

7η ενότητα

Αιτήματα και αξιώματα (185-198)

[185] Pet. I – III. <Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι.>

Ταῦτα τὰ τρία καὶ ἐναργείας ἔνεκα καὶ τοῦ πορίσασθαι τι προστάπτειν ἡμῖν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἐξ ἀνάγκης ταχθήσεται κατὰ γε τὸν Γεμῖνον. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ἐπόμενον ἔστι τῷ ῥύσιν εἶναι τοῦ σημείου τὴν γραμμὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν ὁμαλὴν καὶ ἀπαρέγκλιτον ῥύσιν.

νοήσαντες οὖν τὸ σημεῖον κινούμενον τὴν ὁμαλὴν καὶ ἐλαχίστην κίνησιν ἐπὶ θάτερον σημεῖον καταστήσομεν, καὶ τὸ πρῶτον αἶτημα γέγονεν οὐδὲν ποικίλον ἡμῶν ἐπινενοηκότων. εἰ δὲ δὴ τῆς εὐθείας σημείῳ περατουμένης ὡσαύτως νοήσαιμεν τὸ πέρας αὐτῆς κινούμενον τὴν ἐλαχίστην καὶ ὁμαλὴν κίνησιν, ἔσται τὸ δεύτερον αἶτημα πορισθὲν ἀπὸ εὐμηχάνου καὶ ἀπλῆς ἐπιβολῆς. εἰ δὲ αὖ μένουσαν μὲν τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ θάτερον, κινουμένην δὲ περὶ τὸ μένον κατὰ τὸ λοιπὸν, τὸ τρίτον ἂν εἴη γένος. κέντρον μὲν γὰρ ἔσται τὸ μένον σημεῖον, διάστημα δὲ ἡ εὐθεῖα. ὅση γὰρ ἂν αὕτη τυγχάνῃ, τοσοῦτο ἔσται τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου πρὸς πάντα τὰ μέρη τῆς περιφερείας.

εἰ δὲ τις ἀποροίῃ, πῶς κινήσεις ἐπεισάγομεν τοῖς γεωμετρητοῖς ἀκινήτοις οὕσιν, πῶς δὲ **[186]** τὰ ἀμερῇ κινούμενα – ταῦτα γὰρ ἀδύνατα εἶναι παντελῶς – ἀξιώσομεν αὐτὸν μὴ παντάπασιν δυσχεραίνειν μεμνημένον τῶν ἐν ἀρχῇ προαποδεδειγμένων, ὥς ἄρα περὶ τῶν ἐν φαντασίᾳ

[185] Αἰτήματα I-III: Ἀς γίνεαι ἀποδεκτὸ ὅτι ἀπὸ κάθε σημείο πρὸς κάθε ἄλλο σημείο μπορεῖ νὰ ἀχθεῖ ἓνα εὐθύγραμμα τμήμα καὶ ὅτι μὴ πεπερασμένη εὐθεῖα μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ συνεχῶς καὶ εὐθύγραμμα, καὶ ὅτι μὲ οποιοδήποτε κέντρο καὶ οποιαδήποτε ἀκτῖνα μπορεῖ νὰ γραφεῖ ἓνας κύκλος.

Αὐτὰ τὰ τρία [αξιώματα], τόσο λόγω σαφήνειας ὅσο καὶ ἐπειδὴ μᾶς ἐπιβάλλουν νὰ παράσχουμε κάτι, ἀναγκαστικά θὰ περιληφθοῦν στὰ αἰτήματα, σύμφωνα μὲ τὸν Γεμῖνο. Τὸ ὅτι ἀπὸ κάθε σημείο πρὸς κάθε ἄλλο σημείο μπορεῖ νὰ ἀχθεῖ ἓνα εὐθύγραμμα τμήμα εἶναι ἐπακόλουθο τοῦ ὅτι ἡ γραμμὴ εἶναι ἡ ροὴ ἐνὸς σημείου καὶ ὅτι μὴ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μὴ ὁμαλὴ καὶ ἀπαρέγκλιτη ροὴ [ἐνὸς σημείου].

Ἀν λοιπὸν θεωρήσουμε ὅτι τὸ σημείο κινεῖται μὲ μὴ ὁμαλὴ καὶ ἐλάχιστη κίνηση θὰ καταλήξουμε στὸ ἄλλο σημείο καὶ τὸ πρῶτο αἶτημα θὰ ἔχει πραγματοποιηθεῖ, χωρὶς νὰ ἔχουμε ἐπινοήσῃ τίποτα πολὺπλοκο. Ἀν μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θεωρήσουμε ὅτι τὸ πέρας μὴς εὐθείας κινεῖται μὲ μὴ ἐλάχιστη καὶ ὁμαλὴ κίνηση, τότε αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ δεύτερο αἶτημα, τὸ ὁποῖο παρασχέθηκε ἀπὸ μὴ εὐφυὴ καὶ ἀπλὴ μέθοδο. Ἀν, πάλι, θεωρήσουμε ὅτι μὴ πεπερασμένη εὐθεῖα μένει ἀκίνητη στὸ ἓνα τῆς πέρας, ἐνῶ τὸ ἄλλο περιστρέφεται γύρω ἀπὸ τὸ σταθερὸ, τότε ἔχουμε τὸ τρίτο γένος [αξιώματος], καθὼς τὸ κέντρο θὰ εἶναι τὸ σταθερὸ σημείο, καὶ ἡ εὐθεῖα θὰ εἶναι ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ὅσο κι ἂν εἶναι τὸ μήκος τῆς εὐθείας, τόση θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπὸ κάθε σημείο τῆς περιφέρειας [τοῦ κύκλου].

Ἀν κάποιος ἀναρωτηθεῖ πῶς εἰσάγουμε κινήσεις στὰ ἀκίνητα γεωμετρικά ἀντικείμενα ἢ πῶς **[186]** κινούμε τὰ ἀμερῇ¹ – διότι αὐτὰ εἶναι ἐντελῶς ἀδύνατα – θὰ τοῦ ζητήσουμε νὰ μὴ δυσανασχετῇ καθόλου, ἀλλὰ νὰ θυμηθεῖ ὅσα ἔχουν ἐξ ἀρχῆς ἐπισημανθεῖ γιὰ ὅσα

¹ Εἰδὼ ἐννοεῖ τὰ σημεία.

κειμένων οἱ λόγοι γράφουσιν ἐκεῖ πάντα τὰ τῆς διανοίας εἰκόνας ὧν ἔχει λόγων.

τὸ γὰρ ἄγραφον γραμματεῖον οὗτος ἦν ὁ τελευταῖος νοῦς καὶ παθητικός. ἀλλ' οὐδὲν ἡμῖν ὁ λόγος οὗτος. ὁ γὰρ τοι νοῦς ὁ τὰ εἶδη δεχόμενος ἀλλαχόθεν διὰ κινήσεως αὐτὰ δέχεται. τὴν δὲ κίνησιν μὴ τοι σωματικὴν ἀλλὰ **ανταστικὴν** νοήσωμεν καὶ τὰ ἀμερῇ τὰς μὲν σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν τὰς δὲ αὖ φανταστικὰς διεξόδους ὑπομένειν.

καὶ γὰρ ὁ νοῦς ἀμερὴς ὧν κινεῖται καὶ οὐ τοπικῶς καὶ ἡ φαντασία κατὰ τὸ ἑαυτῆς ἀμερὲς ἔχει κινήσιν ἰδίαν· ἡμεῖς δὲ εἰς τὰς σωματικὰς κινήσεις ἀποβλέποντες ἀπογινώσκομεν τῶν ἐν τοῖς ἀδιάστατοις κινήσεων.

τοῦ μὲν οὖν σωματικοῦ τόπου καὶ τῶν ἔξω κινήσεων τὰ ἀμερῇ καθαρεύει· κινήσεως δὲ ἄλλο εἶδος καὶ τόπος ἄλλος ἐπ' αὐτῶν θεωρεῖται ταῖς κινήσεσι σύστοιχος, ἐπεὶ καὶ θέσιν ἔχειν τὸ σημεῖον ἐν τῇ φαντασίᾳ λέγομεν καὶ οὐ ζητοῦμεν, πῶς ἀμερὲς ἔτι δύναται μένειν τὸ κινούμενον που καὶ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόπου. τόπος γὰρ τῶν μὲν διαστατῶν διαστατός ἐστι, τῶν δὲ ἀμερῶν ἀδιάστατος.

ἄλλα οὖν τὰ ἰδίως τῶν γεωμετρητῶν εἶδη καὶ ἄλλα τὰ ἀπ' ἐκείνων ὑφιστάμενα, καὶ ἄλλη τῶν σωμάτων κινήσεις, ἄλλη τῶν ἐν φαντασίᾳ **[187]** νοουμένων, καὶ ἄλλος ὁ τῶν διαστατῶν τόπος, ἄλλος ὁ τῶν ἀμερῶν. καὶ χρὴ ταῦτα διελομένους μὴ συγχεῖν μηδὲ ἐπιταράττειν τῶν πραγμάτων τὰς οὐσίας.

Ἔοικεν μὲν τῶν τριῶν τούτων αἰτημάτων τὸ μὲν πρῶτον ἐν εἰκόσιν ἡμῖν ἐμφανίζειν, ὅπως τὰ ὄντα περιέχεται ἐν τοῖς αὐτῶν αἰτίοις ἀμερεστέροις οὐσίαις καὶ ὀρίζεται ἀπ' αὐτῶν, καὶ ὅτι καὶ πρὶν ὑποστῇ πανταχόθεν ὑπ' ἐκείνων περιείληπται – καὶ γὰρ ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων

βρίσκονται στη φαντασία, ὅτι δηλαδή οἱ λόγοι αποτυπώνουν ἐκεῖ ὅλες τις εἰκόνες τῆς διάνοιας που ἔχουν λόγο.

Διότι, ὁ ἄγραφος πίνακας εἶναι αὐτός, ὁ τελευταῖος [τῇ τάξει] καὶ παθητικός νους. Ὅμως αὐτὸ δὲν εἶναι τὸ ζήτημα μας. Διότι, πράγματι ὁ νους, ὁ ὁποῖος δέχεται ἀπὸ αλλοῦ τὰ εἶδη, τὰ δέχεται μέσω τῆς κινήσεως. Ὡστόσο, ἀς μὴν θεωρήσουμε τὴν κίνηση αὐτὴ ὡς σωματικὴ, ἀλλὰ ὡς **νοητικὴ**, καὶ ἀς μὴν ἀποδεχτοῦμε ὅτι τὰ ἀδιάστατα μποροῦν νὰ κινηθοῦν με σωματικὸ τρόπο, ἀλλὰ ὅτι εἶναι ἱκανὰ νὰ υποστοῦν νοητικὲς διεργασίες.

Διότι καὶ ὁ νους, ἀν καὶ εἶναι ἀμερὴς, κινεῖται, ἀλλὰ ὄχι τοπικά. Καὶ ἡ φαντασία ἔχει τὴ δική της κίνηση σύμφωνα με τὴν ἀμερὴ τῆς φύσης. Ἐμεῖς, ὅμως, ἐπειδὴ ἐστιάζουμε στὶς σωματικὲς κινήσεις, ἀπορρίπτουμε τὴ δυνατότητα ὑπαρξῆς κινήσεων σὲ ὅσα εἶναι ἀδιάστατα.

Ἐπομένως, τὰ ἀμερῇ εἶναι ἀπαλλαγμένα ἀπὸ τὸν σωματικὸ τόπο καὶ τὶς ἐξωτερικὲς κινήσεις. Ἀντίθετα, παρατηρεῖται σὲ αὐτὰ ἓνα ἄλλο εἶδος κινήσεως καὶ ἓνας διαφορετικὸς τόπος που ἀντιστοιχεῖ στὶς δικές τους κινήσεις. Διότι λέμε ὅτι τὸ σημεῖο ἔχει θέση στὴ φαντασίᾳ, χωρὶς νὰ ἀναρωτιόμαστε πῶς μπορεῖ νὰ παραμένει ἀμερὲς αὐτὸ που κινεῖται καὶ νὰ καταλαμβάνει κάποιον τόπο. Διότι, ὁ τόπος ὅσων ἔχουν διάσταση, ἔχει καὶ αὐτὸς διάσταση, ἐνῶ ὁ τόπος τῶν ἀδιάστατων εἶναι ἀδιάστατος.

Ἐπομένως, ἄλλα εἶναι τὰ εἶδη εἰδικῶς τῶν γεωμετρικῶν αντικειμένων καὶ ἄλλα [τὰ εἶδη] ὅσων προκύπτουν ἀπὸ ἐκεῖνα, ὅπως ἐπίσης ἄλλη εἶναι ἡ κίνηση τῶν σωμάτων καὶ ἄλλη ὅσων νοοῦνται **[187]** μέσα στὴ φαντασίᾳ· ἄλλος τὸ τόπος ὅσων ἔχουν διάσταση καὶ ἄλλος τῶν ἀμερῶν. Καὶ αὐτὰ πρέπει νὰ τὰ διακρίνουμε καὶ νὰ μὴν τὰ συγχέουμε, οὔτε νὰ διαταράσσουμε τὶς οὐσίες τῶν πραγμάτων.

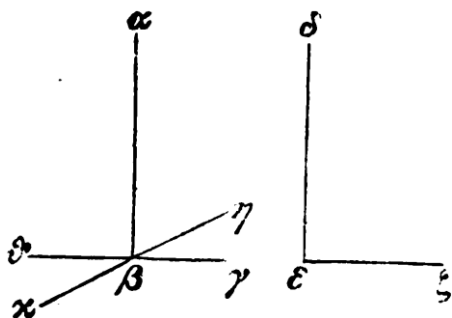
Φαίνεται, μάλιστα, ὅτι ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ αἰτήματα, τὸ πρῶτο μας δείχνει με εἰκόνες ὅτι τὰ ὄντα περιέχονται μέσα στὶς αἰτίες τους, οἱ ὁποῖες εἶναι ἀμέριστες καὶ περατώνονται ἀπὸ αὐτές, καὶ ὅτι πρὶν καν υπάρξουν, ἦταν περιβεβλημένα ἀπὸ αὐτές· διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ,

ὄντων ἐπὶ θάτερον ἀπὸ θατέρου ἐπιζεύγνυται καὶ περατοῦται ὑπ' αὐτῶν καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἀπείληπται – τὸ δὲ δεύτερον, ὅπως τὰ ὄντα ἐχόμενα τῶν οἰκείων ἀρχῶν πρόεισιν ἐπὶ πάντα τὴν τε πρὸς ἐκεῖνα συνέχειαν φυλάττοντα καὶ μὴ ἀποσπώμενα ἀπ' αὐτῶν, ἀλλὰ διὰ τὴν ἀπειροδύναμον αἰτίαν πάντῃ ἐπειγόμενα χωρεῖν, τὸ δὲ τρίτον, ὅπως τὰ προελθόντα πάλιν ἐπιστρέφεται πρὸς τὰς οἰκείας ἀρχάς. ἡ γὰρ τοῦ κινουμένου περὶ τὸ μένον στροφή τὸν κύκλον ἀπογεννώσα μιμεῖται τὴν κατὰ κύκλον ἐπάνοδον. Δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι τὸ ἐπ' ἀπειρον ἐκβάλλεσθαι οὐ πάσαις ὑπάρχει γραμμαῖς· οὔτε γὰρ τῇ κυκλικῇ οὔτε τῇ κισσοειδεῖ οὔτε ὅλως ταῖς σχηματογραφούσαις, ἀλλ' οὐδὲ ταῖς μὴ ποιούσαις σχῆμα. οὐδὲ γὰρ ἡ μονόστροφος ἔλιξ ἐπ' ἀπειρον ἐκβάλλεται – μεταξὺ γὰρ δύο σημείων ἔχει τὴν σύστασιν – οὐδὲ τῶν ἄλλων οὐδεμία γραμμῶν τῶν οὕτω γεννωμένων. ἀλλ' οὐδὲ ἀπὸ παντὸς σημείου δυνατόν ἐπὶ πᾶν πᾶσαν ἐπιζευγνύναι γραμμὴν· οὐ γὰρ πᾶσα μεταξὺ πάντων σημείων ὑφίστασθαι δύναται. Τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων· ἐπὶ δὲ τὰ ἐξῆς ἴωμεν.	ενώνει σημεία που υπάρχουν, το ένα με το άλλο, περατώνεται ἀπὸ αὐτὰ καὶ περικλείεται ἀνάμεσά τους. Το δεύτερο [μας δείχνει] πὼς τα ὄντα, ἔχοντας τις δικές τους ἀρχές, προχωροῦν πρὸς κάθε κατεύθυνση, διατηρώντας τὴ συνοχή τους με αὐτές καὶ χωρὶς νὰ ἀποσπῶνται ἀπὸ αὐτές, ἀλλὰ λόγῳ τῆς αἰτίας που ἔχει ἀπειρὴ δύναμη προχωροῦν πρὸς κάθε κατεύθυνση. Το τρίτο [μας δείχνει] με ποιο τρόπο ὅσα ἔχουν προχωρήσει ἐπιστρέφουν καὶ πάλι πρὸς τις δικές τους ἀρχές· διότι ἡ περιστροφή τοῦ κινούμενου [σημείου] γύρω ἀπὸ τὸ σταθερὸ, ἡ ὁποία γεννᾷ τὸν κύκλο, μιμεῖται τὴν κυκλικὴ ἐπιστροφή. Πρέπει, ὡστόσο, νὰ γνωρίζουμε ὅτι ἡ ἐπ' ἀπειρον ἐπέκταση δὲν ἰσχύει γιὰ ὅλες τις γραμμές, καθὼς δὲν συμβαίνει οὔτε στὴν κυκλική, οὔτε στὴν κισσοειδή, οὔτε γενικῶς στὶς γραμμές που διαγράφουν σχήματα, ἢ σε ὅσες δὲν διαγράφουν κανένα σχῆμα. Διότι, οὔτε ἡ μονόστροφή ἔλικα δὲν ἐπεκτείνεται ἐπ' ἀπειρον, καθὼς κατασκευάζεται μεταξὺ δύο σημείων. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ ὅλες τις ἄλλες γραμμές που γεννῶνται με τὸν ἴδιο τρόπο. Επιπλέον, δὲν εἶναι δυνατό ἀπὸ κάθε σημεῖο πρὸς κάθε σημεῖο νὰ τραβηχτεῖ οποιαδήποτε γραμμὴ που θὰ τὰ ενώνει, διότι δὲν μπορεῖ κάθε γραμμὴ νὰ ὑπάρχει μεταξὺ ὅλων των σημείων. Αὐτὰ λοιπὸν σχετικὰ με τὰ ζητήματα αὐτά· ἀς προχωρήσουμε στὰ ἐπόμενα.
---	---

[188] Pet. III. <Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.>

Τοῦτο εἰ μὲν ὡς ἐναργὲς καὶ μὴ δεόμενον ἀποδείξεως συγχωροῦμεν, αἴτημα μὲν οὐκ ἔστιν κατὰ τὸν Γεμῖνον, ἀξίωμα δέ. συμβεβηκὸς γάρ τι καθ' αὐτὸ λέγει ταῖς ὀρθαῖς, ἀλλ' οὐ πορίσασθαι [τι] δι' ἀπλῆς ἐπινοίας ἀξιοῖ. ἀλλ' οὐδὲ κατὰ τὴν <Ἀριστοτέλους> διαίρεσιν αἴτημά ἐστι. τὸ γὰρ αἴτημα κατ' ἐκεῖνον δεῖται ἀποδείξεως τινός. εἰ δὲ ἀποδεικτὸν αὐτὸ φαῖμεν εἶναι καὶ ζητοῖμεν αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, οὐδ' ὡς κατὰ τὸν <Γεμῖνον> ἐν τοῖς αἰτήμασι ταχθήσεται.

προφαίνεται μὲν οὖν καὶ κατὰ τὰς κοινὰς ἡμῶν ἐπινοίας ἢ τῶν ὀρθῶν ἰσότης, μονάδος δὲ ἔχουσα λόγον ἢ ὅρον πρὸς τὴν ἐπ' ἀπειρον αὐξησιν καὶ ἐλάττωσιν τῶν ἐφ' ἐκάτερα γωνιῶν ἴση ἐστὶ πρὸς πᾶσαν ὀρθήν. καὶ γὰρ τὴν πρώτην οὕτως ὑπεστήσαμεν τὴν ὀρθήν, ἴσας τὰς ἐφ' ἐκάτερα γωνίας ποιήσαντες τῆς ἐφεστώσης εὐθείας, πρὸς ἣν ἐφέστηκεν.

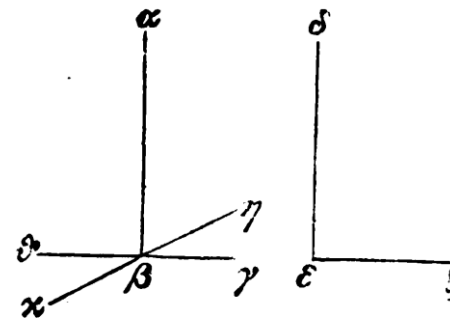


εἰ δὲ δεῖ καὶ ἀποδείξιν αὐτοῦ παραθέσθαι γραμμικὴν, ἔστωσαν δύο ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ <αβγ> καὶ ὑπὸ <δεζ>. λέγω δὲ ὅτι ἴσαι εἰσίν. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἑτέρα μείζων. ἔστω ἡ πρὸς τὸ <β>. ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς <δε> ἐπὶ τὴν <αβ> ἢ [189] <εζ> ἐντὸς πεσεῖται, πιστεύω ὡς ἡ <βη>, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ <βγ> ἐπὶ τὸ <θ>. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ <αβγ>, ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ <αβθ> καὶ ἴσαι ἀλλήλαις – ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἴση τῇ ἐφεξῆς – ἡ ἄρα ὑπὸ <αβθ> μείζων τῆς ὑπὸ <αβγ>. πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ <βη> ἐπὶ τὸ <κ>. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ <αβη>, καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθὴ διὰ ταῦτα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ <αβη>. ἡ ἄρα ὑπὸ <αβκ> ἴση τῇ

[188] Αἴτημα IV: Καὶ ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες νὰ εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Αὐτό, ἐάν το ἀποδεχτοῦμε ὡς προφανές, τὸ ὁποῖο δὲν ἀπαιτεῖ ἀπόδειξιν, τότε, κατὰ τὸν Γεμῖνον, δὲν εἶναι αἴτημα, ἀλλὰ ἀξίωμα· διότι ἀναφέρει κάτι συμβεβηκὸς γιὰ τὶς ὀρθές γωνίες, χωρὶς ὅμως νὰ ἀπαιτεῖ νὰ παράσχουμε [κάτι] μέσω μίας ἀπλῆς σκέψης. Ἀλλὰ, οὔτε αἴτημα εἶναι σύμφωνα με τὴ διαίρεση τοῦ Ἀριστοτέλη, διότι, σύμφωνα με αὐτόν, τὸ αἴτημα ἀπαιτεῖ κάποια ἀπόδειξιν. Ἐάν ὅμως λέγαμε ὅτι αὐτὸ εἶναι δυνατόν νὰ ἀποδειχθεῖ καὶ ζητούσαμε τὴν ἀπόδειξή του, οὔτε τότε δὲν θὰ κατατασσόταν μεταξύ τῶν αἰτημάτων σύμφωνα με τὸν Γεμῖνο.

Καὶ ἡ ἰσότητα τῶν ὀρθῶν [γωνιῶν], λοιπὸν, εἶναι προφανὴς σύμφωνα με τὶς κοινές μας ἀντιλήψεις, καὶ καθὼς ἔχει τὸν λόγο τῆς μονάδας ἢ τοῦ πέρατος σὲ σχέση με τὴν ἐπ' ἀπειρον αὐξηση καὶ μείωση τῶν ἐκατέρωθεν γωνιῶν, [μία ὀρθὴ γωνία] εἶναι ἴση με κάθε ὀρθή. Διότι ἔτσι δημιουργήσαμε τὴν πρώτη ὀρθή, φτιάχνοντας ἴσες τὶς γωνίες ποὺ βρίσκονται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἔχει τοποθετηθεῖ πάνω σὲ αὐτὴ ἐπὶ τῆς τοποθετήθηκε.



Ἐάν ὅμως πρέπει νὰ παραθέσουμε καὶ μίαν γεωμετρικὴ ἀπόδειξιν γι' αὐτό, ἔστω δύο ὀρθές [γωνίες], ἡ ΑΒΓ καὶ ἡ ΔΕΖ. Λέγω λοιπὸν ὅτι εἶναι ἴσες. Διότι ἀν δὲν εἶναι, ἡ μία εἶναι μεγαλύτερη. Ἐστω ἡ γωνία Β. Ἀρα, ἀν ἐφαρμοστεῖ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ [189], ἡ ΕΖ θὰ πέσει ἐντὸς, πιστεύω, ὅπως ἡ ΒΗ. Καὶ ἀς προεκταθεῖ ἡ ΒΓ πρὸς τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΑΒΘ εἶναι ὀρθή, καὶ εἶναι ἴσες μεταξύ τους — διότι στοὺς ὁρισμούς ἔχουμε ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἴση με τὴν ἐφεξῆς τῆς γωνίας — ἄρα ἡ γωνία ΑΒΘ εἶναι μεγαλύτερη

ὑπὸ <αβη>, ὥστε ἢ ὑπὸ <αβθ> ἐλάσσων τῆς ὑπὸ <αβη>, ἀλλὰ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς.

Τοῦτο μὲν οὖν καὶ ἄλλοις δέδεικται τῶν ἐξηγητῶν καὶ οὐ πολλῆς ἐδεῖτο πραγματείας, ὁ <δὲ Πάππος> ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι ἀληθές, τὸ τὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίαν ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθήν, ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη, πάντως ὀρθὴν εἶναι, δύνασθαι δὲ καὶ περιφερόγραμμον γωνίαν ἴσην ὀρθῇ δειχθῆναι, καὶ δῆλον, ὥς οὐκέτι τὴν τοιαύτην ὀρθήν (εἶναι δύνασθαι?) προσαγορεύσομεν.

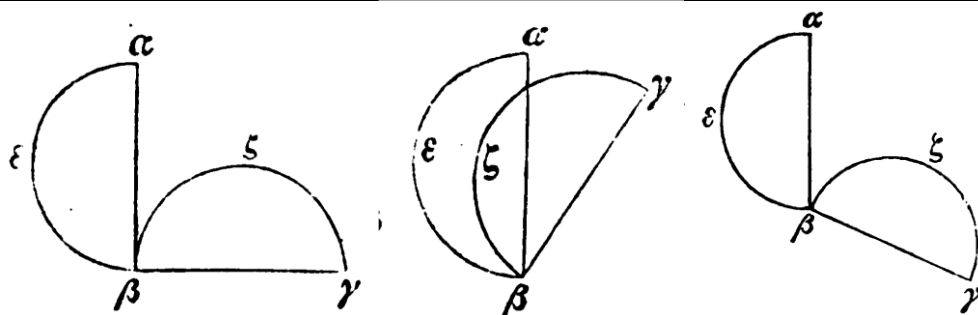
κατὰ γὰρ τὴν τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομὴν τὴν ὀρθὴν ἐλαμβάνομεν ὑφιστάντες αὐτὴν ὑπὸ εὐθείας ἐφεστῶσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἢ ἴση τῇ ὀρθῇ οὐ πάντως ὀρθὴ ἐστίν, εἴπερ μηδὲ εὐθύγραμμος.

τῆς ΑΒΓ. Πάλι, ας προεκταθεῖ ἡ ΒΗ πρὸς τὸ Κ. Επειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ εφεξῆς τῆς εἶναι ὀρθή, γι' αὐτὸ εἶναι καὶ ἴση μετὰ τὴν ΑΒΗ. Ἄρα ἡ γωνία ΑΒΚ εἶναι ἴση μετὰ τὴν ΑΒΗ, καὶ συνεπῶς ἡ ΑΒΘ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ΑΒΗ, ὡστόσο εἶναι μεγαλύτερη, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀδύνατον. Δεν ὑπάρχει, λοιπὸν, ὀρθὴ μεγαλύτερη ἀπὸ ὀρθῆς.

Αὐτὸ, ἐπίσης, ἔχει ἀποδειχθεῖ καὶ ἀπὸ ἄλλους σχολιαστὰς καὶ δεν ἀπαιτεῖται ἐκτενὲς πραγμάτευσης. Ο Πάππος μάλιστα μας υπέδειξε ὀρθά ὅτι τὸ ἀντίστροφο δεν εἶναι καθόλου ἀληθές: ὅτι δηλαδὴ ἡ γωνία που εἶναι ἴση μετὰ ἡ ὀρθή εἶναι σε κάθε περίπτωση ὀρθή. Ὡστόσο, ἀν εἶναι εὐθύγραμμη, εἶναι ὀρθή σε κάθε περίπτωση· μπορεῖ ὅμως νὰ δειχθεῖ ὅτι καὶ ἡ μικτὴ γωνία εἶναι ἴση μετὰ ὀρθῆς, καὶ εἶναι φανερό πὼς ἡ τέτοια [γωνία] καθόλου δεν θὰ τὴν ἀποκαλέσουμε ὀρθή.

Διότι, σύμφωνα μετὰ τὴν ταξινόμηση τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν, θεωροῦμε ἡ ὀρθή γωνία, ὅταν τὴν δημιουργήσουμε ἀπὸ ἡ εὐθεία, ἡ ὁποία εἶναι τοποθετημένη κάθετα σε ἡ ὑποκείμενη εὐθεία, καὶ ἄρα ἡ γωνία που εἶναι ἴση μετὰ ὀρθῆς νὰ μὴν εἶναι πάντα ὀρθή, μόνο ἀν δεν εἶναι εὐθύγραμμη².

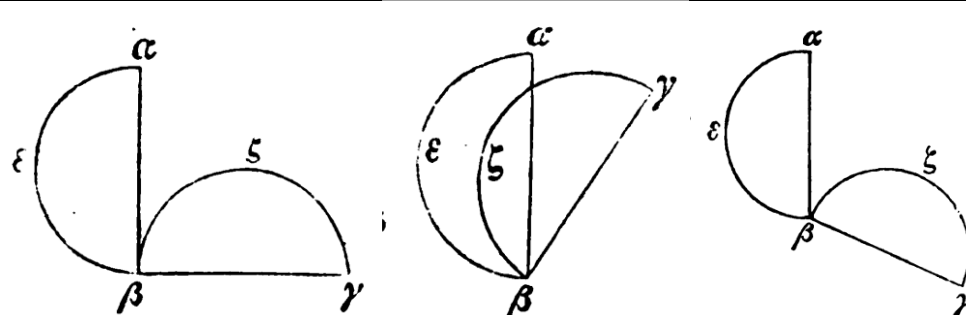
² Ἐκτός καὶ ἀν εἶναι εὐθύγραμμη



νενοήσθωσαν οὖν εὐθεΐαι δύο ἴσαι αἱ $\langle \alpha\beta \rangle$ $\langle \beta\gamma \rangle$ ποιοῦσαι **[190]** τὴν πρὸς τὸ $\langle \beta \rangle$ ὀρθήν, καὶ ἔστωσαν ἴσα καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡμικύκλια κέντρῳ καὶ διαστήματι γραφέντα τὰ $\langle \alpha\epsilon\beta \rangle$ $\langle \beta\zeta\gamma \rangle$. ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ ἡμικύκλια, ἐφαρμόσει ἀλλήλοις, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ $\langle \epsilon\beta\alpha \rangle$ γωνία τῇ ὑπὸ $\langle \zeta\beta\gamma \rangle$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ $\langle \alpha\beta\zeta \rangle$. ὅλη ἄρα ἡ ὀρθὴ ἴση ἐστὶ τῇ μηνοειδῇ τῇ ὑπὸ $\langle \epsilon\beta\zeta \rangle$. καὶ ὅμως οὐκ ἔστιν ἡ μηνοειδὴς ὀρθή.

τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀμβλείας οὔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ $\langle \alpha\beta\gamma \rangle$ δειχθήσεται αὐτῇ ἴση γωνία ἢ μηνοειδὴς. τοῦτο γάρ ἐστι τὸ εἶδος τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν τὸ συμβιβαζόμενον ταῖς εὐθυγράμμοις· πλήν τὸ γε τοσοῦτον ἰστέον· ἐπὶ μὲν τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προσθεῖναι δεῖ τὴν μεταξὺ γωνίαν τῆς $\langle \alpha\beta \rangle$ εὐθείας καὶ $\langle \beta\zeta \rangle$ περιφερείας, ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφελεῖν. ἡ γὰρ $\langle \alpha\beta \rangle$ εὐθεῖα τέμνει τὴν $\langle \beta\zeta \rangle$ περιφέρειαν. ἐκκείσθω οὖν ἑκατέρας τῶν ὑποθέσεων τὰ διαγράμματα.

Ταῦτα μὲν οὖν ἀναγεγράφθω δεικνύντα καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθὴ ἐστίν. εἰ γὰρ μηδὲ εὐθύγραμμος εἴη, πῶς ἂν ὀρθὴν τις εἴποι τὴν τοιαύτην;



Ας σκεφτούμε, λοιπόν, δύο ἰσες ευθείες, τις AB και ΒΓ, οι οποίες δημιουργοῦν **[190]** στο σημείο B ορθή γωνία, και ἔστω ὅτι τα ημικύκλια, που γράφονται πάνω σε αυτές, με κοινὸ κέντρο και ακτῖνα, τα AEB και BZΓ, εἶναι ἰσα. Επειδὴ τα ημικύκλια εἶναι ἰσα, θα εφαρμόζουν το ἓνα με το ἄλλο, και η γωνία EBA θα εἶναι ἰση με τη γωνία ZBΓ. Ας προστεθεῖ και η κοινὴ γωνία ABZ· επομένως, ὅλη η ορθή [γωνία] εἶναι ἰση με τη μηνοειδὴ γωνία EBZ. Κι ὅμως, η μηνοειδὴς γωνία δεν εἶναι ορθή.

Με τον ἴδιο τρόπο, εἴαν η ABΓ εἶναι ἀμβλεία ἢ ὀξεία, θα αποδειχτεῖ ὅτι μηνοειδὴς γωνία εἶναι ἰση με αὐτήν. Διότι, αὐτὸ εἶναι τὸ εἶδος των μικτῶν γωνιῶν, τὸ ὁποῖο συμβιβάζεται με τις εὐθύγραμμες γωνίες. Πλην ὅμως πρέπει να γνωρίζουμε τὸ εξῆς: στην περίπτωση της ορθῆς και της ἀμβλείας πρέπει να προστεθεῖ η ἐνδιάμεση γωνία μεταξύ της ευθείας AB και του κυκλικοῦ τμήματος BZ, ἐνὼ στην περίπτωση της ὀξείας πρέπει να αφαιρεθεῖ. Διότι η ευθεῖα AB τέμνει τὸ BZ. Ας τεθοῦν, λοιπόν, τα ἀντίστοιχα σχήματα για κάθε μία ἀπὸ τις ὑποθέσεις.

Ας καταγραφοῦν, λοιπόν, αὐτά για να αποδείξουν ὅτι ὅλες οι ορθές γωνίες εἶναι ἰσες μεταξύ τους, και ὅτι μια γωνία ἰση με μία ορθή δεν εἶναι πάντα ορθή. Διότι, αν δεν εἶναι εὐθύγραμμη, πῶς θα μπορούσε κάποιος να ἀποκαλέσει ορθή μία τέτοια γωνία;

Φανερόν δὲ καὶ ἐκ τοῦδε τοῦ αἰτήματος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τῇ ἰσότητι συγγενής ἐστίν, ὥσπερ ἡ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι. καὶ γὰρ ἐστίν ἡ μὲν ὀρθότης αὐτῇ τῇ ἰσότητι σύστοιχος – ἀμφότεραι γὰρ ὑπὸ τὸ πέρασ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ὁμοιότης – ἡ δὲ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι, καθάπερ καὶ ἡ ἀνομοιότης· ἀπειρίας γὰρ ἔκγονοι πᾶσαι. διὸ καὶ οἱ μὲν τὸ ποσὸν ὀρῶντες τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν ἴσιν τῇ ὀρθῇ λέγουσιν, οἱ δὲ τὸ ποιὸν ὁμοίαν. ὅπερ γὰρ ἐστίν ἐν ποσοῖς ἡ ἰσότης τοῦτο ἐν τοῖς ποιοῖς ἡ ὁμοιότης.	Εἶναι ἐπίσης φανερό ἀπὸ αὐτὸ ἐδῶ το αἶτημα ὅτι ἡ ὀρθότητα τῆς γωνίας εἶναι συγγενής με τὴν ἰσότητα, ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἡ ὀξύτητα καὶ ἡ ἀμβλύτητα με τὴν ἀνισότητα. Διότι ἡ μὲν ὀρθότητα ἀνήκει στὴν ἴδια συστοιχία³ με τὴν ἰσότητα – καθὼς καὶ οἱ δύο υπάγονται στο πεπερασμένο, ὅπως καὶ ἡ ὁμοιότητα – ἐνῶ ἡ ὀξύτητα καὶ ἡ ἀμβλύτητα υπάγονται στὴν ἀνισότητα, ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἡ ἀνομοιότητα· Καὶ ὅλες εἶναι τέκνα τοῦ ἀπειροῦ. Γί' αὐτὸ καὶ ὅσοι βλέπουν τὶς γωνίες με βάση τὴν ποσότητα, λένε ὅτι ἡ ὀρθή [γωνία] εἶναι ἴση με μία ὀρθή, ἐνῶ ὅσοι βλέπουν με βάση τὴν ποιότητα, τὴ λένε ὁμοία. Διότι ὁ,τι ἀκριβῶς εἶναι ἡ ἰσότητα στο ποσοτικό, εἶναι ἡ ὁμοιότητα στο ποιοτικό.
Pet. V. <Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάττονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς εὐθείας ἐπ' ἀπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάττονες.> Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων· θεώρημα γὰρ ἐστὶ, πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον, ἃς καὶ ὁ <Πτολεμαῖος> ἐν τινὶ βιβλίῳ διαλῦσαι προύθετο, πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων. καὶ τὸ γε ἀντιστρέφον [192] καὶ ὁ <Εὐκλείδης> ὡς θεώρημα δείκνυσιν. ἴσως δὲ ἂν τινες ἀπατῶμενοι καὶ τοῦτο τάττειν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἀξιώσειαν, ὡς διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῶν δύο ὀρθῶν αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον τῆς τῶν εὐθειῶν συνεύσεως καὶ συμπτώσεως. πρὸς οὓς ὁ <Γεμῖνος> ὀρθῶς ἀπήντησε λέγων ὅτι παρ' αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις εἰς τὴν τῶν λόγων τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχὴν. ὅμοιον γὰρ φησὶ καὶ <Ἀριστοτέλης> ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν καὶ γεωμέτρου πιθανολογοῦντος ἀνέχεσθαι, καὶ ὁ παρὰ τῷ	Αἶτημα V: Καὶ ἀν μὴ εὐθεῖα ποὺ πέφτει πάνω σὲ δύο ἄλλες εὐθεῖες σχηματίζει ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίες μικρότερες ἀπὸ δύο ὀρθές, τότε οἱ δύο εὐθεῖες, προεκτεινόμενες ἐπ' ἀπειρον, θὰ συμπέσουν στὴν μεριά ποὺ βρίσκονται οἱ γωνίες ποὺ εἶναι μικρότερες ἀπὸ δύο ὀρθές. Αὐτὸ πρέπει ἐντελῶς νὰ διαγραφεῖ ἀπὸ τὰ αἰτήματα· διότι εἶναι θεώρημα, τὸ ὁποῖο ἐπιδέχεται πολλὲς ἀπορίες, τὶς ὁποῖες καὶ ὁ Πτολεμαῖος σὲ κάποιο βιβλίο τοῦ ἐπιχείρησε νὰ λύσει, καὶ ἀπαιτεῖ γιὰ τὴν ἀπόδειξή τοῦ πολλὰ, καὶ ὀρισμούς καὶ θεωρήματα. Καὶ τὸ ἀντίστροφὸ τοῦ [192] ὁ Εὐκλείδης τὸ ἀποδεικνύει ὡς θεώρημα. Ἴσως μάλιστα κάποιοι, παραπλανημένοι, θὰ αξίωναν νὰ τὸ κατατάξουν στὰ αἰτήματα, καθὼς τὸ ὅτι οἱ γωνίες εἶναι μικρότερες ἀπὸ δύο ὀρθές θὰ μᾶς πρόσφερε ἄμεσα τὴν πεποίθησιν ὅτι οἱ εὐθεῖες θὰ συνέκλιναν καὶ θὰ συνέπιπταν. Σὲ αὐτοὺς ὁ Γεμῖνος ἀπάντησε σωστά, λέγοντας ὅτι ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἰδίου, τοὺς ἡγέτες αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης, μάθαμε νὰ μὴ δίνουμε ὑπερβολικὴ σημασία στὶς πιθανὲς φαντασιώσεις ὡς βάση γιὰ τὴν ἀποδοχὴ τῶν συλλογισμῶν στὴ γεωμετρία. Διότι καὶ ὁ Ἀριστοτέλης ὁμοίως λέει ὅτι ἀπαιτοῦμε ἀπὸ τὸν ῥήτορα ἀποδείξεις καὶ

³ Με τὴν ἐννοία τῆς πυθαγόρειας συστοιχίας τὴν ὁποία ἀναφέρει ὁ Ἀριστοτέλης στὸ *Μετὰ τὰ φυσικά* 986a22-26

<Πλάτωνι> Σιμμίας, ὅτι “τοῖς ἐκ τῶν εἰκότων τὰς ἀποδείξεις ποιουμένοις σύνοιδα οὕσιν ἀλαζόσι”.

κάνταῦθα τοίνυν τὸ μὲν ἡλαττωμένων τῶν ὀρθῶν συνεύειν τὰς εὐθείας ἀληθές καὶ ἀναγκαῖον, τὸ δὲ συνευούσας ἐπὶ πλεον ἓν τῷ ἐκβάλλεσθαι συμπεσεῖσθαι ποτε πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μὴ τις ἀποδείξειεν λόγος, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τοῦτο ἀληθές. τὸ γὰρ εἶναι τινὰ γραμμὰς συνιούσας μὲν ἐπ' ἄπειρον, ἀσυμπῶτους δὲ ὑπαρχούσας, καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστὶ καὶ πεφώραται ἐπ' ἄλλων εἰδῶν τῆς γραμμῆς. μήποτε οὖν τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν δυνατόν, ὅπερ ἐπ' ἐκείνων τῶν γραμμῶν;

ἕως γὰρ ἂν δι' ἀποδείξεως αὐτὸ καταδησώμεθα, περισπᾷ τὴν φαντασίαν τὰ ἐπ' ἄλλων δεικνύμενα γραμμῶν. εἰ δὲ καὶ οἱ διαμφισβητοῦντες λόγοι πρὸς τὴν σύμπτωσιν πολὺ τὸ πληκτικὸν ἔχουσιν, πῶς οὐχὶ πολλῶ πλεον ἂν τὸ πιθανόν τοῦτο καὶ τὸ ἄλογον ἐκβάλλοιμεν τῆς ἡμετέρας παραδοχῆς; **[193]**

Ἀλλ' ὅτι μὲν ἀπόδειξιν χρὴ ζητεῖν τοῦ προκειμένου θεωρήματος δῆλον ἐκ τούτων, καὶ ὅτι τῆς τῶν αἰτημάτων ἐστὶν ἀλλότριον ἰδιότητος, πῶς δὲ ἀποδεικτέον αὐτὸ καὶ διὰ ποίων λόγων ἀναιρετέον τὰς πρὸς αὐτὸ φερομένας ἐνστάσεις, τηνικαῦτα λεκτέον, ἥνικα ἂν καὶ ὁ στοιχειωτὴς αὐτοῦ μέλλῃ ποιεῖσθαι μνήμην ὡς ἐναργεῖ προσχρῶμενος. τότε γὰρ ἀναγκαῖον αὐτοῦ δεῖξαι τὴν ἐνάργειαν οὐκ ἀναποδείκτως προφαινομένην ἀλλὰ δι' ἀποδείξεων γνῶριμον γιγνομένην.

ἀποδεχόμεστε ἀπὸ γεωμέτρῃ λογικούς συλλογισμούς· καὶ ὁ Σιμμίας στὸν Πλάτωνα λέει: «συνειδητοποίησα ὅτι ἐκεῖνοι που κάνουν ἀποδείξεις βάσει εἰκασίων εἶναι ἀπατεῶνες».

Εἰδὼ λοιπόν, τὸ ὅτι οἱ εὐθεῖες συγκλίνουν ὅταν οἱ ὀρθές γωνίες μικρύνουν, εἶναι ἀληθές καὶ ἀναγκαῖο, ἀλλὰ τὸ ὅτι, ἐπειδὴ συγκλίνουν, ἀν προεκταθοῦν περισσότερο κάποτε θὰ συμπίσουν, εἶναι μὲν πιθανόν, ἀλλὰ ὄχι ἀναγκαῖο, ἐκτός ἀν κάποιος συλλογισμὸς ἀποδείξει ὅτι αὐτὸ ἰσχύει στὶς εὐθεῖες. Διότι τὸ νὰ ὑπάρχουν γραμμές που συγκλίνουν ἢ μία στὴν ἄλλη ἐπ' ἄπειρον ἀλλὰ δὲν συμπίπτουν, ἀν καὶ φαίνεται ἀπίθανο καὶ παράδοξο, ὥστόσο εἶναι ἀληθές καὶ ἔχει παρατηρηθεῖ σὲ ἄλλα εἶδη γραμμῆς. Μήπως λοιπόν εἶναι δυνατόν [νὰ ἰσχύει] αὐτὸ καὶ στὶς εὐθεῖες, ὅπως ἀκριβῶς [ἰσχύει] σὲ ἐκείνες τὶς γραμμές;

Μέχρι λοιπόν νὰ τὸ δείξουμε αὐτὸ με ἀπόδειξη, τὴν προσοχὴ τῆς φαντασίας τὴν ἀποσπούν αὐτὰ που ἔχουν ἀποδειχθεῖ γιὰ τὶς ἄλλες γραμμές. Καὶ παρόλο που οἱ συλλογισμοί, οἱ ὁποῖοι ἀμφισβητοῦν τὸ ὅτι [οἱ εὐθεῖες] θὰ συμπίσουν, προκαλοῦν μεγάλη ἐκπληξη, πῶς δὲν θὰ πρέπει νὰ ἀπορρίψουμε πολὺ περισσότερο αὐτὸ τὸ πιθανόν καὶ μὴ λογικὸ ἀπὸ τὴ δική μας παραδοχή; **[193]**

Ἀλλὰ, εἶναι φανερό ἀπὸ αὐτὰ, ὅτι πρέπει νὰ ἀπαιτήσουμε ἀπόδειξη γιὰ τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα καὶ ὅτι εἶναι ξένο πρὸς τὰ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικά του αἰτήματος· Τὸ πῶς ὅμως πρέπει νὰ ἀποδειχθεῖ αὐτὸ καὶ με ποίους συλλογισμούς πρέπει νὰ ἀναιρεθοῦν οἱ ἐνστάσεις που ἐγείρονται ἐναντίον του, πρέπει νὰ εἰπωθεῖ σὲ τὸ σημεῖο σὲ τὸ ὁποῖο καὶ ὁ συγγραφέας τῶν *Στοιχείων* πρόκειται νὰ τὸ μνημονεύσει, χρησιμοποιώντας τὸ ὡς προφανές.⁴ Διότι, τότε εἶναι ἀναγκαῖο νὰ ἀποδειχθεῖ ὁ προφανὴς χαρακτήρας του, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι προφανὴς ἀνεὺ ἀποδείξεως, ἀλλὰ καθίσταται γνωστὸς μέσῳ ἀποδείξεων.

⁴ Πρόταση Ι.29 (στὸν Πρόκλο 364.13 καὶ 371.10)

Axiom. I – V. <Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἐὰν ἴσα ἴσοις προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα ἐστὶν, καὶ ἐὰν ἴσων ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἴσα ἐστὶν, καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον, καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.>

Ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιούται, καὶ διαμφοισβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδεὶς. πολλάκις μὲν γὰρ καὶ τὰς προτάσεις ἀπλῶς ἀξιώματα καλοῦσιν, ὁποῖαί ποτε ἂν ὦσιν εἴτε ἄμεσοι κυρίως εἴτε καὶ δεομεναὶ τινος ὑπομνήσεως, καὶ οἱ γε ἀπὸ **[194]** τῆς Στοᾶς ἅπαντα λόγον ἀπλοῦν ἀποφαντικὸν ἀξίωμα προσαγορεύειν εἰώθασιν. καὶ ὅταν διαλεκτικὰς ἡμῖν γράφωσι τέχνας περὶ ἀξιωμάτων, τοῦτο διὰ τῶν ἐπιγραμμάτων δηλοῦν ἐθέλουσιν.

ἀκριβέστερον δὲ τινες ἀπὸ τῶν ἄλλων προτάσεων διακρίνοντας τὸ ἀξίωμα τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον δι' ἐνάργειαν πρότασιν οὕτως ὀνομάζουσιν, ὥσπερ καὶ ὁ <Ἀριστοτέλης> καὶ οἱ γεωμέτραι λέγουσιν. ταῦτόν γάρ ἐστιν κατὰ τούτους ἀξίωμα καὶ ἔννοια κοινή. πολλοῦ ἄρα δεήσομεν ἡμεῖς τὸν γεωμέτρην <Ἀπολλώνιον> ἐπαινεῖν, ὃς καὶ τῶν ἀξιωμάτων ὡς οἶεται γέγραφεν ἀποδείξεις, ἀπεναντίας <Εὐκλείδῃ> φερόμενος. ὁ μὲν γὰρ καὶ τὸ ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς αἰτήμασι κατηρίθμηνεν, ὁ δὲ καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις εὐρίσκειν. ἦν δὲ ἄρα διωρισμένα ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων τῇ φύσει καὶ τῶν ἐπιστημῶν διαφέρον τὸ γένος τῶν τε περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις καὶ πάντα δι' ἐνάργειαν προσπιπτούσας καὶ τῶν ταῖς ἀποδείξεις χρωμένων, αἱ τὰς ἀρχὰς ἀπ' ἐκείνων λαμβάνουσι καὶ λαβοῦσαι χρῶνται πρὸς τὰ οἰκεῖα συμπεράσματα δεόντως.

Αὐτὰ που εἶναι ἴσα με το ἴδιο [πράγμα] εἶναι και μεταξύ τους ἴσα, και αν σε ἴσα προστεθούν ἴσα, τότε ὅλα εἶναι ἴσα, και αν ἀπὸ ἴσα αφαιρεθούν ἴσα, τότε αὐτὰ που ἀπομένουν εἶναι ἴσα, και το ὅλον εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ το μέρος και αὐτὰ που ἐφαρμόζουν το ἓνα στο ἄλλο εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

Αὐτὰ εἶναι, σύμφωνα με ὅλους, τα ἀποκαλούμενα ἀναπόδεικτα ἀξιώματα, καθὼς ἀπὸ ὅλους θεωρεῖται ὅτι ἐτσι εἶναι και κανεὶς δεν τα ἀμφοισβητεῖ. Πολλές φορές βέβαια ἀποκαλοῦν και τις προτάσεις γενικῶς ἀξιώματα, οἵποισδήποτε κι αν εἶναι, εἴτε εἶναι κυριολεκτικὰ ἄμεσα [προφανεῖς] εἴτε ἀπαιτοῦν κάποια διευκρίνιση· και οἱ **[194]** Στωικοὶ συνήθιζαν να ἀποκαλοῦν κάθε ἀπλή καταφατικὴ πρόταση «ἀξίωμα». Και ὅταν συντάσσουν για ἐμὰς διαλεκτικὲς τεχνικὲς περὶ ἀξιωμάτων, αὐτὸ ἐπιθυμοῦν να δηλώσουν μέσω των τίτλων τους.

Κάποιοι, διακρίνοντας με περισσότερη ἀκρίβεια το ἀξίωμα ἀπὸ τις ἄλλες προτάσεις, το ἀποκαλοῦν πρόταση ἄμεσα [αντιληπτὴ] και ἀπὸ μόνῃ της πιστευτῇ λόγῳ του προφανοῦς χαρακτήρα του, ὅπως λένε και ο Ἀριστοτέλης και οἱ γεωμέτρες. Διότι σύμφωνα με αὐτοὺς, ἀξίωμα και κοινὴ ἔννοια εἶναι το ἴδιο. Ἄρα ἐμεῖς, πολὺ ἀπέχουμε ἀπὸ το να πρέπει ἐπαινέσουμε τον γεωμέτρην Ἀπολλώνιο, ο ὁποῖος, ὅπως νόμιζε, ἐγράψε ἀποδείξεις ἀκόμη και για τα ἀξιώματα, ἐρχόμενος σε ἀντίθεση με τον Εὐκλείδη. Διότι ο μὲν [Εὐκλείδης] συμπεριέλαβε στα αἰτήματα και αὐτὰ που μποροῦν να ἀποδειχθοῦν, ἐνὼ ο δε [Ἀπολλώνιος] ἐπιχείρησε να βρεῖ ἀποδείξεις και για τα ἀναπόδεικτα. Αὐτὰ λοιπὸν ἐκ φύσεως ἦταν διακεκριμένα μεταξύ τους και το εἶδος των ἐπιστημῶν [που μελετοῦν] τις ἀμεσες προτάσεις που προκύπτουν λόγῳ του προφανοῦς χαρακτήρα τους διαφέρουν ἀπὸ αὐτὸ [που μελετοῦν οἱ προτάσεις] που ἀπαιτοῦν ἀποδείξεις και λαμβάνουν τις ἀρχές ἀπὸ τις πρῶτες και, ἀφοῦ τις λάβουν, τις χρησιμοποιοῦν για τα κατάλληλα συμπεράσματα με τον σωστὸ τρόπο.

ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, ἣν ὁ <Απολλώνιος> εὕρηκέναι πέπεισται τοῦ πρώτου τῶν ἀξιωμάτων, οὐδὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμότερον, εἰ μὴ καὶ πλέον ἀμφισβητούμενον, μάθοι τις ἂν ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν.

$$\alpha \mid \beta \mid \gamma$$

ἔστω γάρ, φησί, τὸ <α> τῷ <β> ἴσον, **[195]** τοῦτο δὲ τῷ <γ>, λέγω ὅτι καὶ τὸ <α> τῷ <γ> ἴσον. ἐπεὶ γὰρ τὸ <α> τῷ <β> ἴσον τὸν αὐτὸν αὐτῷ κατέχει τόπον, καὶ ἐπεὶ τὸ <β> τῷ <γ> ἴσον, τὸν αὐτὸν καὶ τούτῳ κατέχει τόπον. καὶ τὸ <α> ἄρα τῷ <γ> τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ἴσα ἄρα ἐστίν.” ἐν δὴ τούτοις δύο προλαβεῖν ἀναγκαῖον, ἐν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἕτερον δὲ ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ταῦτα δὲ ὅτι πολλῶ ἀσαφέστερα τοῦ προτεθέντος ἀξιώματος ἐναργές·

πῶς γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν ἐκπληροῦντα τόπον ἴσα ἐστίν; καθ' ὅλα ἢ κατὰ μέρος ἢ κατὰ σχηματισμὸν λόγου; διὸ καὶ οὐκ ἔστι παντελῶς εὐπαράδεκτον τὸ μεταβαίνειν ἐπὶ τὸν τόπον, ὅς ἐστιν ἀγνωστότερος ἡμῖν τῶν ἐν τόπῳ ὄντων. χαλεπὴ γοῦν καὶ ἡ εὗρεσις τῆς οὐσίας καὶ ἀμφισβητήσιμος.

ἴν' οὖν μὴ μακρηγορῶμεν, πάντα ἀξιώματα ὥς ἄμεσα καὶ αὐτοφανῆ παραδοτέον, γνώριμα ἀφ' ἑαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν προσάγων οὐ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν, ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνάργειαν, ἣν ἔχομεν ἐν ταῖς ἀδιδάκτοις προλήψεσιν.

Το ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις – ἡ οποία δεν εἶναι περισσότερο γνωστή ἀπὸ το συμπέρασμα, μὴν εἶναι καὶ περισσότερο ἀμφισβητούμενη – τὴν οποία ο Απολλώνιος ἔχει πειστεί ὅτι βρήκε γιὰ το πρώτο ἀπὸ τα αξιώματα, ἔχει ὡς ἐνδιάμεση βήμα [μία πρόταση], θα το μάθει κανεὶς ἀν ρίξει μία γρήγορη ματιά σε αὐτήν.

$$\alpha \mid \beta \mid \gamma$$

«Ἐστω», λέει, «ὅτι το Α εἶναι ἴσο με το Β, **[195]** καὶ αὐτὸ με το Γ· λέγω ὅτι καὶ το Α εἶναι ἴσο με το Γ. Διότι, ἀφοῦ το Α εἶναι ἴσο με το Β, καταλαμβάνει τὸν ἴδιο τόπο με αὐτό· καὶ ἀφοῦ το Β εἶναι ἴσο με το Γ, καταλαμβάνει τὸν ἴδιο τόπο καὶ με ἐκεῖνο. Ἀρα καὶ το Γ καταλαμβάνει τὸν ἴδιο τόπο με το Γ. Επομένως, εἶναι ἴσα». Σε αὐτά, λοιπὸν, εἶναι ἀναγκαῖο νὰ ληφθοῦν δύο προϋποθέσεις: πρῶτον, ὅτι αὐτὰ που καταλαμβάνουν τὸν ἴδιο τόπο εἶναι ἴσα μεταξύ τους, καὶ δεύτερον, ὅτι αὐτὰ που καταλαμβάνουν τὸν ἴδιο τόπο με κάτι ἴδιο καταλαμβάνουν τὸν ἴδιο τόπο καὶ μεταξύ τους.

Ὅμως εἶναι προφανές ὅτι αὐτὰ εἶναι πολὺ λιγότερο σαφὴ ἀπὸ το αξίωμα που ἔχει προταθεῖ· διότι πῶς γίνεται αὐτὰ που γεμίζουν τὸν ἴδιο τόπο νὰ εἶναι ἴσα; Ὡς σύνολο, κατὰ μέρος, ἢ βάσει κάποιου συστήματος ἀναλογιών; Γι' αὐτὸ καὶ δεν εἶναι καθόλου παραδεκτὸ το νὰ γίνεται μετάβαση στο [ἐπίπεδο] τοῦ τόπου, ὁ οποίος εἶναι λιγότερο γνωστός σε ἐμὰς ἀπὸ τα ὄντα που βρίσκονται σε τόπο. Πράγματι, ἡ εὕρεση τῆς οὐσίας [τοῦ τόπου] εἶναι δύσκολη καὶ ἀμφισβητήσιμη.

Γιὰ νὰ μὴ μακρηγοροῦμε, λοιπὸν, ὅλα τα αξιώματα πρέπει νὰ παραδίδονται ὡς ἄμεσα καὶ αὐτόδηλα, γνωστὰ ἀπὸ μόνα τους καὶ πιστευτά. Διότι αὐτὸς που προσφέρει ἀπόδειξη γιὰ τα πλέον προφανῆ δεν ἐπιβεβαιώνει τὴν ἀλήθεια γι' αὐτὰ, ἀλλὰ μειώνει τὸν προφανῆ χαρακτῆρα που ἔχουμε στὶς ἀδίδακτες ἀντιλήψεις.

Τοῦτο τε δὴ περὶ τῶν ἀξιώματων προληπτόν κριτήριον τῆς ιδιότητος αὐτῶν, καὶ ὅτι πάντα τοῦ κοινοῦ γένους ἐστὶ τῶν μαθημάτων. οὐ γὰρ μόνον μεγέθεσιν ἐπαληθεύει τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ **[196]** ἀριθμοῖς καὶ κινήσει καὶ χρόνοις. καὶ τοῦτο ἀναγκαίως. τὸ γὰρ ἴσον καὶ ἄνισον καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος καὶ τὸ μείζον καὶ τὸ ἔλασσον κοινὰ καὶ τῶν διηρημένων ἐστὶ ποσῶν καὶ τῶν συνεχῶν.

ἢ τε οὖν περὶ τοὺς χρόνους θεωρία δεῖται πάντων τούτων ὡς ἐναργῶν καὶ ἢ περὶ τὰς κινήσεις καὶ ἢ περὶ τοὺς ἀριθμούς καὶ τὰ μεγέθη, καὶ ἐπὶ πάντων ἀληθές, καὶ τὸ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι καὶ τῶν λοιπῶν, ὅπερ ἂν λάβωμεν. κοινοῖς δὲ οὕσιν ἕκαστος χρῆται κατὰ τὴν οἰκειᾶν ὕλην, ἐφ' ὅσον αὐτὴ ἀπαιτεῖ, καὶ ὁ μὲν ὡς ἐπὶ μεγεθῶν, ὁ δὲ ὡς ἐπ' ἀριθμῶν, ὁ δὲ ὡς ἐπὶ χρόνων αὐτῷ προσχρῆται. καὶ οὕτως ἴδια γίνεται τὰ συμπεράσματα καθ' ἐκάστην ἐπιστήμην κἂν ἢ τὰ ἀξιώματα κοινά.

Καὶ μὴν καὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν οὔτε εἰς ἐλάχιστον δεῖ συναιρεῖν, ὡς <Ἡρων> ποιεῖ τρία μόνον ἐκθέμενος – ἀξίωμα γὰρ καὶ ὅτι τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον, καὶ ὁ γεωμέτρης πολλαχοῦ καὶ τοῦτο παραλαμβάνει πρὸς τὰς ἀποδείξεις, καὶ ὅτι τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα· καὶ γὰρ τοῦτο εὐθύς ἐν τῷ τετάρτῳ συντελέσει πρὸς τὸ ζητούμενον –

οὔτε αὖ προστιθέναι ἄλλα ἐπ' ἄλλοις, ὧν τὰ μὲν ἐστὶν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ὕλης, ὡς δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, καίτοι τῶν ἀξιώματων τοῦ κοινοῦ γένους ὄντων, ὡς εἶπομεν, τὰ δὲ ἔπεται τοῖς ἐκκειμένοις, οἷον τὸ ἴσα εἶναι τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια.

Αὐτὸ, λοιπόν, τὸ κριτήριον γιὰ τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ το ἀποδεχτοῦμε ἐκ τῶν προτέρων ὡς ἰδιαίτερο χαρακτηριστικὸν τοὺς, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ ὅτι ὅλα ἀνήκουν στο κοινὸ γένος τῶν μαθηματικῶν.⁵ Διότι καθένα ἀπὸ αὐτὰ δὲν ἐπαληθεύεται μόνον στα μεγέθη, ἀλλὰ ἀναγκαστικὰ καὶ **[196]** στους ἀριθμούς καὶ στις κινήσεις καὶ στους χρόνους· Διότι τὸ ἴσο καὶ τὸ ἄνισο, τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος, τὸ μεγαλύτερο καὶ τὸ μικρότερο, εἶναι κοινὰ καὶ στις διαιρετὲς ποσότητες καὶ στις συνεχεῖς.

Επομένως, τόσο ἡ θεωρία γιὰ τοὺς χρόνους τὰ χρειάζεται ὅλα αὐτὰ ὡς προφανή, ὅσο καὶ ἐκείνη γιὰ τις κινήσεις, καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμούς, καὶ γιὰ τὰ μεγέθη· καὶ σε ὅλες εἶναι ἀληθές ὅτι «αὐτὰ που εἶναι ἴσα με τὸ ἴδιο πράγμα εἶναι καὶ μεταξύ τοὺς ἴσα» καὶ [τὸ ἴδιο ἰσχύει] γιὰ τὰ υπόλοιπα [ἀξιώματα], ὅποιο κι ἂν πάρουμε. Εφόσον εἶναι κοινὰ, καθένας τὰ χρησιμοποιεῖ σύμφωνα με τὴν δική του [γνωστική/ἐπιστημονική] ὕλη, κατὰ τὸ μέτρο που αὐτὴ τὸ ἀπαιτεῖ· καὶ ὁ ἕνας τὰ χρησιμοποιεῖ σε μεγέθη, ὁ ἄλλος σε ἀριθμούς, ἄλλος σε χρόνους. Ἐτσι, δημιουργοῦνται τὰ ἰδιαίτερα συμπεράσματα γιὰ κάθε ἐπιμέρους ἐπιστήμη, ἐστὼ καὶ ἂν τὰ ἀξιώματα εἶναι κοινὰ.

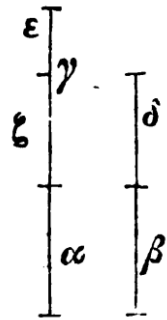
Περαιτέρω, οὔτε τὸν ἀριθμὸν τοὺς πρέπει νὰ μειώσῃ στο ἐλάχιστο, ὅπως κάνει ὁ Ἡρων, παρουσιάζοντας μόνον τρία· διότι εἶναι ἀξίωμα καὶ τὸ ὅτι «τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερο τοῦ μέρους», καὶ ὁ γεωμέτρης παραλαμβάνει καὶ αὐτὸ σε πολλές περιπτώσεις γιὰ τις ἀποδείξεις· καὶ ὅτι «αὐτὰ που ἐφαρμόζουν μεταξύ τοὺς εἶναι ἴσα» καθὼς καὶ αὐτὸ, ἄλλωστε, ἀπὸ τὴν τέταρτη κιόλας πρόταση συμβάλλει πρὸς τὸ ζητούμενο.

Οὔτε πάλι πρέπει νὰ προσθέτῃ ἄλλα ἐπιπλέον, ἐκ τῶν ὁποίων κάποια ταιριάζουν με τὴν γεωμετρικὴ ὕλη, ὅπως τὸ ὅτι «δύο εὐθεῖες δὲν μποροῦν νὰ περιέχουν κάποιο χωρίο». Διότι, ὅπως εἶπαμε, τὰ ἀξιώματα ἀνήκουν στο κοινὸ γένος [τῶν μαθηματικῶν], ἐνῶ τὰ ἄλλα ἔπονται αὐτῶν που ἔχουν ἐκτεθεῖ, ὅπως τὸ ὅτι «αὐτὰ που εἶναι διπλάσια τοῦ ἰδίου πράγματος εἶναι ἴσα [μεταξύ τοὺς]».

⁵ Στὴν κοινὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη.

τοῦτο γὰρ ἀκολουθεῖ τῷ ἂν ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα εἶναι. τὰ γὰρ ἴσον τῷ **[197]** ἡμίσει προσλαβόντα αὐτὸ τὸ ἡμισυ διπλάσια γίνεται τοῦ αὐτοῦ καὶ ἴσα ἀλλήλοις διὰ τὴν ἴσην προσθήκην. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν λόγον οὐ τὰ διπλάσια μόνον, ἀλλὰ καὶ τὰ τριπλάσια καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλάσια πάντα ἴσα φανήσεται.

Τούτοις δὲ τοῖς ἀξιώμασιν ὁ <Πάππος> συναναγράφεσθαι φησιν ὅτι καὶ ἂν ἴσοις ἄνισα προστεθῇ, ἢ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶν τῇ τῶν προστεθέντων, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, ἢ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἐξ ἀρχῆς. καὶ ἐστὶ καὶ ταῦτα προφανῇ μὲν ἀφ' ἐαυτῶν, δεικνύται δὲ ὁμῶς τοῦτον τὸν τρόπον.

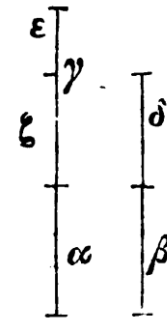


ἔστω ἴσα τὰ <α> <β>, καὶ προσκείσθω αὐτοῖς ἄνισα τὰ <γ> <δ>, μείζον δὲ τὸ <γ> τοῦ <δ> τῷ <ε>, †? ἐπεὶ οὖν τὸ <α> τῷ <β> ἴσον καὶ τὸ <ζ> τῷ <δ>, τὸ <αζ> τῷ <βδ> ἴσον. ἐὰν γὰρ ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα. †? τὸ ἄρα <γα> τοῦ <βδ> τῷ <ε> μόνῳ ὑπερέχει, ὥ καὶ τὸ <γ> μόνον ὑπερεῖχεν τοῦ <δ>.

πάλιν ἄνισα τὰ <γ> <δ> καὶ προσκείσθω ἴσα τὰ <α> <β>, καὶ ἔστω τοῦ <γ> πρὸς τὸ <δ> ὑπεροχὴ τὸ <ε>. ἐπεὶ οὖν τὸ <α> τῷ <β> ἴσον **[198]** καὶ †? τὸ <αζ> ἴσον τῷ <βδ>, ὅλον ἄρα τὸ <αγ> τοῦ <βδ> τῷ <ε> μόνῳ ὑπερέχει, ὥ καὶ τὸ <γ> τοῦ <δ>.

Διότι αὐτὸ ἐπεται τοῦ [αξιώματος] ὅτι «αν σε ἴσα προστεθοῦν ἴσα, τότε αὐτὰ που προκύπτουν εἶναι ἴσα». Διότι ὅταν σε αὐτὰ που εἶναι ἴσα με το μισό προστεθεῖ το ίδιο το μισό γίνονται διπλάσια ἀπὸ αὐτὸ καὶ ἴσα μεταξύ τους, λόγω της πρόσθεσης ἴσων. Καὶ κατὰ τὴν ἴδια λογικὴ δὲν θὰ εἶναι ἴσα μόνο τὰ διπλάσια, ἀλλὰ καὶ τὰ τριπλάσια καὶ ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἰδίου.

Σε αὐτὰ τὰ αξιώματα λέγεται ὅτι ο Πάππος πρόσθεσε καὶ τὸ ἐξῆς: «ἐάν σε ἴσα προστεθοῦν ἄνισα, ἡ συνολικὴ ὑπεροχὴ εἶναι ἴση με τὴν ὑπεροχὴ ὅσων προστέθηκαν σε αὐτὰ»· καὶ ἀντίστροφα, «ἐάν σε ἄνισα προστεθοῦν ἴσα, ἡ συνολικὴ ὑπεροχὴ εἶναι ἴση με τὴν ὑπεροχὴ των ἀρχικῶν [ἀνίσων]». Καὶ αὐτὰ ἐπίσης εἶναι αὐτόδηλα, ὡστόσο ἀποδεικνύονται με τὸν ἐξῆς τρόπο:



Ἐστω ὅτι τὰ Α καὶ Β εἶναι ἴσα, καὶ ας προστεθοῦν σε αὐτὰ τὰ ἄνισα Γ καὶ Δ, με τὸ Γ νὰ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ Δ κατὰ τὸ Ε. Επειδὴ, λοιπὸν, τὸ Α εἶναι ἴσο με τὸ Β καὶ τὸ Ζ με τὸ Δ, τὸ ΑΖ εἶναι ἴσο με τὸ ΒΔ· διότι, ἐάν σε ἴσα προστεθοῦν ἴσα τότε αὐτὰ που προκύπτουν εἶναι ἴσα. Ἀρα τὸ ΓΑ ὑπερέχει τοῦ ΒΔ μόνον κατὰ τὸ Ε, κατὰ τὸ ὁποῖο καὶ τὸ Γ μόνον ὑπερεῖχε τοῦ Δ.

Πάλι, ἔστω ὅτι τὰ Γ καὶ Δ εἶναι ἄνισα, καὶ ας προστεθοῦν σε αὐτὰ τὰ ἴσα Α καὶ Β, καὶ ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ εἶναι τὸ Ε. Επειδὴ λοιπὸν τὸ Α εἶναι ἴσο με τὸ Β καὶ τὸ ΑΖ εἶναι ἴσο με τὸ ΒΔ, τότε ολόκληρο τὸ ΑΓ ὑπερέχει τοῦ ΒΔ μόνον κατὰ τὸ Ε, κατὰ τὸ ὁποῖο καὶ τὸ Γ ὑπερεῖχε τοῦ Δ.

Ταῦτα οὖν ἔπεται τοῖς προειρημένοις αξιώμασι καὶ εἰκότως ἐν τοῖς πλείστοις ἀντιγράφοις παραλείπεται, ὅσα δὲ ἄλλα τούτοις προστίθῃσιν, προεἰληπταὶ διὰ τῶν ὅρων καὶ ἐκείνοις ἀκόλουθα, οἷον ὅτι πάντα τοῦ ἐπιπέδου τὰ μῦρια καὶ τῆς εὐθείας ἀλλήλοις ἐφαρμόττει – τὰ γὰρ εἰς ἄκρον τεταμένα τοιαύτην ἔχει φύσιν – καὶ ὅτι γραμμὴν μὲν διαιρεῖ σημεῖον, ἐπιφάνειαν δὲ γραμμὴ, στερεὸν δὲ ἐπιφάνεια – πάντα γὰρ διαιρεῖται τούτοις, ὑφ' ὧν καὶ περατοῦται προσεχῶς – καὶ ὅτι τὸ ἄπειρον ἐν τοῖς μεγέθεσιν ἐστὶν καὶ τῇ προσθέσει καὶ τῇ ἐπικαθαιρέσει, δυνάμει δὲ ἑκάτερον· πᾶν γὰρ συνεχές ἐπ' ἄπειρον διαιρετόν ἐστι καὶ αὐξητόν.

Αὐτὰ λοιπὸν ἐπονται ἀπὸ τα προηγούμενα αξιώματα καὶ δικαίως παραλείπονται στα περισσότερα ἀντίγραφα· ὅλα τα ἄλλα ὅμως που προστίθενται σε αὐτὰ, ἔχουν ληφθεῖ ἐκ των προτέρων μέσω των ορισμῶν καὶ ακολουθοῦν ἐκεῖνα. Για παράδειγμα ὅτι ὅλα τα μέρη του ἐπιπέδου καὶ τῆς εὐθείας ἐφαρμόζουν μεταξύ τους – διότι τέτοια εἶναι ἡ φύσις ὧν ἐκτείνονται ὡς τα ἄκρα· καὶ ὅτι ἓνα σημεῖο διαιρεῖ μίαν γραμμὴν, μίαν γραμμὴν διαιρεῖ μίαν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν ἐπιφάνειαν [διαιρεῖ] ἓνα στερεόν – διότι ὅλα διαιροῦνται ἀπὸ ἐκεῖνα ἀπὸ τα ὁποῖα περατώνονται ἄμεσα· καὶ ὅτι τὸ ἄπειρον ὑπάρχει μέσα στα μεγέθη με τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν, ἐν δυνάμει καὶ στις δύο· διότι κάθε συνεχές εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετό καὶ αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον.