a) ῞Ολοι οἱ ἄνθωποι εἶναι θνητοί
῾Ο Σωκράτης εἶναι ἄνθρωπος
∴ ῾Ο Σωκράτης εἶναι θνητός

1.	Fn	προκείμενη
2.	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	προκείμενη
3.	$\neg Gn$	᾿Αρνηση συμπεράσματος.
4.	$Fn \rightarrow Gn$	$\Delta \forall$. 2
		$\Delta \rightarrow$. 4

$\neg Fn$ $\quad$ Gn
* $\quad$ *

B) ῞Ολοι οἱ φυσικοί εἶναι ἐπιστήμονες
῾Ο Einstein εἶναι φυσικός πού δέν εἶναι ᾿Αμερικάνος
∴ ῎Οχι ὅλοι οἱ ἐπιστήμονες εἶναι ᾿Αμερικάνοι.

1.	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	Πρ.
2.	$Fn \wedge \neg Hn$.	Πρ.
3.	$\neg\neg \forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$	᾿Αρ. συμπ.
4.	Fn. $\neg Hn$.	Δ. Λ. 2.
5.	$\forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$	$\Delta \neg\neg$. 3.
6.	$Fn \rightarrow Gn$	$\Delta \forall$. 1
7.	$Gn \rightarrow Hn$	$\Delta \forall$. 5
8.		$\Delta \rightarrow$. 6.

$\neg Fn$ $\quad$ Gn
*

9.

$\neg Gn$ $\quad$ Hn $\quad$ Δ. →. 7.
* $\quad$ *

γ. Κάθε μεγάλος φυσικός είναι μεγάλος ἐπιστήμονας
Εἴτε ὁ Einstein εἴτε ὁ Planck εἶναι μεγ. φυσικός
∴ Εἴτε ὁ Einstein εἴτε ὁ Planck εἶναι μεγ. ἐπιστήμονας

1.	$\forall x(Fx \to Gx)$	πρ.
2.	$Fm \vee Fn$ ✓	πρ.
3.	$\neg(Gm \vee Gn)$ ✓	Ἀρν. συμπ.
4.	$\neg Gm$, $\neg Gn$	$\Delta\neg\vee$. 3
5.	Fm | Fn	$\Delta\vee$. 2
6.	$Fm \to Gm$ ✓	$\Delta\forall$. 1
7.	$\neg Fm$ * | Gm *	$\Delta\to$. 6
8.	$Fn \to Gn$	$\Delta\forall$. 1
9.	$\neg Fn$ * | Gn *	$\Delta\to$. 8

δ.

1.	$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	προκ.
2.	Fm	προκ.
3.	$\neg\neg Gm$	Ἀρν. συμπ.
4.	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx)$	$\Delta\neg\exists$. 1
5.	$\neg(Fm \wedge Gm)$	$\Delta\forall$. 4
6.	$\neg Fm$ * | $\neg Gm$ *	$\Delta\neg\wedge$. 5

ε. Είτε ο Γιώργος είτε ο Δημήτρης είναι φυσικός
Όλοι οι φυσικοί είναι δύστροποι.
∴ Κάποιος είναι δύστροπος

1.	$Fm \vee Fn$ ✓	Προϋπ.
2.	$\forall x\,(Fx \to Gx)$	Προϋπ.
3.	$\neg \exists x\, Gx$ ✓	Άρν. συμπ.
4.	$\forall x\, \neg Gx$	$\Delta \neg \exists$. 3
5.	$Fm \quad Fn$	$\Delta \vee$. 1
6.	$Fm \to Gm$ ✓	$\Delta \forall$. 2
7.	$\neg Gm$	$\Delta \forall$. 4
8.	$\neg Fm \quad Gm$ * *	$\Delta \to$. 6
9.	$Fn \to Gn$	$\Delta \forall$. 2
10.	$\neg Gn$	$\Delta \forall$. 4
11.	$\neg Fn \quad Gn$ * *	$\Delta \to$. 9

στ. Κάποιος είναι φυσικός
Όλοι οι φυσικοί είναι δύστροποι
Κάποιος είναι δύστροπος

1.	$\exists x\, Fx$	Προϋπ.
2.	$\forall x\,(Fx \to Gx)$	Προϋπ.
3.	$\neg \exists x\, Gx$	Άρν. συμπ.
4.	$\forall x\, \neg Gx$	$\Delta \neg \exists$
5.	Fa	$\Delta \exists$. 1
6.	$Fa \to Ga$	$\Delta \forall$. 2
7.	$\neg Ga$	$\Delta \forall$. 4
8.	$\neg Fa \quad Ga$ * *	$\Delta \to$. 6

3. "Όλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι θηλαστικά.
"Όλα τά θηλαστικά εἶναι σπονδυλωτά
∴ "Όλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι σπονδυλωτά

1.	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	προκ.
2.	$\forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$	προκ.
3.	$\neg\forall x\,(Fx \rightarrow Hx)$	Αρν. συμπεράσματος
4.	$\exists x\neg(Fx \rightarrow Hx)$	Δ ¬∀. 3
5.	$\neg(Fa \rightarrow Ha)$	Δ.∃. 4
6.	$Fa \rightarrow Ga$	Δ∀. 1
7.	$Ga \rightarrow Ha$	Δ∀. 2
8.	Fa, $\neg Ha$	Δ∧. 5.
9.	$\neg Fa$ * Ga	Δ→. 6.
10.	$\neg Ga$ * Ha *	Δ→. 7.

η.

1.	$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$ ✓	Προκ. (παρ: Μερικά σπονδυλωτά δέν εἶναι θηλασ
2.	$\forall x\,(Hx \rightarrow Gx)$	προκ. ("Όλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι θηλαστικά).
3.	$\neg\exists x\,(Fx \wedge \neg Hx)$ ✓	Αρν. συμπ: (Μερικά σπονδυλωτά δέν εἶναι ἄνθρωποι)
4.	$\forall x\neg(Fx \wedge \neg Hx)$	Δ¬∃. 3
5.	$Fa \wedge \neg Ga$	Δ∃. 1
6.	$Ha \rightarrow Ga$	Δ∀. 2
7.	$\neg(Fa \wedge \neg Ha)$	Δ∀. 4.
8.	Fa, $\neg Ga$	Δ∧. 5
9.	$\neg Ha$ Ga *	Δ→. 6
10.	$\neg Fa$ * $\neg\neg Ha$ *	Δ¬∧. 7

Θ. Ἐάν κάποιος μαθηματικός δέν εἶναι φιλόσοφος, τότε ὁ Γιώργος δέν εἶναι φιλόσοφος

Ὁ Γιώργος εἶναι φιλόσοφος

∴ Κάθε μαθηματικός εἶναι φιλόσοφος

1.	$\exists x (Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg Gn$	προϋπ.
2.	Gn	προϋπ.
3.	$\neg \forall x (Fx \rightarrow Gx)$	Ἀρ. συμπ.
4.	$\exists x \neg (Fx \rightarrow Gx)$	$\Delta \neg \forall$. 3
5.	$\sim \exists x (Fx \wedge \neg Gx)$ $\neg Gn$ *	$\Delta \rightarrow$. 1
6.	$\forall x \neg (Fx \wedge \neg Gx)$	$\Delta \sim \exists$. 5
7.	$\neg (Fa \rightarrow Ga)$	$\Delta \exists$. 4
8.	$\neg (Fa \wedge \neg Ga)$	$\Delta \forall$. 6
9.	Fa $\neg Ga$	$\Delta \neg \rightarrow$. 7
11.	$\neg Fa$ * $\neg\neg Ga$ *	$\Delta \neg \wedge$. 8

6.

ι. Μόνον ἐάν ὁ Owen εἶναι εὐτυχισμένος, τότε ἀγαπᾶ κάποιον.
Ἐάν ὁποιοσδήποτε ἀγαπᾶ τόν Nick, τότε τόν ἀγαπᾶ καί ὁ Owen.
Ὁ Mike ἀγαπᾶ τόν Nick.
∴ Ὁ Owen εἶναι εὐτυχισμένος

1.	$\exists x Lox \longrightarrow Ho$		προκ.
2.	$\exists x Lxn \longrightarrow Lon$		προκ.
3.	Lmn		προκ.
4.	$\neg Ho$		ἀρν. συμπ.
5.	$\neg \exists x Lox$	Ho	$\Delta \rightarrow .1$
		*	
6.	$\forall x \neg Lox$		$\Delta \neg\exists .5$
7.	$\neg \exists x Lxn$	Lon	$\Delta \rightarrow .2$
8.	$\forall x \neg Lxn$		$\Delta \neg\exists .7$
9.	$\neg Lmn$		$\Delta\forall.\ 8$
	*		
10.		$\neg Lon$	$\Delta\forall.\ 8.$
		*	

Παρέκβαση: Κανόνες μετακίνησης τῶν ποσοδεικτῶν

1. $(A \wedge \forall v B(\ldots v \ldots v)) \equiv \forall v (A \wedge B(\ldots v \ldots))$
2. $(A \wedge \exists v B(\ldots v \ldots v)) \equiv \exists v (A \wedge B(\ldots v \ldots))$

ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ μεταβλητή v δέν ἐμφανίζεται ἐλεύθερη στόν τύπο A. Ἐάν αὐτό συμβαίνει, τότε ἀντικαθιστοῦμε τήν v στό δεύτερο μέλος τῆς σύζευξης ἀπό κάποια ἄλλη μεταβλητή v' πού δέν ἐμφανίζεται ἐλεύθερα στόν A (τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὅτι ὁ τύπος $\forall v$ (ἤ $\exists v$) $B(\ldots v \ldots v)$ μετατρέπεται στόν ἰσοδύναμό του $\forall v'$ (ἤ $\exists v'$) $B(\ldots v' \ldots v')$
φυσικά, ἡ σειρά τῶν μελῶν τῆς σύζευξης δέν ἔχει σημασία καί μπορεῖ νά ἀντιστραφεῖ.
οἱ τύποι 1 καί 2 ἰσχύουν καί στήν περίπτωση πού τό σταθερό τῆς σύζευξης σε αὐτούς ἀντικατασταθεῖ ἀπό διάζευξη.

3. $(A \to \forall_v B(\ldots v \ldots v)) \equiv \forall_v (A \to B(\ldots v \ldots v))$
4. $(A \to \exists_v B(\ldots v \ldots v)) \equiv \exists_v (A \to B(\ldots v \ldots v))$
5. $(\forall_v B(\ldots v \ldots v) \to A) \equiv \exists_v (B(\ldots v \ldots v) \to A)$ } Προσοχή στήν
6. $(\exists_v B(\ldots v \ldots v) \to A) \equiv \forall_v (B(\ldots v \ldots v) \to A)$ } ἀλλαγή τῶν ποσοδεικτῶν

Ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ v δέν ἐμφανίζεται ἐλεύθερη στήν A. Στήν περίπτωση αὐτή ἀκολουθοῦμε τίς ὁδηγίες πού δόθηκαν γιά τούς κανόνες 1 καί 2. Φυσικά στούς ὑποθετικούς λόγους ἡ σειρά τῆς ὑπόθεσης καί τῆς ἀπόδοσης δέν μπορεῖ νά ἀντιστραφεῖ.
Ἀκολουθώντας τόν κανόνα 6 οἱ προκείμενες 1, 2 τοῦ παραδείγματος ι μποροῦν νά μετατραποῦν στίς ἰσοδύναμές της ὡς ἑξῆς:

$$(\exists_x Lox \to Ho) \equiv \forall_x (Lox \to Ho)$$
$$(\exists_x Lxn \to Lon) \equiv \forall_x (Lxn \to Lon).$$

Τό δενδροδιάγραμμα γιά τό ἐπιχείρημα ι θά ἔχει τότε ὡς ἑξῆς:

1.	$\forall_x (Lox \to Ho)$	προκ.
2.	$\forall_x (Lxn \to Lon)$	προκ.
3.	$Lmn.$	προκ.
4.	$\neg Ho$	Ἀρν. συμπεράσματος
5.	$Lon \to Ho$	$\Delta\forall$.1 μέ τη χρήση τοῦ n
6.	$Lmn \to Lon$	$\Delta\forall$.2 μέ τη χρήση τοῦ m.
7.	$\neg Lon$ Ho *	$\Delta\to$.5.
8.	$\neg Lmn$ * Lon *	$\Delta\to$.6.

1a «Όλοι αγαπούν κάποιον πού είναι μαθηματικός
Κανένας βλάκας δέν είναι μαθηματικός
Ο Σπύρος είναι βλάκας
Όχι όλοι είναι βλάκες.

1.	$\forall x \exists y (Fy \wedge Lxy)$	προκ.
2.	$\forall x (Gx \rightarrow \neg Fx)$	προκ.
3.	Gn	προκ.
4.	$\neg\neg \forall x\, Gn$	Άρνησ. συμ.
5.	$\forall x\, Gx$	Δ¬¬. 4
6.	$\exists y (Fy \wedge Lny)$	Δ∀. 1.
7.	$Fa \wedge Lna$	Δ∃. 6
8.	Fa	Δ∧. 7
	Lna	
9.	$Ga \rightarrow \neg Fa$	Δ∀. 2.
10	Ga	Δ∀. 5.
11.	$\neg Ga \quad \neg Fa$	Δ→. 9.
	× ×	

Προσέξτε ότι μετά τό βήμα 7, αφού πλέον έχουμε ένα νέο ατομικό σταθερό a θά ήταν νόμιμο νά συνεχίσουμε ώς έξης:

8.	$\exists y (Fy \wedge Lay)$	Δ∀1 μέ χρήση τού a.
9.	$Fb \wedge Lab$	Δ∃. 8
10.	$\exists y (Fy \wedge Lby)$	Δ∀1 μέ χρήση τού b.
11.	$Fc \wedge Lbc$	Δ∃ 10.
12.	$\exists y (Fy \wedge Lcy)$	Δ∀1 μέ χρήση τού c.

Άν καί αυτή ή κατασκευή είναι νόμιμη, τό δενδροδιάγραμμα δέν ολοκληρώνεται ποτέ καί επεκτείνεται στό άπειρο.
Συμπέρασμα: Σέ αντίθεση μέ τόν Προτασιακό λογισμό, στόν Κατηγορηματικό υπάρχουν δενδροδιαγράμματα στά οποία ή εφαρμογή

των κανόνων δέν ολοκληρώνεται πότε μέ αποτέλεσμα νά αναπτύσσονται επ' άπειρον χωρίς νά απαντούν στό ερώτημα τής εγκυρότητας τού επιχειρήματος.

6Β. Μερικοί άνθρωποι είναι αλαζόνες.
Κανένας δέν συμπαθεί έναν αλαζόνα.
∴ Κάποιοι άνθρωποι δέν συμπαθιούνται από κανένα.

1.	$\exists x Fx$	Προκ.
2.	$\forall x \forall y (Fy \rightarrow \neg Lxy)$	Προκ.
3.	$\neg \exists x \forall y \neg Lyx$	Άρν. συμπ
4.	$\forall x \neg \forall y \neg Lyx$	Δ¬∃. 3.
5.	Fa	Δ∃. 1
6.	$\neg \forall y \neg Lya$	Δ∀. 4
7.	$\exists y \neg\neg Lya$	Δ¬∀. 6.
8.	$\neg\neg Lba$	Δ∃. 7.
9.	$\forall y (Fy \rightarrow \neg Lby)$	Δ∀. 2.
10.	$Fa \rightarrow \neg Lba$	Δ∀. 9.
11.	$\sim Fa$ $\neg Lba$	Δ→. 10.
	* *	

i. γ

Ὁ καθένας θαυμάζει κάποιον φιλόσοφο.
Ὅποιον θαυμάζει κάποιος, τόν σέβεται.
∴ Ὁ καθένας σέβεται κάποιον φιλόσοφο

1.	$\forall x \exists y (Fy \land Lxy)$	προκ.
2.	$\forall x \forall y (Lxy \to Mxy)$	προκ.
3.	$\neg \forall x \exists y (Fy \land xMy)$	Ἀρν. συμπ.
4.	$\exists x \neg \exists y (Fy \land Mxy)$	Δ ¬∀. 3
5.	$\neg \exists y (Fy \land May)$	Δ ∃. 4.
6.	$\forall y \neg (Fy \land May)$	Δ ¬∃. 5
7.	$\exists y (Fy \land Lay)$	Δ ∀. 1
8.	$\forall y (Lay \to May)$	Δ ∀. 2.
9.	$Fb \land Lab$	Δ ∃. 7
10.	$\neg (Fb \land Mab)$	Δ ∀. 6.
11.	$Lab \to Mab$	Δ ∀. 8.
12.	Fb Lab	Δ ∧. 9.
13.	$\neg Fb$ * $\neg Mab$	Δ ¬∧. 10
14	$\neg Lab$ * Mab *.	Δ →. 11

6δ. "Όλα τά άλογα είναι θηλαστικά

∴ Τό κεφάλι ενός αλόγου είναι κεφάλι ενός θηλαστικού.

1. $\forall x (Fx \rightarrow Gx)$. προκ·

2. $\neg \forall x [\exists y (Fy \wedge Mxy) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Mxz)]^{\checkmark}$ Άρνσ. συμπερ·

3. $\exists x \neg [\exists y (Fy \wedge Mxy) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Mxz)]^{\checkmark}$ Δ ¬∀. 2.

4. $\neg [\exists y (Fy \wedge May) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Maz)]^{\checkmark}$ Δ ∃. 3.

5. a. $\exists y (Fy \wedge May)^{\checkmark}$ Δ ¬→. 4
   b. $\neg \exists z (Gz \wedge Maz)^{\checkmark}$

6. $\forall z \neg (Gz \wedge Maz)$ Δ ¬∃. 5b.

7. $Fb \wedge Mab$ Δ ∃. 5a.

8. Fb Δ ∧. 7
   Mab

9. $Fb \rightarrow Gb$ Δ ∀. 1

10. $\neg (Gb \wedge Mab)$. Δ ∀. 6.

11. $\cancel{\neg Fb}$ | Gb Δ →. 9

12. $\neg Gb$ * | $\neg Mab$ Δ ~∧. 10.

ι.ε Ὁ καθένας ἀγαπᾶ ὅποιον πού ἀγαπᾶ κάποιον
Ὁ Ρωμαίος ἀγαπᾶ τήν Ἰουλιέττα.
∴ Ὅλοι ἀγαποῦν τήν Ἰουλιέττα.

1.	$\forall x \forall y (\exists z Lyz \to Lxy)$	προϋπ.
2.	Lmn	προϋπ.
3.	$\neg \forall x Lxn$ ✓	Ἀρν. συμπ.
4.	$\exists x \neg Lxn$ ✓	Δ $\neg\forall$. 3.
5.	$\neg Lan$	Δ $\exists$. 4.
6.	$\forall y (\exists z Lyz \to Lay)$	Δ $\forall$. 1. μέ χρήση τοῦ a
7.	$\exists z Lnz \to Lan$ ✓	Δ $\forall$. 6. » » n.
8.	$\sim\exists z Lnz$ | Lan *	Δ $\to$. 7
9.	$\forall z \sim Lnz$	Δ $\neg\exists$ 8.
10	$\sim Lnm$	Δ $\forall$. 9 μέ χρήση τοῦ m.
11.	$\forall y (\exists z Lyz \to Lny)$	Δ $\forall$. 1 μέ χρήση τοῦ n.
12.	$\exists z Lmz \to Lnm$	Δ $\forall$. 11 μέ χρήση τοῦ m.
13.	$\sim\exists z Lmz$ | Lnm *	Δ $\to$. 12.
14.	$\forall z \neg Lmz$	Δ $\sim\exists$. 13.
15.	$\neg Lmn$ *	Δ $\forall$. 14

"Ένα δενδροδιάγραμμα μπορεί νά αναπτύσσεται έπ' άπειρον χωρίς αυτό νά δείχνει ότι τό υπό έξέταση επιχείρημα είναι άπειρο (βλ. Παράδ. ια). "Ομως σε απλές περιπτώσεις τό δένδρο ολοκληρώνεται (δηλαδή δέν υπάρχουν άλλοι κανόνες νά εφαρμοστούν) αφήνοντας ένα κλάδο ανοιχτό. Στίς περιπτώσεις αυτές ή μη εγκυρότητα τού επιχειρήματος έχει αποδειχθεί καί από τόν ανοιχτό κλάδο μπορούμε νά κατασκευάσουμε ένα μοντέλο πού κάνει τίς προκείμενες αληθείς καί τό συμπέρασμα ψευδές.

Παράδειγμα 1

1.	$\forall x (Fx \rightarrow Hx)$	προκ.
2.	$\forall x (Gx \rightarrow Hx)$	προκ.
3.	$\neg \forall x (Fx \rightarrow Gx)$	Άρνησ. συμπ.
4.	$\exists x \neg (Fx \rightarrow Gx)$	Δ ¬∃. 3.
5.	$\neg (Fa \rightarrow Ga)$	Δ ∃. 4
6.	Fa, $\neg Ga$	Δ ¬→. 5.
7.	$Fa \rightarrow Ha$	Δ ∀. 1
8.	$Ga \rightarrow Ha$	Δ ∀. 2.
9.	$\neg Fa$ * / Ha	Δ →. 7.
10.	$\neg Ga$ * / Ha	Δ →. 8.

Παράδειγμα 2.

1.	$\forall x\,(Fx \vee Gx)$	πρ.	
2.	$\forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$	πρ.	
3.	$\neg(\forall x Fx \vee \forall x Hx)\ \checkmark$	Άρν. συμπ.	
4a	$\neg \forall x Fx\ \checkmark$	$\Delta\ \neg\vee$: 3.	
4b	$\neg \forall x Hx\ \checkmark$		
5.	$\exists x \neg Fx\ \checkmark$	$\Delta\ \neg\forall$: 4a	
6.	$\exists x \neg Hx\ \checkmark$	$\Delta\ \neg\forall$: 4b	
7.	$\neg Fa$	$\Delta\ \exists$: 5	
8.	$\neg Hb$	$\Delta\ \exists$: 6	
9.	$Fa \vee Ga\ \checkmark$	$\Delta\ \forall$: 1	μέ χρήσ. τοῦ a
10	$Fb \vee Gb$.	$\Delta\ \forall$: 1	» b
11.	$Ga \rightarrow Ha\ \checkmark$	$\Delta\ \forall$: 2	μέ χρήση τοῦ a
12.	$Gb \rightarrow Hb\ \checkmark$	$\Delta\ \forall$: 2	» τοῦ b.

13	Fa *	Ga	$\Delta\ \vee$: 9.
14	$\neg Ga$ *	Ha.	$\Delta \rightarrow$: 11
15.	$\neg Gb$	Hb *	$\Delta \rightarrow$: 12.
16.	Fb	Gb *	$\Delta\ \vee$: 10.