can be continued into the transfinite ... [since] the undecidable propositions constructed here become decidable whenever appropriate higher types are added.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> ... ο πραγματικός λόγος για τη μη πληρότητα που ενυπάρχει σε όλα τα τυπικά μαθηματικά συστήματα είναι ότι ο σχηματισμός όλο και υψηλότερων τύπων μπορεί να συνεχιστεί στο υπερπεπερασμένο ... [επειδή] οι αναποκρίσιμες προτάσεις που κατασκευάστηκαν εδώ γίνονται αποκρίσιμες κάθε φορά που προστίθενται κατάλληλοι υψηλότεροι τύποι.

Σημείωση. Αυτό που υπονοούσε ο Gödel ήταν ότι η συνέπεια ενός συστήματος S μπορεί να αποδειχθεί σε ένα σύστημα που χρησιμοποιεί μεταβλητές για σύνολα που λαμβάνουν ως τιμές τυχόντα υποσύνολα του σύμπαντος που έχουμε κατά νου όταν διατυπώνουμε το σύστημα S (μέσω των οποίων μπορούμε να ορίσουμε έναν «ορισμό αλήθειας» για τη γλώσσα του συστήματος).

Ας επιστρέψουμε για λίγο στην πρόταση V = L, δηλαδή στην πρόταση «Όλα τα σύνολα είναι κατασκευάσιμα», που καλείται «Αξίωμα Κατασκευασιμότητας» (Axiom of Constructibility). Το 1938 ο Gödel υποστήριξε ότι το αξίωμα αυτό αποτελεί μια φυσική επέκταση των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, αφού καθορίζει επακριβώς ποια είναι τα σύνολα για τα οποία μιλάμε. Αργότερα όμως, ο ίδιος ο Gödel απέρριψε το αξίωμα, αφού είχε υιοθετήσει μια ισχυρά πλατωνική προσέγγιση για τη φύση των συνόλων. Η προσέγγιση αυτή, που διατύπωσε ρητά σε άρθρο του ([GO47], 520), μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

> The simplest of these [new axioms] ... assert the existence of [strongly] inaccessible numbers ... $> \aleph_0$. [This] axiom, roughly speaking, means nothing else but the totality of sets obtainable by exclusive use of the processes of formation of sets expressed in the other axioms forms again a set (and, therefore, a new basis for a further application of

> these processes). Other axioms of infinity have been formulated by P. Mahlo. ... these axioms show clearly, not only that the axiomatic system of set theory as known today is incomplete, but also that it can be supplemented without arbitrariness by new axioms which are only the natural continuation of those set up so far.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> Τα απλούστερα από αυτά [τα νέα αξιώματα] αφορούν την ύπαρξη [ισχυρά] απρόσιτων αριθμών ... $> \aleph_0$. [Αυτό] το αξίωμα, χονδρικά, δεν σημαίνει τίποτε άλλο παρά το γεγονός ότι η ολότητα των συνόλων που παράγονται μέσω της αποκλειστικής χρήσης των διαδικασιών σχηματισμού συνόλων που περιγράφονται στα άλλα αξιώματα αποτελεί πάλι σύνολο (και, συνεπώς, μια νέα βάση για επιπλέον εφαρμογή αυτών των διαδικασιών). Άλλα αξιώματα έχουν διατυπωθεί από τον P. Mahlo. ... αυτά τα αξιώματα δείχνουν ξεκάθαρα όχι μόνο ότι είναι μη πλήρες το αξιωματικό σύστημα της θεωρίας συνόλων όπως το ξέρουμε σήμερα, αλλά επίσης ότι μπορεί να συμπληρωθεί χωρίς αυθαιρεσίες με νέα αξιώματα που είναι απλώς η φυσιολογική συνέχεια αυτών που έχουμε αποδεχθεί μέχρι τώρα.

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε μερικά από τα λεγόμενα «αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων» (large cardinal axioms), τα οποία προτάθηκαν και μελετήθηκαν στο πλαίσιο της υιοθέτησης αξιωμάτων που θα μπορούσαν να προστεθούν στη ZFC.

Η έννοια «(ισχυρά) απρόσιτος πληθάριθμος» (strongly inaccessible cardinal) εισήχθη στις εργασίες [SITA30] και [ZE30], ορίζεται δε ως εξής: ο πληθάριθμος κ είναι ισχυρά απρόσιτος, αν είναι υπεραριθμήσιμος, κλειστός ως προς την εκθετική συνάρτηση (δηλαδή αν $\alpha < \kappa$, τότε $2^{\alpha} < \kappa$) και δεν ισούται με το άθροισμα λιγότερων από κ μικρότερων πληθαρίθμων. Μια ισχυρότερη έννοια, αυτή του «πληθαρίθμου Mahlo», είχε εισαχθεί και μελετηθεί στο άρθρο [MA11]. Το αξίωμα MA που εκφράζει την ύπαρξη ενός πληθαρίθμου Mahlo είναι συνεπές, έχοντας ως βάση το σύστημα ZFC, με το Αξίωμα Κατασκευασιμότητας $V = L$, οπότε η $\neg$CH δεν μπορεί να αποδειχθεί από το σύστημα ZFC+V = L+MA (αφού η GCH αληθεύει στο κατασκευάσιμο σύμπαν). Ένα αξίωμα που εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ακόμη μεγαλύτερου πληθαρίθμου, που καλείται «μετρήσιμος» (measurable), είναι αυτό που πρότεινε το 1930 ο Stanislaw Ulam ([UL30]) – ο πληθάριθμος κ είναι μετρήσιμος, αν υπάρχει ένα δίτιμο, κ-προσθετικό μέτρο στο δυναμοσύνολο του κ. Αργότερα, οι ερευνητές οδηγήθηκαν στην ακόμη ισχυρότερη έννοια του «ισχυρώς συμπαγούς πληθαρίθμου» (strongly compact cardinal), η οποία όμως δημιούργησε ενδοιασμούς όσον αφορούσε την ύπαρξη τέτοιων πληθαρίθμων. Συγκεκριμένα ο Alfred Tarski έγραφε ([TA62], 26):

> ... the belief in the existence of inaccessible cardinals ... (and even of arbitrarily large cardinals of this kind) seems to be a natural consequence of basic intuitions underlying the "naïve" set theory and referring to what can be called "Cantor's absolute". On the contrary, we see at this moment no cogent intuitive reasons which could induce us to believe in the existence of [strongly compact] cardinals, or which at least would make it very plausible that the hypothesis stating the existence of such cardinals is consistent with familiar axiom systems of set theory.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> ... η πεποίθηση ότι υπάρχουν απρόσιτοι πληθάριθμοι ... (ακόμη και αυθαίρετα μεγάλοι πληθάριθμοι αυτού του είδους) φαίνεται να αποτελεί μια φυσική συνέπεια βασικών διαισθήσεων που υπόκεινται της «αφελούς» θεωρίας συνόλων και αναφέρονται σε αυτό που μπορούμε να αποκαλέσουμε «το απόλυτο του Cantor». Αντίθετα, προς το παρόν δεν βλέπουμε κάποιους πειστικούς λόγους οι οποίοι θα μπορούσαν να δικαιολογήσουν την πίστη μας στην ύπαρξη [ισχυρά απρόσιτων] πληθαρίθμων, ή οι οποίοι τουλάχιστον θα καθιστούσαν πολύ πιθανή την υπόθεση ότι η ύπαρξη τέτοιων πληθαρίθμων είναι συνεπής με τα συνήθη αξιωματικά συστήματα της θεωρίας συνόλων.

Ο Gödel υποστήριξε, στην υποσημείωση 20 του [GO64], την παραπάνω άποψη του Tarski, προσθέτοντας όμως το εξής σχόλιο: «However, [the new axioms] are supported by rather strong argument from analogy ...».

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας: «Όμως, [τα νέα αξιώματα] υποστηρίζονται από ένα μάλλον ισχυρό επιχείρημα εξ αναλογίας ...».

Επίσης, ο Gödel είχε χρησιμοποιήσει ένα ακόμη επιχείρημα το 1947, το οποίο θα μπορούσε να οδηγήσει στην υιοθέτηση νέων αξιωμάτων, ακόμη και αν δεν υποστηρίζονταν από τα ίδια τεκμήρια με αυτά που οδήγησαν στην αποδοχή των αξιωμάτων ZFC. Πράγματι, διαβάζουμε ([GO47], 521):

> [Finally, we may look for axioms which are] so abundant in their verifiable consequences ... that quite irrespective of their intrinsic necessity

> they would have to be assumed in the same sense as any well-established physical theory.

Δηλαδή, σε μετάφραση δική μας:

> [Τελικά, μπορούμε να αναζητήσουμε αξιώματα που είναι] τόσο πλούσια ως προς τις επιβεβαιώσιμες συνέπειές τους, ώστε εντελώς ανεξάρτητα από την εγγενή αναγκαιότητά τους θα έπρεπε να υιοθετηθούν με την ίδια έννοια που αυτό γίνεται με κάθε ευρέως παραδεκτή φυσική θεωρία.

Στη συνέχεια, μελετήθηκαν σε βάθος και πολλά άλλα αξιώματα που αφορούσαν την ύπαρξη «μεγάλων πληθαρίθμων», όπως αυτών που είναι γνωστοί ως indescribable, ineffable, Ramsey, strong, superstrong κτλ. ([KAMA78]) και έγιναν πολλές προσπάθειες να δικαιολογηθεί η ύπαρξη τέτοιων πληθαρίθμων, για παράδειγμα, από τη φιλόσοφο Penelope Maddy στο ([M88α] και [M88β]).

Αυτό που είναι εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι η CH παραμένει ανεξάρτητη πρόταση, όποιο από τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων κι αν αποδεχθούμε (επιπλέον της ZFC) (βλ., για παράδειγμα, [MA76]). Το γεγονός αυτό ίσως δημιουργεί επιφυλάξεις για το πρόγραμμα του Gödel ή, με άλλα λόγια, για το κατά πόσον η CH είναι ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως πιστεύουν πολλοί ερευνητές.

Σε κάθε περίπτωση, η κατεύθυνση έρευνας που υπέδειξε ο Gödel παραμένει ενεργή, με πολλούς διακεκριμένους ερευνητές να συνεχίζουν το έργο του, με στόχο τον εντοπισμό νέων αξιωμάτων που θα μπορούσαν να ξεκαθαρίσουν τη θέση της CH. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για λεπτομέρειες μπορεί να ανατρέξει στα άρθρα [W01α] και [W01β], αλλά οφείλουμε να τον προειδοποιήσουμε ότι η κατανόησή τους απαιτεί πολύ προχωρημένες τεχνικές γνώσεις μαθηματικής λογικής και θεωρίας συνόλων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[AC37] Ackermann W., «Die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie», *Mathematische Annalen* 114 (1937), 305-315.

[CA74] Cantor G., «Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77 (1874), 258-262.

[CA78] ____, «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), 242-258.

[CA32] ____, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Erganzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, επιμ. E. Zermelo, Springer, Βερολίνο 1932 (ανατ. Olms, Χιλντεσχάιμ 1962).

[CO63] Cohen P., «The independence of the continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50 (1963), 1143-1148.

[CO64] ____, «The independence of the continuum hypothesis II», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 (1964), 105-110.

[FE99] Feferman S., «Does mathematics need new axioms?», *The American Mathematical Monthly* 106/2 (1999), 99-111.

[FR22α] Fraenkel A. A., «Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre», *Mathematische Annalen* 86 (1922), 230-237.

[FR22β] ____, «Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematicshe Klasse* 86 (1922), 253-257 (ανατ. σε αγγλική μτφρ. στο Heijenoort, *From Frege to Gödel*, σ. 284-289).

[GO31] Gödel K., «Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), 173-198 (ανατ. σε αγγλική μτφρ. στο Gödel, *Collected Works*, τ. Α΄, σ. 144-195).

[GO38] ____, «The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 24 (1938), 556-557 (ανατ. στο Gödel, *Collected Works*, τ. Β΄, σ. 26-27).

[GO39α] ____, «The consistency of the generalized continuum hypothesis», *Bulletin of the American Mathematical Society* 45 (1939), 93.

[GO39β] ____, «Consistency proof for the generalized continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 25 (1939), 220-224 (παροράματα δημοσιεύθηκαν το 1947, υποσημ. 23).

[GO40] ____, «The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory», *Annals of Mathematics Studies* 3 (1940).

[GO44] ____, «Russell's mathematical logic», στο P. A. Schillp (επιμ.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Open Court, Λα Σάλλε 1944, σ. 125-153 (ανατ. στο Gödel, *Collected Works*, τ. Α', σ. 119-141).

[GO47] ____, «What is Cantor's continuum problem?», *The American Mathematical Monthly* 54 (1947), 515-525· (παροράματα δημοσιεύθηκαν στο 55 [1948], 151 και ανατ. στο Gödel, *Collected Works*, τ. Β', σ. 176-187).

[GO64] ____, «What is Cantor's continuum problem?», στο P. Benacerraf και H. Putnam (επιμ.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Νιου Τζέρσεϋ 1964, σ. 258-273 (αναθεωρ. εκδ. του 1947 [GO47] και ανατ. στο Gödel, *Collected Works*, τ. Β', σ. 254-270).

[GO86] ____, *Collected Works*, τ. Α': *Publications 1929-1936*, επιμ. S. Feferman κ.ά., Oxford University Press, Νέα Υόρκη 1986.

[GO90] ____, *Collected Works*, τ. Β': *Publications 1938-1974*, επιμ. S. Feferman κ.ά., Oxford University Press, Νέα Υόρκη 1990.

[HA08] Hausdorff F., «Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen», *Mathematische Annalen* 65 (1908), 435-505.

[HI00] Hilbert D., «Mathematical Problems», *Bulletin of the American Mathematical Society* 8/10 (1902), 437-479 (αρχικές εκδόσεις στα γερμανικά στην εφ. *Göttinger Nachrichten*, 1900, σ. 253-297· στο περ. *Archiv der Mathematik und Physik* 1 [1901], 44-63, 213-237).

[KAMA78] Kanamori A. και Magidor M., «The evolution of large cardinal axioms in set theory», στο G. H. Müller και D. S. Scott (επιμ.), *Higher Set Theory. Lecture Notes in Mathematics 669*, Springer, Βερολίνο 1978, σ. 99-275.

[KO11] Koellner P., *«The Continuum Hypothesis». Exploring the Frontiers of Independence*, «Harvard lecture series», Harvard University Press, Κέμπριτζ Μασσ. 2011.

[MO93] Μοσχοβάκης Γ. Ν., *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Νεφέλη, Αθήνα 1993.

[M88α] Maddy P., «Believing the axioms. I», *The Journal of Symbolic Logic* 53/2 (Ιούν. 1988), 481-511.

[M88β] ____, «Believing the axioms. II», *The Journal of Symbolic Logic* 53/3 (Σεπτ. 1988), 736-764.

[MA11] Mahlo P., «Über lineare transfinite Mengen», *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematicsh-Physische Klasse* 63 (1911), 187-225.

[MA76] Martin D. A., «Hilbert's first problem. The Continuum Hypothesis», (αφιέρ.) «Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems», *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 28 (1976), 81-92.

[MI17] Mirimanoff D., «Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fundamental de la theorie des ensembles», *L'Enseignement Mathematique* 19 (1917), 37-52.

[SS69] Scott D. και Solovay R., «Boolean valued Models for Set Theory», *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 13 (1969).

[SITA30] Sierpiński W. και Tarski A., «Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles», *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930), 292-300.

[SO90] Solovay R. M., «Gödel 1938. Introductory note to 1938, 1939, 1939a and 1940», στο Gödel, *Collected Works*, τ. Β', σ. 1-25.

[SK23] Skolem T., «Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurriende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich», *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet I Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6 (1923), 1-38 («The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains», στο Heijenoort [επιμ.], *From Frege to Gödel*, σ. 290-301).

[TA62] Tarski A., «Some problems and results relevant to the foundations of set theory», στο E. Nagel κ.ά. (επιμ.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Στάνφορντ 1962, σ. 125-135.

[UL30] Ulam S., «Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre», *Fundamenta Mathematicae* 16 (1930), 140-150.

[VAN67] Heijenoort J. van (επιμ.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Κέμπριτζ Μασσ. 1967.

[VON29] Von Neumann J., «Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 160 (1929), 227-241.

[WO1α] Woodin H. W., «The continuum hypothesis, I», *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001), 567-576.

[WO1β] ____, «The continuum hypothesis, II», *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001), 681-690.

[WO10] ____, «Suitable extender models, I», *Journal of Mathematical Logic* 10/1-2 (2010), 101-339.

[WO11α] ____, «Suitable extender models, II. Beyond Ω-huge», *Journal of Mathematical Logic* 11/2 (2011), 115-436.

[WO11β] ____, «The Continuum Hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture», στο J. Kennedy και R. Kossak (επιμ.), *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics. Theorems, Philosophies*, «Lecture Notes in Logic, τ. 36», Cambridge University Press, Κέμπριτζ 2011.

[ZE04] Zermelo E., «Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann», *Mathematische Annalen* 59 (1904), 514-516 (ανατ. σε αγγλική μτφρ. στο Heijenoort, *From Frege to Gödel*, σ. 139-141).

[ZE08] ____, «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I», *Mathematische Annalen* 65 (1908), 261-281.

[ZE30] ____, «Über Grenzzahlen und Mengenbereiche», *Fundamenta Mathematicae* 16 (1930), 29-47.