ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 4–5 ΕΞΕΤΑΣΗΣ 28/6/2023

Θέμα 4ο.

(1) Όπως αναφέρθηκε στο μάθημα, θα "διαγράψουμε" τον ποσοδείκτη $(\forall x)$ και θα εξετάσουμε αν ο τύπος

$$P(x) \,\&\, S(d,x) \to S(c,x) \quad (*)$$

αληθεύει για όλες τις αντικαταστάσεις της (ελεύθερης) μεταβλητής x από τα στοιχεία του σύμπαντος D.

Θα το κάνουμε πρώτα εξαντλητικά και μετά "γρήγορα"

$x =$ Τσίκο

Για την τιμή αυτή, ο τύπος $P(x)$ είναι ψευδής, αφού το άτομο "Τσίκο" δεν ανήκει στη σημασιολογική ερμηνεία του συμβόλου P. Άρα ο τύπος $P(x) \,\&\, S(d,x)$ είναι ψευδής για την τιμή αυτή, οπότε ο τύπος (*) είναι αληθής (αφού είναι συνεπαγωγή με ψευδή ηγούμενη).

$x = p_1$

Για την τιμή αυτή, ο τύπος $P(x)$ είναι αληθής, αφού $p_1 \in [P]$. Για την ίδια τιμή, ο τύπος $S(d,x)$ είναι ψευδής, διότι το ζεύγος $\langle$Τσίκα$, p_1\rangle$ δεν ανήκει στο $[S]$.

Άρα ο τύπος $P(x) \,\&\, S(d,x)$ είναι ψευδής, οπότε όλη η συνεπαγωγή (*) είναι αληθής.

$x = p_2$

Για την τιμή αυτή, ο τύπος $P(x)$ είναι αληθής, αφού $p_2 \in [P]$. Για την ίδια τιμή της x, ο τύπος $S(d,x)$ είναι αληθής, διότι $\langle$Τσίκα$, p_2\rangle \in [S]$. Άρα η σύζευξη $P(x) \,\&\, S(d,x)$ είναι αληθής. Για την ίδια τιμή της x, ο τύπος $S(c,x)$ είναι αληθής, διότι $\langle$Τσίκο$, p_2\rangle \in [S]$. Άρα η συνεπαγωγή (*) είναι αληθής (αφού και η ηγούμενη και η επόμενή της είναι αληθείς).

$x = p_3$

Όπως και για $x = p_2$, βλέπουμε ότι ο (*) είναι αληθής.

$x =$ Τζούνιορ

Όπως για $x=$ Τσίκο, βλέπουμε ότι ο (*) είναι αληθής.

<u>$x=p_4$</u>

Για την τιμή αυτή, ο τύπος $P(x)$ είναι αληθής, αλλά ο τύπος $S(d,x)$ είναι ψευδής, αφού το ζεύγος <Τσίκα, p_4> δεν ανήκει στο [S]. Έτσι, ο τύπος $P(x)$ & $S(d,x)$ είναι ψευδής και έπεται ότι η συνεπαγωγή (*) είναι αληθής.

<u>$x=p_5$</u>

Όπως για $x=p_4$, βλέπουμε ότι ο τύπος (*) είναι αληθής.

<u>$x=$ Τσίκα</u>

Όπως για $x=$ Τσίκο ή $x=$ Τζοίνορ, βλέπουμε ότι ο τύπος (*) είναι αληθής.

Έπεται λοιπόν ότι ο (*) είναι αληθής για όλες τις τιμές της x, οπότε η αρχική πρόταση είναι αληθής.

Ας δούμε τώρα το ίδιο ερώτημα με γρήγορο τρόπο.

Πάλι θα αγνοήσουμε τον ποσοδείκτη $(\forall x)$ και θα δούμε, στα γρήγορα, αν ο τύπος (*) ικανοποιείται από όλες τις τιμές της (ελεύθερης) μεταβλητής x.

Επειδή ο (*) είναι συνεπαγωγή, ουσιαστικά εξετάζουμε μόνο τις τιμές της x που κάνουν αληθή την ηγουμένη (γνωρίζουμε ότι όταν η ηγουμένη είναι ψευδής, ολόκληρη η συνεπαγωγή είναι αληθής).

Η ηγουμένη είναι ο τύπος $P(x)$ & $S(d,x)$, οπότε πρέπει να εξετάσουμε για ποιές τιμές της x είναι αληθής <u>και</u> ο τύπος $P(x)$ <u>και</u> ο τύπος $S(d,x)$.

Οι τιμές της x για τις οποίες αληθεύει ο $P(x)$ είναι

p_1, p_2, p_3, p_4, p_5

ενώ οι τιμές της x για τις οποίες αληθεύει ο $S(d,x)$ είναι

p_2, p_3.

Επομένως, αρκεί για τις τιμές p_2, p_3 της x να εξετάσουμε αν αληθεύει και η επομένη της συνεπαγωγής, δηλαδή, ο τύπος $S(c,x)$. Με βάση τα στοιχεία της [S], βλέπουμε ότι αυτό ισχύει, οπότε έπεται ότι η πρόταση (*) είναι αληθής.

(2) Ουσιαστικά θέλουμε να δούμε αν υπάρχει τιμή στο D τέτοια που, όταν τη βάλουμε στη θέση της ελεύθερης μεταβλητής x στον τύπο του ερωτήματος, ο τύπος αυτός να γίνεται αληθής.
Θα το κάνουμε "στα γρήγορα". Επειδή ο τύπος

$$P(x) \,\&\, (\forall y)(C(y) \to S(y,x))$$

είναι σύζευξη έχει νόημα να εξετάσουμε μόνο τις τιμές p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 για τη x, γιατί αυτές μόνο κάνουν τον τύπο $P(x)$ αληθή.
Ας δούμε τώρα, αν κάποια από αυτές τις τιμές ικανοποιεί τον τύπο $(\forall y)(C(y) \to S(y,x))$.

$x = p_1$
Δίνοντας το p_1 ως τιμή στη x, θα αγνοήσουμε τον ποσοδείκτη $(\forall y)$ και θα εξετάσουμε αν ο τύπος $C(y) \to S(y,x)$ αληθεύει για όλες τις τιμές της y (με σταθεροποιημένη την τιμή της x).
$y =$ Τσίκο
Βλέπουμε ότι και ο $C(y)$ είναι αληθής, αφού Τσίκο $\in [C]$ και ο $S(y,x)$ είναι αληθής, αφού $\langle$Τσίκο, $p_1\rangle \in [S]$.
Άρα ο $C(y) \to S(y,x)$ αληθεύει για $x = p_1$ και $y =$ Τσίκο.
$y =$ Τσίκα
Όπως για $y =$ Τσίκο, βλέπουμε ότι ο τύπος $C(y) \to S(y,x)$ αληθεύει (εννοείται για $x = p_1$).
$y =$ Τζούνιορ
Όπως για $y =$ Τσίκο ή $y =$ Τσίκα, διαπιστώνουμε ότι ο τύπος $C(y) \to S(y,x)$ αληθεύει (εννοείται για $x = p_1$).
Επομένως ο τύπος

$$P(x) \,\&\, (\forall y)(C(y) \to S(y,x)) \quad (+)$$

αληθεύει για $x = p_1$, δηλαδή, υπάρχει αποτίμηση στο μοντέλο που ικανοποιεί τον τύπο (+).

(3) Όπως στο ερώτημα (2), διαπιστώνουμε ότι ο τύπος (+) δεν ικανοποιείται ~~για~~ για την τιμή $x =$ Τσίκο, αφού για την τιμή αυτή γίνεται ψευδής ο τύπος $P(x)$ και άρα ο τύπος (+).

Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει αποτίμηση που δεν ικανοποιεί τον τύπο (4).

Σημείωση για το (3). Αντί για $x=$ Τσίκο, θα μπορούσαμε να έχουμε πάρει $x=$ Τσίπα ή $x=$ Τζούνιορ.

Θέμα 5ο. Σύμφωνα με την υπόδειξη, θα χρειαστούμε ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $=$ (για την ισότητα), ένα " " " F (για τη σχέση "ο x είναι πατέρας του y") και τρεις ατομικές σταθερές a, b, c (για να συμβολίσουμε τα άτομα "ο πατέρας μου", "εκείνος ο άνδρας", "εγώ"). Με χρήση αυτών των συμβόλων, οι προκείμενες του επιχειρήματος είναι οι ακόλουθες

1η. $\sim(\exists x)(x \neq c \,\&\, F(a,x))$

2η. $(\forall y)(F(y,b) \rightarrow F(a,y))$

και το συμπέρασμα είναι ο τύπος

$(\forall z)(F(z,b) \rightarrow z=c)$.

Ας κατασκευάσουμε τώρα μια τυπική απόδειξη του συμπεράσματος από τις προκείμενες. Με βάση τον κανόνα της Καθολικής Γενίκευσης, αρκεί από τις προκείμενες να καταλήξουμε στον τύπο $F(z,b) \rightarrow z=c$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, αρκεί από τις δύο προκείμενες και τη βοηθητική υπόθεση $F(z,b)$ να καταλήξουμε στον τύπο $z=c$. Έχουμε λοιπόν

1. $\sim(\exists x)(x\neq c \,\&\, F(a,x))$	υπόθεση
2. $(\forall y)(F(y,b) \rightarrow F(a,y))$	"
3. $F(z,b)$	βοηθητική υπόθεση
4. $F(z,b) \rightarrow F(a,z)$	2, καθολ. συγκεκριμεν.
5. $F(a,z)$	3,4, MP
6. $(\forall x)\sim(x\neq c \,\&\, F(a,x))$	1, νόμος άρνησης ποσοδείκτη
7. $(\forall x)(x=c \vee \sim F(a,x))$	6, νόμος DeMorgan
8. $(\forall x)(\sim F(a,x) \vee x=c)$	7, νόμος αντιμεταθετ.

9. $(\forall x)(F(a,x) \to x=c)$ 8, νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής

10. $F(a,z) \to z=c$ 9, νόμος καθολ. συγκεκριμ.

11. $z=c$ 5,10, MP

12. $F(z,b) \to z=c$ 3-11, μέθ. υποθ. απόδειξης

13. $(\forall z)(F(z,b) \to z=c)$ 12, καθολική γενίκευση.

<u>Σημείωση</u>- Με παρόμοιο τρόπο, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη του συμπεράσματος

$$(\exists z)(F(z,b) \& z=c)$$

από τις προκείμενες

$$\sim(\exists x)(x \neq c \& F(a,x))$$
$$(\exists y)(F(y,b) \& F(a,y)).$$