ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΑ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ 2008

Άσκηση 1. (Θέμα 13-2-1996)
Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχύει ότι $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Λύση.
Εφαρμόζοντας νόμους της «άλγεβρας των συνόλων» (δες παράγραφο 1.5 των σημειώσεων), έχουμε ότι για τυχόντα σύνολα A, B ισχύει

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap B') &= A \cap (B \cup B') \quad \text{(με βάση το 2ο νόμο επιμεριστικότητας)}\\ &= A \cap U \quad \text{(με βάση το 1ο νόμο συμπληρώματος)}\\ &= A \quad \text{(με βάση τον 4ο νόμο ταυτότητας).}\end{aligned}$$

Άσκηση 2. (Θέμα 13-2-1996)
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f = \{< 1,2 >, < 2,1 >, < 3,1 >, < 4,4 >\}$, $g = \{< 1,2 >, < 2,4 >, < 3,1 >, < 4,3 >\}$. Βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$. Ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$;

Λύση. Παρατηρούμε καταρχήν ότι $f : A \to A$ και $g : A \to A$, όπου $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Με βάση τον ορισμό της σύνθεσης συναρτήσεων, οι $f \circ g, g \circ f$ θα είναι οι ακόλουθες συναρτήσεις από το A στο A:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{< 1,4 >, < 2,2 >, < 3,2 >, < 4,3 >\}\\ f \circ g &= \{< 1,1 >, < 2,4 >, < 3,2 >, < 4,1 >\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $f \circ g = g \circ f$, αφού το σύνολο $f \circ g$ δεν έχει τα ίδια στοιχεία με το σύνολο $g \circ f$ (πράγματι, ισχύει, π.χ. $< 1,4 > \in g \circ f$ αλλά $< 1,4 > \notin f \circ g$).

Άσκηση 3. (Θέμα 13-2-1996)
Έστω A το σύνολο $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ και R η σχέση στο A που ορίζεται ως εξής: $R = \{< x, y > | \text{ο } x \text{ διαιρεί τον } y\}$.
Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Μεταβατική; Σχέση ισοδυναμίας;

Λύση. Με βάση τον ορισμό των ιδιοτήτων σχέσεων (παράγραφος 2.5 των σημειώσεων), έχουμε
α) Η R είναι ανακλαστική ανν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $< x, x > \in R$, δηλαδή ανν για κάθε $x \in A$ είναι αλήθεια ότι ο x διαιρεί τον x. Όμως είναι πράγματι αλήθεια ότι ο x διαιρεί τον εαυτό του, για κάθε $x \in A$ (στην πραγματικότητα, για κάθε φυσικό αριθμό x). Άρα η R είναι ανακλαστική.
β) Η R είναι συμμετρική ανν (για οποιαδήποτε $x, y \in A$, αν $< x, y > \in R$, τότε $< y, x > \in R$), δηλαδή ανν (για οποιαδήποτε $x, y \in A$, αν ο x διαιρεί τον y, τότε και ο y διαιρεί τον x). Όμως δεν αληθεύει ότι για οποιουσδήποτε $x, y \in A$ αν ο x διαιρεί τον y, τότε και ο y διαιρεί τον x· πράγματι, έχουμε ότι $3 \in A, 15 \in A$, ο 3 διαιρεί τον 15, αλλά ο 15 δεν διαιρεί τον 3. Συνεπώς η R δεν είναι συμμετρική.
γ) Η R είναι μεταβατική ανν (για οποιαδήποτε $x, y, z \in A$, αν $< x, y > \in R$ και $< y, z > \in R$, τότε $< x, z > \in R$), δηλαδή (για οποιαδήποτε $x, y, z \in A$, αν ο x διαιρεί τον y και ο y διαιρεί τον z, τότε και ο x διαιρεί τον z) (*).

Παρατηρούμε ότι το (*) είναι αλήθεια (στην πραγματικότητα ισχύει και για φυσικούς, όχι μόνο για στοιχεία του A). Πράγματι, έστω ότι x, y, z είναι τυχόντες φυσικοί τέτοιοι που ο x διαιρεί τον y και ο y διαιρεί τον z. Τότε υπάρχουν φυσικοί k, l τέτοιοι που $y = k \cdot x$ και $z = l \cdot y$. Έπεται ότι $z = l \cdot (k \cdot x) = (l \cdot k) \cdot x$, δηλαδή ότι ο x διαιρεί τον z. Συνεπώς η σχέση R είναι μεταβατική.

Άσκηση 4.
Πότε λέμε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο; Δείξτε ότι το σύνολο των άρτιων αρνητικών ακεραίων αριθμών είναι άπειρο.

Λύση. Λέμε ότι το τυχόν σύνολο X είναι άπειρο ανν υπάρχει $Y \subset X$ (δηλαδή γνήσιο υποσύνολο Y του X) τέτοιο που $Y \sim X$ (δηλαδή τα X, Y είναι ισοπληθικά, που σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ που είναι 1-1 και επί).
Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\mathbf{Z}_2^-$ των άρτιων αρνητικών ακεραίων, δηλαδή το σύνολο $\{-2, -4, -6, \ldots\}$. Για να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι άπειρο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ισοπληθικό με κάποιο άλλο σύνολο, που γνωρίζουμε (από τη θεωρία) ότι είναι άπειρο, π.χ. το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N}$.
Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}_2^-$ με $f(x) = -2x - 2$ και θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.
Η f είναι $1-1$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$ (για τυχόντα $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$).
Έστω λοιπόν ότι $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή ότι $-2x_1 - 2 = -2x_2 - 2$. Τότε $-2x_1 = -2x_2$ και άρα $x_1 = x_2$.
Η f είναι επί. Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόν $y \in \mathbf{Z}_2^-$ υπάρχει $x \in \mathbf{N}$ τέτοιο που $f(x) = y$.
Έστω λοιπόν τυχόν $y \in \mathbf{Z}_2^-$. Θέτουμε $x = -\frac{y+2}{2}$ και, εφαρμόζοντας τον τύπο της f, έχουμε $f(x) = (-2)(-\frac{y+2}{2}) - 2 = \frac{2(y+2)}{2} - 2 = (y+2) - 2 = y$.

Άσκηση 5. (Θέμα 13-2-1996)
Χρησιμοποιείστε νόμους της προτασιακής λογικής για να αναγάγετε τον $(p \& \sim (p \& \sim q)) \& \sim (p \& q)$ σε ένα απλούστερο προτασιακό τύπο.

Λύση. Με βάση τους νόμους της προτασιακής λογικής που αναφέρονται στα δεξιά, ισχύουν οι αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες:

$(p \& \sim (p \& \sim q)) \& \sim (p \& q)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος DeMorgan)
$(p \& (\sim p \vee \sim\sim q)) \& (\sim p \vee \sim q)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος διπλής άρνησης)
$(p \& (\sim p \vee q)) \& (\sim p \vee \sim q)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$p \& ((\sim p \vee q) \& (\sim p \vee \sim q))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος επιμεριστικότητας)
$p \& (\sim p \vee (q \& \sim q))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος συμπληρώματος)
$p \& (\sim p \vee F)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος ταυτότητας)
$p \& \sim p$	$\Leftrightarrow$	(νόμος συμπληρώματος)
F		

Διαπιστώσαμε δηλαδή ότι ο αρχικός προτασιακός τύπος είναι αντίφαση (πράγμα που μπορούμε να ελέγξουμε, αν θέλουμε, χρησιμοποιώντας αληθοπίνακα).

Άσκηση 6. (Θέμα 4-9-1996)
Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχύει $A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

Λύση. Σύμφωνα με τον ορισμό της συμμετρικής διαφοράς δυο συνόλων

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Θα ξεκινήσουμε από την έκφραση $(A - B) \cup (B - A)$ και θα καταλήξουμε στην έκφραση $A + B$, χρησιμοποιώντας νόμους της άλγεβρας συνόλων.

$$\begin{array}{lcl}
(A - B) \cup (B - A) & = & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
(A \cap B') \cup (B \cap A') & = & (\text{νόμος επιμεριστικότητας}) \\
(A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A') & = & (\text{νόμος επιμεριστικότητας}) \\
(B \cup (A \cap B')) \cap (A' \cup (A \cap B')) & = & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
((B \cup A) \cap (B \cup B')) \cap ((A' \cup A) \cap (A' \cup B')) & = & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
((B \cup A) \cap U) \cap ((A' \cup A) \cap (A' \cup B')) & = & (\text{νόμος ταυτότητας}) \\
(B \cup A) \cap ((A' \cup A) \cap (A' \cup B')) & = & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
(B \cup A) \cap ((A \cup A') \cap (A' \cup B')) & = & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
(B \cup A) \cap (U \cap (A' \cup B')) & = & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
(B \cup A) \cap ((A' \cup B') \cap U) & = & (\text{νόμος ταυτότητας}) \\
(B \cup A) \cap (A' \cup B') & = & (\text{νόμος DeMorgan}) \\
(B \cup A) \cap (A \cap B)' & = & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
(A \cup B) \cap (A \cap B)' & = & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
(A \cup B) - (A \cap B) & = & (\text{ορισμός}) \\
A + B & &
\end{array}$$

Άσκηση 7. (Θέμα 4-9-1996)
Έστω A το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
α) Αποτελεί το σύνολο $P = \{\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 6\}\}$ διαμέριση του A και γιατί; β) Ποιά είναι η σχέση ισοδυναμίας που επάγει στο A την διαμέριση $Q = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$;

Λύση. α) Σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας της διαμέρισης, αρκεί να ελέγξουμε ότι
1) η ένωση των στοιχείων του P ισούται με A και
2) τα στοιχεία του P είναι ξένα ανά δύο, δηλαδή η τομή οποιωνδήποτε δύο στοιχείων ισούται με $\emptyset$.
Σχετικά με το 1), έχουμε $\bigcup P = \{1, 5\} \cup \{2\} \cup \{4\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Σχετικά με το 2), έχουμε

$$\begin{array}{lll}
\{1, 5\} \cap \{2\} = \emptyset & \{1, 5\} \cap \{4\} = \emptyset & \{1, 5\} \cap \{3, 6\} = \emptyset \\
\{2\} \cap \{4\} = \emptyset & \{2\} \cap \{3, 6\} = \emptyset & \{4\} \cap \{3, 6\} = \emptyset.
\end{array}$$

Άρα πράγματι το P αποτελεί διαμέριση του A.
β) Σύμφωνα με τη θεωρία, για κάθε κλάση ισοδυναμίας θα δημιουργήσουμε όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων που ανήκουν στην κλάση αυτή και στη συνέχεια θα πάρουμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που προέκυψαν.

$$\begin{array}{lll} \{1\} & \to & <1,1> \\ \{2\} & \to & <2,2> \\ \{3\} & \to & <3,3> \\ \{4,5,6\} & \to & <4,4>,<4,5>,<4,6>,<5,4>,<5,5> \\ & & <5,6>,<6,4>,<6,5>,<6,6> \end{array}$$

Συνεπώς η σχέση ισοδυναμίας που επάγει η Q στο A είναι η ακόλουθη $\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<4,5>,<4,6>,<5,4>,<5,5>,$ $<5,6>,<6,4>,<6,5>,<6,6>\}$.

Άσκηση 8. (Θέμα 4-9-1996)
Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}$ είναι απαριθμήσιμα άπειρο.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{N} \equiv A$, δηλαδή ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbf{N} \to A$ που είναι 1-1 και επί.
Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f : \mathbf{N} \to A$ με $f(x) = \frac{1}{2^x}$ και θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.
Η f είναι $1-1$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$ (για τυχόντα $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$).
Έστω λοιπόν ότι $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή ότι $\frac{1}{2^{x_1}} = \frac{1}{2^{x_2}}$. Τότε $2^{x_1} = 2^{x_2}$ και άρα $x_1 = x_2$.
Η f είναι επί. Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόν $y \in A$ υπάρχει $x \in \mathbf{N}$ τέτοιο που $f(x) = y$.
Έστω λοιπόν τυχόν $y \in A$. Θέτουμε $x = log_2(\frac{1}{y})$ και, εφαρμόζοντας τον τύπο της f, έχουμε $f(x) = \frac{1}{2^{log_2(\frac{1}{y})}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$.
(Εδώ πρέπει να θυμηθούμε τον ορισμό της συνάρτησης $log_2(.)$, δηλαδή της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x το λογάριθμό του με βάση το 2.)

Άσκηση 9. (Θέμα 4-9-1996)
Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, δείξτε ότι ο $((\sim p)\&q) \leftrightarrow (p \vee q)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον προτασιακό τύπο $\sim p$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας ένα από τους νόμους της διπλής συνεπαγωγής, έχουμε ότι

$$((\sim p)\&q) \leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow (((\sim p)\&q) \to (p \vee q))\&((p \vee q) \to ((\sim p)\&q)).$$

Θα απλοποιήσουμε χωριστά το κάθε μέρος της σύζευξης στο δεξιό μέρος της λογικής ισοδυναμίας παραπάνω. Για το πρώτο μέρος έχουμε:

$$\begin{array}{lll}
((\sim p)\&q) \to (p \vee q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος συνεπαγωγής}) \\
\sim ((\sim p)\&q) \vee (p \vee q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος DeMorgan}) \\
(\sim (\sim p) \vee (\sim q)) \vee (p \vee q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος διπλής άρνησης}) \\
(p \vee (\sim q)) \vee (p \vee q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος προσεταιριστικότητας}) \\
p \vee ((\sim q) \vee (p \vee q)) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
p \vee ((p \vee q) \vee (\sim q)) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος προσεταιριστικότητας}) \\
p \vee (p \vee (q \vee (\sim q)) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
p \vee (p \vee T) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος ταυτότητας}) \\
p \vee T & \Leftrightarrow & (\text{νόμος ταυτότητας}) \\
T & &
\end{array}$$

Για το δεύτερο μέρος έχουμε:

$$\begin{array}{lll}
(p \vee q) \to ((\sim p)\&q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος συνεπαγωγής}) \\
\sim (p \vee q) \vee ((\sim p)\&q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος DeMorgan}) \\
(\sim p\& \sim q) \vee ((\sim p)\&q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος προσεταιριστικότητας}) \\
(\sim p)\&((\sim q) \vee q) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος αντιμεταθετικότητας}) \\
(\sim p)\&(q \vee (\sim q)) & \Leftrightarrow & (\text{νόμος συμπληρώματος}) \\
(\sim p)\&T & \Leftrightarrow & (\text{νόμος ταυτότητας}) \\
\sim p & &
\end{array}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$((\sim p)\&q) \leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow T\&(\sim p).$$

Εφαρμόζοντας τώρα στο δεξιό μέρος της λογικής ισοδυναμίας πρώτα το νόμο αντιμεταθετικότητας και μετά νόμο ταυτότητας παίρνουμε ότι

$$((\sim p)\&q) \leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p)\&T \Leftrightarrow \sim p.$$

***Άσκηση* 10.** (Θέμα 4-9-1996)
Δείξτε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη

$$\begin{array}{l}
s \to (\sim r) \\
(\sim p) \to q \\
r \to (s \vee t) \\
p \to (\sim t) \\
\hline
r \to q
\end{array}$$

Λύση. Επειδή το συμπέρασμα έχει μορφή συνεπαγωγής, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης. Με βάση τη μέθοδο αυτή, αντί να ελέγξουμε ότι η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, αρκεί να ελέγξουμε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

$$
\begin{array}{l}
s \to (\sim r) \\
(\sim p) \to q \\
r \to (s \vee t) \\
p \to (\sim t) \\
r \\
\hline
q
\end{array}
$$

Εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής και νόμους της προτασιακής λογικής, παίρνουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$s \to (\sim r)$	υπόθεση
2.	$(\sim p) \to q$	υπόθεση
3.	$r \to (s \vee t)$	υπόθεση
4.	$p \to (\sim t)$	υπόθεση
5.	r	βοηθητική υπόθεση
6.	$s \vee t$	3, 5, Modus Ponens
7.	$\sim (\sim r)$	5, νόμος διπλής άρνησης
8.	$\sim s$	1, 7, Modus Tollens
9.	t	6, 8, Διαζ. Συλλ.
10.	$\sim (\sim t)$	9, νόμος διπλής άρνησης
11.	$\sim p$	4, 10, Modus Tollens
12.	q	2, 11, Modus Ponens

Άσκηση 11. (Θέμα 14-2-1997)
Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχύει $A' - B' = B - A$.

Λύση. Εφαρμόζοντας νόμους της «άλγεβρας των συνόλων», έχουμε ότι για τυχόντα σύνολα A, B ισχύει

$$
\begin{array}{lll}
A' - B' & = & \text{(4ος νόμος συμπληρώματος)} \\
A' \cap (B')' & = & \text{(3ος νόμος συμπληρώματος)} \\
A' \cap B & = & \text{(νόμος αντιμεταθετικότητας)} \\
B \cap A' & = & \text{(4ος νόμος συμπληρώματος)} \\
B - A & &
\end{array}
$$

Άσκηση 12. (Θέμα 14-2-1997)
Έστω A το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος ΜΙΘΕ και R η σχέση στο A που ορίζεται ως εξής:

xRy ανν τα επώνυμα των x, y αρχίζουν με το ίδιο γράμμα.

α) Είναι η R σχέση ισοδυναμίας στο A και γιατί;
β) Αν είναι, ποιές είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της R;

Λύση. α) Ελέγχουμε ότι η R είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας.
Ανακλαστικότητα. Η R είναι ανακλαστική, διότι xRx για κάθε φοιτητή x του Τμήματος (το επώνυμο του x προφανώς αρχίζει με το ίδιο γράμμα με το επώνυμο

του x).

<u>Συμμετρικότητα.</u> Έστω ότι x, y είναι φοιτητές του Τμήματος με xRy, δηλαδή το επώνυμο του x αρχίζει με το ίδιο γράμμα με το επώνυμο του y. Τότε το επώνυμο του y αρχίζει με το ίδιο γράμμα με το επώνυμο του x, δηλαδή yRx.

<u>Μεταβατικότητα.</u> Έστω ότι x, y, z είναι φοιτητές του Τμήματος με xRy και yRz, δηλαδή το επώνυμο του x αρχίζει με το ίδιο γράμμα με το επώνυμο του y και το επώνυμο του y αρχίζει με το ίδιο γράμμα με το επώνυμο του z. Τότε τα επώνυμα των x, z αρχίζουν με το ίδιο γράμμα, οπότε xRz.

β) Κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει εκείνους τους φοιτητές που το όνομά τους αρχίζει με το ίδιο γράμμα της αλφαβήτου, π.χ. το Α ή το Κ ή το Υ. Το πλήθος των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας είναι το πολύ 24, αφού υπάρχουν 24 γράμματα (ανάλογα με το ακαδημαϊκό έτος, το πλήθος αυτό θα μπορούσε να είναι 1,2,3,..., 24· βέβαια είναι απίθανο το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας να είναι πολύ μικρό, π.χ. 2, αφού αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχουν δύο γράμματα, π.χ. το Α και το Μ, τέτοια που το επώνυμο κάθε φοιτητή να αρχίζει με το ένα ή το άλλο).

Άσκηση 13. (Θέμα 14-2-1997)

Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a, b\}$. α) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις από το A στο B.

β) Ποιές από αυτές είναι 1-1 και ποιές επί;

Λύση. α) Με βάση τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, πρέπει να βρούμε όλους τους τρόπους αντιστοίχισης των στοιχείων του A σε στοιχεία του B. Επειδή το A έχει 3 στοιχεία και το B έχει 2, το πλήθος των τρόπων αυτών είναι 2.2.2=8. Οι συναρτήσεις είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, a >\}\\
f_2 &= \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, b >\}\\
f_3 &= \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, a >\}\\
f_4 &= \{< 1, b >, < 2, a >, < 3, a >\}\\
f_5 &= \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, b >\}\\
f_6 &= \{< 1, b >, < 2, a >, < 3, b >\}\\
f_7 &= \{< 1, b >, < 2, b >, < 3, a >\}\\
f_8 &= \{< 1, b >, < 2, b >, < 3, b >\}.
\end{aligned}$$

β) Σύμφωνα με τη θεωρία, μια συνάρτηση είναι 1-1 όταν αντιστοιχεί διαφορετικές εικόνες σε διαφορετικά πρότυπα. Παρατηρούμε ότι καμιά από τις συναρτήσεις δεν είναι 1-1, αφού για καθεμιά τους υπάρχουν δύο στοιχεία του A που τα αντιστοιχεί στην ίδια εικόνα (π.χ. $f_1(2) = f_1(3)$, $f_6(1) = f_6(3)$).

Σύμφωνα με τη θεωρία, μια συνάρτηση είναι επί όταν κάθε στοιχείο του συνόλου στο οποίο κυμαίνονται οι τιμές της αποτελεί εικόνα κάποιου στοιχείου του πεδίου ορισμού. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_8 δεν είναι επί (του B), αφού το πεδίο τιμών της f_1 είναι το $\{a\} \subset B$ και το πεδίο τιμών της f_8 είναι το $\{b\} \subset B$. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις είναι όλες επί (του B).

Άσκηση 14. (Θέμα 14-2-1997)
Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, δείξτε ότι ο προτασιακός τύπος $(p\&q) \to r$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(p \to r)\&(q \to r)$.

Λύση. Με βάση τους νόμους της προτασιακής λογικής που αναφέρονται στα δεξιά, ισχύουν οι αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες:

$(p \to r) \vee (q \to r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος συνεπαγωγής)
$((\sim p) \vee r) \vee ((\sim q) \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$(\sim p) \vee (r \vee ((\sim q) \vee r))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος αντιμεταθετικότητας)
$(\sim p) \vee (((\sim q) \vee r) \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$(\sim p) \vee ((\sim q) \vee (r \vee r))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος αυτοπάθειας)
$(\sim p) \vee ((\sim q) \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$((\sim p) \vee (\sim q)) \vee r$	$\Leftrightarrow$	(νόμος DeMorgan)
$(\sim (p\&q)) \vee r$	$\Leftrightarrow$	(νόμος συνεπαγωγής)
$(p\&q) \to r$		

Άσκηση 15. (Θέμα 14-2-1997)
Δείξτε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \sim p \\ (q\&(\sim r)) \vee t \\ (s \vee t) \to r \\ \hline r\&(\sim q) \end{array}$$

Λύση. Εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής και νόμους της προτασιακής λογικής, παίρνουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$p \leftrightarrow q$	υπόθεση
2.	$(\sim p)$	υπόθεση
3.	$(q\&(\sim r)) \vee t$	υπόθεση
4.	$(s \vee t) \to r$	υπόθεση
5.	$(p \to q)\&(q \to p)$	1, νόμος διπλής συνεπαγωγής
6.	$(q \to p)\&(p \to q)$	5, νόμος αντιμεταθετικότητας
7.	$q \to p$	6, Απλοποίηση
8.	$\sim q$	2, 7, Modus Tollens
9.	$(\sim q) \vee r$	8, Πρόσθεση
10.	$(\sim q) \vee (\sim (\sim r))$	9, νόμος διπλής άρνησης
11.	$\sim (q\&(\sim r))$	10, νόμος DeMorgan
12.	t	3, 11, Διαζ. Συλλ.
13.	$t \vee s$	12, Πρόσθεση
14.	$s \vee t$	13, νόμος αντιμεταθετικότητας
15.	r	4, 14, Modus Ponens
16.	$r\&(\sim q)$	8, 15, Σύζευξη

Άσκηση 16. (Θέμα 11-2-2005)
Έστω A το σύνολο $\{0, \{\emptyset\}, 1\}$. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν και γιατί;

$$\{0\} \subseteq A,\ \emptyset \subset A,\ \{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A).$$

Λύση. Η πρόταση $\{0\} \subseteq A$ είναι αληθής, διότι το 0, το μοναδικό στοιχείο του πρώτου συνόλου, ανήκει πράγματι στο σύνολο A.
Η πρόταση $\emptyset \subset A$ είναι αληθής, διότι
α) $\emptyset \subseteq A$, αφού το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, σύμφωνα με τη θεωρία, και
β) υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A, π.χ. το 0, που δεν ανήκει στο $\emptyset$ (στην πραγματικότητα, κανένα από τα στοιχεία του A δεν ανήκει στο $\emptyset$).
Η πρόταση $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$ δεν είναι αληθής, διότι το σύνολο $\{\emptyset\}$ δεν ανήκει στο δυναμοσύνολο του A· πράγματι, αν το $\{\emptyset\}$ ανήκε στο $\mathcal{P}(A)$, θάπρεπε να ισχύει $\{\emptyset\} \subseteq A$, δηλαδή $\emptyset \in A$, που δεν είναι αληθές.
(Για να λύσουμε την άσκηση αυτή, πρέπει να έχουμε καταλάβει καλά τους ορισμούς των εννοιών "υποσύνολο" και "γνήσιο υποσύνολο".)

Άσκηση 17. (Θέμα 11-2-2005)
Δώστε παράδειγμα σχέσης στο σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ που είναι ανακλαστική και ολική, αλλά όχι συμμετρική.

Λύση. Έστω R μια σχέση στο που ικανοποιεί τις ιδιότητες της εκφώνησης. Τότε $R \subseteq A \times A$ και ισχύουν τα ακόλουθα:
α) για κάθε $a \in A$, $< a, a >\in R$ (ανακλαστικότητα)
β) για κάθε $a, b \in A, a \neq b$, ισχύει $< a, b >\in R$ ή $< b, a >\in R$ (ολικότητα)
γ) υπάρχουν $a, b \in R, a \neq b$, τέτοια που ισχύει $< a, b >\in R$ αλλά δεν ισχύει $< b, a >\in R$ (μη συμμετρικότητα).
Με βάση το α), τα διατεταγμένα ζεύγη $< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >$ πρέπει να είναι στοιχεία της R.
Με βάση το β), οποιαδήποτε δύο στοιχεία του A πρέπει να σχετίζονται κάπως μέσω της R· αυτό εξασφαλίζεται παίρνοντας, π.χ., τα διατεταγμένα ζεύγη $< 1, 2 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 3 >, < 2, 4 >, < 3, 4 >$.
Παρατηρούμε ότι το γ) ισχύει, αν συμπεριλάβουμε στην R ακριβώς τα ζεύγη που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα· πράγματι, ισχύει $< 1, 2 >\in R$ αλλά $< 2, 1 >\notin R$.
Επομένως μια σχέση στο A που ικανοποιεί τις ιδιότητες που θέλουμε είναι η $\{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 3 >, < 2, 4 >, < 3, 4 >\}$.
Σημείωση. Άλλες σχέσεις που ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες προκύπτουν αν προσθέσουμε ζεύγη σε σχέση με το β), προσέχοντας όμως να ικανοποιείται ταυτόχρονα και το γ). Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε, π.χ., τα ζεύγη $< 2, 1 >, < 3, 1 >, < 4, 1 >$ και πάλι να ικανοποιηθούν όλες οι ιδιότητες της

εκφώνησης.

***Άσκηση* 18.** (Θέμα 11-2-2005)
Έστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Βρείτε τη σχέση ισοδυναμίας που επάγει στο A τη διαμέριση $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

Λύση. Σύμφωνα με τη θεωρία, για κάθε κλάση ισοδυναμίας θα δημιουργήσουμε όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων που ανήκουν στην κλάση αυτή και στη συνέχεια θα πάρουμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που προέκυψαν.

$$\begin{array}{lll} \{1\} & \rightarrow & <1,1> \\ \{2,3\} & \rightarrow & <2,2>, <3,3>, <2,3>, <3,2> \\ \{4,5,6\} & \rightarrow & <4,4>, <4,5>, <4,6>, <5,4>, <5,5> \\ & & <5,6>, <6,4>, <6,5>, <6,6> \end{array}$$

Συνεπώς η σχέση ισοδυναμίας που επάγει η διαμέριση στο A είναι η
$\{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <2,3>, <3,2>, <4,4>, <4,5>, <4,6>,$
$<5,4>, <5,5>, <5,6>, <6,4>, <6,5>, <6,6>\}$.

***Άσκηση* 19.** (Θέμα 11-2-2005)
α) Εξετάστε αν ο προτασιακός τύπος $((p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ είναι ή όχι ταυτολογία.
β) Συνεπάγεται λογικά ο προτασιακός τύπος του α) τον $p \rightarrow (q \& r)$ και γιατί;

Λύση. α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας για τον προτασιακό τύπο.

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Αφού υπάρχει (τουλάχιστον) μια σειρά στην οποία παίρνει τιμή 0, ο προτασιακός τύπος δεν είναι ταυτολογία.
β) Κατασκευάζουμε πάλι πίνακα αλήθειας για τους δύο προτασιακούς τύπους.

p	q	r	$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$q \& r$	$p \rightarrow (q \& r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Παρατηρούμε ότι στην τρίτη σειρά του πίνακα ο πρώτος προτασιακός τύπος παίρνει τιμή 1, ενώ ο δεύτερος τιμή 0. Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας της λογικής συνεπαγωγής, ο πρώτος προτασιακός τύπος δεν συνεπάγεται λογικά το δεύτερο.

***Άσκηση* 20.** (Θέμα 11-2-2005)
Δώστε τυπική απόδειξη εγκυρότητας για την επιχειρηματική μορφή:

$$\begin{array}{l} (p\&q) \vee (p\&r) \\ (p \vee q) \to (\sim r) \\ \hline p \to q \end{array}$$

Λύση. Επειδή το συμπέρασμα έχει μορφή συνεπαγωγής, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης. Με βάση τη μέθοδο αυτή, αντί να ελέγξουμε ότι η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, αρκεί να ελέγξουμε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

$$\begin{array}{l} (p\&q) \vee (p\&r) \\ (p \vee q) \to (\sim r) \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής και νόμους της προτασιακής λογικής, παίρνουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$(p\&q) \vee (p\&r)$	υπόθεση
2.	$(p \vee q) \to (\sim r)$	υπόθεση
3.	p	βοηθητική υπόθεση
4.	$p \vee q$	3, Πρόσθεση
5.	$\sim r$	2, 4, Modus Ponens
6.	$p\&(q \vee r)$	1, νόμος επιμεριστικότητας
7.	$q \vee r$	6, Απλοποίηση
8.	$r \vee q$	7, νόμος αντιμεταθετικότητας
9.	q	5, 8, Διαζ. Συλλ.

***Άσκηση* 21.** (Θέμα 24-6-2005)
Ορίστε το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ με αναγραφή των στοιχείων του, όπου A είναι το σύνολο $\{\{0\}, 0, \{1\}\}$.

Λύση. Το A έχει 3 στοιχεία, άρα το $\mathcal{P}(A)$ έχει $2^3 = 2.2.2 = 8$ στοιχεία. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το $\emptyset$ και το A ανήκουν στο $\mathcal{P}(A)$, για κάθε σύνολο A. Τα υπόλοιπα στοιχεία του $\mathcal{P}(A)$, δηλαδή υποσύνολα του A, είναι
α) όλα τα μονοσύνολα που κατασκευάζονται με στοιχεία του A, δηλαδή τα $\{\{0\}\}, \{0\}, \{\{1\}\}$
β) όλα τα ζεύγη που κατασκευάζονται με στοιχεία του A, δηλαδή τα $\{\{0\}, 0\}$,

$\{\{0\},\{1\}\},\{0,\{1\}\}$.
Συνεπώς $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{\{0\}\},\{0\},\{\{1\}\},\{\{0\},0\},\{\{0\},\{1\}\},\{0,\{1\},A\}\}$.

***Άσκηση* 22.** (Θέμα 24-6-2005)
Έστω $A=\{a,b,c\}$ και $B=\{1,2,3\}$.
α) Πόσες σχέσεις από το A στο B υπάρχουν;
β) Πόσες από τις σχέσεις είναι συναρτήσεις από το A στο B;
γ) Πόσες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφες που είναι συναρτήσεις;

Λύση. α) Αφού μια σχέση από το A στο B είναι ένα υποσύνολο του $A\times B$, το πλήθος των σχέσεων από το A στο B ταυτίζεται με το πλήθος των υποσυνόλων του $A\times B$, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{P}(A\times B)$. Επειδή το A έχει 3 στοιχεία και το B έχει επίσης 3 στοιχεία, το $A\times B$ έχει 3.3=9 στοιχεία, οπότε το $\mathcal{P}(A\times B)$ έχει $2^9=2.2.2.2.2.2.2.2.2=512$ στοιχεία.
β) Αφού το A έχει 3 στοιχεία, καθένα από τα οποία μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα από τα 3 στοιχεία του B, υπάρχουν 3.3.3=27 συναρτήσεις από το A στο B. Έτσι, από τις 512 σχέσεις από το A στο B μόνο 27 είναι συναρτήσεις.
γ) Από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη σχέση μιας συνάρτησης f είναι επίσης συνάρτηση μόνο αν η f είναι 1-1. Ας δούμε πόσες από τις 27 συναρτήσεις από το A στο B είναι 1-1. Αν η f είναι 1-1 συνάρτηση από το A στο B, υπάρχουν 3 επιλογές που μπορούν να αποτελέσουν την τιμή $f(a)$, 2 επιλογές που μπορούν να αποτελέσουν την τιμή $f(b)$ και 1 επιλογή για την τιμή $f(c)$. Άρα το πλήθος των 1-1 συναρτήσεων από το A στο B είναι 3.2.1=6. Έτσι, 6 από τις 27 συναρτήσεις από το A στο B είναι 1-1.

***Άσκηση* 23.** (Θέμα 24-6-2005)
Εξετάστε αν είναι λογικά ισοδύναμοι οι προτασιακοί τύποι

$$p\&((\sim p)\&(q\vee r)),\ \ (p\to q)\vee((\sim r)\leftrightarrow p).$$

Λύση. Κατασκευάζουμε πίνακα αλήθειας για τους προτασιακούς τύπους, συμβολίζοντας τον πρώτο με P και το δεύτερο με Q.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$q\vee r$	$p\to$	$(\sim r)\leftrightarrow p$	$(\sim p)\&(q\vee r)$	P	Q
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0

Από τις τελευταίες δύο στήλες φαίνεται ότι οι προτασιακοί τύποι δεν έχουν πάντα τις ίδιες τιμές αλήθειας (στην πραγματικότητα, έχουν σχεδόν πάντα διαφορετικές τιμές αλήθειας), άρα δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.

Άσκηση 24. (Θέμα 24-6-2005)
Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιήστε τον προτασιακό τύπο $(\sim p)\&((p\&q) \vee (p\&r))$.

Λύση. Με βάση τους νόμους της προτασιακής λογικής που αναφέρονται στα δεξιά, ισχύουν οι αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες:

$(\sim p)\&((p\&q) \vee (p\&r))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος επιμεριστικότητας)
$(\sim p)\&(p\&(q \vee r))$	$\Leftrightarrow$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$((\sim p)\&p)\&(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος αντιμεταθετικότητας)
$(p\&(\sim p))\&(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος συμπληρώματος)
$F\&(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	(νόμος αντιμεταθετικότητας)
$(q \vee r)\&F$	$\Leftrightarrow$	(νόμος ταυτότητας)
F		

Άσκηση 25. (Θέμα 24-6-2005)
Δώστε τυπική απόδειξη εγκυρότητας για την επιχειρηματική μορφή

$$\begin{array}{l} p \to (r \to q) \\ (\sim s) \vee p \\ r \\ \hline s \to q \end{array}$$

Λύση. Επειδή το συμπέρασμα έχει μορφή συνεπαγωγής, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης. Με βάση τη μέθοδο αυτή, αντί να ελέγξουμε ότι η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, αρκεί να ελέγξουμε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

$$\begin{array}{l} p \to (r \to q) \\ (\sim s) \vee p \\ r \\ s \\ \hline q \end{array}$$

Εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής και νόμους της προτασιακής λογικής, παίρνουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$p \to (r \to q)$	υπόθεση
2.	$(\sim s) \vee p$	υπόθεση
3.	r	υπόθεση
4.	s	βοηθητική υπόθεση
5.	$\sim (\sim s)$	4, νόμος διπλής άρνησης
6.	p	2, 5, Διαζ. Συλλ.
7.	$r \to q$	1, 6, Modus Ponens
8.	q	3, 7, Modus Ponens

Άσκηση 26. (Θέμα 29-8-2005)
Έστω A το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών. Ορίστε το A με α) αναγραφή των στοιχείων του, β) περιγραφή των στοιχείων του και γ) αναδρομή.

Λύση. α) $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
β) $A = \{n \in \mathbb{N} |$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο που $n = 2.k\}$
γ) Ο ορισμός του A με αναδρομή έχει ως εξής:
1. $0 \in A$
2. για κάθε $x \in \mathbb{N}$, αν $x \in A$, τότε $x + 2 \in A$
3. τίποτε άλλο δεν ανήκει στο A.

Άσκηση 27. (Θέμα 29-8-2005)
Είναι αλήθεια ότι για κάθε σύνολο X ισχύει $X \times \emptyset = \emptyset$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Με βάση τον ορισμό της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου συνόλων, το σύνολο $X \times \emptyset$ έχει ως στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $< a, b >$, όπου a είναι τυχόν στοιχείο του X και b είναι τυχόν στοιχείο του $\emptyset$. Επειδή όμως το $\emptyset$ δεν έχει καθόλου στοιχεία, δεν είναι δυνατό να δημιουργήσουμε κανένα διατεταγμένο ζεύγος της παραπάνω μορφής. Άρα $X \times \emptyset = \emptyset$, για κάθε σύνολο X.

Άσκηση 28. (Θέμα 29-8-2005)
Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο μαθημάτων που διδάσκονται στο Τμήμα ΜΙΘΕ:

A = {Πολιτική Οικονομία (Γ' εξ.), Ιστορία Φιλοσοφίας ΙΙΙ (Γ' εξ.), Εισαγωγή στην Αισθητική (Δ' εξ.), Εισαγωγή στις Νευροεπιστήμες (Ε' εξ.), Δαρβινισμός (ΣΤ' εξ.), Φιλοσοφία της Ιστορίας (Η' εξ.)}.

Έστω R η σχέση στο A που ορίζεται ως εξής:

xRy ανν το x διδάσκεται στο ίδιο έτος σπουδών με το y.

Βρείτε τα στοιχεία της R. Είναι η R σχέση ισοδυναμίας στο A; Αν είναι, βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η R.

Λύση.
R = {<Πολ.Οικ.Ι,Πολ.Οικ.Ι>, <Πολ.Οικ.Ι,Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ>, <Πολ.Οικ.Ι, Εισ.Αισθ.>, <Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ,Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ>, <Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ,Εισ.Αισθ.>, <Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ,Πολ.Οικ.Ι>, <Εισ.Αισθ.,Εισ.Αισθ.>, <Εισ.Αισθ., Πολ.Οικ.Ι>, <Εισ.Αισθ.,Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ>, <Εισ.Νευρ.,Εισ.Νευρ.>, <Εισ.Νευρ.,Δαρβ.>, <Δαρβ.,Δαρβ.>, <Δαρβ.,Εισ.Νευρ.>, <Φιλ.Ιστ.,Φιλ.Ιστ>}.
Ναι, η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο A, αφού
α) περιέχει όλα τα ζεύγη $< a, a >$, όπου $a \in A$ (ανακλαστικότητα)
β) αν περιέχει ένα ζεύγος της μορφής $< a, b >$, τότε περιέχει και το ζεύγος της

μορφής $< b, a >$ (συμμετρικότητα)
γ) αν περιέχει το ζεύγος $< a, b >$ και το ζεύγος $< b, c >$, τότε περιέχει και το ζεύγος $< a, c >$ (μεταβατικότητα).
Οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι οι ακόλουθες:
{Πολ.Οικ.Ι, Ιστ.Φιλ.ΙΙΙ, Εισ.Αισθ.}
{Εισ.Νευρ., Δαρβ.}
{Φιλ.Ιστ.}

Άσκηση 29. (Θέμα 29-8-2005)
Δώστε μια τυπική απόδειξη εγκυρότητας για την ακόλουθη επιχειρηματική μορφή:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to (r \vee s)) \\ \sim (r \vee s) \\ \hline (\sim p) \vee (\sim q) \end{array}$$

Λύση. Με βάση νόμο συνεπαγωγής της προτασιακής λογικής, ο προτασιακός τύπος $(\sim p) \vee (\sim q)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον προτασιακό τύπο $p \to (\sim q)$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to (r \vee s)) \\ \sim (r \vee s) \\ \hline p \to (\sim q) \end{array}$$

Επειδή όμως το συμπέρασμα της νέας επιχειρηματικής μορφής είναι συνεπαγωγή, με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, αρκεί να δείξουμε ότι είναι έγκυρη η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to (r \vee s)) \\ \sim (r \vee s) \\ p \\ \hline (\sim q) \end{array}$$

Εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής και νόμους της προτασιακής λογικής, παίρνουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$p \to (q \to (r \vee s))$	υπόθεση
2.	$\sim (r \vee s)$	υπόθεση
3.	p	βοηθητική υπόθεση
4.	$q \to (r \vee s)$	1, 3, Modus Ponens
5.	$\sim q$	2, 4, Modus Tollens

2ος τρόπος.
Με βάση τη μέθοδο έμμεσης απόδειξης (ή απαγωγής στο άτοπο), αρκεί να δείξουμε ότι παράγεται κάποια αντίφαση από τις υποθέσεις

$$p \to (q \to (r \vee s))$$
$$\sim (r \vee s)$$
$$\sim ((\sim p) \vee (\sim q))$$

Αυτό όμως προκύπτει από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$p \to (q \to (r \vee s))$	υπόθεση
2.	$\sim (r \vee s)$	υπόθεση
3.	$\sim ((\sim p) \vee (\sim q))$	βοηθητική υπόθεση
4.	$(\sim (\sim p))\&(\sim (\sim q))$	3, νόμος DeMorgan
5.	$p\&q$	4, νόμος διπλής άρνησης
6.	p	5, Απλοποίηση
7.	$q \to (r \vee s)$	1, 6, Modus Ponens
8.	$q\&p$	4, νόμος αντιμεταθετικότητας
9.	q	8, Απλοποίηση
10.	$r \vee s$	7, 9, Modus Ponens
11.	$(r \vee s)\& \sim (r \vee s)$	2, 10, Σύζευξη

Όμως ο προτασιακός τύπος $(r \vee s)\& \sim (r \vee s)$ είναι αντίφαση, αφού είναι της μορφής $P\&(\sim P)$. Συνεπώς η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Άσκηση 30. (Θέμα 1-2-2006)
Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιήστε τον προτασιακό τύπο $[(p\&(\sim q)) \vee ((\sim p)\&q)] \vee ((\sim p)\&(\sim q))$.

Λύση. Με βάση τους νόμους της προτασιακής λογικής που αναφέρονται στα δεξιά, ισχύουν οι αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες:

$[(p\&(\sim q)) \vee ((\sim p)\&q)] \vee ((\sim p)\&(\sim q))$	$\Leftrightarrow$	νόμος προσεταιριστικότητας
$(p\&(\sim q)) \vee [((\sim p)\&q) \vee ((\sim p)\&(\sim q))]$	$\Leftrightarrow$	νόμος επιμεριστικότητας
$(p\&(\sim q)) \vee [((\sim p)\&(q \vee (\sim q))]$	$\Leftrightarrow$	νόμος συμπληρώματος
$(p\&(\sim q)) \vee [(\sim p)\&T]$	$\Leftrightarrow$	νόμος ταυτότητας
$(p\&(\sim q)) \vee (\sim p)$	$\Leftrightarrow$	νόμος αντιμεταθετικότητας
$(\sim p) \vee (p\&(\sim q))$	$\Leftrightarrow$	νόμος επιμεριστικότητας
$((\sim p) \vee p)\&((\sim p) \vee (\sim q))$	$\Leftrightarrow$	νόμος αντιμεταθετικότητας
$(p \vee (\sim p))\&((\sim p) \vee (\sim q))$	$\Leftrightarrow$	νόμος συμπληρώματος
$T\&((\sim p) \vee (\sim q))$	$\Leftrightarrow$	νόμος αντιμεταθετικότητας
$((\sim p) \vee (\sim q))\&T$	$\Leftrightarrow$	νόμος ταυτότητας
$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\Leftrightarrow$	νόμος DeMorgan
$\sim (p\&q)$		

Άσκηση 31. (Θέμα 1-2-2006)
Θεωρούμε τη σχέση R στο σύνολο των ανθρώπων που ορίζεται ως

xRy ανν ο άντρας x είναι θείος του (ανθρώπου) y.

Εξετάστε αν η R είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική. Θα αλλάξουν οι απαντήσεις σας αν η σχέση οριστεί στο σύνολο των ανδρών;

Λύση. Πρώτα θεωρούμε την R ως σχέση στο σύνολο των ανθρώπων Π. Σύμφωνα με τους ορισμούς των αντίστοιχων εννοιών,

α) R ανακλαστική σημαίνει ότι xRx, για κάθε $x \in \Pi$. Όμως κανένας άνθρωπος δεν είναι θείος του εαυτού του, άρα η R δεν είναι ανακλαστική.

β) R συμμετρική σημαίνει ότι για οποιουσδήποτε ανθρώπους x, y, αν ισχύει xRy, τότε ισχύει yRx. Αυτό όμως δεν αληθεύει, αφού όταν ο άνδρας x είναι θείος του ανθρώπου y, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι ο y είναι θείος του x (αυτό που ισχύει είναι ότι ο y είναι ανιψιός ή ανιψιά του x). Άρα η R δεν είναι συμμετρική.

γ) R μεταβατική σημαίνει ότι για οποιουσδήποτε ανθρώπους x, y, z, αν ισχύει xRy και yRz, τότε ισχύει xRz. Αυτό όμως δεν αληθεύει, αφού όταν ο άνδρας x είναι θείος του y και ο άνδρας y είναι θείος του ανθρώπου x, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι ο x είναι θείος του z (οι x, z έχουν διαφορά 2 γενεών, σκεφθείτε κάποιο παράδειγμα από το οικογενειακό σας περιβάλλον). Άρα η R δεν είναι ούτε μεταβατική.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σχέση R στο σύνολο των ανδρών. Οι απαντήσεις μας δεν θα αλλάξουν, μια και στηρίζονταν στο γεγονός ότι πριν επιτρέπονταν διατεταγμένα ζεύγη με πρώτη συντεταγμένη άνδρα και δεύτερη γυναίκα, αλλά στο νόημα της σχέσης καθεαυτής (π.χ. στο β) δεν παίζει ρόλο αν ο y είναι ανιψιός ή ανιψιά του x, αφού και στις δύο περιπτώσεις είναι αδύνατο ο y να είναι θείος του x).

Άσκηση 32. (Θέμα 28-6-2006)

Θεωρούμε τη σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών που ορίζεται ως εξής:

$$R = \{< x, y > | 2x + y = 8\}.$$

Βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της R, καθώς και την αντίστροφη σχέση.

Λύση. Αφού οι μεταβλητές διατρέχουν το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ισχύει $0 \leq 2x \leq 8$, δηλαδή $0 \leq x \leq 4$, και $0 \leq y \leq 4$. Αναζητώντας λοιπόν τις λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 8$, έχουμε να θεωρήσουμε ως υποψήφιες τιμές της x τις 0,1,2,3,4. Διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{array}{c}
\text{για } x = 0 \text{ η τιμή } y = 8 \text{ οδηγεί στη λύση } < 0, 8 > \text{ της εξίσωσης} \\
\text{για } x = 1 \text{ η τιμή } y = 6 \text{ οδηγεί στη λύση } < 1, 6 > \text{ της εξίσωσης} \\
\text{για } x = 2 \text{ η τιμή } y = 4 \text{ οδηγεί στη λύση } < 2, 4 > \text{ της εξίσωσης} \\
\text{για } x = 3 \text{ η τιμή } y = 2 \text{ οδηγεί στη λύση } < 3, 2 > \text{ της εξίσωσης} \\
\text{για } x = 4 \text{ η τιμή } y = 0 \text{ οδηγεί στη λύση } < 4, 0 > \text{ της εξίσωσης.}
\end{array}$$

Άρα η R έχει ως στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη $< 0, 8 >, < 1, 6 >, < 2, 4 >, < 3, 2 >, < 4, 0 >$. Με βάση τους ορισμούς, το πεδίο ορισμού έχει ως στοιχεία τις πρώτες συντεταγμένες των ζευγών που ανήκουν στην R, ενώ το πεδίο τιμών τις δεύτερες συντεταγμένες. Συνεπώς

$$dom(R) = \text{π.ο.}(R) = \{0,1,2,3,4\} \text{ και } ran(R) = \text{π.τ.}(R) = \{8,6,4,2,0\}.$$

Για να βρούμε τη σχέση R^{-1}, δηλαδή την αντίστροφη της R, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντιστρέψουμε το ρόλο των συντεταγμένων των στοιχείων της R. Έτσι $R^{-1} = \{<8,0>, <6,1>, <4,2>, <2,3>, <0,4>\}$.

Άσκηση 33. (Θέμα 28-6-2006)
Εκφράστε σε συμβολική μορφή το ακόλουθο επιχείρημα και δώστε μια τυπική απόδειξη εγκυρότητας:
Η συνέλευση θα πραγματοποιηθεί μόνον αν η πρόσκληση στάλθηκε έγκαιρα και είναι παρόντα τουλάχιστον τα μισά από τα μέλη. Η απόφαση για την απεργία θα ληφθεί στα πλαίσια του νόμου αν και μόνον αν η συνέλευση πραγματοποιηθεί. Η πρόσκληση για τη συνέλευση στάλθηκε καθυστερημένα. Συνεπώς, η απόφαση για την απεργία δεν θα ληφθεί στα πλαίσια του νόμου.

Λύση. Αρχίζουμε γράφοντας σε συμβολική μορφή καθεμιά από τις τέσσερις προτάσεις που αποτελούν το επιχείρημα.
1) Με βάση τον τρόπο χρήσης της έκφρασης "μόνον αν", η πρώτη πρόταση είναι συνώνυμη με την πρόταση "Αν η συνέλευση πραγματοποιηθεί, τότε η πρόσκληση στάλθηκε έγκαιρα και είναι παρόντα τουλάχιστον τα μισά από τα μέλη".
Συμβολίζοντας με p την πρόταση "Η συνέλευση πραγματοποιήθηκε", με q την πρόταση "Η πρόσκληση στάλθηκε έγκαιρα" και με r την πρόταση "Είναι παρόντα τουλάχιστον τα μισά από τα μέλη", βλέπουμε ότι η πρώτη πρόταση του επιχειρήματος αντιπροσωπεύεται από την έκφραση $p \to (q\&r)$.
2) Συμβολίζοντας την πρόταση "Η απόφαση για την απεργία λήφθηκε στα πλαίσια του νόμου" με s και έχοντας συμβολίσει την πρόταση "Η συνέλευση πραγματοποιήθηκε" με p, βλέπουμε ότι η δεύτερη πρόταση του επιχειρήματος αντιπροσωπεύεται από τον προτασιακό τύπο $s \leftrightarrow p$.
3) Με βάση το γεγονός ότι έχουμε συμβολίσει με q την πρόταση "Η πρόσκληση στάλθηκε έγκαιρα", η τρίτη πρόταση του επιχειρήματος αντιπροσωπεύεται από τον προτασιακό τύπο $(\sim q)$.
4) Με βάση τα προηγούμενα, η τέταρτη πρόταση του επιχειρήματος αντιπροσωπεύεται από τον προτασιακό τύπο $(\sim s)$.
Συνεπώς η ακόλουθη επιχειρηματική μορφή αντιπροσωπεύει το επιχείρημα της άσκησης:

$$\begin{array}{l} p \to (q\&r) \\ s \leftrightarrow p \\ (\sim q) \\ \hline (\sim s) \end{array}$$

Η μορφή αυτή είναι έγκυρη, με βάση την παρακάτω τυπική απόδειξη εγκυρότητας:

1.	$p \to (q\&r)$	υπόθεση
2.	$s \leftrightarrow p$	υπόθεση
3.	$(\sim q)$	υπόθεση
4.	$(s \to p)\&(p \to s)$	2, νόμος διπλής συνεπαγωγής
5.	$(s \to p)$	4, Απλοποίηση
6.	$(\sim q) \vee (\sim r)$	3, Πρόσθεση
7.	$\sim (q\&r)$	6, νόμος DeMorgan
8.	$\sim p$	1, 7, Modus Tollens
9.	$\sim s$	5, 8, Modus Tollens

2ος τρόπος.
Με βάση τη μεθοδο έμμεσης απόδειξης (ή απαγωγής σε άτοπο), αρκεί να ελέγξουμε ότι κάποια αντίφαση παράγεται από τις υποθέσεις

$$\begin{array}{l} p \to (q\&r) \\ s \leftrightarrow p \\ (\sim q) \\ \sim (\sim s). \end{array}$$

Αυτό προκύπτει με βάση την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$p \to (q\&r)$	υπόθεση
2.	$s \leftrightarrow p$	υπόθεση
3.	$(\sim q)$	υπόθεση
4.	$\sim (\sim s)$	βοηθητική υπόθεση
5.	s	4, νόμος διπλής άρνησης
6.	$(s \to p)\&(p \to s)$	2, νόμος διπλής συνεπαγωγής
7.	$s \to p$	6, Απλοποίηση
8.	p	5, 7, Modus Ponens
9.	$q\&r$	1, 8, Modus Ponens
10.	q	9, Απλοποίηση
11.	$q\&(\sim q)$	3, 10, Σύζευξη

Επειδή προφανώς ο προτασιακός τύπος $q\&(\sim q)$ είναι αντίφαση, η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Άσκηση 34. (Θέμα 18-9-2006)
Θεωρούμε τη σχέση R στο σύνολο των ανθρώπων με

$$xRy \text{ ανν ο άντρας } x \text{ είναι δεύτερος ξάδελφος του ανθρώπου } y.$$

Εξετάστε αν η R είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική. Θα αλλάξουν οι απαντήσεις σας αν η σχέση περιοριστεί στο σύνολο των αντρών;

Λύση. Πρώτα θεωρούμε την R ως σχέση στο σύνολο των ανθρώπων Π. Σύμφωνα με τους ορισμούς των αντίστοιχων εννοιών,
α) R ανακλαστική σημαίνει ότι xRx, για κάθε $x \in \Pi$. Όμως κανένας άνθρωπος δεν είναι δεύτερος ξάδελφος του εαυτού του, άρα η R δεν είναι ανακλαστική.
β) R συμμετρική σημαίνει ότι για οποιουσδήποτε ανθρώπους x, y, αν ισχύει xRy, τότε ισχύει yRx. Αυτό όμως δεν αληθεύει, αφού όταν ο άνδρας x είναι δεύτερος ξάδελφος του ανθρώπου y, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι ο y είναι άμδρας που είναι δεύτερος ξάδελφος του x (σκεφθείτε ότι ο y μπορεί να είναι γυναίκα). Άρα η R δεν είναι συμμετρική.
γ) R μεταβατική σημαίνει ότι για οποιουσδήποτε ανθρώπους x, y, z, αν ισχύει xRy και yRz, τότε ισχύει xRz. Παρατηρούμε ότι αν ο άνδρας x είναι δεύτερος ξάδελφος του ανθρώπου y και ο άνδρας y είναι δεύτερος ξάδελφος του ανθρώπου z, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι ο x είναι δεύτερος ξάδελφος του ανθρώπου z (πράγματι, οι x, z μπορεί να μην ανήκουν καν στην ίδια οικογένεια "εξ αίματος" (σκεφθείτε κάποιο παράδειγμα από το οικογενειακό σας περιβάλλον). Άρα η R δεν είναι ούτε μεταβατική.
Ας θεωρήσουμε τώρα τη σχέση R στο σύνολο των ανδρών. Είναι εύκολο να δούμε ότι στην περίπτωση αυτή η R είναι συμμετρική, αφού και η τιμή της x και εκείνη της y ανήκει στο σύνολο των ανδρών. Οι απαντήσεις μας για τις άλλες δύο ιδιότητες δεν αλλάζουν.

Άσκηση 35. (Θέμα 9-2-2007)
Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιήστε τον προτασιακό τύπο $[(p\&q) \vee (p\&(\sim q)]\&p$.

Λύση. Με βάση τους νόμους της προτασιακής λογικής που αναφέρονται στα δεξιά, ισχύουν οι αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες:

$$\begin{array}{lll} [(p\&q) \vee (p\&(\sim q)]\&p & \Leftrightarrow & \text{νόμος επιμεριστικότητας} \\ [p\&(q \vee (\sim q))]\&p & \Leftrightarrow & \text{νόμος συμπληρώματος} \\ [p\&T]\&p & \Leftrightarrow & \text{νόμος ταυτότητας} \\ p\&p & \Leftrightarrow & \text{νόμος αυτοπάθειας} \\ p & & \end{array}$$