Κανόνες κατασκευής δενδροδιαγραμμάτων

<u>Δ &</u>

A & B
|
A
B

<u>Δ∨</u>

A ∨ B
/ \
A B

<u>Δ →</u>

A → B
/ \
~ A B

<u>Δ ↔</u>

A ↔ B
/ \
A ~ A
B ~ B

<u>Δ ~ &</u>

~ (A &B)
/ \
~ A ~ B

<u>Δ ~ ∨</u>

~ (A∨B)
|
~A
~ B

<u>Δ ~ →</u>

~ (A → B)
|
A
~ B

<u>Δ ~ ↔</u>

~ (A ↔B)
/ \
A B
~ B ~A

<u>Δ ~ ~</u>

~ ~A

A

Παρατηρήσεις

(1) Οι κανόνες (που δηλώνονται με τη χρήση διαφορετικών χρωμάτων) εξαντλούν όλες τις περιπτώσεις των μη στοιχειωδών προτασιακών τύπων (οι μη στοιχειώδεις προτασιακοί τύποι – **ΠΤ**– είναι οι προτάσεις της συμβολικής μας γλώσσας οι οποίες δεν είναι ούτε ατομικές – p, q, r – ούτε αρνήσεις ατομικών). Κάθε μη στοιχειώδης ΠΤ είναι μία σύζευξη ή μία διάζευξη ή μία υλική συνεπαγωγή ή μια διπλή υλική συνεπαγωγή ή μία άρνηση των παραπάνω ή τέλος μία άρνηση μιας άλλης άρνησης.

(2) Όλοι οι ΠΤ που βρίσκονται στον κορμό ενός δενδροδιαγράμματος θεωρούνται υπόρρητα αληθείς (δηλαδή δεν σημειώνουμε πουθενά στο δένδρο ότι είναι αληθείς, αλλά το εννοούμε). Η ανάπτυξη του δένδρου αποτυπώνει τις συνέπειες αυτής της παραδοχής κατά τρόπο που να καθιστά όλους τους ΠΤ που συναντώνται στους «κόμβους» του δένδρου επίσης (υπόρρητα) αληθείς. Για παράδειγμα, εάν ο τύπος ~ (A → B) είναι αληθής (και άρα ο A → B ψευδής), τότε οι τύποι A και ~ B είναι επίσης αληθείς, αφού για να είναι ο A → B ψευδής θα πρέπει ο A να είναι αληθής και ο B ψευδής (και άρα ο ~ B αληθής). Για να είναι επίσης ο ~ (A ↔ B) αληθής θα πρέπει είτε οι τύποι A και ~ B να είναι και οι δύο αληθείς (και άρα ο B

ψευδής) είτε να ισχύει το αντίστροφο (δηλαδή να είναι και ο B και ο ~ A αληθής)

(3) Από τα παραπάνω παραδείγματα, αλλά και από μία γρήγορη ματιά στους κανόνες βλέπουμε ότι οι κανόνες κατασκευής δεδροδιαγραμμάτων χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: σε κανόνες που συνεχίζουν γραμμικά το δένδρο (οι κανόνες Δ &, $\Delta \sim \vee$, $\Delta\sim\rightarrow$ και $\Delta \sim \sim$) και σε κανόνες που επιβάλλουν τη δημιουργία διακλαδώσεων (οι κανόνες $\Delta\vee$, $\Delta \rightarrow$, $\Delta \leftrightarrow$, $\Delta \sim \leftrightarrow$ και $\Delta \sim$ &).

(4) Για να ελέγξουμε την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος, σχηματίζουμε τον κορμό του αντεστραμμένου δένδρου μας γράφοντας τις προκείμενες και την **άρνηση** του συμπεράσματος.

(5) Διαλέγουμε κάποιον από τους μη στοιχειώδεις ΠΤ του κορμού και τον αναλύουμε εφαρμόζοντας έναν από τους κανόνες μας. **Είναι καλύτερο, αν και όχι δεσμευτικό, να επιλέξουμε πρώτα τους γραμμικούς κανόνες γιατί αυτό θα κάνει το δενδροδιάγραμμα απλούστερο.** Σημειώνουμε τον ΠΤ που αναλύσαμε έτσι ώστε να μην τον αναλύσουμε ξανά.

(6) Συνεχίζουμε να αναλύουμε όλους του μη στοιχειώδεις ΠΤ (είτε αυτούς που βρίσκονται στον κορμό του δένδρου είτε όσους προκύπτουν ενδιάμεσα από τις προηγούμενες εφαρμογές των κανόνων (η σειρά δεν είναι δεσμευτική) προσέχοντας τα εξής: (α) **Εάν σε έναν κλάδο εμφανίζεται ένας ΠΤ και η άρνησή του, τότε ο κλάδος «κλείνει» και σταματάμε να ασχολούμαστε με αυτόν, με άλλα λόγια σταματάμε να αναλύουμε τους περαιτέρω αναλύσιμους ΠΤ που εμφανίζονται σε αυτόν.** (β) **Όταν αναλύουμε έναν ΠΤ καταγράφουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης (γραμμικά ή με διακλάδωση κατά περίπτωση) σε κάθε ανοικτό κλάδο που βρίσκεται κάτω από τον αναλυόμενο τύπο.**

(7) Συνεχίζουμε μέχρι του σημείου που είτε όλοι οι κλάδοι κλείνουν είτε όλοι οι ΠΤ σε ανοικτούς κλάδους δεν είναι περαιτέρω αναλύσιμοι (είναι δηλαδή στοιχειώδεις ΠΤ – ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις ατομικών προτάσεων).

(8) **Εάν όλοι οι κλάδοι «κλείνουν», το επιχείρημα είναι έγκυρο. Εάν έστω και ένας κλάδος μένει ανοικτός, το επιχείρημα είναι άκυρο.**

(9) Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένας ΠΤ είναι ταυτολογικός. Στην περίπτωση αυτή σχηματίζουμε τον κορμό του δένδρου παίρνοντας μόνο την άρνηση του ΠΤ που θέλουμε να δούμε εάν είναι ταυτολογία. Στη συνέχεια αναλύουμε την άρνηση του τύπου μας εφαρμόζοντας έναν από τους κανόνες και συνεχίζουμε με την ανάλυση των τύπων που προκύπτουν διαδοχικά μέχρι που είτε όλοι οι κλάδοι «κλείνουν» (και τότε

η άρνηση του ΠΤ είναι αντίφαση και συνεπώς ο αρχικός μας τύπος είναι ταυτολογία) είτε κάθε δυνατότητα ανάλυσης έχει εξαντληθεί και τουλάχιστον ένας κλάδος παραμένει ανοικτός (και τότε ο αρχικός μας τύπος δεν είναι ταυτολογία)

Παραδείγματα

(Τα παραδείγματα 1 και 2 έχουν ληφθεί από τις σημειώσεις του Αριστείδη Αραγεώργη, Εισαγωγή στη Λογική, σσ 67-8).

Παράδειγμα 1

1.			$K \to N$		
2.			$\sim (L \vee N)$		
3.			$(K \,\&\, M) \to L$		
4.			$\sim \sim M$		
5.			M		4, $\Delta \sim\sim$
6.			$\sim L$ $\sim N$		2, $\Delta \sim \vee$
7.	$\sim (K \,\&\, M)$			L ×	3, $\Delta \to$
8.	$\sim K$		$\sim M$ ×		7, $\Delta \sim \&$
9.	$\sim K$	N ×			1, $\Delta \to$

Σχόλιο: Στο παραπάνω παράδειγμα ο κορμός του δένδρου αποτελείται από τις προκείμενες στα στάδια 1, 2, 3 και την άρνηση του συμπεράσματος στο στάδιο 4 (το συμπέρασμα είναι το $\sim M$ και η άρνηση του συμπεράσματος προφανώς το $\sim \sim M$). Αρχικά εφαρμόζουμε τους «γραμμικούς» κανόνες $\Delta\sim \sim$ και $\Delta \sim \vee$ στις προκείμενες στα στάδια 4 και 2 αντιστοίχως για να πάρουμε το M στο στάδιο 5 και τους τύπους $\sim L$ και $\sim N$ στο στάδιο 6 (αφού ο $\sim \sim M$ θεωρείται αληθής ο M είναι επίσης αληθής, και αφού ο $\sim (L \vee N)$ είναι αληθής, οι $\sim L$ και $\sim N$ είναι επίσης αληθείς). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον $\Delta \to$ στον $(K \,\&\, M) \to L$. Η εφαρμογή αυτού του κανόνα δημιουργεί διακλάδωση, αφού ένας υποθετικός λόγος είναι αληθής **όταν είτε η άρνηση της υποθέσεως είναι αληθής (και άρα η υπόθεση ψευδής) είτε η απόδοση είναι αληθής** Ο κλάδος αποτυπώνει τους δύο αυτούς τρόπους οι οποίοι εξαντλούν τις δυνατότητες να είναι ένας υπ. λόγος αληθής. Το να θεωρήσουμε όμως ότι ο υπ. λόγος είναι αληθής δυνάμει της αλήθειας του L αντιφάσκει με την αλήθεια του ~ L (που, θυμηθείτε, έχει συναχθεί σε προηγούμενο βήμα από την αλήθεια του ~ (L ∨ N)). Πρακτικά. Αυτό σημαίνει ότι ο κλάδος που περιέχει αυτό το αντιφατικό ζεύγος «κλείνει» στο στάδιο 7. Στο σημείο αυτό δύο μόνο περαιτέρω αναλύσιμοι ΠΤ δεν έχουν ακόμη αναλυθεί, ο τύπος K → N στο στάδιο 1 και ο τύπος ~ (K & M) στο στάδιο 7. Επιλέγουμε να αναλύσουμε πρώτα τον δεύτερο (η σειρά δεν μας δεσμεύει) εφαρμόζοντας στο 7 τον κανόνα Δ ~ &. Αυτή η εφαρμογή με τη σειρά της δημιουργεί διακλάδωση. Ο ~ (K & M) μπορεί να είναι αληθής δυνάμει είτε του ψεύδους του M (άρα της αλήθειας του ~ M) είτε του ψεύδους του K (άρα της αλήθειας του ~K). Δημιουργούμε επομένως διακλάδωση κάτω από τον ~ (K & M) γράφοντας διαγώνια δεξιά και αριστερά ~ K και ~ M αντιστοίχως (θυμηθείτε ότι υπόρρητα όλοι οι ΠΤ σε ένα δένδρο εκλαμβάνονται ως αληθείς και γι' αυτό αφού έχουμε γράψει παραπάνω τον ~ (K & M) οφείλουμε να συνεχίσουμε γράφοντας διαγώνια τους ~ K και ~ M). Αμέσως μετά διαπιστώνουμε ότι ο κλάδος που αποτελείται από τους τύπους ~ M, ~(K & M), ~ N, ~ L, M (μαζί με τον κορμό του δένδρου) κλείνει, αλλά παραμένει ανοικτός ο κλάδος που τερματίζει στο 8 αριστερά με τον ~ K. Μένει τώρα να αναλυθεί ο K → N, του οποίου ο κανόνας δημιουργεί νέα διακλάδωση. **Η διακλάδωση αυτή οφείλει να επισυναφτεί σε κάθε παλαιό ανοικτό κλάδο που βρίσκεται κάτω από τον** K → N , αλλά στην περίπτωσή μας ο μόνος ανοικτός κλάδος είναι αυτός που τερματίζει με τον ~ K στο βήμα 8. Επομένως στο στάδιο 9 δημιουργούμε νέα διακλάδωση αναλύοντας τον K → N. Ο κλάδος τώρα που αποτελείται από τους N, ~ K, ~ (K & M), ~ N, ~ L, M (μαζί με τον κορμό του δένδρου) κλείνει, όμως αυτός που αποτελείται από τους ~ K, ~ K, ~ (K & M), ~ N, ~ L, M (μαζί με τον κορμό του δένδρου) παραμένει ανοικτός (αφού δεν υπάρχει κανένα ζεύγος αντιφατικών προτάσεων σε αυτόν). Στο σημείο αυτό διαπιστώνουμε ότι όλοι οι μη στοιχειώδεις ΠΤ έχουν ήδη αναλυθεί και δε μένει τίποτα άλλο να κάνουμε. Το επιχείρημα επομένως που εξετάσαμε δεν είναι έγκυρο. Μπορούμε τώρα εύκολα να συμπεράνουμε ότι τα μοντέλα που καθιστούν όλους του προτασιακούς τύπους στους κόμβους τους ανοικτού κλάδου αληθείς είναι όσα αποδίδουν στις μεταβλητές K, N και L την τιμή *ΨΕΥΔΕΣ* (και άρα αποδίδουν στους τύπους ~ N, ~ L, ~ K και ~ (K & M) την τιμή *ΑΛΗΘΕΣ*), ενώ αποδίδουν στη μεταβλητή M την τιμή *ΑΛΗΘΕΣ*. Πρόκειται άρα για μοντέλα που καθιστούν τις προκείμενες του επιχειρήματος αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Τα μοντέλα αυτά αποτελούν αντιπαραδείγματα στην εγκυρότητα του επιχειρήματος.

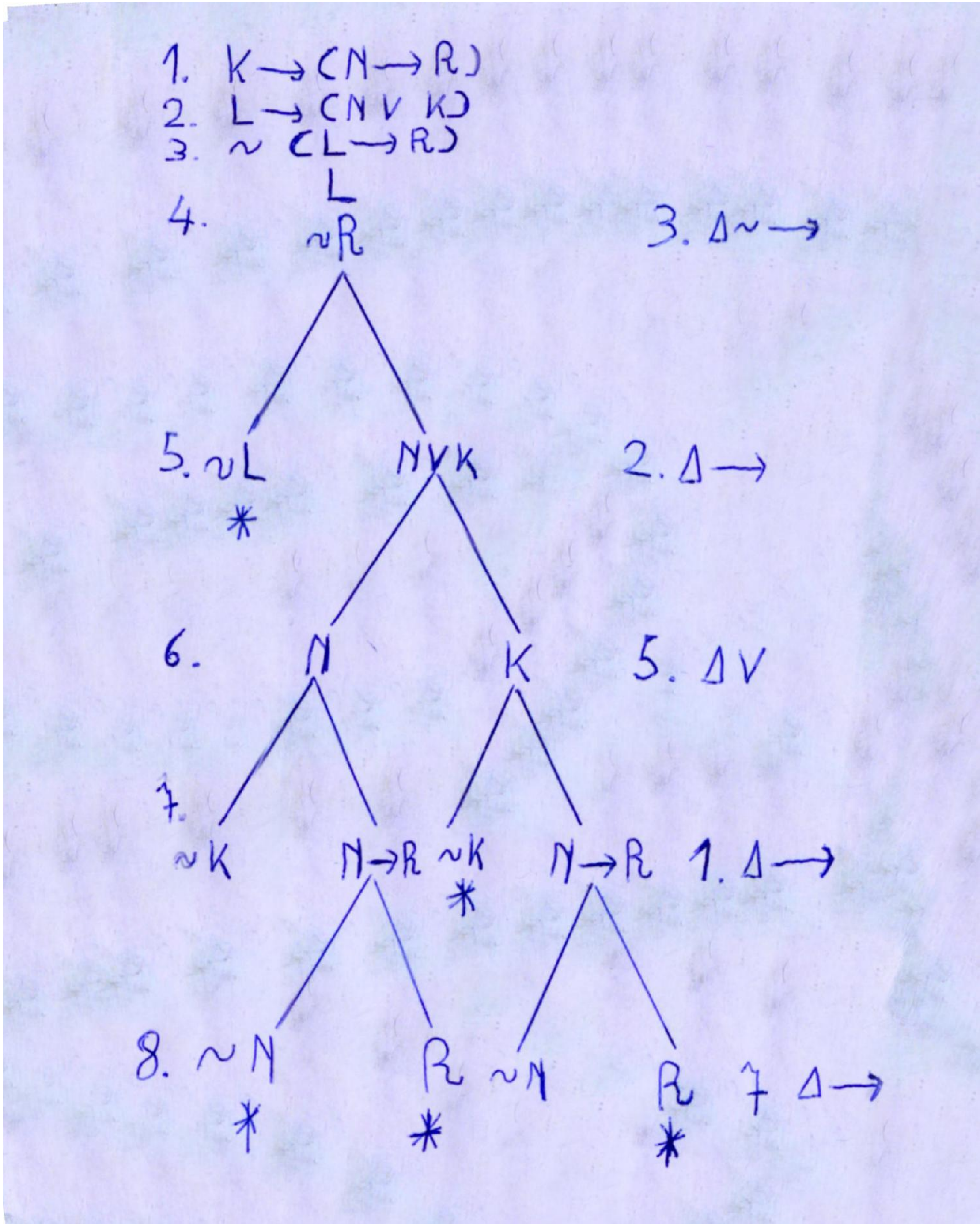
Παράδειγμα 2

1.	$A \rightarrow (B \& C)$				
2.	$E \rightarrow \sim G$				
3.	$G \vee (\sim B \vee \sim C)$				
4.	$\sim\sim(A \& E)$				
5.	$A \& E$				4, $\Delta\sim\sim$
6.	A E				5, $\Delta \&$
7.	$\sim A$ ×	$B \& C$			1, $\Delta \rightarrow$
8.		B C			7, $\Delta \&$
9.		$\sim E$ ×	$\sim G$		2, $\Delta \rightarrow$
10.			G ×	$\sim B \vee \sim C$	3, $\Delta \vee$
11.			$\sim B$ ×	$\sim C$ ×	10, $\Delta \vee$

Σχόλιο: No comment. Να μελετήσετε το παράδειγμα ξανά και ξανά.

Παράδειγμα 3

Το ακόλουθο παράδειγμα δεν αποτυπώνεται εύκολα με πίνακες στον Word και για τον λόγο αυτό το παραθέτω σκαναρισμένο.



Σχόλιο: Οι προκείμενες είναι οι ΠΤ στα στάδια 1 και η 2, ενώ η άρνηση του συμπεράσματος είναι ο τύπος στο στάδιο 3. Το παράδειγμα αυτό είναι σημαντικό για δύο λόγους: (α) Στο παράδειγμα αυτό εφαρμόζεται ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο **όταν αναλύουμε έναν ΠΤ καταγράφουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης (γραμμικά ή με διακλάδωση κατά περίπτωση) σε κάθε ανοικτό κλάδο που βρίσκεται κάτω από τον αναλυόμενο τύπο.** Πράγματι, αφού έχουμε ολοκληρώσει το στάδιο 6, αποφασίζουμε να προχωρήσουμε εφαρμόζοντας τον κανόνα $\Delta \rightarrow$ στον $K \rightarrow (N \rightarrow R)$ στο στάδιο 1 που δεν έχει μέχρι στιγμής αναλυθεί. Στο στάδιο 6 δύο κλάδοι είναι ακόμη ανοικτοί (ο κλάδος που αποτελείται από τους N, $N \vee K$, $\sim R$, L μαζί με τον κορμό του δένδρου και ο κλάδος που αποτελείται από τους K, $N \vee K$, $\sim R$, L μαζί με τον κορμό του δένδρου). Αλλά ο αναλυόμενος τύπος $K \rightarrow (N \rightarrow R)$ συναντάται πάνω και από τους δύο αυτούς κλάδους (με άλλα λόγια αποτελεί κοινό τους μέρος). Οφείλουμε λοιπόν να επισυνάψουμε το αποτέλεσμα της ανάλυσης του και στους δύο ανοικτούς κλάδους (στον ένα που τερματίζει με τον N στο στάδιο 6 και στον άλλο που τερματίζει με τον K στο ίδιο στάδιο). Επειδή όμως η εφαρμογή του κανόνα $\Delta \rightarrow$ δημιουργεί διακλάδωση οφείλουμε να επισυνάψουμε τη διακλάδωση τόσο κάτω από τον N όσο και κάτω από τον K (και αυτός είναι ο λόγος γιατί το διάγραμμα δεν παρουσιάζεται εύκολα στον Word) και να ολοκληρώσουμε το στάδιο 7 πολλαπλασιάζοντας τους κλάδους. (β) Το δενδροδιάγραμμα στο στάδιο 7 δεν είναι ολοκληρωμένο γιατί ο μη στοιχειώδης ΠΤ $N \rightarrow R$ δεν έχει ακόμη αναλυθεί. Μπορεί όμως να είμαστε σίγουροι ότι ο ακριανός αριστερός κλάδος που τερματίζει με τον $\sim K$ δεν μπορεί να κλείσει αφού δεν υπάρχει κανένας μη αναλυμένος ΠΤ που να βρίσκεται σε αυτόν (Έλεγξε το: Ο κλάδος αποτελείται από τους ΠΤ $\sim K$, N, $N \vee K$, $\sim R$, L μαζί με τον κορμό του δένδρου, και όλοι οι μη στοιχειώδεις ΠΤ σε αυτή τη σειρά έχουν ήδη αναλυθεί στα στάδια που έχουν προηγηθεί). Επομένως μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο. Μπορούμε λοιπόν να τεμπελιάσουμε και να μη προχωρήσουμε, εάν θέλουμε, στο στάδιο 8.

Παράδειγμα 4

Το παράδειγμα από την άσκηση 7 του φυλλαδίου με τις ασκήσεις.

Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των δενδροδιαγραμμάτων προκειμένου να αποφασίσετε εάν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής.

$$\vDash \sim[\sim(p \,\&\, q) \vee \sim(p \,\&\, r)] \vee \sim[p \vee (q \,\&\, r)]$$

Σχόλιο: Το σύμβολο $\vDash$ δηλώνει τη σχέση της σημασιολογικής συνέπειας. Έτσι η έκφραση *Α, Β* $\vDash$ *Γ* δηλώνει ότι από τις προτάσεις Α και Β λογικά έπεται η πρόταση Γ (δηλαδή ότι το επιχείρημα από τις προκείμενες Α και Β στο συμπέρασμα Γ είναι έγκυρο). Όταν δεν υπάρχουν προτασιακά σύμβολα αριστερά του $\vDash$ (πχ στην έκφραση $\vDash \Gamma$), αυτό δηλώνει ότι η πρόταση στα δεξιά του είναι λογική αλήθεια, δηλαδή ταυτολογία. Η άσκηση λοιπό μας ζητά να αποφασίσουμε εάν ο τύπος

$\sim [\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)] \vee \sim [p \vee (q \,\&\, r)]$ είναι ταυτολογία. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των δενδροδιαγραμμάτων θα πρέπει να πάρουμε την **άρνηση** αυτού του τύπου που θα αποτελέσει και τον κορμό του δένδρου μας. Η άρνηση του τύπου είναι η εξής:

(α) $\sim \{\sim [\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)] \vee \sim [p \vee (q \,\&\, r)]\}$

Στη συνέχεια θα πρέπει να αποφασίσουμε ποιον κανόνα θα πρέπει να εφαρμόσουμε πρώτα. Αυτό φυσικά εξαρτάται από τι είδους πρόταση είναι ο αρχικός μας τύπος $\sim [\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)] \vee \sim [p \vee (q \,\&\, r)]$ (είναι σύζευξη, διάζευξη, απλή συνεπαγωγή, διπλή συνεπαγωγή, υποθετικός λόγος ή άρνηση;). Αυτό εξαρτάται από το ποιο είναι το κεντρικό λογικό σταθερό. Στην περίπτωση του τύπου μας έχουμε να κάνουμε με διάζευξη (μην μπερδευτείτε από το σύμβολο της άρνησης στην αρχή – η άσκηση είναι έτσι σχεδιασμένη ώστε να σας μπερδέψει. Το κεντρικό λογικό σταθερό δηλώνεται με κίτρινο χρώμα). Όταν επομένως αρνηθούμε όλο τον τύπο όπως κάνουμε με την πρόταση (α) αρνούμαστε μία διάζευξη. Αυτό σημαίνει ότι ο μόνος κατάλληλος κανόνας που μπορούμε να εφαρμόσουμε είναι ο $\Delta \sim \vee$. Η εφαρμογή αυτού του κανόνα έχει, όπως ξέρουμε «γραμμικό» αποτέλεσμα. Από την άρνηση της διάζευξης λαμβάνουμε γραμμικά τις αρνήσεις των μελών της. Τα μέλη της διάζευξης μας είναι το $\sim [\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)]$ και το $\sim [p \vee (q \,\&\, r)]$. Επομένως, με την εφαρμογή του $\Delta \sim \vee$ λαμβάνουμε τους τύπους $\sim\sim [\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)]$ και $\sim\sim [p \vee (q \,\&\, r)]$. Τώρα από τους δύο αυτούς τύπους με την εφαρμογή του κανόνα της διπλής άρνησης

$\Delta \sim\sim$ λαμβάνουμε τους τύπους $[\sim (p \,\&\, q) \vee \sim (p \,\&\, r)]$ και

$[p \vee (q \,\&\, r)]$. Μέχρι το σημείο αυτό το δένδρο μας είναι γραμμικό. Όμως οι τελευταίοι τύποι είναι διαζεύξεις και για να αναλυθούμε πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα $\Delta \vee$ που δημιουργεί διακλαδώσεις. Μπορείτε να ολοκληρώσετε την κατασκευή του δένδρου δείχνοντας ότι κάποιοι κλάδοι του δεν κλείνουν; (και άρα ότι η άρνηση του τύπου μας δεν είναι αντίφαση και επομένως ότι ο τύπος είναι δεν ταυτολογία). Ελέγξτε την τιμή αληθείας της (α) για p = *Ψευδές*, q = *Αληθές* και r =*Αληθές*.