ΠΜΣ ΙΦΕΤ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ "ΛΟΓΙΚΗ"

22/9/2022

Θέμα 1ο. Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, να απλοποιήσετε τον προτασιακό τύπο

$(p \& r) \rightarrow [(p \& q) \vee (p \& \sim q)]$ (1,5 μον.)

Θέμα 2ο. Να δείξετε ότι, αν $*$ είναι διθέσιος σύνδεσμος τέτοιος που το σύνολο $\{*\}$ είναι επαρκές (ή πλήρες), τότε ο $*$ ταυτίζεται ή με το σύνδεσμο $\downarrow$ (που αντιστοιχεί στην έκφραση "ούτε ... ούτε ...") ή με το σύνδεσμο $|$ (που αντιστοιχεί στην έκφραση "δεν ... ή δεν ...").

(1,5 μον.)

Θέμα 3ο. Κατασκευάστε μια τυπική απόδειξη εγκυρότητας για την επιχειρηματική μορφή

$$\frac{(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)}{p \vee (q \rightarrow r)}$$

(1,5 μον.)

Θέμα 4ο. Θεωρούμε το ακόλουθο μοντέλο

D = {Γερμανία, Ελλάδα, Ισπανία, Φινλανδία, Σλοβενία, Πολωνία, Γαλλία, Ιταλία}

[N] = {<Γερμανία, Ελλάδα>, <Ισπανία, Φινλανδία>, <Πολωνία, Σλοβενία>, <Γαλλία, Ιταλία>, <Γαλλία, Πολωνία>, <Ισπανία, Γερμανία>, <Γερμανία, Πολωνία>, <Ισπανία, Γαλλία>}

[S] = {Γαλλία, Πολωνία, Γερμανία, Ισπανία}

[F] = {Ισπανία, Γαλλία}

[d] = Πολωνία, [e] = Ελλάδα

(α) Είναι (και γιατί) αληθής στο μοντέλο αυτό η πρόταση

$$(\exists x)(F(x) \,\&\, N(x,d)) \vee (\exists x)(N(x,e) \,\&\, \sim F(x)) \; ;$$

(1 μον.)

(β) Υπάρχει (και γιατί) αποτίμηση στο μοντέλο αυτό που ικανοποιεί τον τύπο

$$(\forall y)(S(y) \rightarrow N(x,y)) \,\&\, F(x) \; ;$$

(1 μον.)

(γ) Υπάρχει (και γιατί) αποτίμηση στο μοντέλο αυτό που δεν ικανοποιεί τον τύπο του ερωτήματος (β) ;

(1 μον.)

<u>Θέμα 5ο</u>. Εκφράσετε σε συμβολική μορφή το ακόλουθο επιχείρημα και αποδείξτε τυπικά ότι η αντίστοιχη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Ο Τσίκο και η Τσίτα μπορούν να λύσουν ακριβώς τα ίδια προβλήματα. Αν ο Τσίκο μπορεί να λύσει οποιοδήποτε από τα προβλήματα, τότε θα πάρει μια μπανάνα. Ο Τσίκο δεν θα πάρει μια μπανάνα. Συνεπώς η Τσίτα δεν μπορεί να λύσει κανένα από τα προβλήματα.

(2,5 μον.)

Λύση θέματος 1.

$(p \& r) \to [(p \& q) \vee (p \& \sim q)]$ $\Leftrightarrow$ (ν. επιμεριστικότητας)

$(p \& r) \to [p \& (q \vee \sim q)]$ $\Leftrightarrow$ (ν. συμπληρώματος)

$(p \& r) \to (p \& T)$ $\Leftrightarrow$ (ν. ταυτότητας)

$(p \& r) \to p$ $\Leftrightarrow$ (ν. συνεπαγωγής)

$\sim(p \& r) \vee p$ $\Leftrightarrow$ (ν. De Morgan)

$(\sim p \vee \sim r) \vee p$ $\Leftrightarrow$ (ν. αντιμεταθετικότητας)

$p \vee (\sim p \vee \sim r)$ $\Leftrightarrow$ (ν. προσεταιριστικότητας)

$(p \vee \sim p) \vee \sim r$ $\Leftrightarrow$ (ν. συμπληρώματος)

$T \vee \sim r$ $\Leftrightarrow$ (ν. αντιμεταθετικότητας)

$\sim r \vee T$ $\Leftrightarrow$ (ν. ταυτότητας) T.

Λύση θέματος 2.

Το κάναμε στο μάθημα και υπάρχει στη σελίδα 23 των σημειώσεων Μαθημ. Λογικής στο eclass.

Λύση θέματος 3.

Με βάση το νόμο διπλής άρνησης, το συμπέρασμα είναι λογικά ισοδύναμο με τον προτασ. τύπο $\sim\sim p \vee (q \to r)$.
Με βάση το νόμο συνεπαγωγής $(P \to Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$, το συμπέρασμα είναι λογικά ισοδύναμο με τον προτ. τύπο

$\sim p \to (q \to r)$.

Επομένως, αντί να δείξουμε ότι

$$\frac{(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)}{p \vee (q \rightarrow r)},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)}{\sim p \rightarrow (q \rightarrow r)}$$

ή, με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, ότι

$$\frac{\begin{array}{l}(p \vee q) \rightarrow (p \vee r) \\ \sim p\end{array}}{q \rightarrow r}$$

ή, πάλι με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, ότι

$$\frac{\begin{array}{l}(p \vee q) \rightarrow (p \vee r) \\ \sim p \\ q\end{array}}{r}.$$

Κατασκευάζουμε τώρα την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	υπόθεση
2.	$\sim p$	υπόθεση
3.	q	υπόθεση
4.	$q \vee p$	3, καν. πρόσθεσης
5.	$p \vee q$	4, ν. αντιμετάθ.
6.	$p \vee r$	1, 5, Modus Ponens
7.	r	2, 6, καν. διαζ. συλλογισμού.

Εναλλακτικά, μπορείς να χρησιμοποιήσεις (για το αρχικό ζητούμενο) τη μέθοδο έμμεσης απόδειξης.

Σημείωση. Η λύση στο θέμα 3 που έδωσες είναι σωστή, με την έννοια ότι έχεις χρησιμοποιήσει νόμους της προτασιακής λογικής για να μετασχηματίσεις τον αρχικό προτ. τύπο ώστε να καταλήξεις στο συμπέρασμα. Όμως, δεν χρησιμοποίησες κανόνες της προτασιακής λογικής, όπως ζητούσε το θέμα.

Λύση θέματος 4.

Η απάντησή σου στο ερώτημα (α) είναι σωστή.

(β) Ο τύπος που δίνεται δεν είναι δήλωση, αφού υπάρχει ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x. Το ζητούμενο λοιπόν είναι να δούμε αν υπάρχει ή όχι τιμή για τη μεταβλητή x, για την οποία όλος ο τύπος να παίρνει τιμή "αληθής".

Επειδή ο τύπος είναι σύζευξη, αρκεί να δούμε αν υπάρχει ή όχι τιμή της x για την οποία να αληθεύουν

και ο τύπος $(\forall y)(S(y) \to N(x,y))$ (*)

και ο τύπος $F(x)$.

Με βάση το μοντέλο, ο τύπος $F(x)$ ικανοποιείται ακριβώς όταν η x παίρνει τιμή "Ισπανία" ή τιμή "Γαλλία". Για καθεμιά από τις τιμές αυτές εξετάζουμε αν ο τύπος (*) αληθεύει ή όχι.

1η περ.: x = Ισπανία.

Εξετάζοντας διάφορες τιμές για τη μεταβλητή y, βλέπουμε ότι δεν ικανοποιείται ο τύπος $(\forall y)(S(y) \to N(\text{Ισπανία}, y))$. Π.χ. αν η y πάρει τιμή "Ισπανία", δεν αληθεύει ότι $N(\text{Ισπανία}, \text{Ισπανία})$.

2η περ.: x = Γαλλία.

Όπως στην πρώτη περίπτωση, βλέπουμε ότι δεν ικανοποιείται ο τύπος $(\forall y)(S(y) \to N(\text{Γαλλία}, y))$.

Συνεπώς ο τύπος (*) δεν ικανοποιείται από καμιά από τις τιμές που ικανοποιούν τον τύπο $F(x)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση στο μοντέλο που ικανοποιεί τον τύπο

$$(\forall y)(S(y) \to N(x,y)) \& F(x).$$

(γ) Εδώ θα εξετάσουμε αν υπάρχει τιμή της x που δεν ικανοποιεί τον δεδομένο τύπο ή, ισοδύναμα, που ικανοποιεί τον τύπο

$$\sim(\forall y)(S(y) \to N(x,y)) \vee \sim F(x).$$

Με βάση τον ορισμό του μοντέλου, βλέπουμε ότι υπάρχουν τιμές της x που ικανοποιούν τον τύπο $\sim F(x)$, π.χ. η τιμή Γερμανία, Ελλάδα, Φινλανδία κτλ. Αφού λοιπόν υπάρχουν τιμές που ικανοποιούν τον τύπο $\sim F(x)$, υπάρχουν και τιμές που ικανοποιούν τον τύπο

$$\sim(\forall y)(S(y) \to N(x,y)) \vee \sim F(x).$$

Η απάντηση λοιπόν είναι ότι υπάρχει αποτίμηση που δεν ικανοποιεί τον τύπο

$$(\forall y)(S(y) \to N(x,y)) \& F(x)$$

στο δεδομένο μοντέλο.

<u>Λύση θέματος 5.</u>

Για να τυποποιήσουμε το επιχείρημα, θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα σύμβολα

$\Lambda(x,y)$ = ο x λύνει το πρόβλημα y (διμελές κατηγορημ.)
$M(x)$ = ο x θα πάρει μπανάνα (μονομελές κατηγορημ.)
c = Τσίκο (σύμβολο σταθεράς)
d = Τσίτα (" ").

Η συμβολική μορφή του επιχειρήματος είναι

Υπ. 1. $(\forall y)(\Lambda(c,y) \leftrightarrow \Lambda(d,y))$
Υπ. 2 $(\exists y)\Lambda(c,y) \to M(c)$
Υπ. 3 $\sim M(c)$
~~και~~ Συμπ. $(\forall y) \sim \Lambda(d,y)$.

Κατασκευάζουμε τώρα την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1. $(\forall y)(\Lambda(c,y) \leftrightarrow \Lambda(d,y))$ υπόθεση
2. $(\exists y)\Lambda(c,y) \rightarrow M(c)$ "
3. $\sim M(c)$ "
4. $\sim(\exists y)\Lambda(c,y)$ 2, 3, Modus Tollens
5. $(\forall y)\sim\Lambda(c,y)$ 4, ν. άρνησης ποσοδείκτη
6. $\sim\Lambda(c,y)$ 5, καν. καθολ. συγκεκρ.
7. $\Lambda(c,y) \leftrightarrow \Lambda(d,y)$ 1, καθολ. συγκεκρ.
8. $(\Lambda(c,y) \rightarrow \Lambda(d,y)) \& (\Lambda(d,y) \rightarrow \Lambda(c,y))$, 7, νόμος διπλής συνεπαγωγής
9. $\Lambda(d,y) \rightarrow \Lambda(c,y)$ 8, ν. αντιμεταθετικότητας και κανόνας απλοποίησης
10. $\sim\Lambda(d,y)$ 6, 9, Modus Tollens
11. $(\forall y)\sim\Lambda(d,y)$ 10, καν. καθολ. γενίκευσης