Κεφάλαιο 8

Συμβολική Λογική

8.1 Σύγχρονη Λογική και η Συμβολική της Γλώσσα

Για να φτάσουμε σε μια πλήρη κατανόηση της παραγωγικής συλλογιστικής χρειαζόμαστε μια γενική θεωρία παραγωγής. Μια γενική θεωρία παραγωγής θα έχει δύο αντικειμενικούς στόχους: (1) να εξηγήσει τις σχέσεις μεταξύ προκείμενων και συμπεράσματος σε παραγωγικά επιχειρήματα, και (2) να μας παράσχει τεχνικές για να διακρίνουμε μεταξύ έγκυρων και άκυρων παραγωγών. Δύο μεγάλα συστήματα λογικής θεωρίας έχουν επιδιώξει να πετύχουν αυτούς τους στόχους. Το πρώτο καλείται κλασική (ή Αριστοτελική) λογική. Το παρόν κεφάλαιο αφορά το δεύτερο, που καλείται σύγχρονη, συμβολική ή μαθηματική λογική.

Αν και αυτά τα δύο σημαντικά συστήματα θεωρίας έχουν παρόμοιους στόχους, προχωρούν με πολύ διαφορετικούς τρόπους. Η σύγχρονη λογική δεν στηρίζεται στο σύστημα που αφορά συλλογισμούς. Δεν αρχίζει με την ανάλυση κατηγορικών προτάσεων. Δεν επιδιώκει να διακρίνει τα έγκυρα από τα άκυρα επιχειρήματα, αν και το κάνει χρησιμοποιώντας πολύ διαφορετικές έννοιες και τεχνικές. Συνεπώς πρέπει τώρα να ξεκινήσουμε από την αρχή, αναπτύσσοντας ένα σύγχρονο λογικό σύστημα που ασχολείται με μερικά από τα ίδια ακριβώς θέματα με τα οποία ασχολήθηκε η παραδοσιακή λογική – και το κάνει ακόμη πιο αποτελεσματικά.

Η σύγχρονη λογική αρχίζει με την ταυτοποίηση των θεμελιωδών λογικών συνδέσμων από τους οποίους εξαρτώνται τα παραγωγικά επιχειρήματα. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συνδέσμους, δίνεται μια γενική περιγραφή τέτοιων επιχειρημάτων, και αναπτύσσονται μέθοδοι για τον έλεγχο της εγκυρότητας επιχειρημάτων.

Αυτή η ανάλυση της παραγωγικής διαδικασίας απαιτεί μια τεχνητή συμβολική γλώσσα. Σε μια φυσική γλώσσα – την Αγγλική ή οποιαδήποτε άλλη – υπάρχουν ιδιαιτερότητες που καθιστούν δύσκολη την ακριβή λογική ανάλυση: Κάποιες λέξεις μπορεί να είναι αόριστες ή διφορούμενες, η κατασκευή επιχειρημάτων μπορεί να είναι ασαφής, μεταφορές και ιδιωματισμοί μπορεί να οδηγούν σε σύγχυση ή να παραπλανούν, συναισθηματικές επικλήσεις μπορούν να εκτρέπουν την προσοχή. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να υπερπηδηθούν σε μεγάλο βαθμό με μια τεχνητή γλώσσα στην οποία οι λογικές σχέσεις μπορούν να διατυπωθούν με ακρίβεια. Τα πιο θεμελιώδη στοιχεία αυτής της σύγχρονης συμβολικής γλώσσας θα εισαχθούν στο παρόν κεφάλαιο.

Τα σύμβολα διευκολύνουν σε μεγάλο βαθμό τη σκέψη μας σε σχέση με επιχειρήματα. Αυτά μας καθιστούν ικανούς να φτάνουμε στην καρδιά ενός επιχειρήματος, να αναδεικνύουμε την ουσιώδη φύση του και να παραμερίζουμε ό,τι δεν είναι ουσιώδες. Επιπλέον, μέσω των συμβόλων μπορούμε να εκτελέσουμε, σχεδόν μηχανικά, με τα μάτια, μερικές λογικές πράξεις οι οποίες αλλιώς ίσως να απαιτούσαν μεγάλη προσπάθεια. Μπορεί να φαίνεται παράδοξο, αλλά μια συμβολική γλώσσα μας βοηθά επομένως να επιτύχουμε μερικούς διανοητικούς στόχους χωρίς να πρέπει να σκεφθούμε πάρα πολύ. Τα ινδο-αραβικά ψηφία που χρησιμοποιούμε σήμερα (1, 2, 3, ...) προσφέρουν ένα παράδειγμα για τα πλεονεκτήματα μιας βελτιωμένης συμβολικής γλώσσας. Αυτά αντικατέστησαν τα δύσχρηστα Ρωμαϊκά ψηφία (I, II, III, ...), τα οποία είναι πολύ δύσκολο να χειριστούμε. Το να πολλαπλασιάσουμε το 113 με το 9 είναι εύκολο˙ το να πολλαπλασιάσουμε το CXIII με το IX δεν είναι τόσο εύκολο. Ακόμη και οι Ρωμαίοι, υποστηρίζουν μερικοί λόγιοι, ήταν υποχρεωμένοι να βρίσκουν τρόπους για να συμβολίζουν αριθμούς πιο αποτελεσματικά.

Οι κλασικοί λογικοί κατανόησαν την τεράστια αξία των συμβόλων για ανάλυση. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε σύμβολα ως μεταβλητές στις αναλύσεις του, και το εκλεπτυσμένο σύστημα Αριστοτελικής συλλογιστικής χρησιμοποιεί σύμβολα με πολύ εξεζητημένους τρόπους. Όμως, μεγάλη πρόοδος έχει πραγματοποιηθεί, κυρίως κατά τον εικοστό αιώνα, για την επινόηση και χρήση λογικών συμβόλων με πιο αποτελεσματικό τρόπο.

Ο σύγχρονος συμβολισμός μέσω του οποίου αναλύεται η παραγω γική διαδικασία διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από την κλασική. Οι σχέσεις μεταξύ κλάσεων πραγμάτων δεν είναι κεντρικές για τους σύγχρονους λογικούς όπως ήταν για τον Αριστοτέλη και τους οπαδούς του. Αντί για αυτές, οι λογικοί μελετούν τώρα την εσωτερική δομή προτάσεων και επιχειρημάτων, και τις λογικές συνδέσεις – πολύ λίγες αριθμητικά – που είναι κρίσιμες σε όλα τα παραγωγικά επιχειρήματα. Η σύγχρονη συμβολική λογική επομένως δεν είναι επιβαρυμένη, όπως ήταν η Αριστοτελική, με την ανάγκη μετασχηματισμού παραγωγικών επιχειρημάτων σε συλλογιστική μορφή.

Το σύστημα σύγχρονης λογικής που αρχίζουμε να εξερευνούμε τώρα είναι κατά κάποιο τρόπο λιγότερο κομψό από την αναλυτική συλλογιστική, αλλά είναι πιο ισχυρό. Υπάρχουν μορφές παραγωγικού επιχειρήματος που η συλλογιστική δεν μπορεί να αντιμετωπίσει με επάρκεια. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση που υιοθετεί η σύγχρονη λογική, με την πιο ευέλικτη συμβολική της γλώσσα, μπορούμε να επιτύχουμς κατευθείαν τους στόχους της παραγωγικής ανάλυσης και να διεισδύσουμε βαθύτερα. Τα λογικά σύμβολα που θα διερευνήσουμε τώρα επιτρέπουν την πληρέστερη και αποτελεσματικότερη επίτευξη του κεντρικού στόχου της παραγωγικής λογικής: τη διάκριση μεταξύ έγκυρων και άκυρων επιχειρημάτων.

8.2 Σύμβολα για τη Σύζευξη, Άρνηση και Διάζευξη

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με σχετικά απλά επιχειρήματα όπως το

> Ο τυφλός φυλακισμένος έχει κόκκινο καπέλο ή ο τυφλός φυλακισμένος έχει λευκό καπέλο.
> Ο τυφλός φυλακισμένος δεν έχει κόκκινο καπέλο.
> Συνεπώς ο τυφλός φυλακισμένος έχει λευκό καπέλο.

και το

> Αν η κ. Ρόμπινσον μένει δίπλα στον τροχοπεδητή, τότε η κ. Ρόμπινσον ζει μεταξύ Detroit και Chicago.
> Η κ. Ρόμπινσον δεν ζει μεταξύ Detroit και Chicago.
> Συνεπώς η κ. Ρόμπινσον δεν μένει δίπλα στον τροχοπεδητή.

Κάθε επιχείρημα αυτού του γενικού τύπου περιέχει τουλάχιστον μια σύνθετη δήλωση. Μελετώντας τέτοια επιχειρήματα, διαιρούμε όλες τις δηλώσεις σε δύο γενικές κατηγορίες: απλές και σύνθετες. Μια **απλή δήλωση** δεν περιέχει κάποια άλλη δήλωση ως συνιστώσα. Π.χ., η δήλωση "Ο Charlie είναι καθώς πρέπει" είναι μια απλή δήλωση. Μια **σύνθετη δήλωση** περιέχει μια άλλη δήλωση ως συνιστώσα. Π.χ., η δήλωση "Ο Charlie είναι καθώς πρέπει και ο Charlie είναι γλυκός" είναι μια σύνθετη δήλωση, διότι περιέχει δύο απλές δηλώσεις ως συνιστώσες. Φυσικά, οι συνιστώσες μιας σύνθετης δήλωσης μπορεί να είναι και αυτές σύνθετες. Διατυπώνοντας ορισμούς και αρχές στη λογική, πρέπει να είμαστε πολύ ακριβείς. Αυτό που φαίνεται απλό συχνά αποδεικνύεται ότι είναι πιό πολύπλοκο από ό,τι είχαμε υποθέσει. Η έννοια μιας "συνιστώσας μίας δήλωσης" αποτελεί ένα καλό παράδειγμα αυτής της ανάγκης για προσοχή.

Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι μια συνιστώσα μίας δήλωσης είναι απλά ένα μέρος της δήλωσης που είναι το ίδιο μία δήλωση. Αλλά αυτή η περιγραφή δεν ορίζει τον όρο με αρκετή ακρίβεια, διότι μια δήλωση μπορεί να είναι *μέρος* μιας μεγαλύτερης δήλωσης, χωρίς να αποτελεί *συνιστώσα* της με την αυστηρή έννοια. Π.χ., ας θεωρήσουμε τη δήλωση "Ο Lincoln πυροβολήθηκε από έναν άνδρα που ήταν ηθοποιός." Σαφώς οι δύο πρώτες μαζί με τις δύο τελευταίες λέξεις αυτής της δήλωσης αποτελούν μέρος της, και θα μπορούσαν πράγματι να θεωρηθούν ως μια δήλωση˙ είναι ή αληθές ή ψευδές ότι ο Lincoln πυροβολήθηκε. Αλλά η δήλωση ότι "Ο Lincoln ήταν ηθοποιός", αν και αναμφίβολα αποτελεί μέριος της μεγαλύτερης δήλωσης, δεν είναι *συνιστώσα* αυτής της μεγαλύτερης δήλωσης.

Μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό σημειώνοντας ότι, για να είναι ένα μέρος της δήλωσης μια *συνιστώσα* αυτής της δήλωσης, πρέπει να ικανοποιηθούν δύο προϋποθέσεις: (1) το μέρος πρέπει να είναι δήλωση από μόνο του˙ *και* (2) αν το μέρος αντικατασταθεί στη μεγαλύτερη δήλωση από οποιαδήποτε άλλη δήλωση, το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης πρέπει να έχει νόημα.

Η πρώτη από τις προϋποθέσεις αυτές ικανοποιείται στο παράδειγμα για τον Lincoln, αλλά η δεύτερη δεν ικανοποιείται. Ας υποθέσουμε ότι το μέρος "Ο Lincoln ήταν ηθοποιός" αντικαθίσταται από "υπάρχουν λιοντάρια στην Αφρική." Το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης δεν έχει νόημα: "Υπάρχουν λιοντάρια στην Αφρική πυροβολήθηκε από έναν άνδρα που." Ο όρος *συνιστώσα* δεν είναι δύσκολο να κατανοηθεί, αλλά – όπως όλοι οι λογικοί όροι – πρέπει να οριστεί επακριβώς και να εφαρμοστεί προσεκτικά.

Α. Σύζευξη

Υπάρχουν πολλοί τύποι σύνθετων δηλώσεων, καθένας από τους οποίους απαιτεί το δικό του λογικό συμβολισμό. Ο πρώτος τύπος σύνθετης δήλωσης που εξετάζουμε είναι η σύζευξη. Μπορούμε να σχηματίσουμε τη **σύζευξη** δύο δηλώσεων τοποθετώντας τη λέξη "και" μεταξύ τους˙ οι δύο δηλώσεις που συνδυάζονται με τον τρόπο αυτό καλούνται **συζευκτά**. Έτσι η σύνθετη δήλωση "Ο Charlie είναι καθώς πρέπει και ο Charlie είναι γλυκός" αποτελεί μια σύζευξη της οποίας το πρώτο συζευκτό είναι "O Charlie είναι καθώς πρέπει" και το δεύτερο συζευκτό είναι "O Charlie είναι γλυκός."

Η λέξη "και" είναι μια σύντομη και βολική λέξη, αλλά έχει και άλλες χρήσεις εκτός από το να συνδέει δηλώσεις. Π.χ., η δήλωση "O Lincoln και ο Grant έζησαν την ίδια εποχή" δεν αποτελεί μια σύζευξη, αλλά μια απλή δήλωση που εκφράζει μια σχέση. Για να έχουμε ένα μοναδικό σύμβολο του οποίου ο μόνος ρόλος είναι να συνδέει δηλώσεις συζευκτικά, εισάγουμε την **τελεία** "$\cdot$" ως το σύμβολό μας για τη σύζευξη. Έτσι η προηγούμενη σύζευξη μπορεί να γραφεί ως "O Charlie είναι καθώς πρέπει $\cdot$ O Charlie είναι γλυκός." Γενικότερα, όταν p και q είναι οποιεσδήποτε δύο δηλώσεις, η σύζευξή τους γράφεται $p \cdot q$. Σε μερικά βιβλία, χρησιμοποιούνται άλλα σύμβολα για να εκφραστεί η σύζευξη, όπως το "$\wedge$" ή το "&".

Γνωρίζουμε ότι κάθε δήλωση είναι ή αληθής ή ψευδής. Επομένως λέμε ότι κάθε δήλωση έχει μια **τιμή αλήθειας**., όπου η τιμή αλήθειας μιας αληθούς δήλωσης είναι *αληθής*, και η τιμή αλήθειας μιας ψευδούς δήλωσης είναι *ψευδής*. Χρησιμοποιώντας αυτή την έννοια, μπορούμε να διαιρέσουμε τις σύνθετες δηλώσεις σε δύο διακριτές κατηγορίες, ανάλογα με το κατά πόσο η τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης καθορίζεται πλήρως από τις τιμές αλήθειας των συνιστωσών της, ή καθορίζεται από ο,τιδήποτε άλλο από τις τιμές αλήθειας των συνιστωσών της.

Εφαρμόζουμε αυτή τη διάκριση στις συζεύξεις. Η τιμή αλήθειας της σύζευξης δύο δηλώσεων καθορίζεται πλήρως και αποκλειστικά από τις τιμές αλήθειας των δύο συνιστωσών της. Αν και τα δύο συζευκτά είναι αληθή, η σύζευξη είναι αληθής˙αλλιώς είναι ψευδής. Για το λόγο αυτό λέμε ότι μια σύζευξη είναι μια *αληθο-συναρτησιακή σύνθετη δήλωση*, και τα συζευκτά λέμε ότι είναι οι **αληθο-συναρτησιακές συνιστώσες** της.

Δεν είναι κάθε σύνθετη δήλωση αληθο-συναρτησιακή. Π.χ., η τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης "O Οθέλλος πιστεύει ότι η Δυσδαιμόνα αγαπά τον Κάσσιο" δεν καθορίζεται με κανένα τρόπο από την τιμή αλήθειας της απλής δήλωσης "Η Δυσδαιμόνα αγαπά τον Κάσσιο', η οποία αποτελεί συνιστώσα της, διότι θα μπορούσε να είναι αληθές ότι ο Οθέλλος πιστεύει ότι η Δυσδαιμόνα αγαπά τον Κάσσιο, ανεξάρτητα από το κατά πόσο πράγματι τον αγαπά ή όχι. Έτσι η συνιστώσα "Η Δυσδαιμόνα αγαπά τον Κάσσιο" δεν αποτελεί μια αληθο-συναρτησιακή συνιστώσα της δήλωσης "O Οθέλλος πιστεύει ότι η Δυσδαιμόνα αγαπά τον Κάσσιο", και η ίδια η δήλωση δεν αποτελεί μια αληθο-συναρτησιακή σύνθετη δήλωση.

Για τους σκοπούς μας εδώ θεωρούμε ως συνιστώσα μιας σύνθετης δήλωσης μια **αληθο-συναρτησιακή συνιστώσα** αν, όταν η συνιστώσα αντικατασταθεί στη σύνθετη δήλωση από οποιεσδήποτε διαφορετικές δηλώσεις που έχουν την ίδια τιμή αλήθειας μεταξύ τους, οι διαφορετικές σύνθετες δηλώσεις που προκύπτουν από αυτές τις αντικαταστάσεις έχουν επίσης τις ίδιες τιμές αλήθειας μεταξύ τους. Τώρα ορίζουμε ως σύνθετη δήλωση μια **αληθο-συναρτησιακή σύνθετη δήλωση** αν όλες οι συνιστώσες της είναι αληθοσυναρτησιακές συνιστώσες της.[1]

Θα ασχοληθούμε μόνο με εκείνες τις σύνθετες δηλώσεις που είναι αληθο-συναρτησιακά σύνθετες. Στο υπόλοιπο του παρόντος κειμένου, επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *απλή δήλωση* για να αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε δήλωση που δεν είναι αληθο-συνσρτησιακά σύνθετη.

Μια σύζευξη είναι μια αληθο-συναρτησιακά σύνθετη δήλωση, κι έτσι το σύμβολο "·" είναι ένας **αληθο-συναρτησιακός σύνδεσμος**. Για οποιεσδήποτε δύο δηλώσεις, p και q, υπάρχουν μόνο τέσσερα δυνατά σύνολα τιμών αλήθειας που αυτές μπορούν να έχουν. Αυτές οι τέσσερις δυνατές περιπτώσεις, και η τιμή αλήθειας της σύζευξης σε καθεμιά, μπορούν να περιγραφούν όπως παρακάτω:

Όταν η p είναι αληθής και η q αληθής, η $p \cdot q$ είναι αληθής.
Όταν η p είναι αληθής και η q ψευδής, η $p \cdot q$ είναι ψευδής.
Όταν η p είναι ψευδής και η q αληθής, η $p \cdot q$ είναι ψευδής.
Όταν η p είναι ψευδής και η q ψευδής, η $p \cdot q$ είναι ψευδής.

Αν αναπαραστήσουμε τις τιμές αλήθειας "αληθής" και "ψευδής" με τα κεφαλαία γράμματα T και F, ο καθορισμός της τιμής αλήθειας μίας σύζευξης από τις τιμές αλήθειας των συζευκτών της μπορεί να αναπαρασταθεί πιο σύντομα και ξεκάθαρα μέσω ενός **πίνακα αλήθειας**:

p	q	$p \cdot q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Αυτός ο πίνακας αλήθειας μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει το σύμβολο ·, διότι διευκρινίζει ποιές τιμές αλήθειας παίρνει η $p \cdot q$ σε κάθε δυνατή περίπτωση.

[1]Κάπως πιο πολύπλοκοι ορισμοί έχουν προταθεί από τον David H. Sanford στο "What Is a Truth Functional Component?" *Logique et Analyse* 14 (1970): 483–486.

Συμβολίζουμε απλές δηλώσεις με κεφαλαία γράμματα, χρησιμοποιώντας γενικά για αυτό το σκοπό ένα γράμμα που θα μας βοηθήσει να θυμόμαστε ποιά δήλωση συμβολίζει. Έτσι μπορούμε να συμβολίσουμε την "Ο Charlie είναι καθώς πρέπει και ο Charlie είναι γλυκός" ως $N{\cdot}S$. Μερικές συζεύξεις, και τα δύο μέρη των οποίων έχουν τον ίδιο όρο-υποκείμενο – π.χ., "Ο Byron ήταν μεγάλος ποιητής και ο Byron ήταν μεγάλος τυχοδιώκτης" – διατυπώνονται πιο σύντομα και ίσως πιο φυσικά θέτοντας το "και" μεταξύ των όρων-κατηγορημάτων και μη επαναλαμβάνοντας τον όρο-υποκείμενο, όπως "Ο Byron ήταν μεγάλος ποιητής και μεγάλος τυχοδιώκτης". Για τους σκοπούς μας, θεωρούμε ότι η τελευταία δήλωση διατυπώνει την ίδια δήλωση όπως η προηγούμενη και συμβολίζουμε και τις δύο με $P{\cdot}A$. Αν και τα δύο μέρη μιας σύζευξης έχουν τον ίδιο όρο-κατηγόρημα, όπως στην "Ο Lewis ήταν διάσημος εξερευνητής και ο Clark ήταν διάσημος εξερευνητής", η σύζευξη συνήθως συντομεύεται θέτοντας το "και" μεταξύ των όρων-υποκειμένων και μη επαναλαμβάνοντας το κατηγόρημα, όπως στην "Ο Lewis και ο Clark ήταν διάσημοι εξερευνητές". Και οι δύο διατυπώσεις συμβολίζονται με $L{\cdot}C$.

Όπως φαίνεται στον πίνακα αλήθειας που ορίζει το σύμβολο "$\cdot$", μια σύζευξη είναι αληθής αν και μόνον αν και τα δύο μέρη της είναι αληθή. Η λέξη "και" έχει μια άλλη χρήση σύμφωνα με την οποία αυτή δεν σηματοδοτεί απλά την (αληθο-συναρτησιακή) σύζευξη, αλλά έχει το νόημα "και ακολούθως", σημαίνοντας χρονική διαδοχή. Έτσι η δήλωση "Ο Jones εισήλθε στη χώρα στη Νέα Υόρκη και πήγε κατευθείαν στο Σικάγο", έχει νόημα και θα μπορούσε να είναι αληθής, ενώ η "Ο Jones πήγε κατευθείαν στο Σικάγο και εισήλθε στη χώρα στη Νέα Υόρκη" είναι μετά βίας κατανοητή. Υπάρχει αρκετή διαφορά μεταξύ της "Έβγαλε τα παπούτσια του και χώθηκε στο κρεβάτι" και της "Χώθηκε στο κρεβάτι και έβγαλε τα παπούτσια του".[2] Τέτοια παραδείγματα δείχνουν ότι είναι επιθυμητό να έχουμε ένα ειδικό σύμβολο με μία αποκλειστικά αληθο-συναρτησιακή συζευκτική χρήση.

Σημειώστε ότι οι λέξεις/εκφράσεις "αλλά", "όμως", "επίσης", "ακόμη", "ωστόσο", "εξάλλου", "παρ' όλα αυτά" κτλ., ακόμα και το κόμμα και η άνω τελεία, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να συνενώσουν δύο δηλώσεις σε μια μοναδική σύνθετη δήλωση, και με τη συζευκτική τους έννοια μπορούν όλες να αναπαρασταθούν από το σύμβολο "$\cdot$".

[2]Στην εφημερίδα The Victoria Advocate, Victoria, 27 Οκτωβρίου 1990, εμφανίστηκε το ακόλουθο ρεπορτάζ: "Ο Ramiro Ramirez Garza, κάτοικος του μπλοκ 2700 της Leary Lane, συνελήφθη από την αστυνομία καθώς απειλούσε να αυτοκτονήσει και να φύγει στο Μεξικό."

Β. Άρνηση

Η **άρνηση** (ή αντιφατική ή διάψευση) μιας δήλωσης συχνά σχηματίζεται εισάγοντας τη λέξη "δεν" στην αρχική δήλωση. Εναλλακτικά, κάποιος μπορεί να εκφράσει την άρνηση μιας δήλωσης θέτοντας εμπρός της τη φράση "είναι ψευδές ότι" ή "δεν ισχύει ότι". Είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε το σύμβολο "$\sim$" που καλείται **βόστρυχος** ή **περισπωμένη**, για να σχηματίσουμε την άρνηση μιας δήλωσης. (Πάλι, μερικά βιβλία χρησιμοποιούν το σύμβολο "$-$" για την άρνηση.) Έτσι, αν το M συμβολίζει τη δήλωση "Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί", οι δηλώσεις "Δεν είναι όλοι οι άνθρωποι θνητοί", "Μερικοί άνθρωποι δεν είναι θνητοί", "Είναι ψευδές ότι όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί" και "Δεν ισχύει ότι όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί" συμβολίζονται όλες ως $\sim M$. Γενικότερα, αν p είναι οποιαδήποτε δήλωση, η άρνησή της γράφεται $\sim p$. Μερικοί λογικοί μεταχειρίζονται το σύμβολο $\sim$ ως σύνδεσμο, αλλά επειδή αυτό δεν συνδέει πράγματι δύο ή περισσότερες μονάδες, είναι αρκετό να σημειώσουμε ότι εκτελεί μια λειτουργία – την αντιστροφή μίας τιμής αλήθειας – σε μία μονάδα, κι έτσι μπορεί να αναφερόμαστε σε αυτό ως τελεστή. Είναι ένας *αληθο-συναρτησιακός* τελεστής, φυσικά. Η άρνηση οποιασδήποτε αληθούς δήλωσης είναι ψευδής, και η άρνηση οποιασδήποτε ψευδούς δήλωσης είναι αληθής. Αυτό το γεγονός μπορεί να παρουσιαστεί πολύ απλά και ξεκάθαρα μέσω ενός πίνακα αλήθειας:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Αυτός ο πίνακας αλήθειας μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός του συμβόλου $\sim$ της άρνησης.

Γ. Διάζευξη

Η **διάζευξη** (ή εναλλαγή) δύο δηλώσεων σχηματίζεται εισάγοντας τη λέξη "ή" μεταξύ τους. Οι δύο συνιστώσες δηλώσεις που συνδυάζονται έτσι καλούνται *διαζευκτά* (ή *εναλλακτικά*).

Η λέξη "ή" είναι ασαφής, έχοντας δύο σχετικές αλλά ευδιάκριτες σημασίες. Παράδειγμα για τη μία από αυτές αποτελεί η δήλωση "Τα ασφάλιστρα δεν θα εισπραχθούν σε περίπτωση ασθένειας ή ανεργίας." Η πρόθεση εδώ είναι προφανώς ότι υπάρχει απαλλαγή ασφαλίστρων όχι μόνο για άρρωστα πρόσωπα και για άνεργα πρόσωπα, αλλά επίσης και για πρόσωπα που είναι και άρρωστα και άνεργα. Αυτή η σημασία της λέξης "ή" καλείται *ασθενής* ή *εγκλειστική*. Μια **εγκλειστική διάζευξη** είναι αληθής αν το ένα ή το άλλο ή και τα δύο διαζευκτά είναι αληθή· μόνο όταν και τα δύο διαζευκτά είναι ψευδή είναι η εγκλειστική τους διάζευξη ψευδής. Το εγκλειστικό "ή" έχει τη σημασία "ένα από τα δύο, ίσως και τα δύο". Όπου δίνεται έμφαση στην ακρίβεια, όπως σε συμβόλαια και άλλα νομικά έγγραφα, αυτή η σημασία συχνά γίνεται ρητή με τη χρήση της φράσης "και/ή".[3]

Η λέξη "ή" χρησιμοποιείται επίσης με μια ισχυρή ή αποκλειστική έννοια, όπου το νόημα δεν είναι "τουλάχιστον ένα" αλλά "τουλάχιστον ένα και το πολύ ένα". Όταν ένα εστιατόριο αναφέρει "σαλάτα ή επιδόρπιο" στο μενού του, υπονοείται σαφώς ότι, για την αναφερόμενη τιμή του γεύματος, αυτός που γευματίζει μπορεί να έχει το ένα ή το άλλο αλλά όχι και τα δύο. Όπου δίνεται έμφαση στην ακρίβεια και υπονοείται η αποκλειστική έννοια του "ή", συχνά προστίθεται η φράση "αλλά όχι και τα δύο".[4]

Ερμηνεύουμε την εγκλειστική διάζευξη δύο δηλώσεων ως ένα ισχυρισμό ότι τουλάχιστον μια από τις δηλώσεις είναι αληθής, και ερμηνεύουμε την **αποκλειστική διάζευξή** τους ως ένα ισχυρισμό ότι τουλάχιστον μία από τις δηλώσεις είναι αληθής αλλά δεν είναι και οι δύο αληθείς. Σημειώνουμε ότι τα δύο είδη διάζευξης έχουν κοινό ένα μέρος των σημασιών τους. Αυτή η μερική κοινή σημασία, ότι τουλάχιστον ένα από τα διαζευκτά είναι αληθές, είναι ολόκληρη η σημασία του εγκλειστικού "ή" και μέρος της σημασίας του αποκλειστικού "ή".

Αν και οι διαζεύξεις διατυπώνονται διφορούμενα στα Αγγλικά, αυτές είναι ξεκάθαρες στα Λατινικά. Η Λατινική γλώσσα έχει δύο διαφορετικές λέξεις που αντιστοιχούν στις δύο διαφορετικές σημασίες της αγγλικής λέξης 'ή". Η λατινική λέξη *vel* σηματοδοτεί την ασθενή ή εγκλειστική διάζευξη, και η λατινική λέξη *aut* αντιστοιχεί στη λέξη "ή" με την ισχυρή ή αποκλειστική έννοιά της. Είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε το αρχικό γράμμα της λέξης *vel* για να συμβολίσουμε το "ή" με την ασθενή, εγκλειστική έννοιά του. Όταν p και q είναι οποιεσδήποτε δηλώσεις, η ασθενής ή εγκλειστική διάζευξή τους γράφεται $p \vee q$. Το σύμβολό μας για την εγκλειστική διάζευξη, που καλείται **σφήνα** (ή, λιγότερο συχνά, *vee*) είναι επίσης ένας αληθο-συναρτησιακός σύνδεσμος. Μια ασθενής διάζευξη είναι ψευδής μόνο αν και τα δύο διαζευκτά της είναι ψευδή. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σφήνα ορίζεται με τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

[3](Σ.τ.Μ.) Η εγκλειστική διάζευξη αποδίδεται συχνά με την έκφραση "είτε ... είτε ...".

[4](Σ.τ.Μ.) Η αποκλειστική διάζευξη αποδίδεται συχνά με την έκφραση "ή ... ή ...".

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Το πρώτο δείγμα επιχειρήματος που παρουσιάστηκε σ' αυτή την ενότητα αποτελεί ένα *διαζευκτικό συλλογισμό* (ένας συλλογισμός είναι ένα παραγωγικό επιχείρημα που αποτελείται από δύο προκείμενες και ένα συμπέρασμα).

> Ο τυφλός φυλακισμένος έχει κόκκινο καπέλο ή ο τυφλός φυλακισμένος έχει λευκό καπέλο.
> Ο τυφλός φυλακισμένος δεν έχει κόκκινο καπέλο.
> Επομένως ο τυφλός φυλακισμένος έχει λευκό καπέλο.

Η μορφή του χαρακτηρίζεται λέγοντας ότι η πρώτη προκείμενή του είναι μία διάζευξη· η δεύτερη προκείμενή του είναι η άρνηση του πρώτου διαζευκτού της πρώτης προκείμενης· και το συμπέρασμά του είναι το ίδιο με το δεύτερο διαζευκτό της πρώτης προκείμενης. Είναι προφανές ότι ο διαζευκτικός συλλογισμός, όπως ορίστηκε, είναι έγκυρος για οποιαδήποτε ερμηνεία της λέξεης "ή" – δηλαδή, ανεξάρτητα από το κατά πόσον έχουμε κατά νου μία εγκλειστική ή αποκλειστική διάζευξη. Το τυπικό έγκυρο επιχείρημα που έχει μία διάζευξη ως προκείμενη είναι, όπως ο διαζευκτικός συλλογισμός, έγκυρο για οποιαδήποτε ερμηνεία της λέξης "ή", κι έτσι μπορεί να πραγματοποιηθεί μία απλοποίηση μεταφράζοντας τη λέξη "ή" με το λογικό μας σύμβολο "$\vee$" – *ανεξάρτητα από το ποιό νόημα της λέξης "ή" έχουμε κατά νου*. Μόνο μία προσεκτική εξέταση του πλαισίου, ή μία ρητή ερώτηση προς τον ομιλητή ή το συγγραφέα, μπορεί να αποκαλύψει μία σημασία του "ή" έχουμε κατά νου. Αυτό το πρόβλημα, συχνά αδύνατο να λυθεί, μπορεί να αποφευχθεί αν συμφωνήσουμε να θεωρούμε ως εγκλειστική οποιαδήποτε εμφάνιση της λέξης "ή". Από την άλλη πλευρά, αν διατυπώνεται ρητά ότι η διάζευξη θεωρείται ότι είναι αποκλειστική – μέσω της επιπλέον φράσης "αλλά όχι και τα δύο". π.χ. – έχουμε το συμβολικό μηχανισμό να διατυπώσουμε αυτή την πρόσθετη σημασία, όπως θα δείξουμε αμέσως.

Όπου και τα δύο διαζευκτά έχουν ή τον ίδιο όρο ως υποκείμενο ή τον ίδιο όρο ως κατηγόρημα, είναι συχνά φυσικό να συμπιέσουμε τη διατύπωση της σύζευξής τους χρησιμοποιώντας το "ή" έτσι ώστε να μην υπάρχει ανάγκη επανάληψης του κοινού μέρους των δύο διαζευκτών. Έτσι, η "Η ο Smith είναι ο ιδιοκτήτης ή ο Smith είναι ο διευθυντής" θα μπορούσε να διατυπωθεί εξίσου καλά ως "Ο Smith είναι ή ο ιδιοκτήτης ή ο διευθυντής", και οποιαδήποτε από τις δύο συμβολίζεται κατάλληλα ως $O \vee M$. Και η "Η ο Red είναι ένοχος ή ο Butch είναι ένοχος" μπορεί να διατυπωθεί ως "Η ο Red ή ο Butch είναι ένοχος"· οποιαδήποτε από τις δύο μπορεί να συμβολιστεί ως $R \vee B$.

Η έκφραση "εκτός αν" χρησιμοποιείται συχνά για να σχηματίσουμε τη διάζευξη δύο δηλώσεων. Έτσι, η "Θα πας άσχημα στην εξέταση εκτός αν μελετήσεις" συμβολίζεται σωστά ως $P \vee S$, επειδή αυτή διάζευξη ισχυρίζεται ότι ένα από τα διαζευκτά είναι αληθές, και άρα ότι αν ένα από αυτά είναι ψευδές, το άλλο πρέπει να είναι αληθές. Φυσικά, μπορεί να διαβάσεις και να πας άσχημα στην εξέταση.

Η έκφραση "εκτός αν" χρησιμοποιείται μερικές φορές για να μεταφέρει περισσότερες πληροφορίες· μπορεί να σημαίνει (ανάλογα με το πλαίσιο) ότι η μία ή η άλλη πρόταση είναι αληθής αλλά ότι δεν είναι και οι δύο αληθείς. Δηλαδή, η "εκτός αν" μπορεί να προορίζεται να αποτελεί μία αποκλειστική διάζευξη. Έτσι σημειώθηκε από τον Ted Turner ότι η παγκόσμια υπερθέρμανση θα βυθίσει τη Νέα Υόρκη στο νερό σε εκατό χρόνια και "θα είναι η μεγαλύτερη καταστροφή που έχει ποτέ δει ο κόσμος – εκτός αν έχουμε πυρηνικό πόλεμο." Εδώ ο ομιλητής εννοούσε ότι τουλάχιστον ένα από τα διαζευκτά είναι αληθές, αλλά φυσικά αυτά δεν μπορούν να είναι και τα δύο αληθή. Άλλες χρήσεις της "εκτός αν" είναι ασαφείς. Όταν λέμε, "Το πικ νικ θα πραγματοποιηθεί εκτός αν βρέξει", σίγουρα εννοούμε ότι το πικ νικ θα πραγματοποιηθεί αν δεν βρέξει. Μήπως εννοούμε ότι δεν θα πραγματοποιηθεί αν πράγματι βρέξει; Αυτό μπορεί να είναι αβέβαιαο. Είναι σοφή πολιτική να μεταχειριζόμαστε κάθε διάζευξη ως ασθενή ή εγκλειστική εκτός αν είναι σίγουρο ότι υπονοείται μία αποκλειστική διάζευξη. Η έκφραση "εκτός αν" είναι καλύτερα να συμβολίζεται απλά με τη σφήνα ($\vee$).

Δ. Στίξη

Η **στίξη** είναι απολύτως απαιτούμενη αν θέλουμε να είναι ξεκάθαρες οι πολύπλοκες δηλώσεις. Πολλά διαφορετικά σημεία στίξης χρησιμοποιούνται, χωρίς τα οποία πολλές αποφάνσεις θα ήταν ασαφείς σε μεγάλο βαθμό. Π.χ., εντελώς διαφορετικές σημασίες αποδίδονται στην "Ο δάσκαλος λέει ο John είναι ανόητος" όταν υπονοηθούν διαφορετικά σημεία στίξης: "Ο δάσκαλος", λέει ο John, "είναι ανόητος" ή "Ο δάσκαλος λέει 'ο John είναι ανόητος'." Η στίξη είναι εξίσου απαραίτητη στα μαθηματικά. Όταν απουσιάζει μία ειδική σύμβαση, κανένας αριθμός δεν συμβολίζεται μοναδικά από την έκφραση $2 \times 3 + 5$, αν και όταν γίνεται ξεκάθαρο πώς θάπρεπε να ομαδοποιηθούν συστατικά της στοιχεία, συμβολίζει ή το 11 ή το 16· το πρώτο προκύπτει όταν η εννοούμενη στίξη είναι $(2 \times 3) + 5$, το δεύτερο όταν είναι $2\times(3+5)$. Για να αποφύγουμε την ασάφεια, και να κάνουμε ξεκάθαρο το νόημα, τα σημεία στίξης στα μαθηματικά εμφανίζονται με τη μορφή παρενθέσεων, ( ), οι οποίες χρησιμοποιούνται για την ομαδοποίηση ατομικών συμβόλων· οι αγκύλες, [ ], που χρησιμοποιούνται για να ομαδοποιήσουν εκφράσεις που περιλαμβάνουν παρενθέσεις· και άγκιστρα, { }, που χρησιμοποιούνται για να ομαδοποιήσουν εκφράσεις, που περιλαμβάνουν αγκύλες.

Στη γλώσσα της συμβολικής λογικής αυτά τα ίδια σημεία στίξης – παρενθέσεις, αγκύλες, άγκιστρα – είναι εξίσου ουσιώδη, επειδή στη λογική σύνθετες δηλώσεις είναι οι ίδιες συχνά συνδεδεμένες μαζί σε πιο πολύπλοκες δηλώσεις. Έτσι η έκφραση $p{\cdot}q\vee r$ είναι ασαφής: θα μπορούσε να υποδηλώνει τη σύζευξη της p με τη διάζευξη της q με την r, ή θα μπορούσε να υποδηλώνει τη διάζευξη της οποίας το πρώτο διαζευκτό είναι η σύζευξη των p και q και της οποίας το δεύτερο διαζευκτό είναι η r. Διακρίνουμε μεταξύ αυτών των δύο διαφορετικών σημασιών θέτοντας σημεία στίξης στο δεδομένο τύπο ως $p{\cdot}(q\vee r)$ ή αλλιώς ως $(p{\cdot}q)\vee r$. Ότι οι διαφορετικοί τρόποι εισαγωγής σημείων στίξης στον αρχικό τύπο κάνουν τη διαφορά μπορεί να διαπιστωθεί θεωρώντας την περίπτωση στην οποία η p είναι ψευδής και η q και η r είναι και οι δύο αληθείς. Σ' αυτή την περίπτωση ο δεύτερος τύπος με σημεία στίξης είναι αληθής (επειδή το δεύτερο διαζευκτό του είναι αληθές), ενώ ο πρώτος είναι ψευδής (επειδή το πρώτο συζευκτό του είναι ψευδές). Εδώ η διαφορά στα σημεία στίξης κάνει όλη τη διαφορά μεταξύ αλήθειας και ψεύδους, διότι οι διαφορετικοί τρόποι στίξης μπορούν να αντιστοιχήσουν διαφορετικές τιμές αλήθειας στον ασαφή τύπο $p{\cdot}q\vee r$.

Η λέξη "εκάτερος/η/ο" έχει μία ποικιλία διαφορετικών σημασιών και χρήσεων.[5] Έχει συζευκτική ισχύ στην απόφανση "Υπάρχει κίνδυνος σε εκάτερη των πλευρών (εκατέρωθεν)." Πιο συχνά χρησιμοποιείται για να εισαγάγει το πρώτο διαζευκτό σε μία διάζευξη, όπως στην "Ο τυφλός φυλακισμένος έχει εκάτερο κόκκινο ή λευκό καπέλο". Εκεί συνεισφέρει στη ρητορική ισορροπία της απόφανσης, αλλά δεν επηρεάζει τη σημασία της. Ίσως η πιο σημαντική χρήση της λέξης είναι ως σημείο στίξης σε μία σύνθετη δήλωση. Έτσι η απόφανση

> Τα μέλη του οργανισμού θα συναντηθούν την Πέμπτη και ο Anand θα εκλεγεί ή η εκλογή θα αναβληθεί.

είναι ασαφής. Αυτή η ασάφεια μπορεί να ξεκαθαριστεί προς τη μία κατεύθυνση θέτοντας τη λέξη "εκάτερο" στην αρχή της, ή προς την άλλη

[5](Σ.τ.Μ.) Η τρέχουσα παράγραφος αφορά τη χρήση της έκφρασης "either ... or ..." στα Αγγλικά, αντίστοιχη της οποίας είναι η έκφραση "ή ... ή ..." στα Ελληνικά.

κατεύθυνση θέτοντας τη λέξη "εκάτερο" πριν από το όνομα "Anand". Μία τέτοια διαφορά υποδηλώνεται στη συμβολική μας γλώσσα με παρενθέσεις. Ο ασαφής τύπος $p{\cdot}q\vee r$ που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο αντιστοιχεί στην ασαφή απόφανση που μόλις εξετάσαμε. Οι δύο διαφορετικοί τρόποι στίξης του τύπου αντιστοιχούν στους δύο διαφορετικούς τρόπους στίξης της απόφανσης που προκύπτουν από τις δύο διαφορετικές θέσεις εισαγωγής της λέξης "εκάτερος/η/ο".

Η άρνηση μίας διάζευξης συχνά σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τη φράση "ούτε ... ούτε ...". Έτσι μπορούμε τη δήλωση "Η ο Fillmore ή ο Harding υπήρξε ο σημαντικότερος πρόεδρος των ΗΠΑ" να την αντικρούσουμε με τη δήλωση "Ούτε ο Fillmore ούτε ο Harding υπήρξε ο σημαντικότερος πρόεδρος των ΗΠΑ." Η διάζευξη θα συμβολιζόταν ως $F\vee H$, και η άρνησή της είτε ως $\sim(F\vee H)$ είτε ως $(\sim F){\cdot}(\sim H)$. (Η λογική ισοδυναμία αυτών των δύο συμβολικών τύπων θα συζητηθεί στην Ενότητα 9.) Θα έπρεπε να είναι σαφές ότι το να αρνηθούμε μία διάζευξη, που εκφράζει ότι μία ή άλλη δήλωση είναι αληθής, απαιτεί να είναι ψευδείς και οι δύο δηλώσεις.

Η έκφραση "και ... και ..." παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον τρόπο στίξης στη λογική, και της αξίζει μεγάλη προσοχή. Όταν λέμε "Και ο Jamal και ο Derek δεν είναι ..." λέμε, όπως σημειώσαμε μόλις πριν, ότι "Ούτε ο Jamal ούτε ο Derek είναι ..."˙ εφαρμόζουμε την άρνηση σε καθένα από αυτούς. Αλλά όταν λέμε "Δεν είναι και ο Jamal και ο Derek ..." λέμε κάτι πολύ διαφορετικό˙ εφαρμόζουμε την άρνηση στο ζεύγος που προκύπτει όταν τους παίρνουμε μαζί, λέγοντας ότι "δεν ισχύει ότι αυτοί είναι και οι δύο ...". Αυτή η διαφορά είναι πολύ ουσιώδης. Εντελώς διαφορετικές σημασίες προκύπτουν όταν η έκφραση "και ... και ..." τίθεται με διαφορετικό τρόπο στην απόφανση. Ας θεωρήσουμε τη μεγάλη διαφορά σημασίας μεταξύ της

Δεν θα εκλεγούν και ο Jamal και ο Derek.

και της

Και ο Jamal και ο Derek δεν θα εκλεγούν.

Η πρώτη αρνείται τη σύζευξη $J{\cdot}D$ και μπορεί να συμβολιστεί ως $\sim(J{\cdot}D)$. Η δεύτερη λέει ότι καθένας από τους δύο δεν θα εκλεγεί, και συμβολίζεται ως $(\sim J){\cdot}(\sim D)$. Αλλάζοντας απλά τη θέση των δύο εκφράσεων "και ... και ..." και "δεν" τροποποιούμε τη λογική ισχύ αυτού που ισχυριζόμαστε.

Φυσικά, η έκφραση "και ... και ..." δεν παίζει πάντα αυτόν το ρόλο˙ μερικές φορές τη χρησιμοποιούμε για να προσθέσουμε έμφαση. Όταν λέμε

"Και ο Lewis και ο Clark ήταν μεγάλοι εξερευνητές", χρησιμοποιούμε την έκφραση μόνο για να διατυπώσουμε πιο εμφατικά αυτό που λέγεται από την "Ο Lewis και ο Clark ήταν μεγάλοι εξερευνητές." Όταν ο στόχος είναι η λογική ανάλυση, ο ρόλος της έκφρασης "και ... και ..." πρέπει να καθοριστεί πολύ προσεκτικά.

Χάριν συντομίας – δηλαδή, για να μειωθεί ο αριθμός των παρενθέσεων που απαιτούνται – είναι βολικό να υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι, σε κάθε τύπο, το σύμβολο της άρνησης θα γίνεται κατανοητό ότι εφαρμόζεται στη μικρότερη δήλωση που επιτρέπει η διαδικασία στίξης. Χωρίς αυτή τη σύμβαση, ο τύπος $\sim p \vee q$ είναι ασαφής, σημαίνοντας ή $(\sim p) \vee q$ ή $\sim(p \vee q)$. Με βάση τη σύμβασή μας θεωρούμε ότι αυτός σημαίνει την πρώτη από αυτές τις εναλλακτικές, διότι η περισπωμένη μπορεί (κει επομένως το κάνει πραγματικά) να εφαρμοστεί στην πρώτη συνιστώσα, την p, παρά στο μεγαλύτερο τύπο, τον $p \vee q$.

Δοθέντος ενός συνόλου σημείων στίξης για τη συμβολική μας γλώσσα, είναι δυνατό να γράψουμε όχι μόνο συζεύξεις, αρνήσεις και ασθενείς διαζεύξεις σ' αυτή τη γλώσσα, αλλά επίσης και αποκλειστικές διαζεύξεις. Η αποκλειστική διάζευξη των p και q σχυρίζεται ότι τουλάχιστον ένα από αυτά είναι αληθές αλλά δεν είναι και το ένα και το άλλο αληθή, που συμβολίζεται ως $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$. Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της αποκλειστικής διάζευξης είναι "$\underline{\vee}$".

Η τιμή αλήθειας οποιασδήποτε δήλωσης που κατασκευάζεται από απλές δηλώσεις χρησιμοποιώντας μόνο την περισπωμένη και τους αληθοσυναρτησιακούς συνδέσμους – τελεία και σφήνα – καθορίζεται πλήρως από την αλήθεια ή το ψεύδος των απλών δηλώσεων που αποτελούν τις συνιστώσες της. Αν γνωρίζουμε τις τιμές αλήθειας απλών δηλώσεων, η τιμή αλήθειας οποιασδήποτε αληθο-συναρτησιακής σύνθεσής τους υπολογίζεται εύκολα. Όταν εργαζόμαστε με τέτοιες σύνθετες δηλώσεις αρχίζουμε πάντα με τις πιο εσωτερικές συνιστώσες και προχωρούμε προς τα έξω. Π.χ., αν A και B είναι αληθείς δηλώσεις και X και Y είναι ψευδείς δηλώσεις, υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης $\sim[\sim(A \cdot X) \cdot (Y \vee \sim B)]$ ως εξής: Επειδή η X είναι ψευδής, η σύζευξη $A \cdot X$ είναι ψευδής, κι έτσι η άρνησή της $\sim(A \cdot X)$ είναι αληθής. Η B είναι αληθής, οπότε η άρνησή της $\sim B$ είναι ψευδής, και επειδή η Y είναι επίσης ψευδής, η διάζευξη της Y με την $\sim B$, η $Y \vee \sim B$, είναι ψευδής. Ο τύπος με αγκύλες $[\sim(A \cdot X) \cdot (Y \vee \sim B)]$ αποτελεί τη σύζευξη μίας αληθούς με μία ψευδή δήλωση και επομένως είναι ψευδής. Συνεπώς η άρνησή της, η οποία αποτελεί την πλήρη δήλωση, είναι αληθής. Μία τέτοια σταδιακή διαδικασία πάντα μας καθιστά ικανούς να προσδιορίζουμε την τιμή αλήθειας μίας σύνθετης δήλωσης από τις τιμές αλήθειας των συνιστωσών της.

Σε κάποιες περιστάσεις ίσως να μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή αλήθειας μίας σύνθετης αληθο-συναρτησιακής δήλωσης ακόμη κι αν δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την αλήθεια ή το ψεύδος μίας από τις απλές δηλώσεις που αποτελούν τις συνιστώσες της. Μπορούμε να το κάνουμε υπολογίζοντας πρώτα την τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης υποθέτοντας ότι μία δοθείσα απλή συνιστώσα είναι αληθής, και κατόπιν υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης υποθέτοντας ότι η ίδια απλή συνιστώσα είναι ψευδής. Αν και οι δύο υπολογισμοί αποδώσουν την ίδια τιμή αλήθειας για τη σύνθετη δήλωση που εξετάζουμε, έχουμε προσδιορίσει την τιμή αλήθειας της σύνθετης δήλωσης χωρίς να πρέπει να προσδιορίσουμε την τιμή αλήθειας της άγνωστης συνιστώσας της, επειδή γνωρίζουμε ότι η τιμή αλήθειας οποιασδήποτε συνιστώσας δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο από αληθής ή ψευδής. Οι πίνακες αλήθειας μας επιτρέπουν να επεκτείνουμε αυτή τη μέθοδο σε περιπτώσεις με περισσότερες από μία απροσδιόριστες συνιστώσες.

Επισκόπηση

Στίξη σε Συμβολικές Εκφράσεις

Η δήλωση

> Θα μελετήσω πολύ και θα περάσω στην εξέταση ή θα αποτύχω

είναι ασαφής. Θα μπορούσε να σημαίνει "Θα μελετήσω πολύ και θα περάσω στην εξέταση ή θα αποτύχω στην εξέταση" ή "Θα μελετήσω πολύ και ή θα περάσω στην εξέταση ή θα αποτύχω στην εξέταση".
Η συμβολική έκφραση

$$S \cdot P \vee F$$

είναι όμοια ασαφής. Οι παρενθέσεις λύνουν την ασάφεια. Στη θέση της "Θα μελετήσω πολύ και θα περάσω στην εξέταση ή θα αποτύχω στην εξέταση", παίρνουμε

$$(S \cdot P) \vee F$$

και στη θέση της "Θα μελετήσω πολύ και ή θα περάσω στην εξέταση ή θα αποτύχω στην εξέταση"

$$S \cdot (P \vee F).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μέσω πινάκων αλήθειας της τελείας, της σφήνας, και της περισπωμένης, προσδιορίστε ποιές από τις ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς:

1. Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας ∨ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας.
2. ∼(Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας · Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας).
3. ∼Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας · ∼Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας.
4. ∼(Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας ∨ Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας).
5. ∼Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας ∨ ∼Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας.
6. Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας ∨ ∼Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας.
7. Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας · ∼Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας.
8. (Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας · Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας) ∨ (Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας · ∼Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας).
9. (Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας ∨ Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας) · (∼Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας · ∼Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας).
10. Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας ∨ ∼(Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας · Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας).
11. Η Ρώμη είναι πρωτεύουσα της Ιταλίας · ∼(Το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας ∨ Η Ρώμη είναι πρωτεύουσα της Ισπανίας).
12. ∼ (∼Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας · ∼Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας).
13. ∼ [∼ (∼Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας ∨ ∼Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας) ∨ ∼ (∼Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας ∨ Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας)].

14. $\sim$ [$\sim$ ($\sim$Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας $\cdot$ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας)$\cdot$ $\sim$(Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας $\cdot$ $\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας)].

15. $\sim$ [$\sim$(Η Στοκχόλμη είναι πρωτεύουσα της Νορβηγίας $\vee$ Το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας) $\vee$ $\sim$ ($\sim$Το Λονδίνο είναι πρωτεύουσα της Αγγλίας $\cdot$ Η Ρώμη είναι πρωτεύουσα της Ισπανίας)].

16. Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας $\vee$ ($\sim$Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας $\vee$ Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας).

17. Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\cdot\sim$(Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\cdot$ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας).

18. Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας$\cdot\sim$(Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας $\cdot$ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας).

19. (Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας $\vee$ $\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας) $\vee$ $\sim$($\sim$Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας $\cdot$ $\sim$Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας).

20. (Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\vee$ $\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας) $\vee$ $\sim$($\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\cdot$ $\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας).

21. $\sim$ [$\sim$(Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας $\cdot$ Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας) $\vee$ $\sim$($\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\vee$ $\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας)].

22. $\sim$ [$\sim$(Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας $\cdot$ Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας) $\vee$ $\sim$ ($\sim$Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας $\vee$ $\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας)].

23. $\sim$ [($\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\vee$ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας) $\cdot$ $\sim$ ($\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ιταλίας $\vee$ Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας)].

24. $\sim$ [($\sim$Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας $\vee$ Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας) $\cdot$ $\sim$ ($\sim$Η Στοκχόλμη είναι η πρωτεύουσα της Νορβηγίας $\vee$ Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας)].

25. $\sim$ [($\sim$Το Λονδίνο είναι η πρωτεύουσα της Αγγλίας $\cdot$ Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας) $\vee \sim$ ($\sim$Το Παρίσι είναι η πρωτεύουσα της Γαλλίας $\cdot$ Η Ρώμη είναι η πρωτεύουσα της Ισπανίας)].

Β. Αν A, B και C είναι αληθείς δηλώσεις και X, Y και Z είναι ψευδείς δηλώσεις, ποιές από τις ακόλουθες είναι αληθείς;

1.	$\sim A \vee B$	2.	$\sim B \vee X$
3.	$\sim Y \vee C$	4.	$\sim Z \vee X$
5.	$(A \cdot X) \vee (B \cdot Y)$	6.	$(B \cdot C) \vee (Y \cdot Z)$
7.	$\sim (C \cdot Y) \vee (A \cdot Z)$	8.	$\sim (A \cdot B) \vee (X \cdot Y)$
9.	$\sim (X \cdot Z) \vee (B \cdot C)$	10.	$\sim (X \cdot \sim Y) \vee (B \cdot \sim C)$
11.	$(A \cdot X) \cdot (Y \vee B)$	12.	$(B \cdot C) \cdot (Y \vee Z)$
13.	$(X \vee Y) \cdot (X \vee Z)$	14.	$\sim (A \vee Y) \cdot (B \vee X)$
15.	$\sim (X \vee Z) \cdot (\sim X \vee Z)$	16.	$\sim (A \vee C) \vee \sim (X \cdot \sim Y)$
17.	$\sim (B \vee Z) \cdot \sim (X \vee \sim Y)$	18.	$\sim [(A \vee \sim C) \vee (C \vee \sim A)]$
19.	$\sim [(B \cdot C) \cdot \sim (C \cdot B))]$	20.	$\sim [(A \cdot B) \vee \sim (B \cdot A)]$
21.	$[A \vee (B \vee C)] \cdot \sim [(A \vee B) \vee C]$		
22.	$[X \vee (Y \cdot Z)] \vee \sim [(X \vee Y) \cdot (X \vee Z)]$		
23.	$[A \cdot (B \vee C)] \cdot \sim [(A \cdot B) \vee (A \cdot C)]$		
24.	$\sim \{[(\sim A \cdot B) \cdot (\sim X \cdot Z)] \cdot \sim [(A \cdot \sim B) \vee \sim (\sim Y \cdot \sim Z)]\}$		
25.	$\sim \{\sim [(B \cdot \sim C) \vee (Y \cdot \sim Z)] \cdot [(\sim B \vee X) \vee (B \vee \sim Y)]\}$		

Γ. Χρησιμοποιώντας τα γράμματα E, I, J, L, και S για να συντομογραφήσουμε τις απλές δηλώσεις "Η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει", "Το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου", "Η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ", "Η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου" και "Η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα", να συμβολίσετε τις ακόλουθες δηλώσεις.

1. Το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου αλλά η Λιβύη δεν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.
2. Ή το Ιράν ή η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.
3. Και το Ιράν και η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.
4. Δεν αυξάνουν και το Ιράν και η Λιβύη την τιμή του πετρελαίου.
5. Και το Ιράν και η Λιβύη δεν αυξάνουν την τιμή του πετρελαίου.
6. Το Ιράν ή η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου αλλά δεν το κάνουν και οι δύο.
7. Η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα και ή το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.

8. Ή η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα και το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.
9. Δεν ισχύει ότι η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει, και η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.
10. Δεν ισχύει ότι ή η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.
11. Ή δεν ισχύει ότι η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.
12. Δεν ισχύει ότι και η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει και η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.
13. Η Ιορδανία θα ζητήσει περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ εκτός αν η Σαουδική Αραβία αγοράσει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα.
14. Εκτός αν η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερέψει, η Λιβύη θα αυξήσει την τιμή του πετρελαίου.
15. Το Ιράν δεν θα αυξήσει την τιμή του πετρελαίου εκτός αν κάνει το ίδιο η Λιβύη.
16. Εκτός αν και το Ιράν και η Λιβύη αυξήσουν την τιμή του πετρελαίου καμιά από τις δύο δεν το κάνει.
17. Η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου και η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει.
18. Δεν ισχύει ότι ούτε το Ιράν ούτε η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.
19. Η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο θα χειροτερέψει και η Ιορδανία θα ζητήσει περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ, εκτός αν και το Ιράν και η Λιβύη δεν αυξήσουν την τιμή του πετρελαίου.
20. Ή το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου και η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει, ή δεν ισχύει ότι και η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ και η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα.
21. Ή η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει και η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα, ή ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ ή η Λϊβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.

22. Η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα, και ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ ή και η Λιβύη και το Ιράν αυξάνουν την τιμή του πετρελαίου.

23. Ή η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει ή η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ αλλά ούτε η Λιβύη ούτε το Ιράν αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.

24. Η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει, αλλά η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα και η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου.

25. Η Λιβύη αυξάνει την τιμή του πετρελαίου και η έλλειψη τροφίμων στην Αίγυπτο χειροτερεύει˙ όμως, η Σαουδική Αραβία αγοράζει ακόμη πεντακόσια πολεμικά αεροπλάνα και η Ιορδανία ζητά περισσότερη βοήθεια από τις ΗΠΑ.

8.3 Υποθετικές Δηλώσεις και Υλική Συνεπαγωγή

Όταν δύο δηλώσεις συνδυάζονται με την τοποθέτηση της λέξης “αν” πριν από την πρώτη και την εισαγωγή της λέξης “τότε” μεταξύ τους, η σύνθετη δήλωση που προκύπτει είναι μια **προϋποθετική** (δήλωση) (που καλείται επίσης *υποθετική*, *συνεπαγωγή* ή *συνεπαγωγική δήλωση*). Σε μια προϋποθετική δήλωση, η συνιστώσα δήλωση μεταξύ του “αν” και του “τότε” καλείται η **ηγούμενη** (ή *συνεπάγουσα* ή – σπάνια – *πρότασις*), και η συνιστώσα δήλωση που έπεται της λέξης ”τότε” είναι η **επόμενη** (ή *συνεπαγόμενη* ή – σπάνια – *απόδοσις*). Π.χ., η “Αν ο κ. Jones είναι ο διπλανός γείτονας του τροχοπεδητή, τότε ο κ. Jones κερδίζει ακριβώς τρεις φορές όσα ο τροχοπεδητής” είναι μια υποθετική δήλωση, στην οποία η “ο κ. Jones είναι ο διπλανός γείτονας του τροχοπεδητή” είναι η προηγούμενη, και η “ο κ. Jones κερδίζει ακριβώς τρεις φορές όσα ο τροχοπεδητής” είναι η επόμενη.

Μία υποθετική δήλωση ισχυρίζεται ότι σε κάθε περίπτωση όπου η ηγούμενή της είναι αληθής, η επόμενή της είναι επίσης αληθής. Δεν ισχυρίζεται ότι η επομένη της είναι αληθής, αλλά μόνο ότι η επομένη της είναι αληθής αν η ηγουμένη της είναι αληθής. Η ουσιαστική σημασία μίας υποθετικής δήλωσης είναι η σχέση συνεπαγωγής που βεβαιώνεται ότι ισχύει μεταξύ της ηγούμενης και της επόμενης, με αυτή τη σειρά. Για να κατανοήσουμε το νόημα μιας υποθετικής δήλωσης, λοιπόν, πρέπει να κατανοήσουμε τι είναι η σχέση της συνεπαγωγής.

Η συνεπαγωγή φαίνεται εύλογο να έχει περισότερες από μία σημασίες. Κρίναμε ότι ήταν απαραίτητο να διακρίνουμε διαφορετικές σημασίες της λέξης "ή" πριν να εισαγάγουμε ένα ειδικό λογικό σύμβολο που αντιστοιχεί ακριβώς σε μία μόνο από τις σημασίες της λέξης. Αν δεν το είχαμε κάνει, η ασάφεια της λέξης θα είχε μολύνει το λογικό μας συμβολισμό και θα τον είχε εμποδίσει να επιτύχει τη σαφήνεια και ακρίβεια που στοχεύαμε. Θα είναι εξίσου σημαντικό να διακρίνουμε τις διαφορετικές σημασίες της "συνεπάγεται" ή "αν-τότε", πριν εισαγάγουμε ένα ειδικό λογικό σύμβολο σε σύνδεση με αυτές τις εκφράσεις.

Θεωρούμε τις ακόλουθες τέσσερις υποθετικές δηλώσεις, καθεμία από τις οποίες φαίνεται να διατυπώνει ένα διαφορετικό τύπο συνεπαγωγής, και σε καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί μία διαφορετική σημασία της έκφρασης "αν ..., τότε ...".

Α. Αν όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί και ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, τότε ο Σωκράτης είναι θνητός.

Β. Αν ο Leslie είναι εργένης, τότε ο Leslie είναι ανύπαντρος.

Γ. Αν εμβαπτίσουμε μπλε χαρτί ηλιοτροπίου σε οξύ, τότε το χαρτί ηλιοτροπίου θα γίνει κόκκινο.

Δ. Αν η ομάδα χάσει το παιχνίδι εντός έδρας, τότε θα φάω το καπέλο μου.

Ακόμη και μια πρόχειρη ανάγνωση αυτών των τεσσάρων υποθετικών δηλώσεων αποκαλύπτει ότι αυτές ανήκουν σε αρκετά διαφορετικούς τύπους. Η επόμενη του Α έπεται λογικά από την ηγούμενή της, ενώ η επόμενη του Β έπεται από την ηγούμενή της με βάση τον ίδιο τον ορισμό του όρου "εργένης", ο οποίος σημαίνει "ανύπαντρος". Η επομένη του Γ δεν έπεται από την ηγούμενή της ή με βάση μόνο τη λογική ή με βάση τον ορισμό των όρων της˙ η σύνδεση πρέπει να ανακαλυφθεί εμπειρικά, διότι η συνεπαγωγή που δηλώνεται εδώ είναι αιτιακή. Τέλος, η επόμενη του Δ δεν έπεται από την ηγούμενή της ή με λογική ή με βάση ορισμό, ούτε εμπλέκεται κάποιος αιτιακός νόμος – με τη συνήθη σημασία του όρου. Η δήλωση Δ αναφέρει μία απόφαση του ομιλητή να συμπεριφερθεί με τον καθορισμένο τρόπο υπό τις καθορισμένες περιστάσεις.

Αυτές οι τέσσερις υποθετικές δηλώσεις αίναι διαφορετικές, κατά το ότι καθεμία βεβαιώνει ένα διαφορετικό τύπο συνεπαγωγής μεταξύ της ηγουμένης και της επομένης της. Αλλά δεν είναι εντελώς διαφορετικές˙ όλες εκφράζουν τύπους συνεπαγωγής. Υπάρχει άραγε κάποια αναγνωρίσιμη κοινή σημασία, κάποια μερική σημασία που είναι κοινή σε αυτούς τους ομολογουμένως διαφορετικούς τύπους συνεπαγωγής, αν και ίσως όχι όλη ή την πλήρη σημασία κάποιας από αυτές;

Η αναζήτηση μιας κοινής μερικής σημασίας γίνεται περισσότερο σημαντική όταν θυμηθούμε τη διαδικασία μας για την επεξεργασία μιας συμβολικής αναπαράστασης για τη λέξη “ή”. Σε εκείνη την περίπτωση ενεργήσαμε ως εξής: Πρώτον, δώσαμε έμφαση στη διαφορά μεταξύ των δύο σημασιών εκείνης της λέξης, αντιπαραβάλλοντας την εγκλειστική με την αποκλειστική διάζευξη. Η εγκλειστική διάζευξη δύο δηλώσεων διαπιστώθηκε ότι σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις δηλώσεις είναι αληθής, και η αποκλειστική διάζευξη δύο δηλώσεων διαπιστώθηκε ότι σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις δηλώσεις είναι αληθής αλλά δεν είναι και οι δύο αληθείς. Δεύτερον, σημειώσαμε ότι αυτοί οι δύο τύποι διάζευξης είχαν μια κοινή *μερική* σημασία. Αυτή η μερική κοινή σημασία – ότι τουλάχιστον ένα από τα μέρη της διάζευξης είναι αληθές – φάνηκε να αποτελεί την *πλήρη* σημασία του ασθενούς, εγκλειστικού “ή”, και ένα *μέρος* της σημασίας του ισχυρού, αποκλειστικού “ή”. Στη συνέχεια, εισαγάγαμε το ειδικό σύμβολο “$\vee$” για να αναπαραστήσουμε την κοινή μερική σημασία (η οποία ήταν ολόκληρη η σημασία του “ή” με την εγκλειστική έννοια). Τρίτον, σημειώσαμε ότι το σύμβολο που αναπαριστά την κοινή μερική σημασία αποτελούσε μια επαρκή μετάφραση και των δύο σημασιών της λέξης “ή” για το σκοπό της διατήρησης του Διαζευκτικού Συλλογισμού ως μιας έγκυρης επιχειρηματικής μορφής. Έγινε δεκτό ότι μεταφράζοντας ένα αποκλειστικό “ή” με το σύμβολο “$\vee$” αγνοούμε και χάνουμε μέρος της σημασίας της λέξης. Το μέρος της σημασίας της που διατηρείται από αυτή τη μετάφραση είναι ό,τι χρειάζεται για να παραμείνει ο Διαζευκτικός Συλλογισμός μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή. Επειδή ο Διαζευκτικός Συλλογισμός είναι τυπικός για επιχειρήματα που εμπλέκουν τη διάζευξη με την οποία ασχολούμαστε εδώ, αυτή η μερική μετάφραση της λέξης “ή”, η οποία ίσως αφαιρεί κάτι από την “ολική” ή “πλήρη” σημασία σε μερικές περιπτώσεις, είναι πλήρως επαρκής για τους σκοπούς μας εδώ.

Τώρα θέλουμε να ακολουθήσουμε πάλι την ίδια προσέγγιση, αυτή τη φορά σε σύνδεση με την έκφραση “αν-τότε”. Το πρώτο μέρος έχει ήδη επιτευχθεί: έχουμε ήδη δώσει έμφαση στις διαφορές μεταξύ τεσσάρων σημασιών της έκφρασης “αν-τότε”, που αντιστοιχούν σε τέσσερις διαφορετικούς τύπους συνεπαγωγής. Είμαστε τώρα έτοιμοι για το δεύτερο βήμα, που είναι να ανακαλύψουμε μια σημασία που αποτελεί τουλάχιστον ένα μέρος της σημασίας και των τεσσάρων διαφορετικών τύπων συνεπαγωγής.

Προσεγγίζουμε αυτό το πρόβλημα ρωτώντας: ποιες περιστάσεις επαρκούν για να αποδείξουμε το ψεύδος μιας δοθείσας υποθετικής δήλωσης; Κάτω από ποιες συνθήκες θάπρεπε να συμφωνήσουμε ότι η υποθετική δήλωση

> Αν αυτό το κομμάτι μπλε χαρτιού ηλιοτροπίου εμβαπτιστεί σε εκείνο το διάλυμα οξέος, τότε αυτό το χαρτί ηλιοτροπίου θα γίνει κόκκινο.

είναι ψευδής; Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι αυτή η υποθετική δήλωση δεν ισχυρίζεται ότι οποιοδήποτε μπλε χαρτί ηλιοτροπίου εμβαπτίζεται πραγματικά στο διάλυμα, ή ότι οποιοδήποτε χαρτί ηλιοτροπίου γίνεται κόκκινο. Ισχυρίζεται απλά ότι *αν* αυτό το κομμάτι μπλε χαρτιού ηλιοτροπίου εμβαπτιστεί στο διάλυμα, *τότε* αυτό το κομμάτι μπλε χαρτιού ηλιοτροπίου θα γίνει κόκκινο. Αυτή η δήλωση αποδεικνύεται ότι είναι ψευδής αν αυτό το κομμάτι μπλε χαρτιού ηλιοτροπίου εμβαπτιστεί πραγματικά στο διάλυμα και δεν γίνει κόκκινο. Ο έλεγχος με το οξύ, ας πούμε, του ψεύδους μίας υποθετικής δήλωσης είναι διαθέσιμος όταν η ηγούμενή της είναι αληθής, επειδή αν η επόμενή της είναι ψευδής ενώ η ηγούμενή της είναι αληθής, η ίδια η υποθετική δήλωση αποδεικνύεται έτσι ότι είναι ψευδής.

Οποιαδήποτε υποθετική δήλωση της μορφής "Αν p τότε q" είναι γνωστό ότι είναι ψευδής αν είναι γνωστό ότι η σύζευξη $p \cdot \sim q$ είναι ψευδής – δηλαδή, αν η ηγούμενή της είναι αληθής και η επόμενή της είναι ψευδής. Για να είναι, λοιπόν, μια υποθετική δήλωση αληθής, η σύζευξη που υποδείχθηκε πρέπει να είναι ψευδής, δηλαδή, η άρνησή της $\sim(p \cdot \sim q)$ πρέπει να είναι αληθής. Με άλλα λόγια, για να είναι αληθής οποιαδήποτε υποθετική δήλωση "Αν p, τότε q", η δήλωση $\sim(p \cdot \sim q)$, που αποτελεί την άρνηση της σύζευξης της ηγούμενής της με την άρνηση της επόμενής της, πρέπει επίσης να είναι αληθής. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε την $\sim(p \cdot \sim q)$ ως ένα μέρος τη;ς σημασίας της "Αν p τότε q".

Κάθε υποθετική δήλωση σημαίνει την άρνηση ότι η ηγούμενή της είναι αληθής και η επόμενή της ψευδής, αλλά αυτό δεν απαιτείται να είναι ολόκληρη η σημασία της. Μία υποθετική δήλωση όπως η Α που είδαμε βεβαιώνει επίσης μια λογική σύνδεση μεταξύ της ηγούμενης και της επόμενης, μία όπως η Β βεβαιώνει μια οριστική σύνδεση, όπως η Γ μια αιτιακή σύνδεση, όπως η Δ μια σύνδεση απόφασης. Αλλά οποιοσδήποτε τύπος συνεπαγωγής κι αν βεβαιώνεται από μια υποθετική δήλωση, μέρος της σημασίας της είναι η άρνηση της σύζευξης της ηγούμενής της με την άρνηση της επόμενής της.

Τώρα εισάγουμε ένα ειδικό σύμβολο για να αναπαραστήσουμε αυτή την κοινή μερική σημασία της έκφρασης "αν-τότε". Ορίζουμε το νέο σύμβολο "$\supset$", που καλείται **πέταλο** (άλλα συστήματα χρησιμοποιούν το σύμβολο "$\rightarrow$" για να εκφράσουν αυτή τη σχέση), παίρνοντας την έκφραση $p \supset q$ ως συντομογραφία της $\sim(p \cdot \sim q)$. Η ακριβής σημασία του συμβόλου $\supset$ μπορεί να υποδειχθεί με τη βοήθεια ενός πίνακα αλήθειας:

p	q	$\sim q$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$	$p \supset q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

Εδώ οι πρώτες δύο στήλες είναι οι στήλες-οδηγοί˙ αυτές απλά εκθέτουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αλήθειας και ψεύδους για την p και την q. Η τρίτη στήλη συμπληρώνεται με αναφορά στη δεύτερη, η τέταρτη με αναφορά στην πρώτη και την τρίτη και η πέμπτη με αναφορά στην τέταρτη˙ η έκτη είναι ταυτοτικά ίδια με την πέμπτη εξ ορισμού.

Το σύμβολο $\supset$ δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ότι δηλώνει *τη* σημασία της έκφρασης "αν-τότε" ή ότι αντιπροσωπεύει *τη* σχέση της συνεπαγωγής. Αυτό θα ήταν αδύνατο, διότι δεν υπάρχει μοναδική σημασία της "αν-τότε"˙ υπάρχουν πολλές σημασίες. Δεν υπάρχει μοναδική σχέση συνεπαγωγής για να αναπαρασταθεί έτσι˙ υπάρχουν πολλές διαφορετικές σχέσεις συνεπαγωγής. Ούτε το σύμβολο $\supset$ θάπρεπε να θεωρηθεί ότι συμβολίζει κάπως όλες τις σημασίες της έκφρασης "αν-τότε". Αυτές είναι όλες διαφορετικές, και κάθε προσπάθεια να συμβολιστούν όλες από ένα μόνο λογικό σύμβολο θα καθιστούσε αυτό το σύμβολο ασαφές – τόσο ασαφές όσο η έκφραση "αν-τότε" ή η λέξη "συνεπαγωγή". Το σύμβολο $\supset$ είναι εντελώς ξεκάθαρο. Αυτό που αντιπροσωπεύει η έκφραση $p \supset q$ είναι η $\sim(p \cdot \sim q)$, της οποίας η σημασία περιέχεται στις σημασίες καθενός από τα διάφορα είδη συνεπαγωγών που θεωρούνται, αλλά η οποία δεν αποτελεί την πλήρη σημασία οποιουδήποτε από αυτά τα είδη.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύμβολο $\supset$ αντιπροσωπεύει ένα άλλο είδος συνεπαγωγής, και θα είναι σκόπιμο να το κάνουμε, αφού βολικοί τρόποι να διαβάζουμε την $p \supset q$ είναι "Αν p, τότε q" ή "p συνεπάγεται q". Αλλά αυτό δεν είναι το ίδιο είδος συνεπαγωγής με οποιοδήποτε από αυτά που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Καλείται **υλική συνεπαγωγή** από τους λογικούς. Δίνοντάς της ένα ειδικό όνομα παραδεχόμαστε ότι είναι μία ειδική έννοια, που δεν θα έπρεπε να συγχέεται με άλλους, περισσότερο συνήθεις, τύπους συνεπαγωγής.

Δε χρειάζεται όλες οι υποθετικές δηλώσεις να βεβαιώνουν ένα από τους τέσσερις τύπους συνεπαγωγής που θεωρήσαμε προηγουμένως. Η υλική συνεπαγωγή αποτελεί ένα πέμπτο τύπο που μπορεί να βεβαιωθεί σε συνηθισμένο λόγο. Ας θεωρήσουμε την παρατήρηση: "Αν ο Χίτλερ ήταν μια στρατιωτική ιδιοφυΐα, τότε είμαι θείος ενός πιθήκου." Είναι αρκετά σαφές ότι αυτή δεν βεβαιώνει λογική, οριστική ή αιτιακή συνεπαγωγή. Αυτή δεν μπορεί να αντιπροσωπεύιει μία συνεπαγωγή απόφασης, επειδή μετά βίας έγκειται στη δύναμη του ομιλητή να κάνει αληθή την επόμενη. Καμία "πραγματική σύνδεση", ανεξάρτητα από το αν είναι λογική, οριστική, ή αιτιακή, δεν υπάρχει μεταξύ της ηγούμενης και της επόμενης εδώ. Μία υποθετική δήλωση αυτού του είδους συχνά χρησιμοποιείται ως μια εμφατική ή χιουμοριστική μέθοδος να αρνηθούμε την ηγούμενή της. Η επόμενη μιας τέτοιας υποθετικής δήλωσης είναι συνήθως μια δήλωση η οποία είναι προφανώς ή με γελοίο τρόπο ψευδής. Και επειδή καμιά αληθής υποθετική δήλωση μπορεί να έχει και την ηγουμένη της αληθή και την επομένη της ψευδή, το να επιβεβαιώσουμε μια τέτοια υποθετική δήλωση ισοδυναμεί με το να αρνηθούμε ότι η ηγούμενή της είναι αληθής. Η πλήρης σημασία της παρούσας υποθετικής δήλωσης φαίνεται να είναι η άρνηση ότι η "Ο Χίτλερ ήταν μια στρατιωτική ιδιοφυΐα" είναι αληθής όταν η "Είμαι θείος ενός πιθήκου" είναι ψευδής. Επειδή η τελευταία δήλωση είναι τόσο προφανώς ψευδής, η υποθετική δήλωση πρέπει να γίνει κατανοητό ότι αρνείται την προηγούμενη.

Το θέμα εδώ είναι ότι καμία "πραγματική σύνδεση" μεταξύ της ηγούμενης και της επόμενης δεν προτείνεται από μία υλική συνεπαγωγή. Το μόνο που βεβαιώνεται είναι ότι δεν ισχύει ότι η ηγούμενη είναι αληθής όταν η επόμενη είναι ψευδής. Σημειώνουμε ότι το σύμβολο της υλικής συνεπαγωγής αποτελεί ένα αληθο-συναρτησιακό σύνδεσμο, όπως τα σύμβολα για τη σύζευξη και τη διάζευξη. Ως τέτοιο, ορίζεται από τον πίνακα αλήθειας:

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Όπως ορίστηκε από τον πίνακα αλήθειας, το σύμβολο $\supset$ έχει μερικά χαρακτηριστικά που φαίνονται περίεργα. Ο ισχυρισμός ότι μία ψευδής ηγούμενη υλικά συνεπάγεται μία αληθή επόμενη είναι αληθής˙ και ο ισχυρισμός ότι μία ψευδής ηγούμενη υλικά συνπάγεται μία ψευδή επόμενη είναι επίσης αληθής. Αυτή η φαινομενική παραδοξότητα μπορεί να διαλυθεί εν μέρει από τις ακόλουθες σκέψεις. Επειδή ο αριθμός 2 είναι μικρότερος από τον αριθμό 4 (γεγονός που γράφεται συμβολικά ως $2<4$), έπεται ότι *κάθε* αριθμός μικρότερος από 2 είναι μικρότερος από 4. Ο υποθετικός τύπος

Αν $x<2$, τότε $x<4$.

είναι αληθής για οποιονδήποτε αριθμό x. Αν εστιάσουμε στους αριθμούς 1, 3 και 4, και αντικαταστήσουμε την αριθμητική μεταβλητή x στον προηγούμενο υποθετικό τύπο από καθένα από αυτούς με τη σειρά, μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις. Στην

Αν $1<2$, τότε $1<4$.

και η ηγούμενη και η επόμενη είναι αληθής, και φυσικά η υποθετική δήλωση είναι αληθής. Στην

Αν $3<2$, τότε $3<4$.

η ηγούμενη είναι ψευδής και η επόμενη είναι αληθής, και φυσικά η υποθετική δήλωση είναι πάλι αληθής. Στην

Αν $4<2$, τότε $4<4$.

και η ηγούμενη και η επόμενη είναι ψευδής, αλλά η υποθετική δήλωση παραμένει αληθής. Αυτές οι τελευταίες δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη σειρές του πίνακα που ορίζει το σύμβολο $\supset$. Έτσι δεν υπάρχει τίποτε ιδιαίτερα αξιοσημείωτο ή εκπληκτικό με το γεγονός ότι μία υποθετική δήλωση θα έπρεπε να είναι αληθής όταν η ηγούμενη είναι ψευδής και η επόμενη αληθής, ή όταν και η ηγούμενη και η επόμενη είναι ψευδής. Φυσικά, δεν υπάρχει αριθμός που είναι μικρότερος από τον 2 αλλά όχι μικρότερος από τον 4˙ δηλαδή, δεν υπάρχει αληθής υποθετική δήλωση με αληθή ηγούμενη και ψευδή επόμενη. Αυτό είναι ακριβώς ό,τι ορίζει ο πίνακας αλήθειας για το σύμβολο $\supset$.

Τώρα προτείνουμε να μεταφράσουμε οποιαδήποτε εμφάνιση της έκφρασης "αν-τότε" με το λογικό μας σύμβολο $\supset$. Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι, κατά τη μετάφραση υποθετικών δηλώσεων στο συμβολισμό μας, τις μεταχειριζόμαστε όλες ως απλά υλικές συνεπαγωγές. Φυσικά οι περισσότερες, υποθετικές δηλώσεις βεβαιώνουν ότι ισχύει κάτι περισσότερο από απλά μια υλική συνεπαγωγή μεταξύ των ηγουμένων και των επομένων τους. Έτσι η πρότασή μας ισοδυναμεί με την πρόταση να αγνοήσουμε, ή να παραμερίσουμε, ή να "αφαιρέσουμε" μέρος της σημασίας μιας υποθετικής δήλωσης όταν τη μεταφράζουμε στη συμβολική μας γλώσσα. Πώς μπορεί να δικαιολογηθεί αυτή πρόταση;

Η προηγούμενη πρόταση να μεταφράσουμε και την εγκλειστική και την αποκλειστική διάζευξη μέσω του συμβόλου $\vee$ δικαιολογήθηκε με το σκεπτικό ότι η εγκυρότητα του Διαζευκτικού Συλλογισμού διατηρήθηκε ακόμη και όταν αγνοήθηκε η πρόσθετη σημασία που συνδέεται με το αποκλειστικό "ή". Η τωρινή πρότασή μας να μεταφράσουμε όλες τις υποθετικές προτάσεις με χρήση απλών υλικών συνεπαγωγών που συμβολίζονται από το $\supset$ μπορεί να δικαιολογηθεί με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. Πολλά επιχειρήματα περιέχουν υποθετικές δηλώσεις ποικίλων ειδών, αλλά η εγκυρότητα όλων των έγκυρων επιχειρημάτων του γενικού τύπου με τον οποίο θα ασχοληθούμε διατηρείται ακόμη και όταν αγνοούνται οι πρόσθετες σημασίες των υποθετικών τους δηλώσεων. Αυτό μένει να αποδειχθεί, φυσικά, και σε αυτό θα στρέψουμε την προσοχή μας στην επόμενη ενότητα.

Οι υποθετικές δηλώσεις μπορούν να εκφραστούν με ποικίλους τρόπους. Η δήλωση

Αν αυτός έχει καλό δικηγόρο τοτε θα αθωωθεί.

μπορεί εξίσου καλά να εκφραστεί χωρίς τη χρήση της λέξης "τότε", ως εξής

Αν αυτός έχει καλό δικηγόρο θα αθωωθεί.

Η σειρά της ηγούμενης και της επόμενης μπορεί να αντιστραφεί, με την προϋπόθεση ότι η λέξη "αν" ακόμη προηγείται άμεσα της ηγούμενης, ως εξής

Θα αθωωθεί αν αυτός έχει καλό δικηγόρο.

Θα έπρεπε να είναι σαφές ότι, σε οποιοδήποτε από τα παραδείγματα που μόλις δόθηκαν, η λέξη "αν" μπορεί να αντικατασταθεί από εκφράσεις όπως "σε περίπτωση που", "με την προϋπόθεση ότι", "δεδομένου ότι" ή "υπό τον όρο ότι", χωρίς αλλαγή της σημασίας. Μικρές τροποποιήσεις στη διατύπωση της ηγούμενης και της επόμενης επιτρέπουν εναλλακτικές διατυπώσεις της ίδιας υποθετικής δήλωσης, όπως

Το ότι αυτός έχει καλό δικηγόρο συνεπάγεται ότι αυτός θα αθωωθεί.

ή

Το να έχει καλό δικηγόρο συνεπάγεται την αθώωσή του.

Μία μετατόπιση από την ενεργητική στην παθητική φωνή ίσως συνοδεύει μία αντιστροφή διάταξης της ηγούμενης και της επόμενης, για να παραχθεί η λογικά ισοδύναμη δήλωση

Η αθώωσή του έπεται από το ότι έχει καλό δικηγόρο.

Άλλες παραλλαγές είναι δυνατές:

Δεν υπάρχει περίπτωση να μην αθωωθεί αν έχει καλό δικηγόρο.

Οποιαδήποτε από αυτές τις δηλώσεις συμβολίζεται ως $L \supset A$.

Οι έννοιες της αναγκαίας και επαρκούς συνθήκης οδηγούν σε άλλες διατυπώσεις υποθετικών δηλώσεων. Για κάθε καθορισμένο γεγονός, υπάρχουν πολλές περιστάσεις αναγκαίες για να συμβεί το γεγονός αυτό. Έτσι, για να λειτουργήσει ένα αυτοκίνητο είναι αναγκαίο να υπάρχει καύσιμο στο τεπόζιτό του, τα μπουζί να είναι σωστά τοποθετημένα, να λειτουργεί η αντλία καυσίμου κτλ. Έτσι, αν το γεγονός συμβαίνει, καθεμία από τις συνθήκες που είναι αναγκαίες για να συμβεί πρέπει να πληρούνται. Επομένως, το να πούμε

Το γεγονός ότι υπάρχει καύσιμο στο τεπόζιτό του είναι αναγκαία συνθήκη για να λειτουργήσει το αυτοκίνητο.

μπορεί εξίσου καλά να εκφραστεί ως

Το αυτοκίνητο λειτουργεί μόνο αν υπάρχει καύσιμο στο τεπόζιτό του.

που είναι ένας άλλος τρόπος να πούμε ότι

Αν το αυτοκίνητο λειτουργεί τότε υπάρχει καύσιμο στο τεπόζιτό του.

Οποιαδήποτε από αυτές τις δηλώσεις συμβολίζεται ως $R \supset F$. Συνήθως η "η q είναι μία *αναγκαία συνθήκη* για την p" συμβολίζεται ως $p \supset q$. Όμοια η "p *μόνον αν* q" επίσης συμβολίζεται με $p \supset q$.

Για μία καθορισμένη κατάσταση ίσως υπάρχουν πολλές εναλλακτικές περιστάσεις, οποιαδήποτε από τις οποίες είναι επαρκής για να προκύψει αυτή η κατάσταση. Για να περιέχει ένα πορτοφόλι περισσότερο από ένα δολλάριο, π.χ., αρκεί να περιέχει πέντε τέταρτα, ή ένδεκα δεκαράκια, ή εικοσιένα πενταράκια κτλ. Αν ικανοποιηθεί οποιαδήποτε από αυτές τις συνθήκες, θα πραγματοποιηθεί η καθορισμένη κατάσταση. Συνεπώς, το να πούμε "Το να περιέχει το πορτοφόλι πέντε τέταρτα είναι επαρκής συνθήκη για να περιέχει περισσότερο από ένα δολλάριο" είναι το ίδιο με το να λέμε "Αν το πορτοφόλι περιέχει πέντε τέταρτα τότε περιέχει περισσότερο από ένα δολλάριο". Γενικά, η "η p είναι *επαρκής συνθήκη* για την q" συμβολίζεται ως $p \supset q$.

Επεξήγηση: Υπεύθυνοι προσλήψεων για την επενδυτική εταιρεία Goldman Sachs της Wall Street (όπου τα ετήσια μπόνους ανέρχονται συνήθως σε εκατομμύρια) πραγματοποιούν επανειλημμένες ανακρίσεις με δυνητικούς υπαλλήλους. Εκείνοι που ανταπεξέρχονται στις ανακρίσεις προσκαλούνται στα γραφεία της εταιρείας για μία πλήρη ημέρα με συνεντεύξεις, με αποκορύφωμα ένα δείπνο με ανώτερα στελέχη της Goldman Sachs. Όπως αναφέρθηκε πρόσφατα, "Οι εύστροφεοι εγκέφαλοι κοι οι σχεδόν τέλειοι βαθμοί αποτελούν αναγκαίες αλλά όχι ικανές συνθήκες για την πρόσληψη. Εξίσου σημαντική είναι η προσαρμογή."[6]

Αν η p αποτελεί μία ικανή συνθήκη για την q, έχουμε $p \supset q$, και η q πρέπει να αποτελεί μία αναγκαία συνθήκη για την p. Αν η p αποτελεί μία αναγκαία συνθήκη για την q, έχουμε $q \supset p$, και η q πρέπει να αποτελεί μία ικανή συνθήκη για την p. Συνεπώς, αν η p είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την q, τότε και η q είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την p.

Δεν είναι κάθε δήλωση που περιέχει τη λέξη "αν" μια υποθετική δήλωση. Καμιά από τις ακόλουθες δηλώσεις δεν είναι υποθετική: "Υπάρχει φαγητό στο ψυγείο αν θέλεις να φας", "Το τραπέζι σας είναι έτοιμο, αν θέλετε να έρθετε", "Υπάρχει ένα μήνυμα για σας αν ενδιαφέρεστε", "Η συνάντηση θα πραγματοποιηθεί ακόμη και αν δεν ληφθεί άδεια." Η παρουσία ή απουσία συγκεκριμένων λέξεων δεν είναι ποτέ καθοριστική. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να καταλαβαίνουμε τι σημαίνει μια δοθείσα πρόταση, και κατόπιν να ξανα-εκφράσουμε αυτή τη σημασία με ένα συμβολικό τύπο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Αν A, B, και C είναι αληθείς δηλώσεις και X, Y, και Z είναι ψευδείς δηλώσεις, προσδιορίστε ποιες από τις ακόλουθες (δηλώσεις) είναι αληθείς, χρησιμοποιώντας τους πίνακες αλήθειας για το πέταλο, την τελεία, τη σφήνα, και την περισπωμένη.

1. $A \supset B$
2. $A \supset X$
3. $B \supset Y$
4. $Y \supset Z$
5. $(A \supset B) \supset Z$
6. $(X \supset Y) \supset Z$
7. $(A \supset B) \supset C$
8. $(X \supset Y) \supset C$
9. $A \supset (B \supset Z)$
10. $X \supset (Y \supset Z)$
11. $[(A \supset B) \supset C] \supset Z$
12. $[(A \supset X) \supset Y] \supset Z$
13. $[A \supset (X \supset Y)] \supset C$
14. $[A \supset (B \supset Y)] \supset X$
15. $[(X \supset Z) \supset C] \supset Y$
16. $[(Y \supset B) \supset Y] \supset Y$
17. $[(A \supset Y) \supset B] \supset Z$
18. $[(A \cdot X) \supset C] \supset [(A \supset C) \supset X]$
19. $[(A \cdot X) \supset C] \supset [(A \supset X) \supset C]$
20. $[(A \cdot X) \supset Y] \supset [(X \supset A) \supset (A \supset Y)]$

[6] "The Firm", *The New Yorker*, 8 Μαρτίου 1999.

21. $[(A{\cdot}X)\vee({\sim}A{\cdot}{\sim}X)]\supset[(A\supset X)\cdot(X\supset A)]$
22. $\{[A\supset(B\supset C)]\supset[(A{\cdot}B)\supset C]\}\supset[(Y\supset B)\supset(C\supset Z)]$
23. $\{[(X\supset Y)\supset Z]\supset[Z\supset(X\supset Y)]\}\supset[(X\supset Z)\supset Y]$
24. $[(A{\cdot}X)\supset Y]\supset[(A\supset X)\cdot(A\supset Y)]$
25. $[A\supset(X{\cdot}Y)]\supset[(A\supset X)\vee(A\supset Y)]$

B. Συμβολίστε τις ακόλουθες, χρησιμοποιώντας κεφαλαία γράμματα για να συντομεύσετε τις απλές δηλώσεις που εμπλέκονται.

1. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε αν η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

2. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε ή η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ ή η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

3. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ και η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

4. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, και η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

5. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση και η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

6. Αν ή η Αργεντινή κάνει επιστράτευση ή η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

7. Ή η Αργεντινή κάνει επιστράτευση ή αν η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

8. Αν η Αργεντινή δεν κάνει επιστράτευση, τότε ή η Βραζιλία δεν θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ ή η Χιλή δεν θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

9. Αν η Αργεντινή δεν κάνει επιστράτευση, τότε ούτε η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ ούτε η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

10. Δεν ισχύει ότι αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε και η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ και η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
11. Αν δεν ισχύει ότι η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε η Βραζιλία δεν θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ και η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
12. Η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση.
13. Η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ μόνον αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση.
14. Η Χιλή θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής μόνον αν και η Αργεντινή κάνει επιστράτευση και η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ.
15. Η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ μόνον αν ή η Αργεντινή κάνει επιστράτευση ή η Χιλή ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
16. Η Αργεντινή θα κάνει επιστράτευση αν ή η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ ή η Χιλή ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
17. Η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθιεί στον ΟΗΕ εκτός αν η Χιλή ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
18. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση, τότε η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ εκτός αν η Χιλή ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.
19. Η Βραζιλία δεν θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ εκτός αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση.
20. Εκτός αν η Χιλή ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής, η Βραζιλία θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ.
21. Το να κάνει επιστράτευση η Αργεντινή αποτελεί ικανή συνθήκη για να διαμαρτυρηθεί η Βραζιλία στον ΟΗΕ.
22. Το να κάνει επιστράτευση η Αργεντινή αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να ζητήσει η Χιλή συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής. .

23. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση και η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε και η Χιλή και η Δομινικανή Δημοκρατία θα ζητήσουν συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

24. Αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση και η Βραζιλία διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ, τότε ή η Χιλή ή η Δομινικανή Δημοκρατία θα ζητήσει συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής.

25. Αν ούτε η Χιλή ούτε η Δομινικανή Δημοκρατία ζητήσουν συνάντηση όλων των κρατών της Λατινικής Αμερικής, τότε η Βραζιλία δεν θα διαμαρτυρηθεί στον ΟΗΕ εκτός αν η Αργεντινή κάνει επιστράτευση.

8.4 Επιχειρηματικές Μορφές και Αναίρεση με Λογική Αναλογία

Ο κεντρικός στόχος της παραγωγικής λογικής, έχουμε πει, είναι να διακρίνουμε τα έγκυρα από τα άκυρα επιχειρήματα. Αν οι προκείμενες ενός έγκυρου επιχειρήματος είναι αληθείς, το συμπέρασμά του *πρέπει* να είναι αληθές. Αν το συμπέρασμα ενός έγκυρου επιχειρήματος είναι ψευδές, τουλάχιστον μία από τις πρικείμενες πρέπει να είναι ψευδής. Με δύο λόγια, οι προκείμενες ενός έγκυρου επιχειρήματος παρέχουν *αδιαμφισβήτητη απόδειξη* του συμπεράσματος που εξάγεται.

Αυτή η άτυπη περιγραφή της εγκυρότητας πρέπει τώρα να γίνει περισσότερο ακριβής. Για να γίνει αυτό εισάγουμε την έννοια της *επιχειρηματικής μορφής*. Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα δύο επιχειρήματα, τα οποία σαφώς έχουν την ίδια λογική μορφή. Ας υποθέσουμε ότι μας παρουσιάζεται το πρώτο από αυτά τα επιχειρήματα:

> Αν ο Bacon έγραφε τα έργα που αποδίδονται στον Shakespeare,
> τότε ο Bacon ήταν μεγάλος συγγραφέας.
> Ο Bacon ήταν μεγάλος συγγραφέας.
> Επομένως ο Bacon έγραφε τα έργα που αποδίδονται στον Shakespeare.

Ίσως συμφωνούμε με τις προκείμενες αλλά διαφωνούμε με το συμπέρασμα, κρίνοντας ότι το επιχείρημα είναι άκυρο. Ένας τρόπος να αποδείξουμε την ακυρότητα είναι με τη βοήθεια της μεθόδου της λογικής αναλογίας. "Ίσως να υποστηρίξετε", θα μπορούσαμε να απαντήσουμε, "ότι

> Αν ο Washington δολοφονήθηκε, τότε ο Washington είναι νεκρός.
> Ο Washington είναι νεκρός.
> Επομένως ο Washington δολοφονήθηκε.

Δεν μπορείτε να υποστηρίξετε σοβαρά αυτό το επιχείρημα", θα συνεχίζαμε, "επειδή εδώ είναι γνωστό ότι οι προκείμενες είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές. Αυτό το επιχείρημα είναι προφανώς άκυρο· το επιχείρημά σου είναι της ίδιας μορφής, οπότε το δικό σου είναι επίσης άκυρο." Αυτή η μέθοδος αναίρεσης είναι πολύ αποτελεσματική.

Αυτή η μέθοδος **αναίρεσης με λογική αναλογία** δείχνει το δρόμο προς μία εξαιρετική τεχνική ελέγχου επιχειρημάτων: Για να αποδείξουμε την ακυρότητα ενός επιχειρήματος, αρκεί να διατυπώσουμε ένα άλλο επιχείρημα που (1) έχει ακριβώς την ίδια μορφή όπως το πρώτο και (2) έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι η εγκυρότητα και η ακυρότητα είναι καθαρά τυπικά χαρακτηριστικά επιχειρημάτων, που είναι το ίδιο με το να πούμε ότι για οποιαδήποτε δύο επιχειρήματα που έχουν ακριβώς την ίδια μορφή, είναι ή και τα δύο έγκυρα ή και τα δύο άκυρα, ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε διαφορές στο θέμα που αφορούν. Εδώ υποθέτουμε ότι οι απλές δηλώσεις που εμπλέκονται δεν είναι ούτε λογικά αληθείς (π.χ., "Όλες οι καρέκλες είναι καρέκλες") ούτε λογικά ψευδείς (π.χ., "Μερικές καρέκλες δεν είναι καρέκλες"). Εμείς υποθέτουμε επίσης ότι οι μόνες λογικές σχέσεις μεταξύ των απλών δηλώσεων που εμπλέκονται είναι εκείνες που βεβαιώνονται ή προκύπτουν από τις προκείμενες. Ο λόγος για αυτούς τους περιορισμούς είναι για να περιορίσουμε τις σκέψεις μας, στο παρόν και στο επόμενο κεφάλαιο, μόνο σε αληθο-συναρτησιακά επιχειρήματα, και να αποκλείσουμε άλλα είδη επιχειρημάτων των οποίων η εγκυρότητα βασίζεται σε πιο σύνθετες λογικές σκέψεις που δεν έχουν εισαχθεί κατάλληλα μέχρι τώρα.

Ένα δοθέν επιχείρημα δείχνει τη μορφή του πολύ καθαρά όταν οι απλές δηλώσεις που εμφανίζονται σε αυτό συντομογραφούνται με κεφαλαία γράμματα. Έτσι μπορούμε να συντομεύσουμε τις δηλώσεις "Ο Bacon έγραψε τα έργα που αποδίδονται στο Σαίξπηρ", "Ο Bacon ήταν μεγάλος συγγραφέας", "Ο Washington δολοφονήθηκε" και "Ο Washington είναι νεκρός" με τα γράμματα B, G, A και D, αντίστοιχα, και να συμβολίσουμε τα δύο προηγούμενα επιχειρήματα ως εξής:

$B \supset G$		$A \supset D$
G	και	D
$\therefore B$		$\therefore A$

Όταν είναι γραμμένα έτσι, φαίνεται εύκολα η κοινή τους μορφή.

Για να συζητήσουμε μορφές επιχειρημάτων παρά συγκεκριμένα επιχειρήματα που έχουν αυτές τις μορφές, χρειαζόμαστε κάποια μέθοδο συμβολισμού των ίδιων των επιχειρηματικών μορφών. Για να προσδιορίσουμε μια τέτοια μέθοδο, εισάγουμε την έννοια της **μεταβλητής**. Στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιήσαμε κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε συγκεκριμένες απλές δηλώσεις. Για να αποφύγουμε τη σύγχυση, θα χρησιμοποιήσουμε μικρά, ή πεζά γράμματα από το μεσαίο τμήμα του αλφαβήτου, $p, q, r, s, \ldots$ ως δηλωτικές μεταβλητές. Μία **δηλωτική μεταβλητή**, όπως θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο, είναι απλά ένα γράμμα για το οποίο, ή στη θέση του οποίου, μπορεί να τοποθετηθεί μια δήλωση. Σύνθετες δηλώσεις καθώς και απλές δηλώσεις μπορούν να αντικαταστήσουν δηλωτικές μεταβλητές.

Ορίζουμε μια **επιχειρηματική μορφή** ως μια συστοιχία από σύμβολα που περιέχουν δηλωτικές μεταβλητές αλλά όχι δηλώσεις, τέτοια που όταν οι δηλωτικές μεταβλητές αντικατασταθούν από δηλώσεις – με την ίδια δήλωση να αντικαθιστά την ίδια δηλωτική μεταβλητή παντού – το αποτέλεσμα είναι ένα επιχείρημα. Για ομοιομορφία, δεχόμαστε τη σύμβαση ότι σε κάθε επιχειρηματική μορφή, η πρώτη δηλωτική μεταβλητή που εμφανίζεται θα είναι η p, και καθώς εισάγονται άλλες μεταβλητές, αυτές θα συμβολίζονται με q, r και s. Έτσι η έκφραση

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \\ \therefore p \end{array}$$

είναι μια επιχειρηματική μορφή, διότι όταν οι δηλωτικές μεταβλητές p και q αντικατασταθούν από τις δηλώσεις B και G, αντίστοιχα, το αποτέλεσμα είναι το πρώτο επιχείρημα της ενότητας. Αν οι μεταβλητές p και q αντικατασταθούν από τις δηλώσεις A και D, το αποτέλεσμα είναι το δεύτερο επιχείρημα. Οποιοδήποτε επιχείρημα προκύψει από αντικατάσταση δηλωτικών μεταβλητών από δηλώσεις σε μια επιχειρηματική μορφή καλείται **περίπτωση αντικατάστασης** αυτής της επιχειρηματικής μορφής. Κάθε περίπτωση αντικατάστασης μιας επιχειρηματικής μορφής μπορεί να ειπωθεί ότι έχει αυτή τη μορφή, και ότι κάθε επιχείρημα που έχει μια συγκεκριμένη μορφή λέμε ότι είναι μια περίπτωση αντικατάστασης αυτής της μορφής.

Για κάθε επιχείρημα υπάρχουν συνήθως πολλές επιχειρηματικές μορφές από τις οποίες προκύπτει το δοθέν επιχείρημα ως περίπτωση αντικατάστασης. Π.χ., το πρώτο επιχείρημα αυτής της ενότητας,

$$
\begin{array}{l}
B \supset G \\
G \\
\therefore B
\end{array}
$$

αποτελεί περίπτωση αντικατάστασης καθεμίας από τις τέσσερις επιχειρηματικές μορφές

$$
\begin{array}{llll}
p \supset q & p \supset q & p \supset q & p \\
q & r & r & q \\
\therefore p & \therefore p & \therefore s & \therefore r
\end{array}
$$

Έτσι προκύπτει το δοθέν επιχείρημα αντικαθιστώντας την p με B και την q με G στην πρώτη επιχειρηματική μορφή· αντικαθιστώντας την p με B και την q και την r με G στη δεύτερη· την p και την s με B, και την q και την r με G στην τρίτη· και την p με $B \supset G$, την q με G και την r με B στην τέταρτη. Από αυτές τις τέσσερις επιχειρηματικές μορφές, η πρώτη αντιπροσωπεύει περισσότερο τη δομή του δοθέντος επιχειρήματος από ό,τι το κάνουν οι άλλες. Αυτό συμβαίνει επειδή το δοθέν επιχείρημα προκύπτει από την πρώτη επιχειρηματική μορφή όταν αντικαταστήσουμε κάθε διαφορετική δηλωτική μεταβλητή σε αυτή με μία διαφορετική απλή δήλωση. Θα λέμε ότι η πρώτη επιχειρηματική μορφή αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή του δοθέντος επιχειρήματος. Ο ορισμός μας της συγκεκριμένης μορφής ενός δοθέντος επιχειρήματος είναι ο ακόλουθος: Αν ένα επιχείρημα προκύπτει αντικαθιστώντας ομοιόμορφα κάθε διαφορετική δηλωτική μεταβλητή με μία διαφορετική απλή δήλωση μέσα σε μία επιχειρηματική μορφή, αυτή η επιχειρηματική μορφή αποτελεί τη **συγκεκριμένη μορφή** του δοθέντος επιχειρήματος. Για οποιοδήποτε δοθέν επιχείρημα, υπάρχει μία μοναδική επιχειρηματική μορφή που αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ακολουθεί μία ομάδα επιχειρημάτων (Ομάδα Α, γράμματα α-ξ) και μια ομάδα επιχειρηματικών μορφών (Ομάδα Β, αριθμοί 1-24). Για καθένα από τα επιχειρήματα (της Ομάδας Α), υποδείξτε ποιά από τις επιχειρηματικές μορφές (της Ομάδας Β), αν υπάρχει, έχει το δοθέν επιχείρημα ως περίπτωση αντικατάστασης. Επιπλέον, για κάθε δοθέν επιχείρημα, (της Ομάδας Α), υποδείξτε ποιά από τις επιχειρηματικές μορφές (της Ομάδας Β), αν υπάρχει, αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα α στην Ομάδα Α: Εξετάζοντας όλες τις επιχειρηματικές μορφές της Ομάδας Β, διαπιστώνουμε ότι η μόνη της οποίας το Επιχείρημα α αποτελεί *περίπτωση αντικατάστασης* είναι η Μορφή 3. Η Μορφή 3 αποτελεί επίσης τη *συγκεκριμένη μορφή* του Επιχειρήματος α.

Παράδειγμα ι στην Ομάδα Α: Εξετάζοντας όλες τις επιχειρηματικές μορφές της Ομάδας Β, διαπιστώνουμε ότι το Επιχείρημα ι αποτελεί *περίπτωση αντικατάστασης* και της Μορφής 6 και της 23. Αλλά *μόνον* η Μορφή 23 αποτελεί τη *συγκεκριμένη μορφή* του Επιχειρήματος ι.

Παράδειγμα μ στην Ομάδα Α: Εξετάζοντας όλες τις επιχειρηματικές μορφές της Ομάδας Β, διαπιστώνουμε ότι το Επιχείρημα μ αποτελεί *περίπτωση αντικατάστασης* και της Μορφής 3 και της 24. Αλλά δεν υπάρχει καμία επιχειρηματική μορφή της Ομάδας Β που αποτελεί τη *συγκεκριμένη μορφή* του Επιχειρήματος μ.

Ομάδα Α – Επιχειρήματα

α	$A{\cdot}B$ $\therefore A$	β	$C\supset D$ $\therefore C\supset(C{\cdot}D)$	γ	E $\therefore E\vee F$
δ	$G\supset H$ $\sim H$ $\therefore \sim G$	ε	I J $\therefore I{\cdot}J$	στ	$(K\supset L){\cdot}(M\supset N)$ $K\vee M$ $\therefore L\vee N$
ζ	$O\supset P$ $\sim O$ $\therefore \sim P$	η	$Q\supset R$ $Q\supset S$ $\therefore R\vee S$	θ	$T\supset U$ $U\supset V$ $\therefore V\supset T$
ι	$(W{\cdot}X)\supset(Y{\cdot}Z)$ $\therefore (W{\cdot}X)\supset[(W{\cdot}X){\cdot}(Y{\cdot}Z)]$	κ	$A\supset B$ $\therefore (A\supset B)\vee C$	λ	$(D\vee E){\cdot}\sim F$ $\therefore D\vee E$
μ	$[G\supset(G{\cdot}H)]{\cdot}[H\supset(H{\cdot}G)]$ $\therefore G\supset(G{\cdot}H)$	ν	$(I\vee J)\vee(I{\cdot}J)$ $\sim(I\vee J)$ $\therefore \sim(I{\cdot}J)$	ξ	$(K\supset L){\cdot}(M\supset N)$ $\therefore K\supset L$

Ομάδα Β – Επιχειρηματικές Μορφές

1.	$p\subset q$ $\therefore \sim q\supset\sim p$	2.	$p\supset q$ $\therefore \sim p\supset\sim q$	3.	$p{\cdot}q$ $\therefore p$
4.	p $\therefore p\vee q$	5.	p $\therefore p\vee q$	6.	$p\supset q$ $\therefore p\supset(p{\cdot}q)$

7. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
   $\therefore (p \supset q) \cdot (q \supset p)$

8. $p \supset q$
   $\sim p$
   $\therefore \sim q$

9. $p \supset q$
   $\sim q$
   $\therefore \sim p$

10. p
    q
    $\therefore p \cdot q$

11. $p \supset q$
    $p \supset r$
    $\therefore q \vee r$

12. $p \supset q$
    $q \supset r$
    $\therefore r \supset p$

13. $p \supset (q \supset r)$
    $p \supset q$
    $\therefore p \supset r$

14. $p \supset (q \cdot r)$
    $(q \vee r) \supset \sim p$
    $\therefore \sim p$

15. $p \supset (q \supset r)$
    $q \supset (p \supset r)$
    $\therefore (p \vee q) \supset r$

16. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
    $p \vee r$
    $\therefore q \vee s$

17. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
    $\sim q \vee \sim s$
    $\therefore \sim p \vee \sim s$

18. $p \supset (q \supset r)$
    $q \supset (r \supset s)$
    $\therefore p \supset s$

19. $p \supset (q \supset r)$
    $(q \supset r) \supset s$
    $\therefore p \supset s$

20. $(p \supset q) \cdot [(p \cdot q) \supset r]$
    $p \supset (r \supset s)$
    $\therefore p \supset s$

21. $(p \supset q) \supset (p \cdot q)$
    $\sim (p \vee q)$
    $\therefore \sim (p \cdot q)$

22. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
    $p \cdot q$
    $\therefore p \vee q$

23. $(p \cdot q) \supset (r \cdot s)$
    $\therefore (p \cdot q) \supset [(p \cdot q) \cdot (r \cdot s)]$

24. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
    $\therefore p \supset q$

8.5 Ακριβής Σημασία του “Άκυρος” και “Έγκυρος”

Είμαστε τώρα σε θέση να αντιμετωπίσουμε με ακρίβεια τα κεντρικά ερωτήματα της παραγωγικής λογικής:

1. *Τι ακριβώς εννοούμε* λέγοντας ότι μια επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη, ή έγκυρη;

2. *Πώς αποφασίζουμε* αν μια παραγωγική επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη, ή έγκυρη;

Η πρώτη από αυτές τις ερωτήσεις απαντιέται στην παρούσα ενότητα, η δεύτερη στην επόμενη ενότητα.

Μπορούμε να προχωρήσουμε βασιζόμενοι στην τεχνική της διάψευσης με λογική αναλογία. Ο όρος **άκυρος** όπως εφαρμόζεται σε επιχειρηματικές μορφές μπορεί να οριστεί ως εξής: *Μια επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη αν και μόνον αν έχει τουλάχιστον μία περίπτωση αντικατάστασης με αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα.* Αν η συγκεκριμένη μορφή ενός δεδομένου επιχειρήματος έχει οποιαδήποτε περίπτωση αντικατάστασης της οποίας οι προκείμενες είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές, τότε το δοθέν επιχείρημα είναι άκυρο. Αυτό το γεγονός – ότι οποιοδήποτε επιχείρημα του οποίου η συγκεκριμένη μορφή είναι μία άκυρη επιχειρηματική μορφή είναι ένα άκυρο επιχείρημα – αποτελεί τη βάση της αναίρεσης με λογική αναλογία. Αποδεικνύουμε ότι ένα δοθέν επιχείρημα είναι άκυρο αν μπορούμε να βρούμε γι' αυτό μία αναλογία που το αναιρεί.

Η επινόηση αναλογιών που αναιρούν μπορεί να μην είναι πάντα εύκολη. Ευτυχώς, δεν είναι αναγκαία, επειδή για επιχειρήματα αυτού του τύπου υπάρχει μια απλούστερη, καθαρά μηχανική διαδικασία βασισμένη στην ίδια αρχή. Για κάθε δεδομένο επιχείρημα, μπορούμε να ελέγξουμε τη συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος, επειδή η ακυρότητά της θα καθορίσει την ακυρότητα του επιχειρήματος.

Η μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για να δείξουμε την εγκυρότητα. Οποιαδήποτε επιχειρηματική μορφή που δεν είναι άκυρη πρέπει να είναι έγκυρη. Συνεπώς *μια επιχειρηματική μορφή είναι* **έγκυρη** *αν και μόνον αν δεν έχει καμία περίπτωση αντικατάστασης με αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα*. Επειδή η εγκυρότητα είναι τυπική έννοια, ένα επιχείρημα είναι έγκυρο αν και μόνον αν η συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος είναι μια *έγκυρη επιχειρηματική μορφή*.

8.6 Ελέγχοντας την Εγκυρότητα με Χρήση Πινάκων Αλήθειας

Γνωρίζοντας ακριβώς τι σημαίνει να λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι έγκυρο, ή άκυρο, μπορούμε τώρα να επινοήσουμε μια μέθοδο για τον έλεγχο της εγκυρότητας κάθε αληθο-συναρτησιακού επιχειρήματος. Η μέθοδός μας, η χρήση αληθοπίνακα, είναι πολύ απλή και πολύ ισχυρή. Αποτελεί απλά μια εφαρμογή της ανάλυσης επιχειρηματικών μορφών που μόλις δώσαμε.

Για να ελέγξουμε μια επιχειρηματική μορφή, εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις αντικατάστασης για να δούμε αν κάποια από αυτές έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα. Φυσικά, οποιαδήποτε επιχειρηματική μορφή έχει άπειρο αριθμό περιπτώσεων αντικατάστασης, αλλά δεν χρειάζεται να ανησυχούμε ότι πρέπει να τις εξετάσουμε μία-μία. Ενδιαφερόμαστε μόνο για την αλήθεια ή το ψεύδος των προκείμενων και των συμπερασμάτων, κι έτσι πρέπει να εξετάσουμε μόνο τις εμπλεκόμενες τιμές αλήθειας. Τα επιχειρήματα που μας αφορούν εδώ περιέχουν μόνο απλές δηλώσεις και σύνθετες δηλώσεις που είναι κατασκευασμένες από απλές χρησιμοποιώντας την περισπωμένη και τους αληθο-συναρτησιακούς συνδέσμους που συμβολίζονται από την τελεία, τη σφήνα και το πέταλο. Συνεπώς παίρνουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις αντικατάστασης των οποίων οι προκείμενες και τα συμπεράσματα έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας εξετάζοντας όλους τους δυνατούς διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών αλήθειας για τις δηλώσεις που μπορούν να τεθούν στη θέση των διαφορετικών δηλωτικών μεταβλητών στην επιχειρηματική μορφή που ελέγχουμε.

Όταν μια επιχειρηματική μορφή περιέχει ακριβώς δύο δηλωτικές μεταβλητές, p και q, όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασής της αποτελούν το αποτέλεσμα ή της αντικατάστασης και της p και της q από αληθείς δηλώσεις, ή της p από μια αληθή δήλωση και της q από μιά ψευδή, ή της p από μια ψευδή και της q από μια αληθή, ή και της p και της q από ψευδείς δηλώσεις. Αυτές οι διαφορετικές περιπτώσεις συγκεντρώνονται με τον πιο βολικό τρόπο στη μορφή ενός πίνακα αλήθειας. Για να αποφασίσουμε για την εγκυρότητα της επιχειρηματικής μορφής

$$
\begin{array}{l}
p \supset q \\
q \\
\therefore p
\end{array}
$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Κάθε σειρά αυτού του πίνακα αναπαριστά μια ολόκληρη κλάση περιπτώσεων αντικατάστασης. Τα T και F στις δύο αρχικές στήλες ή στήλες-οδηγούς αναπαριστούν τις τιμές αλήθειας των δηλώσεων που αντικαθιστούν τις μεταβλητές p και q στην επιχειρηματική μορφή. Συμπληρώνουμε την τρίτη στήλη με αναφορά στις αρχικές στήλες και στον ορισμό του συμβόλου "πέταλο". Ο τίτλος της τρίτης στήλης είναι η πρώτη "προκείμενη" της επιχειρηματικής μορφής, της δεύτερης στήλης είναι η δεύτερη "προκείμενη" και της πρώτης στήλης είναι το "συμπέρασμα". Κατά την εξέταση αυτού του πίνακα αλήθειας, διαπιστώνουμε ότι στην τρίτη σειρά υπάρχει T κάτω από τις δύο προκείμενες και F κάτω από το συμπέρασμα, πράγμα που δείχνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία περίπτωση αντικατάστασης αυτής της επιχειρηματικής μορφής που έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα. Αυτή η σειρά αρκεί για να δείξουμε ότι η επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη. Κάθε επιχείρημα αυτής της συγκεκριμένης μορφής (δηλαδή, κάθε επιχείρημα του οποίου η συγκεκριμένη επιχειρηματική μορφή είναι η δοθείσα επιχειρηματική μορφή) λέγεται ότι υποπίπτει στην πλάνη της επιβεβαίωσης της επόμενης, αφού η δεύτερη προκείμενη επιβεβαιώνει την επόμενη της υποθετικής πρώτης προκείμενης.

Οι πίνακες αλήθειας, αν και απλοί στην ιδέα, αποτελούν ισχυρά εργαλεία. Κατά τη χρήση τους για να ελέγξουμε την εγκυρότητα ή ακυρότητα μίας επιχειρηματικής μορφής, είναι κρίσιμης σημασίας ότι ο πίνακας πρέπει πρώτα να κατασκευαστεί σωστά. Για να κατασκευάσουμε τον πίνακα σωστά, πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας οδηγός για κάθε δηλωτική μεταβλητή στην επιχειρηματική μορφή – p, q, r κτλ. Ο πίνακας πρέπει να περιέχει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αλήθειας και ψεύδους όλων αυτών των μεταβλητών, έτσι πρέπει να υπάρχει ένας αριθμός οριζόντιων σειρών αρκετός για να κάνει το εξής: τέσσερις σειρές αν υπάρχουν δύο μεταβλητές, οκτώ σειρές αν υπάρχουν τρεις μεταβλητές, και ούτω καθεξής. Πρέπει να υπάρχει μια κάθετη στήλη για καθεμιά από τις προκείμενες και για το συμπέρασμα, καθώς και μια στήλη για καθεμιά από τις συμβολικές εκφράσεις από τις οποίες είναι κατασκευασμένες οι προκείμενες και το συμπέρασμα. Η κατασκευή ενός πίνακα αλήθειας με αυτό τον τρόπο αποτελεί ουσιαστικά μια μηχανική διαδικασία˙ απαιτεί μόνο προσεκτικό μέτρημα και προσεκτική τοποθέτηση συμβόλων T και F στις κατάλληλες στήλες, που να διέπεται από την κατανόησή μας της περισπωμένης και των αληθο-συναρτησιακών συνδέσμων – της τελείας, της σφήνας και του πέταλου – και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες κάθε αληθο-συναρτησιακή σύνθεση είναι αληθής και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι ψευδής.

Αφού έχουμε κατασκευάσει τον πίνακα και η πλήρης διάταξη είναι εμπρός μας, είναι ουσιώδες να τον διαβάσουμε σωστά, δηλαδή, να τον χρησιμοποιήσουμε σωστά για να κάνουμε την εκτίμηση της επιχειρηματικής μορφής που εξετάζουμε. Πρέπει να σημειώσουμε προσεκτικά ποιές στήλες είναι εκείνες που αναπαριστούν τις προκείμενες του επιχειρήματος που ελέγχεται, και ποιά στήλη αναπαριστά το συμπέρασμα αυτού του επιχειρήματος. Κατά τον έλεγχο του επιχειρήματος μόλις παραπάνω, το οποίο διαπιστώσαμε ότι είναι άκυρο, σημειώσαμε ότι ήταν η δεύτερη και η τρίτη στήλες του πίνακα αλήθειας που αναπαριστούσαν τις προκείμενες, ενώ το συμπέρασμα αναπαριστανόταν από την πρώτη (την πιο αριστερή) στήλη. Ανάλογα με το ποιά επιχειρηματική μορφή ελέγχουμε, και τη σειρά με την οποία έχουμε τοποθετήσει τις στήλες όπως κατασκευαζόταν ο πίνακας, είναι δυνατό οι προκείμενες και το συμπέρασμα να εμφανιστούν με οποιαδήποτε διάταξη στην κορυφή του πίνακα. Η θέση τους στα δεξιά ή στα αριστερά δεν είναι σημαντική˙ εμείς, που χρησιμοποιούμε τον πίνακα, πρέπει να καταλάβουμε ποιά στήλη αναπαριστά τι, και πρέπει να καταλάβουμε τι είναι αυτό που ψάχνουμε. *Υπάρχει κάποια περίπτωση*, αναρωτιόμαστε, *κάποια σειρά στην οποία όλες οι προκείμενες είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές*; Αν υπάρχει μία τέτοια σειρά, η επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη˙ αν δεν υπάρχει καμιά τέτοια σειρά, η επιχειρηματική μορφή πρέπει να είναι έγκυρη. Αφού έχει κατασκευαστεί με νοικοκυρεμένο και ακριβή τρόπο ο πλήρης πίνακας, είναι ύψιστης σημασίας να δείξουμε μεγάλη προσοχή στο σωστό διάβασμά του.

8.7 Μερικές Συνήθεις Επιχειρηματικές Μορφές

Α. Συνήθεις έγκυρες μορφές

Μερικές έγκυρες επιχειρηματικές μορφές είναι εξαιρετικά συνήθεις και μπορούν να κατανοηθούν διαισθητικά. Θα έπρεπε να αναγνωρίζονται όπου κι αν εμφανίζονται, και μπορούν να αποκληθούν με τα ευρέως αποδεκτά ονόματά τους: (1) **Διαζευκτικός Συλλογισμός**, (2) **Modus Ponens**, (3) **Modus Tollens**, και (4) **Υποθετικός Συλλογισμός**.

Διαζευκτικός Συλλογισμός

Μια από τις απλούστερες έγκυρες επιχειρηματικές μορφές βασίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε αληθή διάζευξη, τουλάχιστον ένα διαζευκτό πρέπει να είναι αληθές. Επομένως, αν ένα από αυτά είναι ψευδές, το άλλο πρέπει να είναι αληθές. Επιχειρήματα σε αυτή τη μορφή είναι εξαιρετικά συνηθισμένα. Όταν μια υποψήφια για διορισμό σε μια ψηλή θέση εξαναγκάστηκε να αποσύρει την υποψηφιότητά της λόγω μιας φορολογικής παράβασης που αφορούσε έναν από τους υπαλλήλους της, ένας κριτικός έγραψε: "Προσπαθώντας να καλύψει τη δική της πράνομη πράξη, ή να παραμείνει αμέτοχη σε αυτή, οδηγήθηκε ή από βλακεία ή από υπεροφία. Προφανώς δεν είναι βλάκας˙ τα δεινά της πρέπει να είναι αποτέλεσμα, λοιπόν, της υπεροφίας της."[7]

Συμβολίζουμε το διαζευκτικό συλλογισμό ως

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

και για να δείξουμε την εγκυρότητά του κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

[7]Peter J. Bertocci, "Chavez' Plight Must Come From Arrogance", *The New York Times*, 19 Ιανουαρίου 2001.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

Εδώ, επίσης, οι αρχικές στήλες περιέχουν όλες τις δυνατές διαφορετικές τιμές αλήθειας των δηλώσεων που μπορούν να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές p και q. Συμπληρώνουμε την τρίτη στήλη με αναφορά στις δύο πρώτες, και την τέταρτη με αναφορά μόνο στην πρώτη. Η τρίτη σειρά είναι η μόνη στην οποία εμφανίζεται το σύμβολο T κάτω και από τις δύο προκείμενες (η τρίτη και η τέταρτη στήλες), και εμφανίζεται επίσης ένα T κάτω από το συμπέρασμα (η δεύτερη στήλη). Έτσι ο πίνακας αλήθειας δείχνει ότι η επιχειρηματική μορφή δεν έχει καμιά περίπτωση αντικατάστασης που έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα, και επομένως αποδεικνύει την εγκυρότητα της επιειρηματικής μορφής που ελέγχουμε. Όπως χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο, ο όρος **διαζευκτικός συλλογισμός** είναι το όνομα μιας στοιχειώδους επιχειρηματικής μορφής, που εδώ αποδεικνύεται έγκυρη. Αυτή η μορφή είναι πάντα έγκυρη, φυσικά, και επομένως, στη μοντέρνα λογική, ο όρος *διαζευκτικός συλλογισμός* πάντα αναφέρεται σε μια στοιχειώδη επιχειρηματική μορφή που είναι έγκυρη. Στην παραδοσιακή λογική, όμως, ο όρος *διαζευκτικός συλλογισμός* χρησιμοποιείται πιο ευρέως, σε αναφορά με οποιοδήποτε συλλογισμό που περιέχει μια διαζευκτική προκείμενη˙ μερικοί τέτοιοι συλλογισμοί μπορεί φυσικά να είναι άκυροι. Πρέπει να είμαστε ξεκάθαροι για το κατά πόσο η έκφραση χρησιμοποιείται με την ευρύτερη ή τη στενότερη έννοια. Εδώ τη χρησιμοποιούμε, πάντα, με τη στενότερη έννοια.

Εδώ, όπως πάντα, είναι ουσιώδες ότι ο πίνακας αλήθειας *διαβάζεται* επακριβώς˙ η στήλη που αναπαριστά το συμπέρασμα (δεύτερη από αριστερά) και οι στήλες που αναπαριστούν τις προκείμενες (τρίτη και τέταρτη από αριστερά) πρέπει να ταυτοποιηθούν προσεκτικά. Μόνο χρησιμοποιώντας αυτές τις τρεις στήλες σωστά μπορούμε να προσδιορίσουμε αξιόπιστα την εγκυρότητα (ή ακυρότητα) της επιχειρηματικής μορφής που ελέγχουμε. Σημειώνουμε ότι ο ίδιος πίνακας αλήθειας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξουμε την εγκυρότητα μιας πολύ διαφορετικής επιχειρηματικής μορφής, της οποίας οι προκείμενες αναπαρίστανται από τη δεύτερη και την τρίτη στήλες και της οποίας το συμπέρασμα αναπαρίσταται από την τέταρτη στήλη. Αυτή η επιχειρηματική μορφή, όπως μπορούμε να δούμε από την πάνω σειρά του πίνακα, είναι άκυρη. Η τεχνική αληθοπινάκων παρέχει μια πλήρως μηχανική μέθοδο για τον έλεγχο εγκυρότητας οποιουδήποτε επιχειρήματος του γενικού τύπου που εξετάζεται εδώ.

Είμαστε τώρα σε θέση να δικαιολογήσουμε την πρότασή μας να μεταφράσουμε κάθε εμφάνιση της φράσης "αν-τότε" στο σύμβολο της υλικής συνεπαγωγής, το $\supset$. Στην Ενότητα 3, διατυπώσαμε τον ισχυρισμό ότι όλα τα έγκυρα επιχειρήματα του γενικού τύπου με τον οποίο ασχολούμαστε εδώ που εμπλέκουν δηλώσεις "αν-τότε" παραμένουν έγκυρα όταν εκείνες οι δηλώσεις ερμηνευθούν έτσι που να βεβαιώνουν απλά υλικές συνεπαγωγές. Οι πίνακες αλήθειας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να τεκμηριώσουν αυτό τον ισχυρισμό, και θα δικαιολογήσουν τη μετάφρασή μας της έκφρασης "αν-τότε" με το σύμβολο πέταλο.

Modus Ponens

Ο πιο απλός τύπος διαισθητικά έγκυρου επιχειρήματος που περιέχει μια υποθετική δήλωση παρουσιάζεται στο επιχείρημα

> Αν ο δεύτερος ιθαγενής είπε την αλήθεια, τότε μόνο ένας ιθαγενής είναι πολιτικός.
> Ο δεύτερος ιθαγενής είπε την αλήθεια.
> Επομένως μόνο ένας ιθαγενής είναι πολιτικός.

Η συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος, που είναι γνωστή ως *Modus ponens* ("η μέθοδος θέσης, ή επιβεβαίωσης"), είναι

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

και αποδεικνύεται ότι είναι έγκυρη από τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Εδώ οι δύο προκείμενες αναπαρίστανται από την τρίτη και πρώτη στήλες, και το συμπέρασμα από τη δεύτερη. Μόνο η πρώτη σειρά αναπαριστά περιπτώσεις αντικατάστασης στις οποίες και οι δύο προκείμενες είναι αληθείς, και το T στη δεύτερη στήλη δείχνει ότι σε αυτά τα επιχειρήματα είναι επίσης αληθές το συμπέρασμα. Αυτός ο πίνακας αλήθειας αποδεικνύει την εγκυρότητα οποιουδήποτε επιχειρήματος της μορφής *modus ponens*.

Modus Tollens

Αν μια υποθετική δήλωση είναι αληθής, τότε αν η επόμενή της είναι ψευδής, η ηγούμενη πρέπει επίσης να είναι ψευδής. Η επιχειρηματική μορφή που βασίζεται σε αυτό (το γεγονός) χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να αποδείξουμε το ψεύδος κάποιας αμφισβητούμενης πρότασης. Για επεξήγηση: Ένας διακεκριμένος ραββίνος, επιμένοντας ότι το Βιβλίο της Γένεσης ποτέ δεν προοριζόταν ποτέ να αποτελέσει μια επιστημονική πραγματεία, παρουσίασε αυτό το ξεκάθαρο επιχείρημα:

> Μια ελεύθερη ανάγνωση της Γένεσης θαμας οδηγούσε να συμπεράνουμε ότι ο κόσμος έχει ηλικία μικρότερη των 6.000 ατών και ότι το Γκραντ Κάνυον θα μπορούσε να έχει σχηματιστεί από τον παγκόσμιο κατακλυσμό 4.500 χρόνια πριν. Αφού αυτό είναι αδύνατο, μια κυριολεκτική ανάγνωση της Γένεσης πρέπει να είναι λανθασμένη.[8]

Το επιχείρημα μπορεί να συμβολιστεί ως

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$$

Η εγκυρότητα αυτής της επιχειρηματικής μορφής, που καλείται *modus tollens* ("η μέθοδος της αφαίρεσης, ή άρνησης"), μπορεί να δειχθεί από τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

p	q	$p\supset q$	$\sim q$	$\sim p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Εδώ πάλι, δεν υπάρχει καμιά περίπτωση αντικατάστασης, καμία σειρά, στην οποία οι προκείμενες, $p\supset q$ και $\sim q$, είναι και οι δύο αληθείς και το συμπέρασμα, $\sim p$, είναι ψευδές.

Υποθετικός Συλλογισμός

Ένας άλλος συνηθισμένος τύπος διαισθητικά έγκυρου επιχειρήματος περιέχει μόνο υποθετικές δηλώσεις. Να ένα παράδειγμα:

> Αν ο πρώτος ιθαγενής είναι πολιτικός, τότε ο πρώτος ιθαγενής λέει ψέμματα.
> Αν ο πρώτος ιθαγενής λέει ψέμματα, τότε ο πρώτος ιθαγενής αρνείται ότι είναι πολιτικός.
> Επομένως αν ο πρώτος ιθαγενής είναι πολιτικός, τότε ο πρώτος ιθαγενής αρνείται ότι είναι πολιτικός.

[8] Rabbi Ammiel Hirsch, "Grand Canyon", *The New York Times*, 22 Ιανουαρίου 2005.

Η συγκεκριμένη μορφή αυτού του επιχειρήματος είναι

$$p \supset q$$
$$q \supset r$$
$$\therefore p \supset r$$

Αυτό το επιχείρημα, που καλείται **Υποθετικός Συλλογισμός** (ή Καθαρός Υποθετικός Συλλογισμός), περιέχει τρεις διακριτές δηλωτικές μεταβλητές, κι έτσι ο πίνακας αλήθειας πρέπει να έχει τρεις αρχικές στήλες και απαιτεί οκτώ σειρές για να απεικονίσει όλες τις δυνατές περιπτώσεις αντικατάστασης. Εκτός από τις αρχικές στήλες, χρειάζονται τρεις επιπλέον στήλες: δύο για τις προκείμενες, η τρίτη για το συμπέρασμα. Ο πίνακας είναι

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$p \supset r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Κατά την κατασκευή του, συμπληρώνουμε την τέταρτη στήλη κοιτάζοντας πίσω προς την πρώτη και τη δεύτερη, την πέμπτη με αναφορά στη δεύτερη και την τρίτη, και την έκτη με αναφορά στην πρώτη και την τρίτη. Εξετάζοντας τον συμπληρωμένο πίνακα, παρατηρούμε ότι οι προκείμενες είναι αληθείς μόνο στην πρώτη, πέμπτη, έβδομη και όγδοη σειρές, και ότι σε όλες αυτές το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές. Αυτός ο πίνακας αλήθειας αποδεικνύει την εγκυρότητα της επιχειρηματικής μορφής και αποδεικνύει ότι ο υποθετικός συλλογισμός παραμένει έγκυρος όταν οι υποθετικές δηλώσεις μεταφράζονται μέσω του συμβόλου-πέταλο.

Έχουμε δώσει αρκετά παραδείγματα για να επεξηγήσουμε την κατάλληλη χρήση της τεχνικής αληθο-πινάκων για τον έλεγχο επιχειρημάτων, και ίσως αρκετά έχουν δοθεί για να δειχθεί ότι η εγκυρότητα οποιουδήποτε έγκυρου επιχειρήματος που εμπλέκει υποθετικές δηλώσεις διατηρείται όταν οι δηλώσεις αυτές μεταφράζονται απλά σε υλικές συνεπαγωγές.

Τα επιχειρήματα που μας αφορούν εδώ περιέχουν μόνο απλές δηλώσεις και σύνθετες δηλώσεις που είναι κατασκευασμένες από απλές δηλώσεις χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sim$ και τους αληθο-συναρτησιακούς συνδέσμους, που συμβολίζονται από την τελεία, τη σφήνα, και το πέταλο. Καθώς θα θεωρήσουμε περισσότερο πολύπλοκες επιχειρηματικές μορφές, θα απαιτηθούν μεγαλύτεροι πίνακες αλήθειας για τον έλεγχό τους, επειδή απαιτείται μια ξεχωριστή αρχική στήλη για κάθε διαφορετική δηλωτική μεταβλητή στην επιχειρηματική μορφή. Μόνο δύο στήλες απαιτούνται για μια μορφή με ακριβώς δύο μεταβλητές, και αυτός ο πίνακας θα έχει τέσσερις σειρές. Αλλά απαιτούνται τρεις αρχικές στήλες για μια μορφή με τρεις μεταβλητές, όπως ο υποθετικός συλλογισμός, και τέτοιοι πίνακες αλήθειας έχουν οκτώ σειρές. Για τον έλεγχο εγκυρότητας μιας επιχειρηματικής μορφής, όπως αυτή του *Εποικοδομητικού Διλήμματος*,

$$\begin{array}{l} (p \supset q) \cdot (r \supset s) \\ p \vee r \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

που περιέχει τέσσερις διαφορετικές δηλωτικές μεταβλητές, απαιτείται ένας πίνακας με τέσσερις αρχικές στήλες και δεκαέξι σειρές. Γενικά, για να ελέγξουμε μια επιχειρηματική μορφή που περιέχει n διαφορετικές δηλωτικές μεταβλητές χρειαζόμαστε ένα πίνακα αλήθειας με n αρχικές στήλες και 2^n σειρές.

Β. Συνήθεις Άκυρες Μορφές

Δύο άκυρες επιχειρηματικές μορφές είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτες επειδή αυτές μοιάζουν επιφανειακά με έγκυρες μορφές και επομένως συχνά δελεάζουν απρόσεκτους συγγραφείς ή αναγνώστες. Η πλάνη *βεβαίωσης της επόμενης* συμβολίζεται ως

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \\ \therefore p \end{array}$$

Αν και το σχήμα αυτής της μορφής είναι κάτι σαν αυτό της *modus ponens*, οι δύο επιχειρηματικές μορφές είναι πολύ διαφορετικές, και αυτή η μορφή δεν είναι έγκυρη. Αποτυπώνεται καλά σε ένα "ψεύτικο συλλογισμό" σχετικά με τον δικτατορικό πρόεδρο του Ιράκ, τον μακαρίτη Σαντάμ Χουσεΐν. Ιδού αυτός ο συλλογισμός, όπως εξιστορήθηκε από τον Orlando Patterson (η διατύπωση του συλλογισμού από τον κ. Patterson είναι πολύ ελαφρά διαφορετική αλλά έχει ακριβώς την ίδια λογική ισχύ). Η ακυρότητά του το καθιστά όντως ψεύτικο: "Αν κάποιος είναι τρομοκράτης αυτός είναι τύραννος που μισεί την ελευθερία. Ο Σαντάμ Χουσεΐν είναι τύραννος που μισεί την ελευθερία. Επομένως ο Σαντάμ Χουσεΐν είναι τρομοκράτης."[9] Ας υποθέσουμε ότι η υπόθετική πρώτη προκείμενη είναι αληθής και ότι η δεύτερη προκείμενη που περιγράφει τον Σαντάμ Χουσεϊν είναι επίσης αληθής. Αλλά αυτή η δεύτερη προκείμενη βεβαιώνει (σχετικά με το ότι ο Σαντάμ Χουσεϊν είναι τύραννος) μόνο την επόμενη της προηγούμενης υποθετικής δήλωσης. Το επιχείρημα ξεκάθαρα διαπράττει την πλάνη βεβαίωσης της επόμενης.

Μία άλλη άκυρη μορφή, που καλείται *πλάνη άρνησης της ηγούμενης*, έχει σχήμα παρόμοιο με εκείνο της *modus tollens* και μπορεί να συμβολιστεί ως

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim p \\ \therefore \sim q \end{array}$$

Ένα παράδειγμα αυτής της πλάνης είναι το σλόγκαν προεκλογικής εκστρατείας που χρησιμοποίησε ένας υποψήφιος για δήμαρχος της Πόλης της Νέας Υόρκης μερικά χρόνια πριν: "Αν δεν γνωρίζετε το δολλάριο, δεν γνωρίζετε τη δουλειά – και ο Abe γνωρίζει το δολλάριο." Το σιωπηρό συμπέρασμα προς το οποίο ωθείται σκόπιμα ο ψηφοφόρος ήταν ότι "Ο Abe γνωρίζει τη δουλειά" – μια πρόταση που δεν έπεται από τις διατυπωμένες προκείμενες.

Και οι δύο αυτές συνήθεις πλάνες μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι είναι άκυρες με τη βοήθεια πινάκων αλήθειας. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μια σειρά του πίνακα αλήθειας στην οποία οι προκείμενες αυτών των απατηλών επιχειρημάτων είναι αληθείς, αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές.

Γ. Περιπτώσεις Αντικατάστασης και Συγκεκριμένες Μορφές

Ένα δοθέν αντικείμενο μπορεί να είναι μια περίπτωση αντικατάστασης πολλών διαφορετικών επιχειρηματικών μορφών, όπως σημειώσαμε νωρίτερα όταν ορίζαμε την έννοια *επιχειρηματική μορφή*. Συνεπώς ο έγκυρος διαζευκτικός συλλογισμός, ο οποίος μπορεί να συμβολιστεί ως

$$\begin{array}{l} R \vee W \\ \sim R \\ \therefore W \end{array}$$

αποτελεί μια περίπτωση αντικατάστασης της έγκυρης επιχειρηματικής μορφής

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

[9]Orlando Patterson, "The Speech Misheard Round the World", *The New York Times*, 22 Ιανουαρίου 2005.

και είναι *επίσης* μια περίπτωση αντικατάστασης της *άκυρης* επιχειρηματικής μορφής

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \therefore r \end{array}$$

Είναι προφανές, στην τελευταία μορφή, ότι από δύο προκείμενες, p και q, δεν μπορούμε έγκυρα να συμπεράνουμε την r. Έτσι είναι ξεκάθαρο ότι ένα έγκυρο επιχείρημα μπορεί να αποτελεί μια περίπτωση αντικατάστασης μια έγκυρης επιχειρηματικής μορφής και μιας άκυρης επιχειρηματικής μορφής. Επομένως, για να ελέγξουμε αν οποιοδήποτε δοθέν επιχείρημα είναι έγκυρο, *πρέπει να εξετάσουμε τη συγκεκριμένη μορφή του επιχειρήματος που ελέγχουμε*. Μόνο η συγκεκριμένη μορφή του επιχειρήματος αποκαλύπτει την πλήρη λογική δομή αυτού του επιχειρήματος, και επειδή το κάνει, γνωρίζουμε ότι αν η συγκεκριμένη μορφή οποιουδήποτε επιχειρήματος είναι έγκυρη, το ίδιο το επιχείρημα πρέπει να είναι έγκυρο.

Στην αποτύπωση που μόλις δώσαμε, βλέπουμε ένα επιχείρημα ($R \vee W$, $\sim R, \therefore W$), και δύο επιχειρηματικές μορφές των οποίων αυτό το επιχείρημα θα μπορούσε να αποτελεί περίπτωση αντικατάστασης. Η πρώτη από αυτές τις επιχειρηματικές μορφές ($p \vee q, \sim p, \therefore q$) είναι έγκυρη, και επειδή αυτή η μορφή είναι η συγκεκριμένη μορφή του δοθέντος επιχειρήματο, η εγκυρότητά της αποδεικνύει ότι το δοθέν επιχείρημα είναι έγκυρο. Η δεύτερη από αυτές τις επιχειρηματικές μορφές είναι άκυρη, αλλά επειδή δεν αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή του δοθέντος επιχειρήματος, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι το δοθέν επιχείρημα είναι άκυρο.

Αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί: Μια επιχειρηματική μορφή που είναι έγκυρη μπορεί να έχει μόνο έγκυρα επιχειρήματα ως περιπτώσεις αντικατάστασης. Δηλαδή, όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασης μιας έγκυρης μορφής *πρέπει* να είναι έγκυρες. Αυτό αποδεικνύεται από την αληθο-συναρτησιακή απόδειξη εγκυρότητας για την έγκυρη επιχειρηματική μορφή, που δείχνει ότι δεν υπάρχει καμιά δυνατή περίπτωση αντικατάστασης μιας έγκυρης μορφής που έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να αποδείξετε την εγκυρότητα καθεμιάς από τις επιχειρηματικές μορφές στην Ενότητα 4, Ομάδα Β, δες προηγούμενη σελίδα.

Β. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να προσδιορίσετε την εγκυρότητα ή ακυρότητα καθενός από τα ακόλουθα επιχειρήματα:

1. $(A \vee B \supset (A \cdot B)$
$A \vee B$
$\therefore A \cdot B$

2. $(C \vee D) \supset (C \cdot D)$
$C \cdot D$
$\therefore C \vee D$

3. $E \supset F$
$F \supset E$
$\therefore E \vee F$

4. $(G \vee H) \supset (G \cdot H)$
$\sim(G \cdot H)$
$\therefore \sim(G \vee H)$

5. $(I \vee J) \supset (I \cdot J)$
$\sim(I \vee J)$
$\therefore (I \cdot J)$

6. $K \vee L$
K
$\therefore \sim L$

7. $M \vee (N \cdot \sim N)$
M
$\therefore \sim(N \cdot \sim N)$

8. $(O \vee P) \supset Q$
$Q \supset (O \cdot P)$
$\therefore (O \vee P) \supset (O \cdot P)$

9. $(R \vee S) \supset T$
$T \supset (R \cdot S)$
$\therefore (R \cdot S) \supset (R \vee S)$

10. $U \supset (V \vee W)$
$(V \cdot W) \supset \sim U$
$\therefore \sim U$

Γ. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να προσδιορίσετε την εγκυρότητα ή ακυρότητα των ακόλουθων επιχειρημάτων:

1. Αν η Ανγκόλα πετύχει σταθερότητα, τότε και η Μποτσουάνα και το Τσαντ θα υιοθετήσουν περισσότερο φιλελεύθερες πολιτικές. Αλλά η Μποτσουάνα δεν θα υιοθετήσει περισότερο φιλελεύθερη πολιτική. Επομένως η Ανγκόλα δεν θα πετύχει σταθερότητα.

2. Αν η Δανία αρνηθεί να γίνει μέλος της Ευρωπαϊκής Κοινότητας, τότε, αν η Εσθονία παραμείνει στη Ρωσική σφαίρα επιρροής, τότε η Φινλανδία θα απορρίψει μια πολιτική ελεύθερου εμπορίου. Η Εσθονία θα παραμείνει στη Ρωσική σφαίρα επιρροής. Έτσι, αν η Δανία αρνηθεί να γίνει μέλος της Ευρωπαϊκής Κοινότητας, τότε η Φινλανδία θα απορρίψει μια πολιτική ελεύθερου εμπορίου.

3. Αν η Ελλάδα επιταχύνει τους δημοκρατικούς θεσμούς της, τότε η Ουγγαρία θα επιδιώξει μια πιό ανεξάρτητη πολιτική. Αν η Ελλάδα ενισχύσει τους δημοκρατικούς θεσμούς της, τότε η Ιταλική κυβέρνηση θα νιώσει μικρότερη απειλή. Συνεπώς, αν η Ουγγαρία επιδιώξει μια πιό ανεξάρτητη πολιτική, η Ιταλική κυβέρνηση θα νιώσει μικρότερη απειλή.

4. Αν η Ιαπωνία συνεχίσει να αυξάνει τις εξαγωγές αυτοκινήτων, τότε ή η Κορέα ή το Λάος θα υποστεί οικονομική παρακμή. Η Κορέα δεν θα υποστεί οικονομική παρακμή. Έπεται ότι αν η Ιαπωνία συνεχίσει να αυξάνει τις εξαγωγές αυτοκινήτων, τότε το Λάος θα υποστεί οικονομική παρακμή.

5. Αν η Μοντάνα υποφέρει από έντονη ξηρασία, τότε, αν η Νεβάδα έχει την κανονική ελαφρά βροχόπτωση, η παροχή νερού του Όρεγκον θα μειωθεί σημαντικά. Η Νεβάδα έχει πράγματι την κανονική ελαφρά βροχόπτωση. Έτσι αν μειωθεί σημαντικά η παροχή νερού του Όρεγκον, τότε η Μοντάνα υποφέρει από έντονη ξηρασία.

6. Αν πρόκειται να επιτευχθεί ισότητα ευκαιριών, τότε σε εκείνους τους ανθρώπους που ήταν προηγουμένως σε μειονεκτική θέση θα πρέπει τώρα να δοθούν ειδικές ευκαιρίες. Αν σε εκείνους τους ανθρώπους που ήταν προηγουμένως σε μειονεκτική θέση δοθούν τώρα ειδικές ευκαιρίες, τότε ορισμένα άτομα λαμβάνουν προνομιακή μεταχείριση. Αν ορισμένα άτομα λαμβάνουν προνομιακή μεταχείριση, τότε δεν πρόκειται να επιτευχθεί ισότητα ευκαιριών. Επομένως δεν πρόκειται να επιτευχθεί ισότητα ευκαιριών.

7. Αν ικανοποιηθούν τα αιτήματα των τρομοκρατών, τότε η ανομία θα ανταμειφθεί. Αν δεν ικανοποιηθούν τα αιτήματα των τρομοκρατών, τότε θα φονευθούν αθώοι όμηροι. Έτσι ή η ανομία θα ανταμειφθεί ή θα φονευθούν αθώοι όμηροι.

8. Αν οι άνθρωποι είναι εντελώς λογικοί, τότε ή όλες οι ενέργειες ενός ατόμου μπορούν να προβλεφθούν εκ των προτέρων ή το σύμπαν είναι ουσιωδώς ντετερμινιστικό. Δεν μπορούν να προβλεφθούν όλες οι ενέργειες ενός ατόμου. Έτσι, αν το σύμπαν δεν είναι ουσιωδώς ντετερμινιστικό, τότε οι άνθρωποι δεν είναι εντελώς λογικοί.

9. Αν η κατανάλωση πετρελαίου συνεχίσει να αυξάνει, τότε ή οι εισαγωγές πετρελαίου θα αυξηθούν ή τα εγχώρια αποθέματα πετρελαίου θα εξαντληθούν. Αν αυξηθούν οι εισαγωγές πετρελαίου και εξαντληθούν τα εγχώρια αποθέματα πετρελαίου, τότε το έθνος τελικά θα χρεωκοπήσει. Επομένως, αν συνεχίσει να αυξάνεται η κατανάλωση πετρελαίου, τότε το έθνος τελικά θα χρεωκοπήσει.

10. Αν η κατανάλωση πετρελαίου συνεχίσει να αυξάνει, τότε θα αυξηθούν οι εισαγωγές πετρελαίου και θα εξαντληθούν τα εγχώρια αποθέματα πετρελαίου θα εξαντληθούν. Αν ή αυξηθούν οι εισαγωγές πετρελαίου ή εξαντληθούν τα εγχώρια αποθέματα πετρελαίου,

τότε το έθνος θα χρεωκοπήσει σύντομα. Επομένως, αν συνεχίσει να αυξάνει η κατανάλωση πετρελαίου, τότε το έθνος θα χρεωκοπήσει σύντομα.

8.8 Επιχειρηματικές Μορφές και Υλική Ισοδυναμία

A. Επιχειρηματικές Μορφές και Δηλώσεις

Θα ξεκαθαρίσουμε τώρα μια έννοια που προϋποτέθηκε σιωπηρά στην προηγούμενη ενότητα, την έννοια της *δηλωτικής μορφής*. Υπάρχει ένας ακριβής παραλληλισμός μεταξύ της σχέσης επιχειρήματος προς επιχειρηματική μορφή, από τη μία πλευρά, και της σχέσης δήλωσης προς δηλωτική μορφή, από την άλλη. Ο ορισμός μιας δηλωτικής μορφής καθιστά προφανές το εξής: Μια **δηλωτική μορφή** είναι οποιαδήποτε ακολουθία συμβόλων που περιέχει δηλωτικές μεταβλητές αλλά όχι δηλώσεις, τέτοια που όταν αντικατασταθούν δηλωτικές μεταβλητές με δηλώσεις – όπου η ίδια δηλωτική μεταβλητή αντικαθίσταται παντού από την ίδια δήλωση – το αποτέλεσμα είναι μια δήλωση. Έτσι η έκφραση $p \vee q$ αποτελεί μια δηλωτική μορφή, επειδή όταν οι μεταβλητές p και q αντικατασταθούν με δηλώσεις, προκύπτει μια δήλωση. Η δήλωση που προκύπτει είναι μια διάζευξη, κι έτσι η καλείται **διαζευκτική δηλωτική μορφή**. Ανάλογα, οι $p \cdot q$ και $p \supset q$ καλούνται αντίστοιχα *συζευκτική* και *υποθετική δηλωτικές μορφές*, και η $\sim p$ καλείται *αρνητική δηλωτική μορφή* ή *δηλωτική μορφή διάψευσης*. Ακριβώς όπως οποιοδήποτε επιχείρημα με συγκεκριμένη μορφή λέμε ότι είναι μια περίπτωση αντικατάστασης εκείνης της επιχειρηματικής μορφής, έτσι οποιαδήποτε δήλωση μιας συγκεκριμένης μορφής λέμε ότι είναι μια *περίπτωση αντικατάστασης* εκείνης της επιχειρηματικής μορφής. Ακριβώς όπως διακρίνουμε τη *συγκεκριμένη μορφή* ενός δοθέντος επιχειρήματος, έτσι διακρίνουμε τη **συγκεκριμένη μορφή** μιας δοθείσας δήλωσης ως εκείνη τη δηλωτική μορφή από την οποία προκύπτει η δήλωση με ομοιόμορφη αντικατάσταση κάθε διαφορετικής δηλωτικής μεταβλητής από μια διαφορετική απλή δήλωση. Έτσι $p \vee q$ είναι η συγκεκριμένη μορφή της δήλωσης "Ο τυφλός φυλακισμένος έχει κόκκινο καπέλλο ή ο τυφλός φυλακισμένος έχει λευκό καπέλλο."

B. Ταυτολογικές, Αντιφατικές, και Ενδεχομενικές Δηλωτικές Μορφές

Η δήλωση "Ο Lincoln δολοφονήθηκε" (που συμβολίζουμε με L), και η δήλωση "Ο Lincoln δολοφονήθηκε ή δεν δολοφονήθηκε" (που συμβολίζουμε με $L \vee \sim L$), είναι και οι δύο προφανώς αληθείς. Αλλά, θα λέγαμε,

Βιογραφία
Charles Sanders Peirce

Θεωρούμενος από πολλούς ως ο πιο πρωτότυπος και δημιοργικός από τους Αμερικανούς λογικούς – ο Μπέρτραντ Ράσσελ τον αποκάλεσε "σίγουρα ο μεγαλύτερος Αμερικανός στοχαστής όλων των εποχών" – ο Charles Sanders Peirce (1839-1914) είχε συνεισφορές τέτοιας πολυπλοκότητας και ποικιλίας στις περιοχές της λογικής και των μαθηματικών που δεν είναι εύκολο να τις συνοψίσουμε. Γι' αυτόν, αυτό που καλούμε λογική υπήρξε ο τυπικός κλάδος της θεωρίας σημείων, της *σημειωτικής* – της μελέτης της οποίας υπήρξε ο θεμελιωτής.
Γιός καθηγητή μαθηματικών και αστρονομίας στο Harvard, ο Peirce γοητεύτηκε από τη λογική από τη στιγμή που διάβασε το βιβλίο *Elements of Logic* του Whateley στην ηλικία των 12 ετών. Αυτός έλαβε τα πτυχία BA και MA από το Harvard, αλλά περιφρονήθηκε από έναν από τους καθηγητές του, τον Charles William Eliot, ο οποίος – ως Πρόεδρος του Harvard για σαράντα χρόνια – το έκανε ουσιαστικά αδύνατο για τον Peirce να αποκτήσει την ακαδημαϊκή απασχόληση που επιδίωκε.
Ήταν στην Ακτοφυλακή των ΗΠΑ που ο Peirce κυρίως απασχολήθηκε μέχρι που, στην ηλικία των 40 ετών, διορίστηκε ως λέκτορας λογικής στο πρόσφατα ιδρυθέν Πανεπιστήμιο Johns Hopkins. Αυτή τη θέση κράτησε για πέντε χρόνια, αλλά την έχασε ως συνέπεια διαφόρων συζυγικών και σεξουαλικών σκανδάλων στα οποία ενεπλάκη. Από εκείνη την εποχή του αρνήθηκαν παντού ακαδημαϊκή απασχόληση. Ο Peirce υπήρξε ένας περίεργος άνδρας, με περίεργους τρόπους· δεν ήταν πολύ αρεστός, ή κοινωνικός, ή συνεργάσιμος· η συμπεριφορά του ήταν συχνά ανεύθυνη. Μάλλον έπασχε από σοβαρή ψυχολογική αναπηρία.
Ως στοχαστής, όμως, υπήρξε παραγωγικός στην επιστήμη και τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία, καθώς και στη λογική. Υπήρξε πολυγραφότατος συγγραφέας· μερικά από τα γραπτά του δεν έχουν ακόμη δημοσιευθεί. Αυτός υπερασπίστηκε τη θεωρία πιθανοτήτων ως θεωρία συχνοτήτων, υποστηρίζοντας ότι η επιστήμη δεν μπορεί να πετύχει κάτι περισσότερο από στατιστικές πιθανότητες – ποτέ βεβαιότητες. Εργάστηκε πάνω στα απειροστά και στη θεωρία μαθηματικών συνεχών. Ανέπτυξε τη λογική σχέσεων ("Αν ο X είναι ψηλότερος από τον Y, και ο Y είναι ψηλότερος από τον Z, τότε ο X είναι ψηλότερος από τον Z"). Εκλέπτυνε τη θεωρία ποσόδειξης. Δημιούργησε μια τρίτιμη λογική στην οποία η τρίτη τιμή ήταν "απροσδιόριστος". Βελτίωσε τους πίνακες αλήθειας. Επινόησε σύμβολα για νέους λογικούς τελεστές. Υπήρξε ένας από τους πρώτους που συνειδητοποίησαν ότι οι υπολογισμοί Boole θα μπορούσαν να εκτελεστούν στον

πραγματικό κόσμο χρησιμοποιώντας ηλεκτρικούς διακόπτες. Μερικοί μελετητές οι οποίοι πολύ αργότερα συμμετείχαν στο σχεδιασμό και την κατασκευή των πρώτων ηλεκτρονικών υπολογιστών απέδωσαν τις ενοράσεις τους στην υπαινικτικότητα των γραπτών του Peirce. Ο Αμερικανός λογικός C. I. Lewis έγραψε ότι "οι συνεισφορές του C. S. Peirce στη συμβολική λογική είναι πιο πολυάριθμες και ποικίλες από εκείνες οποιουδήποτε άλλου συγγραφέα".
Στη φιλοσοφία ο Peirce είναι πολύ διάσημος ως ο θεμελιωτής. με τον John Dewey, του Αμερικανικού κινήματος που καλούμε *πραγματισμό*, ο οποίος ήταν γι' αυτόν ουσιαστικά μια θεωρία αλήθειας. Μια πρόταση είναι αληθής αν λειτουργεί ικανοποιητικά, και το νόημα μιας πρότασης πρέπει να βρεθεί στις πρακτικές συνέπειες της αποδοχής της. Αυτός ανέφερε ότι έμαθε φιλοσοφία, όταν ήταν φοιτητής, διαβάζοντας κάθε μέρα λίγες σελίδες της *Κριτικής του Καθαρού Λόγου* του Immanuel Kant, ενός έργου που μελετούσε τακτικά για δέκα χρόνια.
Ο Peirce υπήρξε ένας άνδρας με τις πιο περίεργες συνήθειες. Ξόδεψε ό,τι κληρονόμησε για γη και ένα μεγάλο σπίτι στην ανατολική Πενσυλβάνια το οποίο δεν ήταν σε θέση να συντηρήσει. Αυτός έζησε πέρα από τις δυνατότητές του˙εξαρτιόταν από τους φίλους του για να πληρώσει τα χρέη και τους φόρους του. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών της ζωής του δεν είχε την οικονομική δυνατότητα να ζεστάνει το σπίτι του το χειμώνα, και ζούσε σε μεγάλο βαθμό με μπαγιάτικο ψωμί που του δώριζε ένας τοπικός αρτοποιός. Πέθανε το 1914 στην ηλικία των 74 ετών σε εκείνο το μεγάλο σπίτι στο Μίλφορντ της Πενσυλβάνιας.

είναι αληθείς "με διαφορετικούς τρόπους" ή έχουν "διαφορετικά είδη" αλήθειας. Όμοια, η δήλωση "Ο Washington δολοφονήθηκε" (που συμβολίζουμε με W), και η δήλωση "Ο Washington και δολοφονήθηκε και δεν δολοφονήθηκε" (που συμβολίζουμε με $W \cdot {\sim} W$), είναι και οι δύο καταφανώς ψευδείς – αλλά αυτές είναι επίσης ψευδείς "με διαφορετικούς τρόπους" ή έχουν "διαφορετικά είδη" ψεύδους. Αυτές οι διαφορές "είδους" αλήθειας ή ψεύδους είναι σημαντικές και πολύ μεγάλες.

Ότι η δήλωση L είναι αληθής, και ότι η δήλωση W είναι ψευδής, είναι ιστορικά γεγονότα – που αφορούν τον τρόπο που έγιναν συμβάντα. Δεν υπάρχει λογική αναγκαιότητα σχετικά με αυτά. Τα γεγονότα θα μπορούσαν να είχαν συμβεί διαφορετικά και επομένως οι τιμές αλήθειας τέτοιων δηλώσεων όπως οι L και W πρέπει να ανακαλυφθούν από μια εμπειρική μελέτη της ιστορίας. Αλλά η δήλωση $L \vee {\sim} L$, αν και αληθής, δεν αποτελεί ιστορική αλήθεια. Υπάρχει λογική αναγκαιότητα εδώ. Τα γεγονότα δεν θα μπορούσαν να είναι τέτοια που να την κάνουν ψευδή, και η αλήθειά της μπορεί να είναι γνωστή ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συγκεκριμένη εμπειρική έρευνα. Η δήλωση $L\vee\sim L$ είναι μια λογική αλήθεια, μια τυπική αλήθεια, αληθής λόγω της μορφής της και μόνο. Αποτελεί περίπτωση αντικατάστασης μιας δηλωτικής μορφής της οποίας όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασης είναι αληθείς δηλώσεις.

Μια επιχειρηματική μορφή που έχει μόνο αληθείς περιπτώσεις αντικατάστασης καλείται μια *ταυτολογική δηλωτική μορφή*, ή μια *ταυτολογία*. Για να δείξουμε ότι η δηλωτική μορφή $p\vee\sim p$ είναι μια ταυτολογία, κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	T	T

Υπάρχει μόνο μία αρχική στήλη ή στήλη-οδηγός σε αυτόν τον πίνακα αλήθειας, επειδή η μορφή που εξετάζουμε περιέχει μόνο μια δηλωτική μεταβλητή. Κατά συνέπεια, υπάρχουν μόνο δύο σειρές, που αναπαριστούν όλες τις δυνατές περιπτώσεις αντικατάστασης. Υπάρχει μόνο το σύμβολο T στη στήλη κάτω από τη δηλωτική μορφή που εξετάζουμε, και αυτό το γεγονός δείχνει ότι όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασής της είναι αληθείς. Οποιαδήποτε δήλωση που αποτελεί μια περίπτωση αντικατάστασης μιας ταυτολογικής δηλωτικής μορφής είναι αληθής λόγω της μορφής της, και λέμε ότι η ίδια είναι ταυτολογική, ή μια ταυτολογία.

Μία δηλωτική μορφή που έχει μόνο ψευδείς περιπτώσεις αντικατάστασης λέμε ότι είναι **αυτο-αντιφατική**, ή μία **αντίφαση**, και είναι λογικά ψευδής. Η δηλωτική μορφή $p\cdot\sim p$ είναι αυτο-αντιφατική, επειδή εμφανίζεται μόνο το σύμβολο F κάτω από αυτήν στον πίνακα αλήθειάς της, που σημαίνει ότι όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασής της είναι ψευδείς. Κάθε δήλωση, όπως η $W\cdot\sim W$, που αποτελεί μια περίπτωση αντικατάστασης μιας αυτο-αντιφατικής δηλωτικής μορφής, είναι ψευδής λόγω της μορφής της και λέμε ότι η ίδια είναι αυτο-αντιφατική, ή μια αντίφαση.

Δηλωτικές μορφές που έχουν και αληθείς και ψευδείς δηλώσεις μεταξύ των περιπτώσεων αντικατάστασής τους καλούνται **ενδεχομενικές δηλωτικές μορφές**. Οποιαδήποτε δήλωση της οποίας η συγκεκριμένη μορφή είναι ενδεχομενική καλείται *ενδεχομενική δήλωση*. (Υπενθυμίζουμε ότι υποθέτουμε εδώ ότι καμία απλή δήλωση δεν είναι λογικά αληθής ή λογικά ψευδής. Μόνο ενδεχομενικές απλές δηλώσεις επιτρέπονται εδώ.) Έτσι οι p, $\sim p$, $p\cdot q$, $p\vee q$, και $p\supset q$ είναι όλες ενδεχομενικές δηλωτικές μορφές, και τέτοιες δηλώσεις όπως οι L, $\sim L$, $L\cdot W$, και $L\supset W$ είναι ενδεχομενικές δηλώσεις, επειδή οι τιμές αλήθειάς τους εξαρτώνται από τα περιεχόμενά τους παρά από τις μορφές τους και μόνο.

Δεν είναι όλες οι δηλωτικές μορφές τόσο προφανώς ταυτολογικές ή αυτο-αναφορικές ή ενδεχομενικές όπως τα απλά παραδείγματα που αναφέραμε. Π.χ., η δηλωτική μορφή $[(p \supset q) \supset p] \supset p$ δεν είναι καθόλου προφανής, αν και ο πίνακας αλήθειάς της θα δείξει ότι αυτή αποτελεί ταυτολογία. Αυτή έχει μάλιστα ένα ειδικό όνομα, *Νόμος του Peirce*.

Γ. Υλική Ισοδυναμία

Η υλική ισοδυναμία είναι ένας αληθο-συναρτησιακός σύνδεσμος, ακριβώς όπως η διάζευξη και η υλική συνεπαγωγή είναι αληθο-συναρτησιακοί σύνδεσμοι. Η τιμή αλήθειας οποιασδήποτε δήλωσης που σχηματίστηκε με σύνδεση δύο δηλώσεων με ένα αληθο-συνσρτησιακό σύνδεσμο, όπως εξηγήθηκε νωρίτερα, εξαρτάται από την αλήθεια ή το ψεύδος (ή είναι συνάρτηση της αλήθειας ή του ψεύδους) των δηλώσεων που αυτός συνδέει. Έτσι, λέμε ότι η διάζευξη των A και B είναι αληθής αν ή η A είναι αληθής ή η B είναι αληθής ή είναι και οι δύο αληθείς. Η **υλική ισοδυναμία** είναι ο αληθο-συναρτησιακός σύνδεσμος που ισχυρίζεται ότι οι δηλώσεις που συνδέει έχουν την *ίδια* τιμή αλήθειας. Δύο δηλώσεις που είναι ισοδύναμες ως προς την τιμή αλήθειας, επομένως, είναι υλικά ισοδύναμες. Ένας ευθύς ορισμός είναι ο εξής: Δύο δηλώσεις είναι *υλικά ισοδύναμες* όταν είναι και οι δύο αληθείς, ή και οι δύο ψευδείς.

Ακριβώς όπως το σύμβολο για τη διάζευξη είναι η σφήνα, και το σύμβολο για την υλική συνεπαγωγή είναι το πέταλο, υπάρχει επίσης ένα ειδικό σύμβολο για την υλική ισοδυναμία, το σύμβολο τρεις-παύλες ή **τριπαύλα**, "$\equiv$". (Μερικά συστήματα χρησιμοποιούν το σύμβολο "$\leftrightarrow$"). Και ακριβώς όπως δώσαμε ορισμούς με αληθο-πίνακες για τη σφήνα και το πέταλο, μπορούμε να το κάνουμε για το σύμβολο τριπαύλα. Να ο αληθο-πίνακας για την υλική ισοδυναμία, $\equiv$:

p	q	$p \equiv q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Οποιεσδήποτε δύο αληθείς δηλώσεις συνεπάγονται υλικά η μία την άλλη˙ αυτό είναι μία συνέπεια του νοήματος της υλικής συνεπαγωγής. Και οποιεσδήποτε δύο ψευδείς δηλώσεις επίσης συνεπάγονται υλικά η μία την άλλη. Επομένως οποιεσδήποτε δύο δηλώσεις που είναι υλικά ισοδύναμες πρέπει να συνεπάγονται η μία την άλλη, επειδή αυτές είναι ή και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

Αφού οποιεσδήποτε δύο δηλώσεις, A και B, που είναι υλικά ισοδύναμες συνεπάγονται η μία την άλλη, μπορούμε να συμπεράνουμε από την υλική τους συνεπαγωγή ότι η B είναι αληθής αν η A είναι αληθής, και επίσης ότι η A είναι αληθής μόνο αν η B είναι αληθής. Επειδή και οι δύο αυτές σχέσεις έπονται από την υλική ισοδυναμία, μπορούμε να διαβάζουμε το σύμβολο τριπαύλα, $\equiv$, λέγοντας "αν και μόνον αν".

Στον καθημερινό λόγο, χρησιμοποιούμε αυτή τη λογική σχέση μόνο προτασιακά. Θα πάω στον αγώνα πρωταθλήματος, μπορεί να πει κάποιος, αν και μόνον αν μπορώ να βρω εισιτήριο. Θα πάω αν βρω εισιτήριο, αλλά μπορεί να πάω μόνον αν βρω εισιτήριο. Έτσι το να πάω στο παιχνίδι, και το να βρω εισιτήριο για το παιχνίδι, είναι υλικά ισοδύναμα.

Κάθε συνεπαγωγή αποτελεί μια υποθετική δήλωση, όπως σημειώσαμε νωρίτερα. Δύο δηλώσεις, A και B, που είναι υλικά ισοδύναμες συνεπάγονται την αλήθεια της υποθετικής δήλωσης $A \supset B$, και επίσης συνεπάγονται την αλήθεια της υποθετικής δήλωσης $B \supset A$. Επειδή η συνεπαγωγή πάει και προς τις δύο κατευθύνσεις όταν ισχύει υλική συνεπαγωγή, μια δήλωση της μορφής $A \equiv B$ συχνά καλείται **αμφι-υποθετική**.

Υπάρχουν τέσσερις αληθο-συναρτησιακοί σύνδεσμοι από τους οποίους συνήθως εξαρτώνται τα παραγωγικά επιχειρήματα: *σύζευξη*, *διάζευξη*, *υλική συνεπαγωγή*, και *υλική ισοδυναμία*. Η συζήτησή μας για αυτούς είναι τώρα πλήρης.

Επισκόπηση

Οι Τέσσερις Αληθο-Συναρτησιακοί Σύνδεσμοι

Σύνδεσμος-	**Σύμβολο (Όνομα συμβόλου)**	**Τύπος Πρότασης**	**Όνομα Συνιστωσών**	**Παράδειγμα**
Και	$\cdot$ (τελεία)	Σύζευξη	Συζευκτά	Η Carol είναι κακόκεφη και ο Bob τραγουδά μπλουζ. $C \cdot B$
Ή	$\vee$ (σφήνα)	Διάζευξη	Διαζευκτά	Η Carol είναι κακόκεφη ή ο Tyrell αγαπά τη μουσική. $C \vee T$
Αν-τότε	$\supset$ (πέταλο)	Υποθετική	Ηγούμενη, Επόμενη	Αν ο Bob τραγουδά μπλουζ, τότε η Myrna γίνεται κακόκεφη. $B \supset M$
Αν και	$\equiv$ (τριπαύλα)	Αμφι-υποθετική	Συνιστώσες	Η Myrna γίνεται κακόκεφη αν και μόνον ο Bob τραγουδά μπλουζ. $M \equiv B$

Σημείωση: Το "δεν" δεν αποτελεί σύνδεσμο, αλλά είναι ένας αληθο-συναρτησιακός τελεστής, έτσι παραλείπεται εδώ.

Δ. Επιχειρήματα, Υποθετικές Δηλώσεις, και Ταυτολογίες

Σε κάθε επιχείρημα αντιστοιχεί μια υποθετική δήλωση της οποίας η ηγούμενη είναι η σύζευξη των προκείμενων του επιχειρήματος και η επόμενη είναι το συμπέρασμα του επιχειρήματος. Έτσι, ένα επιχείρημα που έχει τη μορφή του *modus ponens*

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

μπορεί να εκφραστεί ως μια υποθετική δήλωση της μορφής $[(p \supset q) \cdot p] \supset q$. Αν το επιχείρημα που εκφράζεται ως υποθετική δήλωση έχει μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή, τότε το συμπέρασμά του πρέπει σε κάθε περίπτωση να έπεται από τις προκείμενες, και συνεπώς η υποθετική δήλωσή του μπορεί να δειχθεί σε ένα πίνακα αλήθειας ότι αποτελεί ταυτολογία. Δηλαδή, η δήλωση ότι η σύζευξη των προκείμενων συνεπάγεται το συμπέρασμα θα έχει (αν το επιχείρημα είναι έγκυρο) αληθείς και μόνο περιπτώσεις αντικατάστασης.

Οι πίνακες αλήθειας αποτελούν ισχυρά εργαλεία για την εκτίμηση επιχειρημάτων. Μια επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη αν και μόνον αν ο πίνακας αλήθειάς της έχει T κάτω από το συμπέρασμα σε κάθε σειρά στην οποία υπάρχει T κάτω από όλες τις προκείμενές της. Αυτό έπεται από το ακριβές νόημα της *εγκυρότητας*. Τώρα, αν η υποθετική δήλωση που εκφράζει αυτή την επιχειρηματική μορφή τεθεί ως επικεφαλίδα μίας στήλης του πίνακα αλήθειας, ένα F μπορεί να εμφανιστεί σε εκείνη τη στήλη μόνο σε μια σειρά στην οποία υπάρχουν T κάτω από όλες τις προκείμενες και ένα F κάτω από το συμπέρασμα. Αλλά δεν θα υπάρχει καμία τέτοια σειρά αν το επιχείρημα είναι έγκυρο. Συνεπώς μόνο T θα εμφανίζονται κάτω από μία υποθετική δήλωση που αντιστοιχεί σε ένα έγκυρο επιχείρημα, και αυτή η υποθετική δήλωση *πρέπει* να είναι μία ταυτολογία. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι μία επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη αν, και μόνον αν, η διατύπωσή της με τη μορφή μίας υποθετικής δήλωσης (της οποίας η ηγούμενη είναι η σύζευξη των προκείμενων της δοθείσας επιχειρηματικής μορφής, και η επόμενη είναι το συμπέρασμα της δοθείσας επιχειρηματικής μορφής) είναι ταυτολογία.

Για κάθε *άκυρο* επιχείρημα αληθο-συναρτησιακού είδους, όμως, η αντίστοιχη υποθετική δήλωση δεν θα είναι ταυτολογία. Η δήλωση ότι η σύζευξη των προκείμενων συνεπάγεται το συμπέρασμά του είναι (για ένα άκυρο επιχείρημα) ή ενδεχομενική ή αντιφατική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Για κάθε δήλωση στην αριστερή στήλη, υποδείξτε, αν υπάρχει, ποιά από τις επιχειρηματικές μορφές στη δεξιά στήλη έχει τη δοθείσα δήλωση ως περίπτωση αντικατάστασης, και υποδείξτε, αν υπάρχει, ποιά είναι η συγκεκριμένη μορφή της δοθείσας δήλωσης.

1.	$A \vee B$	α.	$p \cdot q$
2.	$C \cdot \sim D$	β.	$p \supset q$
3.	$\sim E \supset (F \cdot G)$	γ.	$p \vee q$
4.	$H \supset (I \cdot J)$	δ.	$p \cdot \sim q$
5.	$(K \cdot L) \vee (M \cdot N)$	ε.	$p \equiv q$
6.	$(O \cdot P) \supset (P \cdot Q)$	στ.	$(p \supset q) \vee (r \cdot s)$
7.	$(R \supset S) \vee (T \cdot \sim U)$	ζ.	$[(p \supset q) \supset r] \supset s$
8.	$V \supset (W \vee \sim W)$	η.	$[(p \supset q) \supset p] \supset p$
9.	$[(X \supset Y) \supset X] \supset X$	θ.	$(p \cdot q) \vee (r \cdot s)$
10.	$Z \equiv \sim\sim Z$	ι.	$p \supset (q \vee \sim r)$

Β. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες επιχειρηματικές μορφές ως ταυτολογικές, αυτο-αντιφατικές ή ενδεχομενικές.

1. $[p \supset (p \supset q)] \supset q$
2. $p \supset [(p \supset q) \supset q]$
3. $(p \cdot q) \cdot (p \supset \sim q)$
4. $p \supset [\sim p \supset (q \vee \sim q)]$
5. $p \supset [p \supset (q \cdot \sim q)]$
6. $(p \supset p) \supset (q \cdot \sim q)$
7. $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
8. $[p \supset (q \supset p)] \supset [(q \supset q) \supset \sim (r \supset r)]$
9. $\{[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \cdot (p \vee r)\} \supset (q \vee s)$
10. $\{[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \cdot (q \vee s)\} \supset (p \vee r)$

Γ. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να αποφασίσετε ποιες από τις ακόλουθες αμφι-υποθετικές δηλώσεις είναι ταυτολογίες.

1. $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$
2. $(p \supset q) \equiv (\sim p \supset \sim q)$
3. $[(p \supset q) \supset r] \equiv [(q \supset p) \supset r]$
4. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [q \supset (p \supset r)]$
5. $p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$
6. $p \equiv [p \vee (p \cdot q)]$
7. $p \equiv [p \cdot (p \supset q)]$
8. $p \equiv [p \cdot (q \supset p)]$
9. $p \equiv [p \vee (p \supset q)]$
10. $(p \supset q) \equiv [(p \vee q) \equiv q]$
11. $p \equiv [p \vee (q \cdot \sim q)]$
12. $p \equiv [p \cdot (q \cdot \sim q)]$
13. $p \equiv [p \cdot (q \vee \sim q)]$
14. $p \equiv [p \vee (q \vee \sim q)]$
15. $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \cdot (p \cdot r)]$
16. $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$
17. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$
18. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$
19. $[(p \cdot q) \supset r)] \equiv [p \supset (q \supset r)]$
20. $[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$

8.9 Λογική Ισοδυναμία

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε μία νέα σχέση, σημαντική και πολύ χρήσιμη, αλλά όχι σύνδεσμο, και κάπως πιο πολύπλοκη από οποιοδήποτε από τους αληθο-συναρτησιακούς συνδέσμους που μόλις συζητήσαμε.

Δύο δηλώσεις είναι υλικά ισοδύναμες όταν αυτές έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας. Επειδή δύο υλικά ισοδύναμες δηλώσεις είναι ή αληθείς και οι δύο, ή ψευδείς και οι δύο, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αυτές πρέπει (υλικά) να συνεπάγονται η μία την άλλη, επειδή μία ψευδής ηγούμενη (υλικά) συνεπάγεται οποιαδήποτε δήλωση, και μία αληθής επόμενη έπεται (υλικά) από οποιαδήποτε δήλωση. Επομένως μπορούμε να διαβάζουμε το σύμβολο τριπαύλα, $\equiv$, ως "αν και μόνον αν".

Όμως, δηλώσεις που είναι απλά υλικά ισοδύναμες σίγουρα δεν μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη. Γνωρίζοντας ότι αυτές είναι υλικά ισοδύναμες, γνωρίζουμε ότι οι τιμές αλήθειάς τους είναι ίδιες. Οι δηλώσεις "Ο Δίας είναι μεγαλύτερος από τη Γη" και "Το Τόκυο είναι η πρωτεύουσα της Ιαπωνίας" είναι υλικά ισοδύναμες επειδή είναι και οι δύο αληθείς, αλλά προφανώς δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μία με την άλλη. Όμοια, οι δηλώσεις "Όλες οι αράχνες είναι δηλητηριώδεις" και "Καμιά αράχνη δεν είναι δηλητηριώδης" είναι υλικά ισοδύναμες απλά επειδή είναι και οι δύο ψευδείς, αλλά σίγουρα δεν μπορεί η μία να αντικαταστήσει την άλλη!

Υπάρχουν πολλές περιστάσεις, όμως, στις οποίες πρέπει να εκφράσουμε τη σχέση που πράγματι επιτρέπει αμοιβαία αντικατάσταση. Δύο δηλώσεις μπορεί να είναι ισοδύναμες με μία έννοια πολύ ισχυρότερη από αυτή της υλικής ισοδυναμίας. Αυτές μπορεί να είναι ισοδύναμες με την έννοια ότι κάθε πρόταση που ενσωματώνει μία από αυτές θα μπορούσε εξίσου καλά να ενσωματώνει την άλλη. Αν δεν υπάρχει καμία δυνατή περίπτωση στην οποία μία από αυτές τις δηλώσεις είναι αληθής ενώ η άλλη είναι ψευδής, εκείνες οι δηλώσεις είναι *λογικά ισοδύναμες*.

Φυσικά, οποιεσδήποτε δύο δηλώσεις που είναι λογικά ισοδύναμες είναι επίσης υλικά ισοδύναμες, διότι αυτές προφανώς έχουν την ίδια τιμή αλήθειας. Πράγματι, αν δύο δηλώσεις είναι λογικά ισοδύναμες, αυτές είναι υλικά ισοδύναμες σε όλες τις περιστάσεις – και αυτό οδηγεί στο σύντομο αλλά ισχυρό ορισμό της **λογικής ισοδυναμίας**: *Δύο δηλώσεις είναι λογικά ισοδύναμες αν η δήλωση της υλικής ισοδυναμίας τους είναι μια ταυτολογία.* Δηλαδή, η δήλωση ότι αυτές έχουν την ίδια τιμή αλήθειας είναι η ίδια αναγκαία αληθής. Αυτός είναι ο λόγος που, για να εκφράσουμε αυτή την πολύ ισχυρή λογική σχέση, χρησιμοποιούμε το σύμβολο τριπαύλα με ένα μικρό T ακριβώς από πάνω του, $\stackrel{T}{\equiv}$, υποδηλώνοντας ότι η λογική σχέση είναι τέτοιας φύσης που η υλική συνεπαγωγή των δύο δηλώσεων είναι μια ταυτολογία. Επειδή η υλική συνεπαγωγή είναι μια αμφι-υποθετική δήλωση (οι δύο δηλώσεις συνεπάγονται η μία την άλλη), μπορούμε να θεωρούμε ότι αυτό το σύμβολο λογικής ισοδυναμίας, $\overset{\mathrm{T}}{\equiv}$, εκφράζει μια ταυτολογική αμφι-υποθετική δήλωση.

Μερικές απλές λογικές ισοδυναμίες που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά θα κάνουν αυτή τη σχέση, και τη μεγάλη ισχύ της, πολύ ξεκάθαρη. Είναι κοινός τόπος ότι η p και η $\sim\sim p$ σημαίνουν το ίδιο πράγμα˙ η "αυτός έχει επίγνωση αυτής της δυσκολίας" και η "αυτός δεν αγνοεί αυτή τη δυσκολία" αποτελούν δύο δηλώσεις με το ίδιο περιεχόμενο. Στην ουσία, οποιαδήποτε από αυτές τις εκφράσεις μπορεί να αντικατασταθεί από την άλλη επειδή και οι δύο λένε το ίδιο πράγμα. Αυτή η αρχή της διπλής άρνησης, της οποίας η αλήθεια είναι προφανής για όλους μας, μπορεί να απεικονιστεί σε ένα πίνακα αλήθειας, όπου η υλική ισοδυναμία δύο δηλωτικών μορφών αποδεικνύεται ότι είναι ταυτολογία:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$p \equiv \sim\sim p$
T	F	T	T
F	T	F	T

Αυτός ο πίνακας αλήθειας αποδεικνύει ότι η p και η $\sim\sim p$ είναι *λογικά ισοδύναμες*. Αυτή η πολύ χρήσιμη λογική ισοδυναμία, η διπλή άρνηση, συμβολίζεται ως

$$p \overset{\mathrm{T}}{\equiv} \sim\sim p$$

Η διαφορά μεταξύ *υλικής ισοδυναμίας* από τη μία πλευρά και *λογικής ισοδυναμίας* από την άλλη είναι πολύ μεγάλη και πολύ σημαντική. Η πρώτη είναι ένας αληθο-συναρτησιακός σύνδεσμος, ο οποίος μπορεί να δίνει μία αληθή ή ψευδή δήλωση ανάλογα με την αλήθεια ή το ψεύδος των στοιχείων που συνδέει. Αλλά η δεύτερη, η λογική ισοδυναμία, $\overset{\mathrm{T}}{\equiv}$, δεν είναι ένας απλός σύνδεσμος, και εκφράζει μία σχέση μεταξύ δύο δηλώσεων που δεν είναι αληθο-συναρτησιακή. Δύο δηλώσεις είναι λογικά ισοδύναμες μόνο όταν είναι απολύτως αδύνατο γι' αυτές να έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Όμως, αν αυτές έχουν *πάντα* την ίδια τιμή αλήθειας, λογικά ισοδύναμες δηλώσεις μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη σε οποιοδήποτε αληθο-συναρτησιακό πλαίσιο χωρίς να αλλάξει η τιμή αλήθειας αυτού του πλαισίου. Αντίθετα, δύο δηλώσεις είναι υλικά ισοδύναμες αν αυτές απλά *τυχαίνει* να έχουν την ίδια τιμή αλήθειας, ακόμα και αν δεν υπάρχουν πραγματικές συνδέσεις μεταξύ τους. Δηλώσεις που είναι απλά υλικά ισοδύναμες σίγουρα δεν μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη!

Υπάρχουν δύο πασίγνωστες λογικές ισοδυναμίες (δηλαδή, λογικά αληθείς αμφι-υποθετικές δηλώσεις) μεγάλης σπουδαιότητας επειδή αυτές εκφράζουν τους αλληλοσυσχετισμούς μεταξύ σύζευξης και διάζευξης, και των αρνήσεών τους. Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά αυτές τις δύο λογικές ισοδυναμίες.

Πρώτον, τι θα χρησιμεύσει για να αρνηθούμε ότι μια διάζευξη είναι αληθής; Οποιαδήποτε διάζευξη $p \vee q$ δεν ισχυρίζεται τίποτα παραπάνω από ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο μέρη της είναι αληθές. Δεν μπορούμε να την αντικρούσουμε ισχυριζόμενοι ότι τουλάχιστον ένα μέρος της είναι ψευδές· (για να την αρνηθούμε) πρέπει να ισχυριστούμε ότι και τα δύο διαζευκτά είναι ψευδή. Επομένως, το να υποστηρίζουμε την *άρνηση της διάζευξης* $p \vee q$ είναι λογικά ισοδύναμο με το να υποστηρίζουμε τη *σύζευξη των αρνήσεων της* p *και της* q. Για να το δείξουμε αυτό σε πίνακα αλήθειας, μπορούμε να διατυπώσουμε την αμφι-υποθετική δήλωση $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$, να τη θέσουμε στην κορυφή της στήλης της, και να εξετάσουμε την τιμή αλήθειάς της κάτω από όλες τις περιστάσεις, δηλαδή, σε κάθε σειρά.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \cdot \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Φυσικά βλέπουμε ότι, οποιεσδήποτε κι αν είναι οι τιμές αλήθειας των p και q, αυτή η αμφι-υποθετική δήλωση πρέπει πάντα να είναι αληθής. Είναι μία ταυτολογία. Επειδή η δήλωση αυτής της υλικής ισοδυναμίας είναι μία ταυτολογία, συμπεραίνουμε ότι οι δύο συνιστώσες δηλώσεις είναι λογικά ισοδύναμες. Έχουμε αποδείξει ότι

$$\sim(p \vee q) \stackrel{\mathrm{T}}{\equiv} (\sim p \cdot \sim q).$$

Όμοια, υποστηρίζοντας τη σύζευξη των p και q ισχυριζόμαστε ότι και οι δύο είναι αληθείς, έτσι για να αντικρούσουμε αυτόν τον ισχυρισμό χρειάζεται απλά να ισχυριστούμε ότι τουλάχιστον μία είναι ψευδής. Έτσι, η υποστήριξη της άρνησης της σύζευξης $(p \cdot q)$ είναι λογικά ισοδύναμη με την υποστήριξη της διάζευξης των αρνήσεων της p και της q. Με σύμβολα, μπορεί να αποδειχθεί, με πίνακα αλήθειας, ότι είναι ταυτολογία η αμφι-υποθετική δήλωση $\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$. Ένας τέτοιος πίνακας αποδεικνύει ότι

$$\sim(p \cdot q) \stackrel{\mathrm{T}}{\equiv} (\sim p \vee \sim q).$$

Αυτές οι δύο ταυτολογικές αμφι-υποθετικές δηλώσεις, ή λογικές ισοδυναμίες, είναι γνωστές ως θεωρήματα De Morgan, επειδή αυτές διατυπώθηκαν τυπικά από τον μαθηματικό και λογικό Augustus De Morgan (1806-1871). Τα **θεωρήματα De Morgan** μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

α. Η άρνηση της διάζευξης δύο δηλώσεων είναι λογικά ισοδύναμη προς τη σύζευξη των αρνήσεων των δύο δηλώσεων˙

β. Η άρνηση της σύζευξης δύο δηλώσεων είναι λογικά ισοδύναμη προς τη διάζευξη των αρνήσεων των δύο δηλώσεων.

Αυτά τα θεωρήματα του De Morgan είναι εξαιρετικά χρήσιμα.

Μία άλλη σημαντική λογική ισοδυναμία είναι πολύ χρήσιμη όταν επιδιώκουμε να χειριστούμε αληθο-συναρτησιακούς συνδέσμους. Η υλική συνεπαγωγή, $\supset$, ορίστηκε (στην Ενότητα 3) ως ένας συντομευμένος τρόπος να πούμε $\sim(p \cdot \sim q)$. Δηλαδή, "p υλικά συνεπάγεται q" απλά σημαίνει, εξ ορισμού, ότι δεν ισχύει ότι η p είναι αληθής ενώ η q είναι ψευδής. Στον ορισμό αυτό βλέπουμε ότι η *ορίζουσα έκφραση*, $\sim(p \cdot \sim q)$, είναι η άρνηση μίας σύζευξης. Και με βάση το δεύτερο θεώρημα De Morgan γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε τέτοια άρνηση είναι λογικά ισοδύναμη προς τη διάζευξη των αρνήσεων των διαζευκτών˙δηλαδή, γνωρίζουμε ότι η $\sim(p \cdot \sim q)$ είναι λογικά ισοδύναμη προς την $(\sim p \vee \sim\sim q)$˙ και αυτή η έκφραση με τη σειρά της, εφαρμόζοντας την αρχή διπλής άρνησης, είναι λογικά ισοδύναμη προς την $\sim p \vee q$. Λογικά ισοδύναμες εκφράσεις σημαίνουν το ίδιο πράγμα, και επομένως η αρχική *ορίζουσα έκφραση* του πετάλου, η $\sim(p \cdot \sim q)$, μπορεί να αντικατασταθεί χωρίς αλλαγή σημασίας από την απλούστερη έκφραση $\sim p \vee q$. Αυτό μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο ορισμό της υλικής συνεπαγωγής: η $p \supset q$ είναι λογικά ισοδύναμη προς την $\sim p \vee q$. Με σύμβολα γράφουμε:

$$(p \supset q) \overset{\mathrm{T}}{\equiv} (\sim p \vee q)$$

Αυτός ο ορισμός της υλικής συνεπαγωγής χρησιμοποιείται ευρέως στη διατύπωση λογικών δηλώσεων και την ανάλυση επιχειρημάτων. Ο χειρισμός είναι συχνά ουσιώδους σημασίας, και ο χειρισμός είναι πιο αποτελεσματικός όταν οι δηλώσεις με τις οποίες εργαζόμαστε έχουν τον ίδιο κεντρικό σύνδεσμο. Με τον απλό ορισμό του πέταλου που έχουμε μόλις αποδείξει, $(p \supset q) \overset{\mathrm{T}}{\equiv} (\sim p \vee q)$, δηλώσεις στις οποίες ο σύνδεσμος είναι το πέταλο μπορούν να αντικατασταθούν βολικά από δηλώσεις στις οποίες ο σύνδεσμος είναι η σφήνα˙και όμοια, δηλώσεις σε διαζευκτική μορφή μπορούν εύκολα να αντικατασταθούν από δηλώσεις σε μορφή συνεπαγωγής. Όταν επιδιώκουμε να δώσουμε μία τυπική απόδειξη της εγκυρότητας παραγωγικών επιχειρημάτων, αντικαταστάσεις αυτού του είδους είναι πράγματι πολύ χρήσιμες.

Πριν προχωρήσουμε στις μεθόδους ελέγχου εγκυρότητας και ακυρότητας στην επόμενη ενότητα, αξίζει να σταματήσουμε για μία πιο προσεκτική εξέταση της σημασίας της υλικής συνεπαγωγής. Η συνεπαγωγή είναι κεντρική έννοια για τα επιχειρήματα αλλά, όπως σημειώσαμε νωρίτερα, η λέξη "συνεπάγεται" είναι εξαιρετικά διφορούμενη. Η *υλική* συνεπαγωγή, στην οποία βασιζόμαστε σ' αυτή την ανάλυση, αποτελεί μόνο μία σημασία αυτής της λέξης, αν και αυτή είναι πολύ σημαντική, φυσικά. Ο ορισμός της υλικής συνεπαγωγής που εξηγήσαμε μόλις πριν ξεκαθαρίζει ότι όταν λέμε, με αυτή τη σημαντική έννοια, ότι "p συνεπάγεται q", δεν λέμε τίποτε άλλο από ότι "ή η q είναι αληθής ή η p είναι ψευδής".

Το να υποστηρίζουμε ότι ισχύει η "αν-τότε" σχέση με αυτή τη σημασία έχει συνέπειες που μπορεί να φαίνονται παράδοξες. Διότι με αυτή τη σημασία μπορούμε να πούμε, *ορθά*, "Αν μία δήλωση είναι αληθής, τότε αυτή έπεται από εντελώς οποιαδήποτε δήλωση". Επειδή είναι αληθές ότι η γη είναι στρογγυλή, έπεται ότι "Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί συνεπάγεται ότι η γη είναι στρογγυλή". Αυτό φαίνεται να είναι πολύ παράξενο, ιδιαίτερα επειδή έπεται επίσης ότι "Το φεγγάρι δεν είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί συνεπάγεται ότι η γη είναι στρογγυλή". Η ακριβής μας κατανόηση της υλικής συνεπαγωγής μας δίνει επίσης το δικαίωμα να πούμε, *ορθά*, "Αν μία δήλωση είναι ψευδής, τότε συνεπάγεται εντελώς οποιαδήποτε δήλωση". Επειδή είναι ψευδές ότι το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί, έπεται ότι "Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί συνεπάγεται ότι η γη είναι στρογγυλή", και αυτό φαίνεται πιο παράξενο όταν συνειδητοποιήσουμε ότι έπεται επίσης ότι "Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί συνεπάγεται ότι η γη *δεν* είναι στρογγυλή."

Γιατί φαίνονται τόσο περίεργες αυτές οι αληθείς δηλώσεις; Επειδή αναγνωρίζουμε ότι το σχήμα της γης και το ότι το φεγγάρι είναι από τυρί είναι εντελώς άσχετα μεταξύ τους. Όπως εμείς συνήθως χρησιμοποιούμε τη λέξη "συνεπάγεται", μία δήλωση δεν μπορεί να συνεπάγεται κάποια άλλη δήλωση, ψευδή ή αληθή, με την οποία είναι εντελώς άσχετη. Αυτό ισχύει όταν το "συνεπάγεται" χρησιμοποιείται με τις περισσότερες καθημερινές σημασίες του. Και όμως αυτές οι "παράδοξες" δηλώσεις στην προηγούμενη παράγραφο είναι πράγματι αληθείς, και καθόλου προβληματικές στην πραγματικότητα, επειδή αυτές χρησιμοποιούν τη λέξη "συνεπάγεται" με τη λογική σημασία της "υλικής συνεπαγωγής". Έχουμε κάνει πολύ ξεκάθαρο το ακριβές νόημα της υλικής συνεπαγωγής˙κατανοούμε ότι το να λέμε ότι η p υλικά συνεπάγεται την q σημαίνει μόνο ότι ή η p είναι ψευδής ή η q είναι αληθής.

Αυτό που χρειάζεται να έχουμε κατά νου είναι ότι: *Το νόημα – το περιεχόμενο – είναι αυστηρά άσχετο με την υλική συνεπαγωγή. Η υλική συνεπαγωγή είναι μια συνάρτηση αλήθειας*. Μόνο η αλήθειας και το ψεύδος της ηγούμενης και της επόμενης, όχι το περιεχόμενό τους, έχουν σχέση εδώ. Δεν υπάρχει τίποτα παράδοξο στο να λέμε ότι οποιαδήποτε διάζευξη είναι αληθής η οποία περιέχει ένα αληθές διαζευκτό. Λοιπόν, όταν λέμε ότι "Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί (υλικά) συνεπάγεται ότι η γη είναι στρογγυλή", γνωρίζουμε ότι αυτή η δήλωση είναι λογικά ισοδύναμη με το να πούμε ότι "Η το φεγγάρι δεν είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί ή η γη είναι στρογγυλή" – μία διάζευξη που είναι σίγουρα αληθής. Και οποιαδήποτε διάζευξη που μπορούμε να αντιμετωπίσουμε στην οποία "Το φεγγάρι δεν είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί" είναι το πρώτο διαζευκτό θα είναι σίγουρα αληθής, ότι κι αν ισχυρίζεται το δεύτερο διαζευκτό.΄Ετσι, ναι, "Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί (υλικά) συνεπάγεται ότι η γη είναι τετράγωνη" επειδή αυτή είναι λογικά ισοδύναμη με την "Το φεγγάρι δεν είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί ή η γη είναι τετράγωνη". Μια ψευδής δήλωση υλικά συνεπάγεται οποαδήποτε εντελώς δήλωση. Μία αληθής δήλωση έπεται λογικά από οποιαδήποτε δήλωση.

Κάθε εμφάνιση του "αν-τότε" θα έπρεπε να τη θεωρούμε, όπως έχουμε πει, ως υλική συνεπαγωγή, και να την αναπαριστούμε με το πέταλο, $\supset$. Η δικαιολόγηση αυτής της πρακτικής, η λογική της σκοπιμότητα, έγκειται στο γεγονός ότι ακολουθώντας τη διατηρούμε την εγκυρότητα όλων των έγκυρων επιχειρημάτων του τύπου με τον οποίο ασχολούμαστε σε αυτό το μέρος των λογικών μελετών μας.΄Εχουν προταθεί άλλοι συμβολισμοί, επαρκείς για άλλους τύπους συνεπαγωγής, αλλά αυτοί εντάσσονται σε πιο προχωρημένα μέρη της λογικής, πέρα από το πεδίο εφαρμογής αυτού του κειμένου.

8.10 Οι Τρεις "Νόμοι της Σκέψης"

Μερικοί πρώιμοι στοχαστές, αφού είχαν ορίσει τη λογική ως "την επιστήμη των νόμων της σκέψης", συνέχισαν να ισχυρίζονται ότι υπάρχουν ακριβώς τρεις βασικοί νόμοι της σκέψης, νόμοι τόσο θεμελιώδεις που η υπακοή σε αυτούς είναι και αναγκαία και ικανή συνθήκη της ορθής σκέψης. Αυτοί οι τρεις νόμοι έχουν ονομαστεί παραδοσιακά:

- **Αρχή της ταυτότητας**. Αυτή η αρχή βεβαιώνει ότι *αν οποιαδήποτε δήλωση είναι αληθής, τότε είναι αληθής*. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μας μπορούμε να την αναδιατυπώσουμε λέγοντας ότι η αρχή της ταυτότητας βεβαιώνει ότι κάθε δήλωση της μορφής $p \supset p$ πρέπει να είναι αληθής, ότι κάθε τέτοια δήλωση αποτελεί ταυτολογία.

- **Αρχή της μη-αντίφασης**. Αυτή η αρχή βεβαιώνει ότι *καμιά δήλωση δεν μπορεί να είναι και αληθής και ψευδής*. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μας μπορούμε να την αναδιατυπώσουμε λέγοντας ότι η αρχή της μη-αντίφασης βεβαιώνει ότι κάθε δήλωση της μορφής $p \cdot {\sim} p$ πρέπει να είναι ψευδής, ότι κάθε τέτοια δήλωση είναι αυτο-αντιφατική.

- **Αρχή του αποκλειόμενου μέσου**. Αυτή η αρχή βεβαιώνει ότι *κάθε δήλωση είναι ή αληθής ή ψευδής*. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μας μπορούμε να την αναδιατυπώσουμε λέγοντας ότι η αρχή του αποκλειόμενου μέσου βεβαιώνει ότι κάθε δήλωση της μορφής $p \vee {\sim} p$ πρέπει να είναι αληθής, ότι κάθε τέτοια δήλωση αποτελεί ταυτολογία.

Είναι προφανές ότι αυτές οι τρεις αρχές είναι πράγματι αληθείς – λογικά αληθείς – αλλά ο ισχυρισμός ότι σ' αυτές αξίζει προνομιακό καθεστώς ως οι πιο θεμελιώδεις νόμοι της σκέψης είναι αμφίβολος. Η πρώτη (ταυτότητα) και η τρίτη (αποκλειόμενος μέσος) είναι ταυτολογίες, αλλά υπάρχουν πολλές άλλες ταυτολογικές μορφές των οποίων η αλήθεια είναι εξίσου σίγουρη. Η δεύτερη (μη-αντίφαση) δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση τη μοναδική αυτο-αντιφατική μορφή δήλωσης.

Δεν χρησιμοποιούμε αυτές τις αρχές για να κατασκευάσουμε πίνακες αλήθειας. Στις αρχικές στήλες κάθε σειράς ενός πίνακα θέτουμε ή ένα T ή ένα F, καθοδηγούμενοι από την αρχή του αποκλειόμενου μέσου. Πουθενά δεν θέτουμε και T και F, καθοδηγούμενοι από την αρχή της μη-αντίφασης. Έχοντας θέσει ένα T κάτω από ένα σύμβολο σε μία σειρά, καθοδηγούμενοι από την αρχή της ταυτότητας, όταν συναντούμε αυτό το σύμβολο σε άλλες στήλες αυτής της σειράς, θεωρούμε ότι ακόμη αντιστοιχίζεται σε T. Έτσι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τους τρεις νόμους της σκέψης ως αρχές που διέπουν την κατασκευή πινάκων αλήθειας.

Παρ' όλα αυτά, όσον αφορά ολόκληρο το σύστημα της παραγωγικής λογικής, αυτές οι τρεις αρχές δεν είναι περισσότερο σημαντικές ή αποδοτικές από πολλές άλλες. Πράγματι, υπάρχουν ταυτολογίες που είναι πιο αποδοτικές από αυτές για τους σκοπούς της παραγωγής, και με αυτή την έννοια πιο σημαντικές από αυτές τις τρεις, όπως τα θεωρήματα De Morgan, που είναι περισσότερο εφαρμόσιμα σε ένα σύστημα φυσικής παραγωγής από αυτές τις περισσότερο αφηρημένες αρχές. Παρ' όλα αυτά, αυτές οι αρχές είναι χρήσιμες για την καθοδήγηση της άτυπης επιχειρηματολογίας, στην οποία τα αξιωματικά παραγωγικά συστήματα σπάνια εφαρμόζονται. Μία πιο εκτεταμένη συζήτηση αυτού του θέματος βρίσκεται πέρα από το πεδίο αυτού του κειμένου.[10]

Μερικοί στοχαστές, πιστεύοντας οι ίδιοι ότι έχουν επινοήσει μία νέα και διαφορετική λογική, έχουν ισχυριστεί ότι αυτές οι τρεις αρχές δεν είναι αληθείς στην πραγματικότητα, και ότι η υπακοή σε αυτές υπήρξε αχρείαστα περιοριστική. Αλλά αυτές οι κριτικές έχουν βασιστεί σε παρεξηγήσεις.

Η αρχή της ταυτότητας έχει δεχθεί επιθέσεις με την αιτιολογία ότι τα πράγματα αλλάζουν, και αλλάζουν πάντα. Έτσι, π.χ., δηλώσεις που ήταν αληθείς για τις ΗΠΑ όταν αποτελούνταν από τις δεκατρείς αρχικές πολιτείες δεν είναι πάντα αληθείς για τις ΗΠΑ σήμερα, που αποτελούνται από πενήντα πολιτείες. Αλλά αυτό δεν υπονομεύει την αρχή της ταυτότητας. Η απόφανση "Υπάρχουν μόνο δεκατρείς πολιτείες στις ΗΠΑ" είναι ατελής, μια ελλειπτική διατύπωση της δήλωσης ότι "Υπήρχαν μόνο δεκατρείς πολιτείες στις ΗΠΑ *το 1790*" – και αυτή η δήλωση είναι το ίδιο αληθής σήμερα όσο ήταν το 1790. Όταν περιορίζουμε την προσοχή μας σε πλήρεις, μη-ελλειπτικές διατυπώσεις προτάσεων, βλέπουμε ότι η αλήθειά τους (ή το ψεύδος τους) δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Η αρχή της ταυτότητας είναι αληθής, και αυτή δεν συγκρούεται με την αναγνώρισή μας της διαρκούς αλλαγής.

Η αρχή της μη-αντίφασης έχει υποστεί επιθέσεις από Εγελιανούς και Μαρξιστές με την αιτιολογία ότι η γνήσια αντίφαση είναι διάχυτη παντού, ότι ο κόσμος είναι γεμάτος με την αναπόφευκτη σύγκρουση αντιφατικών δυνάμεων. Το ότι υπάρχουν συγκρουόμενες δυνάμεις στον πραγματικό κόσμο είναι αληθές, φυσικά – αλλά το να αποκαλούμε τις συγκρουόμενες δυνάμεις "αντιφατικές" αποτελεί μία χαλαρή και παραπλανητική χρήση αυτού του όρου. Οι εργατικές ενώσεις και οι ιδιώτες ιδιοκτήτες βιομηχανικών εγκαταστάσεων μπορεί πράγματι να βρεθούν σε σύγκρουση – αλλά ούτε ο ιδιοκτήτης ούτε η ένωση αποτελούν την "άρνηση" ή την "αντιφατική" του άλλου. Η αρχή της μη-αντίφασης, κατανοητή με την άμεση έννοια με την οποία την προορίζουν οι λογικοί,

[10]Για περαιτέρω συζήτηση αυτών των ζητημάτων, ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευθεί τα I. M. Copi and J. A. Gould, editors, *Readings on Logic*, 2nd edition (New York: Macmillan, 1972), part 2· and I. M. Copi and J. A. Gould, editors, *Contemporary Philosophical Logic* (New York: St. Martin's Press, 1978), part 8.

είναι αδιαμφισβήτητη και απόλυτα αληθής.

Η αρχή του αποκλειόμενου μέσου έχει γίνει αντικείμενο πολλής κριτικής, επειδή οδηγεί σε ένα "δίτιμο προσανατολισμό", ο οποίος συνεπάγεται ότι τα πράγματα στον κόσμο πρέπει να είναι "ή λευκά ή μαύρα", και ο οποίος εμποδίζει έτσι την πραγματοποίηση συμβιβασμού και λιγότερο-από-απόλυτων διαβαθμίσεων. Αυτή η αντίρρηση εγείρεται επίσης από παρεξήγηση. Φυσικά η δήλωση "Αυτό είναι μαύρο" δεν μπορεί να αληθεύει από κοινού με τη δήλωση "Αυτό είναι λευκό" – όπου "αυτό" αναφέρεται σε ακριβώς το ίδιο πράγμα. 'Ομως, αν και αυτές οι δύο δηλώσεις δεν μπορούν να είναι και οι δύο αληθείς, μπορούν να είναι και οι δύο ψευδείς. "Αυτό" μπορεί να μην είναι ούτε μαύρο ούτε λευκό˙οι δύο δηλώσεις είναι *αντίθετες*, όχι αντιφατικές. Η αντιφατική της δήλωσης "Αυτό είναι λευκό" είναι η δήλωση "Δεν ισχύει ότι αυτό είναι λευκό" και (αν το "λευκό" χρησιμοποιείται με ακριβώς το ίδιο νόημα και στις δύο αυτές δηλώσεις) μία από αυτές πρέπει να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Η αρχή του αποκλειόμενου μέσου είναι αναπόφευκτη.

Και οι τρεις αυτοί "νόμοι της σκέψης" είναι αποδεκτοί – εφαρμόζονται σε δηλώσεις που περιέχουν ξεκάθαρους, μη-ελλειπτικούς και ακριβείς όρους. Ο Πλάτων επικαλέστηκε ρητά την αρχή της μη-αντίφασης στο Βιβλίο IV της *Πολιτείας* (στους αριθμούς 436 και 439)˙ο Αριστοτέλης συζήτησε και τις τρεις αυτές αρχές στα Βιβλία IV και XI του έργου του *Μετά τα Φυσικά*. Σχετικά με την αρχή της μη-αντίφασης, ο Αριστοτέλης έγραψε: "Ότι το ίδιο κατηγόρημα δεν μπορεί τον ίδιο χρόνο να απαδοθεί και να μην αποδοθεί στο ίδιο υποκείμενο και με τον ίδιο τρόπο" είναι μια αρχή "που καθένας πρέπει να έχει ο οποίος κατανοεί ο,τιδήποτε είναι", και την οποία "καθένας πρέπει να έχει ήδη όταν έρχεται σε μία ειδική μελέτη." "Αυτή είναι", αυτός συμπέρανε, "η πιο σίγουρη από όλες τις αρχές." Οι "νόμοι της σκέψης" μπορεί να μην αξίζουν το τιμητικό καθεστώς που τους αποδίδεται από κάποιους φιλοσόφους, αλλά αυτοί είναι αναμφίβολα αληθείς.

Περίληψη κεφαλαίου

Σ' αυτό το κεφάλαιο έχουν παρουσιαστεί οι θεμελιώδεις έννοιες της σύγχρονης συμβολικής λογικής.

Στην Ενότητα 1, εξηγήσαμε τη γενική προσέγγιση της σύγχρονης συμβολικής λογικής και της ανάγκης της για μία τεχνητή συμβολική γλώσσα.

Στην Ενότητα 2, εισαγάγαμε και ορίσαμε τα σύμβολα για την άρνηση (περισπωμένη: $\sim$), και τους αληθο-συναρτησιακούς συνδέσμους της σύζευξης (τελεία: $\cdot$) και της διάζευξης (σφήνα: $\vee$). Επίσης εξηγήσαμε τα λογικά σημεία στίξης.

Στην Ενότητα 3, συζητήσαμε τις διαφορετικές έννοιες συνεπαγωγής και ορίσαμε τον αληθο-συναρτησιακό σύνδεσμο της υλικής συνεπαγωγής (πέταλο: $\supset$).

Στην Ενότητα 4, εξηγήσαμε την τυπική δομή επιχειρημάτων, ορίσαμε τις επιχειρηματολογικές μορφές και εξηγήσαμε άλλες έννοιες που είναι ουσιαστικές για την ανάλυση παραγωγικών επιχειρημάτων.

Στην Ενότητα 5, δώσαμε μία ακριβή περιγραφή έγκυρων και άκυρων επιχειρηματικών μορφών.

Στην Ενότητα 6, εξηγήσαμε τη μέθοδο αληθο-πινάκων για τον έλεγχο της εγκυρότητας επιχειρηματικών μορφών.

Στην Ενότητα 7, προσδιορίσαμε και περιγράψαμε μερικές πολύ συνηθισμένες επιχειρηματικές μορφές, μερικές έγκυρες και μερικές άκυρες.

Στην Ενότητα 8, εξηγήσαμε την τυπική δομή δηλώσεων και ορίσαμε όρους που παίζουν ουσιαστικό ρόλο για τον χειρισμό δηλωτικών μορφών. Εισαγάγαμε τις ταυτολογικές, αντιφατικές και ενδεχομενικές δηλωτικές μορφές, και ορίσαμε ένα τέταρτο αληθο-συναρτησιακό σύνδεσμο, την υλική ισοδυναμία (τριπαύλα: $\equiv$).

Στην Ενότητα 9, εισαγάγαμε και ορίσαμε μία ισχυρή νέα σχέση, τη λογική ισοδυναμία, χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\overset{\mathrm{T}}{\equiv}$. Εξηγήσαμε γιατί δηλώσεις που είναι λογικά ισοδύναμες μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη, ενώ δηλώσεις που είναι απλά υλικά ισοδύναμες δεν μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη. Εισαγάγαμε πολλές λογικές ισοδυναμίες που είναι ιδιαίτερα σημεντικές: τα θεωρήματα De Morgan, την αρχή διπλής άρνησης, και τον ορισμό της υλικής συνεπαγωγής.

Στην Ενότητα 10, συζητήσαμε μερικές λογικές ισοδυναμίες που έχουν θεωρηθεί από πολλούς στοχαστές ως θεμελιώδεις σε όλη τη συμπερασματολογία: την αρχή της ταυτότητας, την αρχή της μη-αντίφασης, και την αρχή του αποκλειόμενου μέσου.

Λύσεις σε επιλεγμένες ασκήσεις

Ενότητα 2 *Ασκήσεις*

Α. 1. Αληθής 5. Αληθής 10. Αληθής 15. Ψευδής 20. Αληθής 25. Ψευδής

Β. 1. Αληθής 5. Ψευδής 10. Αληθής 15. Αληθής 20. Ψευδής 25. Ψευδής

Γ. 1. $l \cdot \sim l$ 5. $\sim l \cdot \sim l$ 10. $\sim(E \vee J)$ 15. $\sim I \vee I$ 20. $(I \cdot E) \vee \sim(J \cdot S)$ 25. $(L \cdot E) \cdot (S \cdot J)$

Ενότητα 3 *Ασκήσεις*

Α. 1. Αληθής 5. Ψευδής 10. Αληθής 15. Ψευδής 20. Ψευδής

25. Αληθής

Β. 1. Αληθής 5. Ψευδής 10. Ψευδής 15. Αληθής 20. Ψευδής
25. Αληθής

Γ. 1. $A \supset (B \supset C)$ 5. $(A \cdot B) \supset C$ 10. $\sim[A \supset (B \cdot C)]$ 15. $B \supset (A \vee C)$
20. $B \vee C$ 25. $(\sim C \cdot \sim D) \supset (\sim B \vee A)$

Ενότητα 4 *Ασκήσεις*

Α. ε. Η 10 είναι η συγκεκριμένη μορφή του ε.
ξ. Η 3. έχει το ξ. ως περίπτωση αντικατάστασης και η 24. είναι η συγκεκριμένη μορφή του ξ.

Ενότητα 7 *Ασκήσεις*

Α.

1.

p	q	$p \supset q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \supset \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Έγκυρο

5.

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Άκυρο (δεύτερη σειρά)

10.

p	q	$p \cdot q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Έγκυρο

15.

p	q	r	$q \supset r$	$p \supset (q \supset r)$	$p \supset r$	$q \supset (p \supset r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \supset r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F	T

Άκυρο (τέταρτη και έκτη σειρά)

20.

p	q	r	s	$p{\cdot}q$	$p\supset q$	$(p{\cdot}q)\supset r$	$r\supset s$	$p\supset(r\supset s)$	$(p\supset q){\cdot}[(p{\cdot}q)\supset r]$	$p\supset s$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T

Έγκυρο

B.

1.

$(A\vee B)\supset(A{\cdot}B)$	έχει τη	$(p\vee q)\supset(p{\cdot}q)$
$A\vee B$	συγκεκριμένη	$p\vee q$
$\therefore A{\cdot}B$	μορφή	$\therefore p{\cdot}q$

p	q	$p\vee q$	$p{\cdot}q$	$(p\vee q)\supset(p{\cdot}q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

Έγκυρο

5.

$(I\vee J)\supset(I{\cdot}J)$	έχει τη	$(p\vee q)\supset(p{\cdot}q)$
$\sim(I\vee J)$	συγκεκριμένη	$\sim(p\vee q)$
$\therefore \sim(I{\cdot}J)$	μορφή	$\therefore \sim(p{\cdot}q)$

p	q	$p\vee q$	$p{\cdot}q$	$(p\vee q)\supset(p{\cdot}q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim(p{\cdot}q)$
T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Έγκυρο (*Δεν διαπράττεται πλάνη της άρνησης της ηγούμενης!*)

10. $I \supset (V \vee W)$ έχει τη $p \supset (q \vee r)$
$(V \cdot W) \supset \sim U$ συγκεκριμένη $(q \cdot r) \supset \sim p$
$\therefore \sim U$ μορφή $\therefore \sim p$

p	q	r	$q \vee r$	$p \supset (q \vee r)$	$q \cdot r$	$\sim p$	$(q \cdot r) \supset \sim p$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T

Άκυρο (δεύτερη και τρίτη σειρά)

Γ.

1. $A \supset (B \cdot C)$ έχει τη $p \supset (q \cdot r)$
$\sim B$ συγκεκριμένη $\sim q$
$\therefore \sim A$ μορφή $\therefore \sim p$

p	q	r	$q \cdot r$	$p \supset (q \cdot r)$	$\sim q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

Έγκυρο

5. $M \supset (N \supset O)$ έχει τη $p \supset (q \supset r)$
N συγκεκριμένη q
$\therefore O \supset M$ μορφή $\therefore r \supset p$

p	q	r	$q \supset r$	$p \supset (q \supset r)$	$r \supset p$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

Άκυρο (πέμπτη σειρά)

10.

$G \supset (I \cdot D)$	έχει τη	$p \supset (q \cdot r)$
$(I \vee D) \supset B$	συγκεκριμένη	$(q \vee r) \supset s$
$\therefore G \supset B$	μορφή	$\therefore p \supset s$

p	q	r	s	$q \cdot r$	$p \supset (q \cdot r)$	$q \vee r$	$(q \vee r) \supset s$	$p \supset s$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	T	T

Έγκυρο

Ενότητα 8 *Ασκήσεις*

Α. 1. Η γ. αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή της 1.

5. Η γ. έχει την 5. ως περίπτωση αντικατάστασης, και η θ. αποτελεί τη συγκεκριμένη μορφή της 5.

10. Η ε. έχει την 10 ως περίπτωση αντικατάστασης.

Β. 1.

p	q	$p\supset q$	$p\supset(p\supset q)$	$[p\supset(p\supset q)]\supset q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

Ενδεχομενική

5.

p	q	$\sim q$	$q\cdot\sim q$	$p\supset(q\cdot\sim q)$	$p\supset[p\supset(q\cdot\sim q)]$
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

Ενδεχομενική

10.

p	q	r	s	$p\supset q$	$r\supset s$	$(p\supset q)$ $\cdot(r\supset s)$	$q\vee s$	$[(p\supset q)\cdot(r\supset s)]$ $\cdot(q\vee s)$	$p\vee r$	$\{[(p\supset q)\cdot(r\supset s)]$ $\cdot(q\vee s)\}\supset(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T

Ενδεχομενική

Γ. 1.

p	q	$p\supset q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\supset\sim p$	$(p\supset q)\equiv(\sim q\supset\sim p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Ταυτολογία

5.

p	q	$p \vee q$	$p \cdot (p \vee q)$	$p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

Ταυτολογία

10.

p	q	$p \supset q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \equiv q$	$(p \supset q) \equiv [(p \vee q) \equiv q]$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T

Ενδεχομενική

15.

p	q	r	$q \vee r$	$p \cdot (q \vee r)$	$p \cdot q$	$p \cdot r$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot r)$	$[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$
T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Ταυτολογία

20.

p	q	$p \supset q$	$q \supset p$	$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$	$p \cdot q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \cdot \sim q$	$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$	$[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \equiv [(p \cdot q) \cdot (\sim p \cdot \sim q)]$
T	T	T	T	T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T

Ταυτολογία

Μετάφραση κεφαλαίου: Κ. Δημητρακόπουλος, Νοέμβριος 2023