

3η ενότητα

Η δομή των Στοιχείων: Πρώτες αρχές, θεωρήματα και προβλήματα (75.26-81.23)

Πρῶτον μὲν οὖν, ἅπερ ἔφην, ἔδει διαστείλασθαι [76] τάς τε ἀρχὰς καὶ τὰ ἐπόμενα ταῖς ἀρχαῖς, ὃ δὴ καὶ ποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καθ' ἕκαστον ὡς εἰπεῖν βιβλίον καὶ πρὸ πάσης τῆς πραγματείας τὰς κοινὰς τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀρχὰς ἐκτιθέμενος. ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἰς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα. διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων καὶ οὐκ ἔστιν ταὐτὸ ἀξίωμα καὶ αἶτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥς πού φησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης, ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾗ καὶ καθ' αὐτὸ πιστὸν τὸ παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον τὸ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσις ἐστὶ. τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοῖον κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως, ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδείξεως χωρὶς. ὅταν δὲ αὖ καὶ ἄγνωστον ᾗ τὸ λεγόμενον καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα, φησὶν, αἶτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. δηλοῦσι δὲ οἱ περὶ τινος τῶν αἰτημάτων καταπραγματεύεσθαι σπουδάσαντες, ὡς ὑπὸ μηδενὸς αὐτόθεν συγχωρεῖσθαι δυναμένου. καὶ κατὰ μὲν τὴν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοῦτον [77] διώρισται τὸν τρόπον ἀξίωμα καὶ αἶτημα καὶ ὑπόθεσις. πολλάκις δὲ καὶ πάντα ταῦτα καλοῦσιν ὑποθέσεις, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἀξίωμα πᾶσαν ἀπόφασιν ἀπλήν, ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ ὑποθέσεις ἀξιώματα, κατὰ δὲ τοὺς ἑτέρους καὶ τὰ ἀξιώματα ὑποθέσεις.

Πάλιν δ' αὖ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς προβλήματα διαιρεῖται καὶ θεωρήματα, τὰ μὲν τὰς γενέσεις περιέχοντα τῶν σχημάτων καὶ τὰς τομὰς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις καὶ ὅλως τὰ παθήματα τὰ γινόμενα περὶ αὐτά, τὰ δὲ καθ' αὐτά

συμβεβηκότα ἐκάστοις δεικνύοντα. καθάπερ γὰρ αἱ ποιητικαὶ τῶν ἐπιστημῶν θεωρίας μετέχουσιν, κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ θεωρητικαὶ τὰ προβλήματα ταῖς ποιήσεσιν ἀνάλογον προσειλήφασιν. ἤδη δὲ τῶν παλαιῶν οἱ μὲν πάντα θεωρήματα καλεῖν ἠξίωσαν, ὥς οἱ περὶ Σπεύσιππον καὶ Ἀμφίνομον ἡγούμενοι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις οἰκειοτέραν εἶναι τὴν τῶν θεωρημάτων προσηγορίαν ἢ τὴν τῶν προβλημάτων, ἄλλως τε καὶ περὶ αἰδίων ποιουμέναις τοὺς λόγους. οὐ γὰρ ἐστὶ γενέσεις ἐν τοῖς αἰδίοις, ὥστε οὐδὲ τὸ πρόβλημα χώραν ἐπὶ τούτων ἂν ἔχοι, γενέσιν ἐπαγγελλόμενον καὶ ποιήσιν [78] τοῦ μήπω πρότερον ὄντος, οἷον ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν, ἢ τετραγώνου δοθείσης εὐθείας ἀναγραφὴν, ἢ θέσιν εὐθείας πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ. ἄμεινον οὖν φασι λέγειν, ὅτι πάντα ταῦτά ἐστι, τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν ὥσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ ἀεὶ ὄντα, ὥστε καὶ πάντα θεωρηματικῶς ἐροῦμεν ἀλλ' οὐ προβληματικῶς λαμβάνεσθαι. οἱ δὲ ἀνάπαλιν πάντα προβλήματα λέγειν ἐδικαίουν ὥς οἱ περὶ Μέναιχμον μαθηματικοί, τὴν δὲ προβολὴν εἶναι διττήν· ὅτε μὲν πορίσασθαι τὸ ζητούμενον, ὅτε δὲ περιορισμένον λαβόντας ἰδεῖν ἢ τίς ἐστίν, ἢ ποῖόν τι, ἢ τί πέπονθεν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο σχέσεις. καὶ λέγουσι μὲν ὀρθῶς ἀμφοτέροι· καὶ γὰρ οἱ περὶ Σπεύσιππο καλῶς – οὐ γὰρ τοιαῦτά ἐστὶ τὰ προβλήματα γεωμετρίας, οἷα τὰ μηχανικῆς· αἰσθητὰ γὰρ ταῦτα καὶ γενέσιν ἔχοντα καὶ παντοίαν μεταβολὴν – καὶ οἱ περὶ τὸν Μέναιχμον – οὐ γὰρ ἄνευ τῆς εἰς ὕλην προόδου καὶ αἱ τῶν θεωρημάτων εἰσὶν εὐρέσεις. λέγω δὲ ὕλην τὴν νοητήν. εἰς ἐκείνην οὖν οἱ λόγοι προϊόντες καὶ μορφοῦντες αὐτὴν εἰκότως δήπου ταῖς γενέσεσιν εἰκέναι λέγονται. τὴν γὰρ τῆς διανοίας ἡμῶν κίνησιν καὶ τὴν προβολὴν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων γενέσιν τῶν ἐν φαντασίᾳ σχημάτων εἶναί φαμεν καὶ τῶν περὶ αὐτὰ παθημάτων. ἐκεῖ γὰρ αἱ συστάσεις καὶ αἱ τομαὶ καὶ αἱ θέσεις καὶ αἱ παραβολαὶ καὶ αἱ προσθέσεις καὶ αἱ [79] ἀφαιρέσεις, τὰ δὲ ἐν τῇ διανοίᾳ πάντα ἔστηκεν ἄνευ γενέσεως καὶ πάσης μεταβολῆς.

Ἔστι μὲν οὖν καὶ προβλήματα γεωμετρικὰ καὶ θεωρήματα, διότι δὲ θεωρία τὸ πλεονάζον ἐστὶν ἐν αὐτῇ, ὥσπερ ἐπὶ μηχανικῆς ποιήσεις, καὶ τὰ προβλήματα

πάντα μετέχει θεωρίας, οὐ μὴν ἀνάπαλιν· ὅλως γὰρ αἱ ἀποδείξεις θεωρίας εἰσὶν ἔργον. πάντα δὲ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς δι' ἀποδείξεως λαμβάνεται, ὥστε κοινότερον τὸ θεώρημα. οὐ πάντα δὲ τὰ θεωρήματα δεῖται τῶν προβλημάτων, ἀλλ' ἐστὶν ἃ καὶ αὐτόθεν ἔχει τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου. οἱ δὲ διορίζοντες τὸ θεώρημα τοῦ προβλήματός φασι πᾶν μὲν πρόβλημα ἐπιδέχεσθαι τῶν κατηγορουμένων τῆς ἐν αὐτῷ ὕλης, αὐτὸ τε ἕκαστον καὶ τὸ ἀντικείμενον, πᾶν δὲ θεώρημα αὐτὸ μὲν ἐπιδέχεσθαι τὸ κατηγορούμενον, οὐ μέντοι καὶ τὸ ἀντικείμενον. λέγω δὲ ὕλην μὲν αὐτῶν τὸ γένος, περὶ οὗ ἡ ζήτησις, οἷον τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ κύκλον, σύμπτωμα δὲ κατηγορούμενον τὸ καθ' αὐτὸ συμβεβηκός, οἷον ἴσον ἢ τομὴν ἢ θέσιν ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον. ὅταν οὖν προτείνῃ τις οὕτως, εἰς κύκλον ἐντεῖναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα λέγει. δυνατόν γὰρ εἰς αὐτὸν ἐντεῖναι καὶ μὴ ἰσόπλευρον· καὶ πάλιν, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα τὸ τοιόνδε· δυνατόν γὰρ συστήσασθαι καὶ μὴ ἰσόπλευρον. λέγω δὲ ὕλην μὲν αὐτῶν τὸ γένος, περὶ οὗ ἡ ζήτησις, οἷον τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ κύκλον, σύμπτωμα δὲ κατηγορούμενον τὸ καθ' αὐτὸ συμβεβηκός, οἷον ἴσον ἢ τομὴν ἢ θέσιν ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον. ὅταν οὖν προτείνῃ τις οὕτως, εἰς κύκλον ἐντεῖναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα λέγει. δυνατόν γὰρ εἰς αὐτὸν ἐντεῖναι καὶ μὴ ἰσόπλευρον· καὶ πάλιν, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα τὸ τοιόνδε· δυνατόν γὰρ συστήσασθαι καὶ μὴ ἰσόπλευρον. ὅταν δὲ τῶν ἰσοσκελῶν ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει προτείνῃ τις, θεώρημα **[80]** φατέον αὐτὸν προτείνειν. οὐ γὰρ δυνατόν καὶ μὴ ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει τῶν ἰσοσκελῶν· ὥστε εἴ τις προβληματικῶς σχηματίσας εἴποι, εἰς ἡμικύκλιον ὀρθὴν ἐντεῖναι γωνίαν, ἀγεωμετρήτου δόξαν ἂν λάβοι. πᾶσα γὰρ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ ἐστίν. ἐφ' ὧν τοίνυν τὸ σύμπτωμα καθολικόν ἐστι καὶ πάσῃ τῇ ὕλῃ παρομαρτοῦν, ταῦτα θεωρήματα λεκτέον, ἐφ' ὧν δὲ μὴ καθόλου μηδὲ τῷ ὑποκειμένῳ πάντως ἐπόμενον, πρόβλημα τὸ τοιοῦτον θετέον. τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν· καὶ γὰρ εἰς ἄνισα δυνατόν – πᾶσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν· ἐστὶ γὰρ καὶ ἡ εἰς ἄνισα διαίρεσις – ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀναγράψαι

τετράγωνον· δυνατὸν γὰρ καὶ μὴ τετράγωνον – καὶ πάντα, ὅσα τοιαῦτα, τῆς τῶν προβλημάτων ἐστὶν τάξεως. οἱ δὲ περὶ Ζηνόδοτον τὸν προσήκοντα μὲν τῇ Οἰνοπίδου διαδοχῇ, τῶν μαθητῶν δὲ Ἀνδρωνος, διώριζον τὸ θεώρημα τοῦ προβλήματος, ἧ τὸ μὲν θεώρημα ζητεῖ, τί ἐστὶ τὸ σύμπτωμα τὸ κατηγορούμενον τῆς ἐν αὐτῷ ὕλης, τὸ δὲ πρόβλημα, τίνος ὄντος τί ἐστὶν. ὅθεν καὶ οἱ περὶ τὸν Ποσειδώνιον τὸ μὲν ἀφωρίζοντο πρότασιν, καθ' ἣν ζητεῖται τὸ εἰ ἔστιν ἢ μή, τὸ δὲ πρόβλημα πρότασιν, ἐν ᾗ ζητεῖται τί ἔστιν ἢ ποῖόν τι, καὶ τὴν μὲν θεωρητικὴν πρότασιν ἔλεγον δεῖν ἀποφαντικῶς σχηματίζειν, οἷον πᾶν τρίγωνον μείζους ἔχει τὰς δύο τῆς λοιπῆς, καὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, τὴν δὲ προβληματικὴν, ὥσπερ ζητοῦντας, εἰ ἔστιν ἐπὶ [81] τῆσδε τῆς εὐθείας συστήσασθαι τρίγωνον. διαφέρειν γάρ, ἢ ἀπλῶς τε καὶ ἀορίστως ζητεῖν, εἰ ἔστι πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦδε τοῦ σημείου τῆδε [τῇ] εὐθείᾳ, ἢ τίς ἐστὶν ἢ πρὸς ὀρθὰς θεωρεῖν.

Ἄλλ' ὅτι μὲν ἔστι τις διαφορὰ τοῦ τε προβλήματος καὶ τοῦ θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα τὰ δὲ θεωρήματα, φανερόν ἐσται τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον καὶ αὐτοῦ προστιθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ “ὅπερ ἔδει ποιῆσαι” ὅπου δὲ τὸ “ὅπερ ἔδει δεῖξαι”, ὡς τῶν θεωρημάτων χαρακτηριστικόν, καίτοι, καθάπερ εἵπομεν, οὔσης καὶ ἐν τοῖς προβλήμασιν ἀποδείξεως, ἀλλ' ὅμως, ὅπου μὲν καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς γενέσεως χάριν – ἵνα γὰρ δείξωμεν, ὅτι πεποιήται τὸ προταχθέν, τὴν ἀπόδειξιν παραλαμβάνομεν – ὅπου δὲ αὐτὴ δι' ἑαυτὴν ἐστὶν σπουδῆς ἀξία τὴν φύσιν τοῦ ζητουμένου παριστάνειν δυναμένη. εὖροις δ' ἂν τὸν Εὐκλείδην τοτὲ μὲν συμπλέκοντα τὰ θεωρήματα τοῖς προβλήμασι καὶ παρὰ μέρος αὐτοῖς χρώμενον, ὡς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τοτὲ δὲ πλεονάζοντα κατὰ τὰ ἕτερα. τὸ μὲν γὰρ τέταρτον ὅλον προβλημάτων ἐστὶ, τὸ δὲ πέμπτον θεωρημάτων. Τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων ἡμῖν εἰρήσθω·