

SCHOOL OF THEOLOGY AT CLAREMONT



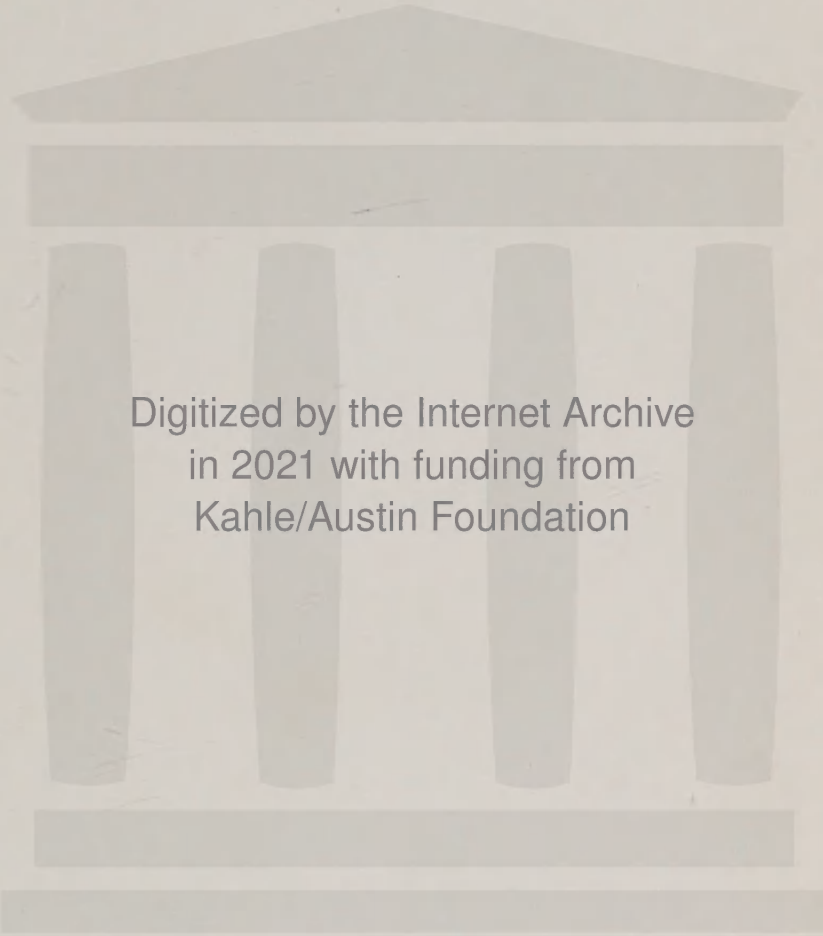
10017033807



Theology Library

SCHOOL OF THEOLOGY
AT CLAREMONT
California

From the library
of
Professor Philip Merlan
1897-1968



Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
Kahle/Austin Foundation

MAX STECK

PROKLUS DIADOCHUS / EUKLIDKOMMENTAR

(Erste deutsche Ausgabe)

Proclus, Diadochus

PROKLUS DIADOCHUS

410–485

KOMMENTAR

ZUM ERSTEN BUCH VON EUKLIDS „ELEMENTEN“

Aus dem Griechischen ins Deutsche übertragen
und mit textkritischen Anmerkungen versehen

von

P. LEANDER SCHÖNBERGER †, O.S.B.

Eingeleitet, mit Kommentaren und bibliographischen Nach-
weisen versehen und in der Gesamtedition besorgt

von

MAX STECK

Herausgegeben im Namen der Kaiserlich Leopoldinisch-
Carolinisch Deutschen Akademie der Naturforscher von
Emil Abderhalden
Präsidenten der Deutschen Akademie der Naturforscher



1945

HALLE (SAALE)

Copyright: Deutsche Akademie der Naturforscher, Halle (Saale) 1945
Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses G. m. b. H., Halle (Saale)
Printed in Germany

Dem Cusanus-Forscher und feinsinnigen Platon-Interpreten

Herrn Prof. Dr. Ernst Hoffmann

in Verehrung zugeeignet

Inhaltsübersicht

	Seite
Geleitwort	VII
Vorwort des Herausgebers	IX
 Einleitung, bestehend aus:	
I. Allgemeine Einführung	3
II. Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik.	35
1. Die ontologischen und erkenntnistheoretischen Positionen des Proklus.	37
2. Die Prokleische Methodologie der Mathematik	53
3. Die seinsgründenden Prinzipien der griechischen Mathematik	83
4. Die Urgestalten des Mathematischen als seine Sinnträger	98
5. Die Grundlagen eines mathematisch orientierten Idealismus im Prokleischen Werke	125
Vorwort des Übersetzers	155
 Das Werk selbst:	
Das 1. Buch des Kommentars	161
Das 2. Buch des Kommentars	197
Das 3. Buch des Kommentars	289
Das 4. Buch des Kommentars	411
Verzeichnis der Abkürzungen (Siglen)	162
Anmerkungen des Herausgebers (Kommentare)	469
Bibliographische Nachweise.	517
Verzeichnis der Abbildungen und Tafeln	549
Quellen-Register	551
Namenverzeichnis	559
Sachweiser	571
 Zeit-Tafeln als Ausschlagtafeln am Schluß des Werkes	

Vorwort des Herausgebers

Wenn wir heute ein auf uns gekommenes Werk der Spätantike erstmals in einer deutschen Übersetzung und Ausgabe der wissenschaftlichen Öffentlichkeit vorlegen, so bedarf dieses Tun der Rechtfertigung. Und diese muß aus inneren Gründen erfolgen, die ihr den Charakter der Notwendigkeit verleihen und aufprägen. Es ist die Aufgabe dieses Vorworts, diese inneren Gründe darzulegen.

PROKLUS DIADOCHUS war der vorletzte Vorsteher der von PLATON gegründeten und nach ihm benannten Akademie. Sie hat die geistigen Leitlinien des Abendlandes und seiner Kultur maßgebend bestimmt. Sie hat diese Leitlinien zum ersten Male in der gesamten Geistesforschung und Geistesgeschichte im totalsten Sinne und in allen Bezügen angegeben. Alle Späteren, Denker und Akademien, schöpferische Künstler und Universitäten, alle geistig schaffenden Menschen und Institutionen haben von diesem Erbe gezehrt. Und dies ist bis auf unsere Tage so geblieben. PROKLUS war neben PLOTIN der bedeutendste Vertreter des Neuplatonismus im 5. nachchristlichen Jahrhundert und vielleicht der letzte Philosoph und Mathematiker des ausgehenden Altertums, in dessen Gesamtwerk die Gedanken der Vergangenheit wie in einem Brennpunkt in all ihren Wesentlichkeiten konvergierten. Von ihm aus sind sie dann, am nachhaltigsten und wirksamsten besonders in den deutschen Geistraum, vielfach ein- und ausgestrahlt worden und haben diejenigen Geistgestalten geformt, die wir als Deutschen Idealismus im weitesten Sinne zu bezeichnen gewohnt sind. PROKLUS war, wie die deutschen Denker der CUSANUS, KOPERNIKUS, KEPLER, LEIBNIZ, KANT, LAMBERT, FICHTE, HEGEL, GAUSS, RIEMANN . . . bei der Durcharbeitung, Erforschung und Begründung seiner philosophischen Lehren vom Sein der Welt (Ontologie), vom Sein der Begriffe (Logik), vom Sein der Erkenntnis

(Erkenntnislehre), vom Sein des Schönen (Ästhetik), vom Sein des Guten (Ethik) und vom Sein des Irrationalen und Über-rationalen (Metaphysik) vielfach an der Mathematik, ihrer speziellen Denkweise, ihren Gebilden des Raumes und der Zahl als Phänomenen des Geistes orientiert. Sie lieferten auch ihm, wie schon seinen Vorgängern, in ihrer Exaktheit, Reinheit, Strenge und generellen Bedeutungshaltigkeit die Maßstäbe und die eigentlichen Mittellglieder zur Erhärtung seiner philosophischen Thesen und Lehren. Sie gaben auch ihm als die genuinen Repräsentanten von Ideen die eigentlichen Seins-, Erkenntnis- und Wahrheitsgründe an die Hand. Sie ermöglichten auch ihm schon den konstruktiven Aufbau des gesamten Seins aus dem Geiste und von einem Wurzelreich und Mutterboden und ihren Gebilden her, die seither die sichersten Belege für das philosophische und mathematische Apriori geblieben sind. So wurde PROKLUS der erste und bislang auch der letzte Philosoph der Mathematik von höchstem Rang, der Sichter und Werter der denkerischen Ansätze und Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, der umfassend ergreifende Erforscher der ideellen Gemeinsamkeiten der Mathematik, der Philosophie und der Künste, der bildenden sowohl, wie der musischen.

Wenn ich den zentralen Gedankengang des PROKLEISCHEN Gesamtwerkes kurz in Formulierungen angeben darf, die unserer Zeit geläufiger sind und ihrer Wertung des Geistes näher liegen, so soll dies so geschehen: Niemand kann definieren, was schön ist; aber jedermann hat eine Anschauung davon. Es kann auch niemand rational-begrifflich bestimmen, was wahr ist; aber jedermann „weiß“ darum, er hat eine Anschauung davon. Kein Mensch ist fähig, einem anderen Menschen begrifflich zu „erklären“ und mitzuteilen, was rot oder blau ist; aber jedermann hat durch den anschaulichen Aufweis dieser Farben eine feste Vorstellung von ihrer Unterschiedlichkeit, von den einzelnen Farbwerten selbst und von der Farbe rot oder blau an sich, abgezogen von allem Gegenständlichen, dem sie zukommt. Warum diese Gemeinplätze? — Weil sie — wenn sie schon als solche in unser heutiges Bewußtsein wieder eingehen müssen, um uns Dinge

und Gestalten grundsätzlicher Art anzunähern — die entscheidenden Ansatzpunkte bilden für das, was in dem hier in einer deutschen Ausgabe vorgelegten Werk der Spätantike überhaupt in Frage und zur Beantwortung steht. Man ersieht aus ihnen — jedem verständlich —, daß es Wesenhaftigkeiten der Dinge gibt, die nur anschaulich ergriffen werden können und in einer Weise nur als Anschauungen zum Urbesitz unseres Geistes und unserer Seele gehören und deren eigentliche innere Strukturen und typischen Strukturfelder schlechthin ausmachen.

Denn alle diese obersten Anschauungsgestalten wie die Schönheit und die Wahrheit, die Ordnung, die Symmetrie, die Harmonie, die Tapferkeit, das Gute . . . sind mit dem Sein selbst unlöslich in einer Einheit verbunden. Im Falle des Schönseins eines Kunstwerkes gewahren wir durch unser Auge, das 'sonnenhaft ist, weil es sonst die Sonne nie erblicken könnte', am Kunstwerk und seinem Sein selbst höhere Formen, geistige Ordnungen und seelische Zusammenhänglichkeiten, die auf den gründigen Urbesitz unseres Geistes und auf die wesentliche Substanz unserer Seele hinweisen und damit die Existenz beider auch beweisen. Sie sind es eigentlich, die die Existenz der Seele und des Geistes und ihrer Unsterblichkeiten belegen. Mag man sie Harmonie, Ausgewogenheit der Proportionen, Symmetrien der künstlerischen Formgebung, Totalitäten der Komposition des Kunstwerks oder wie auch immer heißen. Man trifft im Wort immer nur einen Teil oder Teile dessen, was eigentlich ein Ganzes ausmacht und eine ungebrochene und unbrechbare Einheit ist. Dieses Ganze und diese Einheit stehen immer in höheren Bezügen zu einem Seienden schlechthin, das seinerseits in seinem Wesen und seiner Struktur einer höheren Vernunft untersteht, die man Schöpfung nennen kann. Die Einheit der Eigenschaftlichkeit „schön“ kann nur mit dem Seienden, dem sie als höchste und allgemeine „Gattung“ kategorialer Form zukommt, als Einheit in ganzheitlicher Ausprägung begriffen, bewußt gemacht und vollgültig verstanden werden.

Nicht anders steht es mit dem Wahrsein irgendeiner begrifflich gefaßten Aussage, die wir als Menschen machen und in reinsten

Form in der Mathematik und den exakten Naturwissenschaften vor uns haben. Zum Wahr-Sein-Sollen und zum Wahren muß immer ein übergreifendes Seiendes vorhanden sein, mit dem sich das Wahre durch eine anschauende Urteilskraft in Übereinstimmung befindet. Dies ist das Hauptkriterium der Wahrheit schlechthin. Letztlich waltet dabei immer ein Verhältnis des objektiven Geistes ob, das durch die Idee der Gleichheit gestiftet wird. Daher ist diese Idee für alle mathematischen Wissenschaften fundamental und steht am Anfang und Ursprung jeder mathematischen und naturwissenschaftlichen Theorienbildung.

Der Geist und die Seele ergreifen die Schönheit eines Kunstwerkes oder die Wahrheit einer mathematischen oder naturwissenschaftlichen Aussage auf Grund gewisser Arten „metaphysischer Kategorien“, die in ihnen selbst liegen und als ideelle Mittelglieder total sind und alle Seinsbezüge in sich befassen und umgreifen. Sie liegen der nurbegrifflichen Bewußtwerdung jeder Art von Idee als entscheidende, Seinsergreifung überhaupt erst ermöglichende Geistgestalt voraus. In einer generellen Synthesis vereinigen wir ihre ganzheitliche Inhaltlichkeit als Struktur eines Allgemeinen, mit ihrer formalen, von unserem Geiste erst korrelativ geforderten und gestalteten Begrifflichkeit. Will man jene „metaphysischen Kategorien“ Anschauungen nennen, so trifft man damit das Wesen idealistischen Forschens überhaupt:

Die Schönheit wird nicht, sondern sie ist. Die Wahrheit wird nicht, sondern sie ist. Hierin bezieht sich das Wesen dessen, was wir Ideen nennen, von der Idealismus sich herleitet.

An diesem Sein sind die Künste in gleicher Weise wie die mathematischen Wissenschaften und die Naturwissenschaften verankert. Dieses Verschwistertsein allein sichert ihnen allen Teilhabe an den höchsten geistigen Werten und seelischen Gehalten, die ein großes Menschentum in Jahrtausenden geprägt hat. Das Sein der Wahrheit und das der Schönheit sind die Angelpunkte des hier vorgelegten Werkes des Neuplatonikers PROKLUS DIADOCHUS.

In ihm haben die Gedanken des PROKLUS und der vor ihm stehenden vorsokratischen, pythagoreischen, platonischen und neuplatonischen Philosophie den vollendetsten Niederschlag gefunden, wie auch seine Begründungsordnungen dort vollgültig niedergelegt sind. Man darf seinen „EUKLID-Kommentar zum 1. Buch der euklidischen ‘Elemente’“ als sein reifstes Werk ansehen. — Das Grundwerk EUKLIDS seinerseits hat in der Mathematik und in den Künsten, in der Philosophie und in den exakten Naturwissenschaften, wie auch in den sogenannten Kultur- oder Geisteswissenschaften — zu denen eigentlich die Mathematik als reifste Disziplin gehört — wohl mit die tiefsten und gründigsten Wirkungen in den so mannigfaltig strukturierten Geisträumen des Abendlandes durch die Jahrtausende hindurch geübt. Und man kann die 13 Bücher der „Elemente“ EUKLIDS nicht ohne den Kommentar des PROKLUS vollgültig verstehen. Man kann sie ohne ihn nicht adäquat einordnen in die Geistesgeschichte. Man kann sie in ihren entscheidenden apriorischen Annahmen und Elementen nicht werten und in ihrer fundamentalen Tragweite dem Bewußtsein unserer Zeit nicht nahe bringen, ohne die Sichten zu kennen, die PROKLUS in seinem Kommentar für das in ihnen niedergelegte Geistesgut erschlossen, bloßgelegt und in einzigartiger Zusammenschau aller Aspekte des Geistes erarbeitet hat. Es geht dabei nicht um Mathematikerpersönlichkeiten der Antike und ihre Einzelleistungen. Es geht um das Ganze der griechischen Mathematik als derjenigen *mathesis universalis*, die in den deutschen Geistesraum hinaufgewirkt hat, nicht so sehr als Rationalismus, sondern in den entscheidenden Bezügen als Idealismus der Deutschen schlechthin, in Wissenschaft und Kunst und in der Gestaltung des Reiches.

Diese Thesen werden zwar den Widerspruch der meisten modernen Mathematiker des Formalismus und der Logistik hervorrufen. Sie werden auch bei den Philosophen des Empirismus, Sensualismus und Positivismus, wie auch bei all den Denkern, die sich in der Konstruktion des Seienden auf nur-rationale Methoden, Verfahrensweisen und Elemente stützen zu dürfen und berufen zu müssen glauben, wenig

oder keinerlei Zustimmung finden. Die moderne formalistische Mathematik und ihre Sonderform des Logizismus haben EUKLID und sein Werk bislang in einer Einseitigkeit aufgefaßt, die gerade seine eigentlichen Tiefenwirkungen auf die Formung der Geistigkeit des Abendlandes und seiner Kultur verschüttete, weil sie sie nicht mehr beachtete und (teils bewußt, teils unbewußt) glaubte ausschalten und außer acht lassen zu dürfen. Man wird aber inskünftig nicht darum herumkommen, die EUKLIDischen „Elemente“ auf dem Hintergrunde der PLATONischen Philosophie, aus der sie herausgewachsen sind, zu betrachten und in der mathematischen Grundlagenforschung gerade darauf entscheidenden Wert zu legen. Das bedeutet aber eine vollständige Reformation des Studiums der Mathematik, der mathematischen Unterrichtsgestaltung und eine vollkommen neue Sinnggebung des Mathematischen und seiner Denkweise überhaupt. Wer fürderhin ohne das sinntiefe Geistesgut, das vor den EUKLIDischen „Elementen“ steht und sie als geistige Schöpfung und erstes geschlossenes System der Mathematik in ihrer Ganzheit und Totalität erst ermöglicht hat, auszukommen sucht, den wird gerade der Kommentar des PROKLUS, insbesondere seine beiden tiefdurchdachten Vorreden, eines Anderen, und, wie wir glauben, auch eines Besseren belehren.

Das Werk des PROKLUS selbst gibt daher die eigentlichen inneren Begründungen für unsere Thesen her und es ist daher verständlich, daß einige tieferblickende Geister aus Mathematik und Philosophie schon früher und auch bis in die neueste Zeit hinein immer wieder die Forderung nach einer ungekürzten und vollständigen deutschen Ausgabe des PROKLEischen Kommentars erhoben haben. Bislang ist diese Forderung unerfüllt geblieben. Dies mag mannigfache Gründe haben. Außer den textkritischen und den mit der Übersetzung des äußerst schwierigen griechischen Originaltextes zusammenhängenden, die der Herr Übersetzer in seinem Vorwort (S. 155) im einzelnen dargelegt und in seine Anmerkungen zur deutschen Übertragung hineingearbeitet hat, sind es vor allen Dingen geistesgeschichtliche, kulturmorphologische und weltanschauliche Gründe, die eine vollständige deutsche Ausgabe dieses Fundamentalwerkes bislang hintan-

gehalten oder gar verunmöglicht haben. Der Siegeszug rationalistischer, mechanistischer, empiristisch-sensualistischer und positivistischer Philosopheme, die den Lauf der wissenschaftlichen und geistigen Dinge — und vielfach auch der politischen Entwicklungen — des Abendlandes vom ausgehenden 18. Jahrhundert an, im 19. Jahrhundert und bis hinein in die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts bestimmt haben, stand auch diesem Werk in seiner ideenformenden, idealistisch ausgerichteten und ganz und gar zu jenen Philosophemen konträren Durchformung und Geistigkeit im Wege und sogar entgegen. Jeder idealistische Ansatz der Wissenschaften und der Künste war jenen Philosophemen und ihren so zahlreichen, auch heute noch wesentlich fungierenden und an den hohen Schulen des Reiches amtierenden Vertretern materialistischer Geisteshaltung im Grunde verhaßt. Sie witterten in ihm mit Recht die weittragendere, generellere, totalere und ganzheitlichere Ansatzmethode und auch die gründigere, deutschem Wesen und Sein gemäßere Tiefe der Inhaltlichkeit und Sinngebung der Gedanken. Man mußte also PROKLUS in seiner Ganzheit und in seiner einzigartigen, keineswegs nur mathematikhistorischen Bedeutung für das Werk der „Elemente“ EUKLIDS gleichsam instinktsicher ablehnen. Man mußte auch den Idealismus eines PROKLUS totschweigen oder, wo dies nicht anging, verhindern, daß eine vollständige deutsche Ausgabe seines Fundamentalwerks es ermöglicht hätte, einer breiteren wissenschaftlichen Öffentlichkeit umfassenden Einblick in die bereits bei PROKLUS stehenden Gedanken und Formulierungen einer idealistischen Geistigkeit, die bedeutsam nachgewirkt hat, zu gewähren. Die Analysen des gesamten Werkes, die geistigen Rang beanspruchen dürfen, sind selten. Es sind eigentlich nur zwei: diejenige von NICOLAI HARTMANN und diejenigen von ANDREAS SPEISER. Man fürchtete von seiten der Mathematik und von seiten der Philosophie, von den Künsten ganz zu schweigen, für die eigenen positivistischen und nominalistischen Gebäude, deren wankende Fundamente man nur zu gut kannte. Da konnte man kein Werk brauchen, das Fundamentalphilosophie lehrte und an die wahren *fundamenta mathematicae* heranging. Es unterblieb daher eine voll-

ständige deutsche Ausgabe, die ein Mathematiker, der gleichzeitig mit allen Problemen der Philosophie vertraut war und sie wie seine Fachwissenschaft gründlich studiert hatte, hätte besorgen müssen. Man überließ das PROKLEISCHE Werk im griechischen Original — selbst dann noch, als man eine brauchbare Edition des Originals durch G. FRIEDLEIN (1873) erhielt — den Philosophen allein, die es ihrerseits wohl benützten, aber aus dem jeder Philosoph gerade nur das für sein „System“ Brauchbare herausholte, ohne sich um das Ganze des Werkes zu kümmern. Dies hatte auch die Mathematik getan, indem sie den Kommentar des PROKLUS nur einseitig in seiner historischen Ergiebigkeit heranzog und nur für die Klärung historischer Fragestellungen zur Entwicklung der griechischen Mathematik und ihren Einzelaussagen und Einzelleistungen benützte. Daß seine entscheidenden Ergebnisse und Gedanken aber gerade nicht die historischen, die im Werk nur eine willkommene Beigabe darstellen — wovon sich jeder überzeugen kann —, sind, sondern diejenigen, die in den Geist, der Mathematik treibt, selbst hineinleuchten und ihn wie in einem Spiegel selbst betrachten, das übersah man geflissentlich, um die so „stolzen“ Gebäude des Positivismus — des Materialismus in den exakten Wissenschaften —, Mechanismus und Empirismus in den exakten Naturwissenschaften, des Nominalismus und des metaphysikfeindlichen Formalismus und Logizismus in ihren ersten Fundamenten und sogenannten Grundlegungen nicht zu gefährden.

Damit dürfte der Sinn der ersten vollständigen deutschen Ausgabe dieses Werkes und die Begründung ihrer Notwendigkeit in unserer Zeit genügend umrissen und belegt sein. Jedem Einsichtigen wird nach dem Studium des Werkes und nach dem der einzelnen Abschnitte unserer grundsätzlichen Einleitung in sein Gedankengut (S. 1—152) klar werden, daß man der Geistes- und Kulturforschung des Abendlandes dieses Werk bislang systematisch in seiner gesamten Ideenhaltigkeit und Sinntiefe entzogen hat, als man eine deutsche Ausgabe nach Möglichkeit hintansetzte oder gar verhinderte. Man wird im Lager des Positivismus auch heute über eine solche Aus-

gabe spotten und sie für unwesentlich erklären und dementsprechend „recensieren“! Aber das macht nichts! —

Man hätte zwar die geistigen Tiefenwirkungen des PROKLEISCHEN Werkes, die es bei den größten deutschen Denkern, Naturforschern und Mathematikern, als den wahren Weltweisen hinterlassen hat, unmittelbar beim Studium jener — wenn es in der letzten Zeit von ungefähr hundert Jahren überhaupt getrieben wurde — sehen können. Aber dem Positivismus sind nun einmal Brocken und Bruchstücke, „Fragmente“, lieber als das Ganze, aus dem Zusammenhang herausgerissene Stellen beweisender als solche, die im Ganzen als in einer systematischen beziehungsvollen denkerischen Einheit wurzeln und dort allein ihren Boden und Ort haben, aus dem heraus sie ein umfassendes Verständnis des Ganzen ermöglichen.

Wir können den deutschen Idealismus im weitesten Sinne gerade von diesem Wurzelreich des PROKLEISCHEN Werkes her an den eigentlichen Quellen erforschen und ihn weder in der Philosophie, noch in den Einzelwissenschaften, noch in den Künsten und vor allen Dingen nicht in der Mathematik der Forscher der deutschen Linie sinntief verstehen, wenn wir nicht den gesamten Kommentar des PROKLUS heranziehen und seine Grundlehren zu begreifen und unserem wissenschaftlichen Bewußtsein einzufügen suchen. NIKOLAUS VON KUES, NIKOLAUS KOPERNIKUS, JOHANNES KEPLER, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, IMMANUEL KANT und GEORG WILHELM FRIEDRICH HEGEL berufen sich auf PROKLUS und sein Werk in entscheidenden Punkten ihrer eigenen Lehre und in ihrer Weltsicht. Eine weniger bekannte Stelle bei HEGEL möge dies beweisen. Es heißt dort: „PROKLUS führte ein äußerst gelehrthätiges Leben; er war ein tiefer spekulativer Mann und besaß den größten Umfang von Kenntnissen usw. . . .“ (Jubil.-Ausgabe ed. GLOCKNER, Bd. 19, S. 71—92; die zitierte Stelle beginnt S. 72 unten; man sehe auch im GLOCKNERSCHEN Hegel-Lexikon unter dem Stichwort „PROKLUS“ nach, um zu ermessen, wie weitgehend noch HEGEL das Gedankengut des PROKLUS für die Formung seines eigenen Werkes herangezogen hat.)

Soll also ein totales Verständnis des idealistischen Ansatzes der Wissenschaften und der Künste in unserer Zeit wieder möglich sein und zu einer neuen Renaissance des Geistes und damit auch wieder zu einem echten deutschen Humanismus, der die oben bezeichnete ältere Linie organisch fortsetzt und zur Wiedergewinnung der verlorenen *universitas litterarum*, führen, so wird man nicht länger an diesem Denker der Spätantike und an seinem Werke vorbeigehen können und dürfen. Unsere Zeit muß sich anschicken, das PROKLEISCHE Werk aus umfassenden geistigen Sichten neu zu erschließen und auf Grund seiner geistigen Standorte generelle Einsichten allgemein-geistiger Art in die Geistgestalt des Abendlandes gewinnen, die der genuinen Kultur und Geiststruktur insbesondere der deutschen Geisträume und ihrem Verstehen überhaupt wieder gerecht werden. Dies aber ist nur auf dem Boden einer vollständigen deutschen Ausgabe des griechischen Originals möglich. Sie muß im Hinblick auf das Ganze so eingeleitet sein, daß man schon aus der Einleitung die wesentlichsten Sichten erkennt, auf die es ankommt. Dies habe ich auch in meiner Einleitung des Werkes versucht und bin bemüht gewesen, alle wichtigen Aspekte zu diesem großen Thema der abendländischen Kultur zu zeichnen. Im Rahmen meiner sonstigen Bemühungen um die Herausarbeitung und Neugewinnung eines Bodens idealistischer Ansatzmächtigkeit und Ideenhaltigkeit in der philosophisch durchformten Mathematik habe ich es daher auch unternommen, für eine, den heutigen wissenschaftlichen Anforderungen genügende deutsche Übersetzung dieses geistesgeschichtlich hochwichtigen und hochaktuellen Werkes des PROKLUS zu sorgen, auf das ich vom Originalstudium KEPLERS aus gestoßen bin.

Es war klar, daß die Übersetzung nur von einem besonders kenntnisreichen Gräzisten überhaupt durchgeführt werden konnte. Bei der Gewinnung des Herrn Übersetzers hat mir Seine Exzellenz Herr Dr. A. HEFTER Unterstützung und Hilfe angedeihen lassen, wofür ich in freundnachbarschaftlicher Verbundenheit auch an dieser Stelle bestens danken möchte. In gemeinsamer Arbeit mit dem Herrn Übersetzer entstand die deutsche Fassung des griechischen Originaltextes,

für deren textliche Formulierungen der Herr Übersetzer allein, soweit sie sich nicht auf rein konkret-mathematische Dinge beziehen, verantwortlich zeichnet. An der Formulierung der letzteren, die meist in < . . . > gegeben sind, bin ich mitbeteiligt. Leider ist der Herr Übersetzer, kurz nach Vollendung seiner großen Arbeit, an der er mit ganzer Hingabe und Liebe zur Sache hing, am 9. Juli 1943 aus dem Leben abberufen worden, nachdem wir gemeinsam im Mai dieses Jahres noch die gesamte Redaktion des Werkes im einzelnen besprochen hatten. Er kann so die Druckfassung leider nicht mehr sehen und erleben. Die Zusammenarbeit mit ihm war eine sehr erfreuliche, und vielleicht wäre in Deutschland überhaupt kein einziger Gräzist fähig gewesen, diese Arbeit zu übernehmen, die Übersetzung mit textkritischen Anmerkungen zu versehen und zu vollenden als Herr P. LEANDER SCHÖNBERGER, der nicht nur eine ungeheure Kenntnis des Griechischen in allen seinen verschiedensten Lesarten, sondern auch eine Weite und Klarheit der Kenntnis der geistigen Horizonte der Antike und Spätantike sein eigen nannte, wie wenige Gelehrte, die ich kenne. Denn bei diesem Werk kam es bei der Übertragung ins Deutsche nicht nur auf gründliche philologische Kenntnisse an, sondern fast mehr noch auf solche aus der Philosophie, der Mathematik und der gesamten Geistesgeschichte überhaupt. Herr P. LEANDER SCHÖNBERGER hat sich mit der Übersetzung selbst ein Denkmal gesetzt, das die Zeiten und die Völker überdauern wird. Seine schlichte Güte des Menschseins kam auch dem Werk zugute. Wo es immer anging, haben wir in gemeinsamer Arbeit nach den einfachsten deutschen Formulierungen und Wiedergaben der — bei PROKLUS besonders — langen griechischen Perioden gesucht und insbesondere der Herr Übersetzer hat um sie und ihre Gestaltung, um den Sinn des Originals adäquat zu treffen, manchmal bis zur „physischen Erschöpfung“ gerungen, wie es in einem seiner letzten Briefe an mich heißt.

Für die Bebilderung der Übersetzung sowohl, wie auch für die übrige, mehr schmückende Bildgestaltung zeichne ich verantwortlich. Ich habe, entgegen dem bisher üblichen Verfahren, bei diesem

Werk die Figuren selbst so gezeichnet, daß man aus ihnen auch die wesentlichen metrischen Gleichheiten der geometrischen Gebilde, die sie darstellen (gleiche Längen und gleiche Winkel) soll unmittelbar ansehen können, ähnlich wie dies sonst bei der Anbringung von Farbsäumen für diese Größen bei angelegten Zeichnungen der darstellenden Geometrie gehandhabt wird. An Stelle der Farbsäume treten in der Strichzeichnung Hervorhebungen durch größere gleiche Strichstärken, gleiche Strichelungen usw. Rechte Winkel sind stets durch einen Doppelbogen, die Gleichheit anderer Winkel durch ein- oder mehrfach gefeilte Kreisbögen gekennzeichnet.

Für die Abschnitte der grundsätzlichen Einleitung und Allgemeinen Einführung in das Werk des PROKLUS und für die gesamte Redaktion der Ausgabe in Anlage, Durchführung und Registern übernehme ich selbst als meinen Arbeitskreis die Verantwortung. Insbesondere erstreckt sich diese auch auf meine wissenschaftlichen Kommentare am Schluß der Ausgabe, sowie auf meine, auf Vollständigkeit keinen Anspruch erhebenden bibliographischen Zusammenstellungen, auf die Zeittafeln und Register des Werkes, die seine wissenschaftliche Brauchbarkeit und Benützung erleichtern sollen.

Es bleibt mir, all denen zu danken, die an der Entstehung, Werdung und Gestaltgewinnung der deutschen Ausgabe eines so bedeutamen Werkes der Geistesgeschichte wesentlich mitgewirkt haben und die Ausgabe mit mir geistig haben tragen helfen. Die Herausgeber der Schriftenreihe „Die Gestalt“, die Herren Professoren W. TROLL und K. L. WOLF in Halle (S.) haben mich immer wieder ermutigt, diese nicht immer leichte Aufgabe zu lösen und dabei eine Ausgabe zustande zu bringen, die unseren gemeinsamen Bestrebungen auf Formung einer neuen idealistischen Geistigkeit in unserer Zeit entgegenkommt. Denn auch jene Schriftenreihe, die das wissenschaftliche Erbe GOETHEs im umfassendsten Sinne verwaltet und mehrt und allen wahrhaft idealistischen Bestrebungen der Einzelwissenschaften offen und zugänglich ist, dient nur einem großen Ziel, das ich in meiner Einleitung zum Werke des PROKLUS mit allen seinen mannig-

fachen geistigen Aspekten zu umreißen versucht habe. Dieser ganzheitliche Untergrund der Betrachtung, wie er durch die Idee der Gestalt vermittelt wird, kommt auch der deutschen Ausgabe des Werkes des PROKLUS zugute und ist ihm auch allein angemessen. — Daß wir dann in dem hochverehrten Herrn Präsidenten der altherwürdigen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle, Herrn Geheimrat Prof. Dr. E. ABDERHALDEN, auch den Förderer fanden, der das Werk in die geistige Obhut der Akademie übernahm und ihm so durch seine Drucklegung im Rahmen der Sonderveröffentlichungen der Akademie den Rang sicherte, den es verdient, darf als ein besonderer Glücksfall für das Werk, wie auch für mich als sein Herausgeber angesehen werden. Herr Geheimrat Prof. Dr. ABDERHALDEN hat die gesamte Drucklegung betreut und meine Wünsche, soweit es ihm irgend möglich war, immer erfüllt. Daneben hat er dem Werk selbst das Interesse dargebracht und die großzügige Förderung zuteil werden lassen, die ihm die hochangesehene Deutsche Akademie der Naturforscher in unserer großen aber schweren Zeit bieten kann. Ihm und den beiden genannten Herren Kollegen, die mir mit Rat und Tat treu zur Seite standen, gilt mein besonders herzlicher Dank. Auch das menschlich schöne geistige Verhältnis der wissenschaftlichen Freundschaft — ohne das im allgemeinen größere Leistungen des Geistes nicht möglich sind —, das sich bei der gemeinsamen Arbeit der Betreuung des Werkes angebahnt und vertieft hat, bedarf der Erwähnung, da es nicht zuletzt ihm zu danken ist, daß ich die teilweise sehr schwere Aufgabe der Gesamt-Edition geistig bewältigen und die eigentliche Substanz des Werkes des PROKLUS innerlich verarbeiten konnte. Herrn Geheimrat ABDERHALDEN danke ich noch ganz besonders für sein Geleitwort, das er als Präsident der Akademie dem Werk mit auf den Weg gegeben hat. Den Herren Kollegen TROLL und WOLF danke ich für das Mitlesen der Korrekturen und für die Durchsicht meines Manuskriptes vor der Drucklegung.

Ohne eine gründliche philosophische Ausbildung, die ich neben meinem Fachstudium der Mathematik in Heidelberg bei Herrn Geheimrat RICKERT †, Herrn Prof. Dr. E. HOFFMANN und Herrn Prof. Dr.

GLOCKNER empfangen durfte, hätte ich mich als Fachmathematiker allein nicht an das PROKLEISCHE Werk und seine deutsche Ausgabe wagen können und dürfen. Insbesondere habe ich manchen wertvollen Fingerzeig der schriftlichen Verbindung mit dem CUSANUS-Forscher und wohl bekanntesten lebenden PLATON-Interpreten, Herrn Prof. Dr. E. HOFFMANN, zu danken, eine Verbindung, die seit meiner Studienzeit nicht abgerissen ist und vielfach zu einer geistigen Gemeinsamkeit der Anschauungen über wissenschaftliche Geistesphänomene — hauptsächlich der Antike und des deutschen Idealismus auf der großen Linie — geführt hat, in denen mir Herr Prof. HOFFMANN als väterlicher Freund verbunden ist. Diesem geistigen Verhältnis verdankt meine Einleitung wichtige Impulse, die ich um so dankbarer empfangen habe, als sie von einem Gelehrten kommen, der uns Deutschen das Werk des NIKOLAUS VON KUES in einer vorbildlichen Edition erschließt. Herr Prof. HOFFMANN hatte auch, trotz seiner Krankheit, die Güte, die gesamte Revision des Werkes mitzulesen und mir aus seiner reichen Kenntnis der Quellen noch wichtige Hinweise zu geben, die dem Ganzen zugute gekommen sind. Ihm danke ich dafür besonders herzlich.

An wissenschaftlichen Vorarbeiten zu meiner Einleitung konnte ich vor allen Dingen die beiden tiefeschürfenden Studien über PROKLUS und sein Werk von Herrn Prof. Dr. A. SPEISER-Zürich benützen, dessen wissenschaftliche Lebensarbeit überhaupt mir als leuchtendes Vorbild eines universellen mathematischen Forschers auch in unserer Zeit vor Augen steht. Ihm danke ich ganz besonders für seine reiche geistige Förderung, für seine Briefe und insbesondere auch für seine Klarheit der Auffassung der Mathematik und der mathematischen Denkweise, die ich mir vielfach zu eigen gemacht habe. Wesentlichen Anteil an diesem Verstehen hat auch mein Freund Dr. EDUARD FUETER in Zürich, der als Historiker der exakten Wissenschaften besonders tief auch in die Antike in ihrer geistesformenden Gestalt eingedrungen ist. Reiche wissenschaftliche Förderung durfte ich nicht zuletzt auch in vielen Gesprächen und mündlichen Aussprachen durch den verdienten KEPLER-Forscher, Herrn Prof. Dr. MAX CASPAR-München, emp-

fangen, wofür ich ihm an dieser Stelle ebenfalls herzlichst danke. — Mein Dank gebührt ferner den Leitern der Münchener wissenschaftlichen Bibliotheken, dem Herrn Oberbibliothekar Dr. SCHWARBER von der Universitätsbibliothek Basel und seinem Helfer Herrn Dr. M. BURCKHARDT, dem Herrn Direktor der Staats- und Universitätsbibliothek Breslau, und nicht zuletzt dem Herrn Direktor des WINCKELMANN-Instituts in Berlin und Herrn Kollegen Prof. Dr. O. EISSFELDT-Halle (S.). Nicht vergessen sei auch der Dank an die Druckerei des Waisenhauses in Halle (S.), die in Satz und Druck schöne Arbeit geleistet hat. — Schließlich gehört mein Dank auch meiner Frau und meinen Kindern, die mit viel Verständnis meine Arbeit begleiteten und durch manche Fährnisse hindurch immer treu an meiner Seite standen, wenn die Widerwärtigkeiten des Lebens mich gar zu sehr in ihren Bann und von dem Werke abziehen wollten. Die innere Sammlung, die gerade in unserer Zeit die Ausgabe eines solchen Werkes erfordert, kann nur in einem Heim gewährt werden, das in beinahe idealer Weise alle Möglichkeiten zu geistigem Schaffen bietet und die schöpferischen Stunden unter Zurückstellung der eigenen Wünsche auszunützen erlaubt. Ohne dies bliebe die Stille, die wir brauchen, unfruchtbar und ohne schöpferische Möglichkeiten.

So möge das Werk denn hinausgehen und all denen etwas sagen, die an die deutsche idealistische Geistigkeit glauben, um sie wissen und sie zu erkennen und zu mehrern suchen. Wenn aus ihm und seinen Gedanken eine neue Geistigkeit der Deutschen mit erwachsen würde und könnte, so wäre dies mit der schönste Beitrag zur Kulturformung der Deutschen, die dieses Werk mitten im schwersten aller Kriege bringen kann. Sollte aus ihm eine neue Renaissance des Geistes kommen und eine sinngemäße Fortsetzung des klassischen deutschen Humanismus möglich werden und erstehen, so würde der Herausgeber darin den höchsten Lohn seiner Tätigkeit sehen und alle aufgewandte Mühe nicht vergeblich gewesen sein. Aus dem gegenwärtigen schweren Ringen um einen neuen Anfang des Abendlandes muß sich zielsicher die deutsche Geistgestalt abheben und vor allen Dingen ins Bewußtsein all derer treten, die nach uns kommen und das

geistige Erbe des Reiches antreten und weiterführen müssen. Möge das PROKLEISCHE Werk dabei ein sicherer Führer sein, der uns vor den Abwegen, Umwegen und Sackgassen bewahrt, in die wir durch die ausgebreitete Machtfülle des Positivismus und Materialismus auch in den Wissenschaften und Künsten geraten sind. Daß solche Kräfte im Werke des PROKLUS verborgen liegen, dürfte jedem klar werden, der vom wissenschaftlichen Heute auf das wissenschaftliche Morgen blickt und bereit ist, auch in unserer Zeit nach den eigentlichen Quellen des Wissenschaftlichen und des Künstlerischen wieder zu fragen. Der Geist wird und muß siegen! Diese Gewißheit schöpfen wir nicht zuletzt auch aus dem hier vorgelegten Werk des PROKLUS, der diesen Gedanken darin auch philosophisch begründet hat. Das Werk des PROKLUS ist zeitlos, weil sein Schöpfer nicht zwischen, sondern über den Zeiten stand, als er es schuf.

Prien am Chiemsee, im Dezember 1943.

Dr. phil. nat. habil. Max Steck

Dozent der Mathematik an der Technischen Hochschule München.

Einleitung

I. Allgemeine Einführung

„Vielleicht, daß man einige Jahrhunderte später urteilen wird, daß alles deutsche Philosophieren darin seine eigentliche Würde habe, ein schrittweises Wiedergewinnen des antiken Bodens zu sein, und daß jeder Anspruch auf „Originalität“ kleinlich und lächerlich klinge im Verhältnis zu jenem höheren Anspruch der Deutschen, das Band, das zerrissen schien, neu gebunden zu haben, das Band mit den Griechen...“.

NIETZSCHE.

1. Das hier zum ersten Male in einer deutschen textkritischen Ausgabe vorgelegte Werk des Neuplatonikers PROKLUS DIADOCHUS aus dem 5. nachchristlichen Jahrhundert darf als ein für die deutsche Geistesgeschichte und für die Genesis der abendländischen Kultur und ihr Verständnis besonders bedeutsames Werk angesehen werden. Seine Tiefenwirkungen kulturmorphologischer Art wären an vielen markanten Stellen, insbesondere innerhalb des deutschen Geistraums, aufzuzeigen und nachzuweisen, was allerdings einer Aufgabe gleichkäme, die, bislang von der Forschung noch nicht geleistet, den Rahmen einer allgemeinen Einführung in die vorliegende Ausgabe überschreiten und sogar sprengen würde. Denn diese Aufgabe könnte nur in einer Kulturmorphologie des Abendlandes überhaupt bestehen, um alle Bezüge deutlich werden zu lassen. Bis in die geheimsten Gründe forschender schöpferischer Tätigkeit in den verschiedensten Wissenschaften und Künsten haben diese Gedanken hineingeleuchtet. Und fast möchte man versucht sein, von ihnen auch heute wieder *eine neue Renaissance des Geistes*, die wir nötig hätten, zu erhoffen.

Woran liegt diese Wirkung eines auf den ersten Blick hin als rein „mathematisch“ erscheinenden Werkes? Welches sind die inneren Gründe und Notwendigkeiten, die die führenden Geister und die kulturformenden Bildner des Abendlandes veranlaßt und bestimmt haben, gerade dieses Werk, das mit seinen Gegenständen doch auf den engen Raum einer an sich angeblich schwer verständlichen und durchaus unpopulären Einzelwissenschaft beschränkt zu sein scheint, zu studieren, seine Ideen und Gedankenentwicklungen allgemeingeistig zu nutzen, um- und weiterzubilden und zu mehren? Was ist es, das ge-

rade dieses Werk, den Kommentar zum 1. Buch der „*Elemente*“ EUKLIDS, aus der stattlichen Reihe der Werke heraushebt, die uns von den Alten überkommen sind, und die wir als die Quellen des antiken Wissens, Denkens und Forschens, als die Rinnsale und Untergründe der formenden und prägenden Strömungen unserer Kultur überhaupt anzusehen gewohnt sind? Warum tritt gerade dieser „Kommentar“ des „*letzten bedeutenden Philosophen des Altertums überhaupt*“, wie NIKOLAI HARTMANN den Neuplatoniker PROKLUS nennt, aus der großen Reihe seiner übrigen Schriften und insbesondere seiner Kommentare zu PLATONS Werken¹⁾ besonders hervor und wird immer und überall, wo man die Antike überhaupt in ihrer geistigen Schöpferfähigkeit als Ganzes verstehen will, herangezogen und als sichere, in gewissen Bereichen fast ergiebigste Quelle klassischen Lehrguts bezeichnet?

2. Auf solche und ähnliche damit in Zusammenhang stehende Fragen versucht diese allgemeine Einführung in das Werk die Antworten zu erarbeiten, die in ihrer ganzen Umfassendheit und Weite des Blickes auch verraten sollen, weshalb und in welchen Bezügen gerade dieses Werk den gegenwärtigen Zeit- und Geistläuften des 20. Jahrhunderts noch etwas zu sagen hat. Wenn wir heute an der Wende eines Zeitalters stehen und alle Formen des Geistes und vielfach auch seine Inhalte umgebrochen und umgeschmolzen werden, so muß bei diesem Prozeß doch etwas als *grundlegende Substanz* bestehen bleiben. Und dies muß tiefe innere Gründe haben, die wohl in der Geiststruktur des Menschen selbst liegen und nicht so sehr in seinem umweltgebundenen Dasein. Dieser Prozeß der „*Umwertung aller Werte*“, den NIETZSCHE seherisch vorausgeahnt und gekündet hat, vollzieht sich im gegenwärtigen waffenmäßigen und geistigen Ringen um einen neuen Aufgang des Abendlandes und seiner Kultur überhaupt. Der Vollzug ist fast Notwendigkeit, erfüllt sich beinahe wie ein Naturgesetz und weist darauf hin, daß der menschliche Geist und seine morphologische Struktur in einer Weise konstituiert sein müssen, die zwangsläufig die Durchführung und den Ablauf eines solchen Prozesses erheischt und geradezu fordert. Eine neue Besinnung ist für den Vollzug dieses Prozesses vonnöten und NIETZSCHE zeigt uns auch in dem als Motto vorangestellten Wort den Weg und die Richtung, in der sich diese Umwertung vollziehen kann.

¹⁾ *Procli philosophi Platonici Opera*, ed. par V. COUSIN, Paris 1820—1827, 6 Bde.; 2. vermehrte Aufl. Paris 1864.

Um daher diesen Prozeß verstehen zu können und sinnvoll erscheinen zu lassen, muß sich offenbar der menschliche Geist selbst betrachten und über sich selbst reflektieren. Dann erst wird er fähig sein, diese Reflexion und Selbstbetrachtung zu transzendieren und seinem eigenen, vom Geist der Jahrtausende beladenen Bewußtsein anzunähern. Dadurch also wird wohl das Verstehen für jene Umwertung aller Werte möglich werden, die wir heute erleben: Sie muß sich selbst als geistige Macht und Bewegung ergreifen und umfassen lassen. Sie muß sich besonders als die spezifische Struktur des Geistes ergreifen und aufschließen lassen. *Denkanschauend* muß sie sich vollziehen und auswirken und sie soll, soll sie nicht wieder zu Einseitigkeiten führen, *total* sein und *auf das Ganze gehen*. Sie muß insbesondere „Jenseits von Gut und Böse“ erfolgen. In kritischer Sicht gilt es zu prüfen, was des Bestehens wert, aber auch was für das Absterben reif ist.

3. Diejenige Form anschaulich-denkerischen Seins, in der sich der menschliche Geist gleichsam wie in einem Spiegel selbst betrachtet und dabei nach seinen wesenhaften und originären Konstituenten als morphologischen Strukturelementen seines Innern fahndet, heißt seit ihrer Entdeckung im klassischen Griechentum: *reine Mathematik*. Wendet sich diese Selbstbetrachtung und das Insichreflektiertsein des Geistes nach Außen, gehen sie auf die Konstruktion des Seienden überhaupt aus, so sprechen wir gemeinhin im probekhaltigsten und untrivialsten Sinne dieses Wortes von „*Philosophie*“.

So verstanden bilden beide Tätigkeiten des Geistes, die nach Innen und die nach Außen gerichtete, *mathesis pura* und *philosophia* als *theoria*, eine Einheit, die als Resultante von einer Innen- und von einer Außen-Komponente konstituiert und gebildet wird. Die Entdeckung dieser *Einheit der Geistgestalt* hat das Griechentum der Vorsokratiker, PLATONS und der sogenannten Pythagoreer — auf dem Boden der Orphik stehend — gemacht und PROKLUS, die philosophischen Lehren seines großen neuplatonischen Vorgängers PLOTIN nutzend, hauptsächlich in den Vorreden und Anmerkungen des vorliegenden Werkes dargestellt. „Der Prolog zum EUKLID-Kommentar ist vielleicht *das philosophisch Durchdachte*, was PROKLUS geschrieben hat“, so lautet eine Stelle der Wertung von NIKOLAI HARTMANN²⁾.

²⁾ NIKOLAI HARTMANN, Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklidkommentars. Gießen 1909.

Und in der Einführung zu seiner Schrift führt HARTMANN folgendes aus: „In der theoretischen Philosophie der Alten nimmt *das Problem der Mathematik* seit den ältesten Schritten der Forschung einen sichtbaren Platz ein; und nicht nur einen sichtbaren, sondern auch einen bestimmenden. Denn alle die vielen, vielgestaltigen Probleme, die sich unter dem Gesichtspunkte theoretischer Fragestellung zusammendrängen, finden an diesem Problem zuerst etwas wie eine gedankliche Vorarbeit — in jenen *Ansätzen zu genauer Begriffsbildung*, in denen nun einmal den anderen Wissenschaften gegenüber die Mathematik auf allen ihren Entwicklungsstufen einzig dasteht“ . . . Es ist „der Gedanke von der *orientierenden Bedeutung der mathematischen Methode* . . ., der aus der Pythagoreischen Philosophie, wo er zuerst bestimmt ausgesprochen wurde, als Grundgedanke sowohl in die Atomistik, als in die Ideenlehre überging. Und durch diese beiden Systeme ist er klassisch geworden . . . Hier war ein *systematisches Moment* wirksam, *das über den Wechsel der Zeitströmungen hinaus in Kraft blieb* . . . Die Pythagoreer und PLATO sind es daher vorwiegend, auf welche die Schule PLOTINS in Fragen der Mathematik zurückgreift . . ., wozu noch der begünstigende Umstand kommt, daß seit den Tagen PLATOS *die Mathematik selbst* als positive Wissenschaft ein durchaus anderes Ansehen gewonnen hatte . . . und *jene Mathematik, auf dessen Anfänge hinblickend* PLATO *die Ideenlehre geschaffen hatte*, . . . *hatte etwas von dem Geist PLATONISCHER Dialektik in sich, aus der sie denn wohl auch historisch hervorgewachsen ist.*

Der bedeutendste Versuch von *Systembildung* dieser Art geschah auf dem Gebiet der *Geometrie*. Sei es, daß dem plastisch schauenden Geist der Griechen die größere *Anlehnung an das Konkrete* . . ., sei es, daß die Geometrie überhaupt in dieser Hinsicht einen Vorzug gegenüber der Arithmetik hat . . . Dieser verfeinerte Sinn“ für dialektische Systematik und „für Probleme und Problemzusammenhänge ist es auch gerade, der am deutlichsten aus“ dem PROKLEISCHEN „EUKLID-Kommentar zu uns spricht. Die Einleitung zu diesem Buch ist der Versuch einer *Philosophie der Mathematik* — der erste und letzte Versuch dieser Art, den wir von den Alten besitzen . . . Hier tritt der neuplatonische Metaphysiker zurück, hier spricht in erster Linie der Mathematiker, der *Dialektiker der Mathematik, der die alte PLATONISCHE Grundfrage der Rechenschaft an die Prinzipien der Geometrie stellt*. So ist dieser Prolog ein wahres Kompendium *antiker Begründungsmethodik und Fundamentalphilosophie*. Denn das Be-

deutendste, was die griechische Wissenschaft an theoretischer Methodik sich errungen hatte, stammte ja aus der Fragestellung nach der Begründung mathematischer Denkwerkzeuge.“ Damit ist die erste Richtung gewiesen, in der wir zum Verständnis der Gedanken des PROKLUS vordringen können.

4. Die erste Ausgabe des PROKLEISCHEN Werkes hat 1533 GRYNÆUS seiner EUKLID-Ausgabe angefügt³⁾. (Siehe das Titelblatt auf Tafel I dieser Ausgabe). Eine erste lateinische Übersetzung des griechischen Originaltextes, der in einigen (hauptsächlich in München und Basel liegenden) Handschriften überliefert ist (s. Anm. 6), hat im Jahre 1560 BAROCIOUS veranstaltet⁴⁾ (siehe die Titelblätter auf den Tafeln II und III dieser Ausgabe) und seiner Ausgabe einige Ergänzungen beigefügt, die in der vorliegenden Edition berücksichtigt worden sind. Schon vorher, nämlich 1539, hatte ZAMBERTO im Anschluß an die eine Münchener Handschrift des Euklidkommentars des PROKLUS einen Kommentar gegeben (s. Anm. 6) und die Angabe bei FRIEDLEIN unter der Abkürzung „Z“. Weitere Sonderarbeiten findet man ebenfalls bei FRIEDLEIN aufgeführt. (Siehe auch unsere Bibliographie, am Schluß dieser Ausgabe.)

Dann erschien 1792 von T. TAYLOR eine englische Übertragung des Originals, die ausführlich kommentiert ist⁵⁾. (Siehe die Titelblätter derselben auf Tafel IV und V dieser Ausgabe.) Unter Heranziehung der sämtlichen bislang aufgefundenen Handschriften und der genannten Editionen brachte dann 1873 G. FRIEDLEIN eine kritische Neuedition des griechischen Originals unter Berücksichtigung der genannten Ausgaben und des bis dahin vorgearbeiteten Forschungsstandes heraus⁶⁾ (Siehe das Titelblatt seiner Ausgabe auf Tafel VI dieser Edition), nach der die hier zum ersten Male vorgelegte, unter textkritischen und geistesgeschichtlichen Gesichtspunkten und Blickwinkeln stehende, deutsche Ausgabe erarbeitet worden ist.

Erste geistesgeschichtliche und philosophische Würdigungen von Rang erfuhr das Werk durch NIKOLAI HARTMANN und ANDREAS SPEISER (s. Anm. 2)

³⁾ *Commentariorum Procli editio prima, quae Simonis GRYNÆI opera addita est Euclidis elementis graece editis Basileae apud Ioan. Hervagium anno M.D.XXXIII.*

⁴⁾ *Procli in primum Euclidis elementorum librum commentariorum libri IIII a Francisco BAROCIO, patritio veneto editi, Patavii 1560.*

⁵⁾ *The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements. In two volumes. London, printed for the author (T. TAYLOR) 1792.* — (Einziges in Deutschland vorhandenes Exemplar auf der Staats- und Universitätsbibliothek in Breslau.)

⁶⁾ *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii. Ex Recognitione Godofredi FRIEDLEIN, Lipsiae M.DCCC. LXXIII.* — Siehe auch den textkritischen Hinweis bei: Jacobi MORELLII, *Bibliothecae Regiae / Divi Marci Venetiarum / Custodis / Bibliotheca Manuscripta / Graeca et Latina / Tomus Primus / Bassani MDCCCII*, auf p. 187.

und 24). Sie sind als solche bislang die letzten geblieben. Die mathematikgeschichtliche Forschung hat das Werk — aber ohne Berücksichtigung seines Gesamtaspektes — für ihre Zwecke vielfach ausgewertet, dabei aber lediglich historische, für die Mathematik als Fachwissenschaft bedeutsame Gesichtspunkte gewahrt, ohne der umfassenden geistesgeschichtlichen und kultur-morphologischen Bedeutung des Werkes gerecht zu werden. Die rein geschichtlichen, aus dem Werk für die Mathematik zu schöpfenden Kenntnisse, die außerordentlich wichtige Rückschlüsse auf das spezifisch *mathematische Wissen* der Griechen zutage gefördert haben und zuließen, bleiben hier daher außer Betracht, da sie bekannt sind und fast in jeder „Geschichte der Mathematik“ nachgelesen werden können, wobei man bemerken wird, nachdem man jetzt das Original in einer deutschen Ausgabe zugänglich hat, daß der eine Autor vielfach vom anderen — offenbar ohne Quelleneinsicht — „abgeschrieben“ hat. Auf diese historischen Dinge, Datierungen, Prioritätsfragen usw. kann es uns hier nicht ankommen. Wir wollen mehr! Es dürften aber doch auch für den Historiker der Mathematik noch manche Funde in den Angaben des PROKLUS zu machen sein und als solche mathematikhistorische Einsichten ermöglichen, die über die bekannten bei H. HANKEL ⁷⁾, M. CANTOR ⁸⁾, S. GÜNTHER ⁹⁾, H. WIELEITNER ¹⁰⁾, R. TROPFKE ¹¹⁾ u. a. hinausgehen ¹²⁾. Was uns wissenschaftlich diesbezüglich noch nicht genügend beachtet worden zu sein scheint, haben wir in unsere Kommentare (am Schluß dieser Ausgabe) aufgenommen, die dazu dienen, das PROKLEISCHE Werk an den gegenwärtigen Stand der Forschung anzuschließen, und die auch schnell die wichtigste einschlägige Literatur sollen finden lassen. Darüber hinaus kommt ihnen die Aufgabe einer vergleichenden Betrachtung der vorliegenden, besonders wichtigen Übersetzungstexte zu. Teile des PROKLEISCHEN Werkes, gerade diejenigen, die sich ausschließlich auf Fragen der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik erstrecken (insbesondere das von PROKLUS angegebene sog. „Mathematikerverzeichnis“), sind nämlich von A. BRETSCHNEIDER ¹³⁾, HANKEL ¹⁴⁾, HEIBERG ¹⁵⁾ u. a. ins Deutsche übertragen wor-

⁷⁾ H. HANKEL, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874.

⁸⁾ M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1, Leipzig 1894.

⁹⁾ S. GÜNTHER, Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis Cartesius, Leipzig-Berlin 1927 (Slg. Schubert).

¹⁰⁾ H. WIELEITNER, Geschichte der Mathematik, Bd. 1, Leipzig-Berlin 1922 (Slg. Götschen).

¹¹⁾ R. TROPFKE, Geschichte der Elementarmathematik, Leipzig-Berlin 1921—24.

¹²⁾ Siehe M. STECK, Lamberts Schriften zur Perspektive, Berlin 1943, wo ich aus dem Werke des PROKLUS eine historisch wichtige Stelle zur griechischen Theatermalerei angeben habe. Bislang waren diesbezüglich nur die Stellen aus dem VITRUV bekannt.

¹³⁾ A. BRETSCHNEIDER, Die Geometrie und die Geometer vor Euklid, Leipzig 1870.

¹⁴⁾ Siehe Anm. 7 und insbesondere den Anhang „Euklid“ zu diesem Werke.

¹⁵⁾ HEIBERG, Geschichte der Mathematik des Altertums, Leipzig 1912.

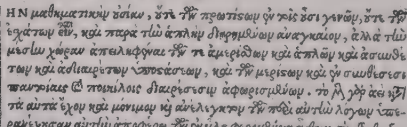
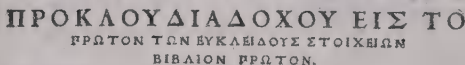
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΕ
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ/
ΟΥΣΙΩΝ.

Εἰς τὸ αὐτὸ τ' ἔκδοτον, ἐξηγούμενον Πρόκλου βιβλίου.

Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.



BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO
M. D. XXXIIL. MENSE SEPTEMBRI.

[illegible]



Titelkupfer der lateinischen Ausgabe des PROKLEISCHEN „*Euklid-Kommentars*“
von F. BAROCIUS, in Faksimile. (Verkleinert)

PROCLI DIADOCHI
LYCII
PHILOSOPHI PLATONICI
A C

MATHEMATICI PROBATISSIMI

IN
PRIMUM EUCLIDIS

Elementorum librum

COMMENTARIORVM

A D
VNIVERSAM MATHEMATICAM DISCIPLINAM

PRINCIPIVM ERVDITIONIS TRADENTIVM

Libri IIII.

A

FRANCISCO BAROCIO PATRITIO VENETO

summa opera, cura, ac diligentia cunctis mendis expurgati: Scholiis, & Figuris, quæ
in græco codice omnes desiderabantur aucti: primum in Romæ
linguæ venustate donati, & nunc recens editi.

Cum Catalogo Deorum, & Virorum illustrium, atque Autorum:
Elicto librorum, qui vel ab Autore, vel ab Interprete citati sunt:
& Indice locupletissimis notabilium omnium in opere contentorum.

CVM PRIVILEGIO.



PATAVII.
Excudebat Gratiſus Perchacinus

1 5 6 0.

Titelblatt der lateinischen Ausgabe des PROKLEISCHEN „*Euclid-Kommentars*“
von F. BAROCIUS, in Faksimile. (Verkleinert)

den. Soweit sie für unsere kulturmorphologische und geistesgeschichtliche Betrachtung des Ideengutes des Werkes bedeutsam und wichtig sind, haben wir sie in die Kommentare aufgenommen.

5. Über das Leben von PROKLUS DIADOCHUS bieten die genannten geschichtlichen Darstellungen kurze Hinweise. Eine ausführliche PROKLUS-Biographie ist die bekannte 1618 im Druck erschienene seines Schülers und Lehrgehilfen MARINUS (Neapolitanus; aus dem palästinensischen Neapolis [Sichem])¹⁶⁾, die in einer weiteren, kommentierten und erläuterten Ausgabe von FABRICIUS aus dem Jahre 1703 vorliegt¹⁷⁾, und über die neuerdings auf Anregung von E. HOFFMANN in einer Heidelberger philosophischen Dissertation von A. R. NOE¹⁸⁾ unter Beifügung einer Übersetzung nach der Ausgabe von V. COUSIN¹⁹⁾ gearbeitet worden ist. Der genannten Ausgabe von FABRICIUS ist das, schon in der ersten Ausgabe der Proklusbiographie beschriebene, in der Abb. 1* (s. dort) wiedergegebene Horoskop des PROKLUS entnommen, dessen Lebensdaten nicht vollständig gesichert waren. Allgemein wird heute angenommen, daß PROKLUS am 8. Februar 410 in Byzanz geboren und am 17. April 485 in Athen gestorben ist²⁰⁾. Die beste Darstellung des Lebenswerkes von PROKLUS ist immer noch bei E. ZELLER zu finden²¹⁾; die neuere Darstellung von NOE²²⁾ ist leider nicht veröffentlicht.

Das Bildmaterial, das uns von der Persönlichkeit des PROKLUS einen lebendigen Eindruck vermitteln könnte, ist bisher nicht aufgefunden oder gedeutet²³⁾.

¹⁶⁾ *Procli successoris Platonici, In Platonis theologiam Libri Sex. — Accessit MARINI NEAPOLITANI Libellus de Vita PROCLI . . . , Hamburgi, et prostant Francofurti apud Rulandios, MDCXVIII.*

¹⁷⁾ PROCLI, *Philosophi Platonici, Vita, scriptore MARINO Neapolitano, ed. FABRICIUS, Londini, MDCCIII.* (Horoskop des PROCLUS hier S. VI.)

¹⁸⁾ A. R. NOE, Proklos und seine Philosophie, Phil. Diss. Heidelberg 1937 (ungedruckt). Auszug: Die Proklosbiographie des Marinos, Heidelberg 1938. — Siehe auch: MARINUS, *Procli Vita, graec. et latin. ed. J. F. BOISSONADE, Leipzig 1814.*

¹⁹⁾ Siehe Anm. 1.

²⁰⁾ Das Horoskop des PROCLUS wird von FABRICIUS (Anm. 17) erklärt. Es ergäbe freilich als Geburtsjahr das Jahr 412, doch wird jetzt allgemein 410 aus anderen Gründen angenommen. Vergleiche auch die Anm. 12 im gedruckten Diss.-Auszug von NOE (S. 42/43), sowie den „D—N—U“ gezeichneten Artikel „PROCLUS“ in der „*Biographie universelle*“, Bd. 34, Paris (o. J.), p. 385—390 und: M. BERGER, *Proclus, exposition de sa doctrine (Thèse)*, Paris 1840.

²¹⁾ E. ZELLER, Philosophie der Griechen (neue Ausg. von II, 1^a von E. HOFFMANN), Bd. III, 2^a, Leipzig.

²²⁾ Siehe Anm. 18.

²³⁾ Nach vergeblichem eigenen Suchen nach einem Bildnis des PROKLUS in der immer noch wichtigen „*Griechischen Ikonographie*“ von J. J. BERNOULLI (2 Bde., München 1901), die aber die uns überkommenen Bildnisse der Diadochen ausdrücklich ausschließt, und an anderen Stellen, wandte ich mich brieflich an Herrn Kollegen Prof. Dr. O. EISSFELDT in Halle, der seinerseits mit zwei Kollegen von der Archäologie diesbezüglich Rücksprache nahm; seine freundliche Mit-



Abb. 1*. Horoskop des PROKLUS. (Nativität.)

Die Daten des Horoskops gibt auch MARINOS in seiner PROKLUS-Biographie im Kap. 35 so an: „Damit aber diejenigen, welche sich mit den höheren Wissenschaften beschäftigen, auch aus der Stellung der Gestirne, unter welchen PROKLUS geboren wurde, ermitteln können, welches Lebensschicksal sein Los war, will ich ihre Stellung bei seiner Geburt anfügen:

Sonne im Widder	16 ^o 26'	*)
Mond in den Zwillingen	17 ^o 29'	
Saturn im Stier	24 ^o 23'	
Jupiter im Stier	24 ^o 41'	
Mars im Schützen	29 ^o 50'	
Merkur in den Fischen	23 ^o	
Venus im Wassermann	4 ^o 42'	
Horoskopos: Widder	8 ^o 19'	**)
Obere Kulmination: Steinbock	4 ^o 42'	
Aufsteigender Knoten: Drachen	24 ^o 33'	
Vorhergehender Neumond: Wassermann	8 ^o 51''	

Kap. 36 heißt es hinsichtlich seines Todes: „PROKLUS starb 123 Jahre nach
Julians Regierungsantritt ... zu Athen ... nach römischer Zählung am 17. April ...
Er fand seine Ruhestätte in der östlichen Vorstadt am Lykabetos, wo auch sein
Lehrer SYRIANOS ruht ... Es steht auf seinem Grabstein folgendes Epigramm ...“,
das er sich selbst dichtete:

Proklos war ich, aus lykischem Geschlecht,
Den Syrianos zum Nachfolger seiner Lehre erzog.
Beider Gebeine birgt jetzt dies gemeinsame Grab.
Möge auch den Seelen ein einziger Ort bestimmt sein.

*) Das Horoskop aus der FABRICIUSschen Ausgabe der Marinus-Biographie des PROKLUS hat hier die Daten: 20° 26' (oben links).

der Anordnung der Abb. 1*. — Die übrigen Daten wird man leicht selbst finden können. —

In der MARINOS-Biographie heißt es allerdings im Kap. 3: „Er war so schön, daß kein Maler ein wirkliches Portrait von ihm darstellen kann; *alle Bilder von ihm, welche man gemacht hat*, bleiben bei weitem hinter der Wirklichkeit, die sie wiedergeben wollen, zurück, obgleich auch sie sehr schön sind.“

6. Was PROKLUS in seinem Werke, dem EUKLID-Kommentar, bietet, ist der in der Geistesgeschichte erstmalig unternommene Versuch des Aufbaues einer *kategorialen, gestalthaften Prinzipien- und Methodenlehre der Mathematik*, die vom Gegenständlichen ausgeht und die Spannung von Sein und Möglichkeit mit umfaßt und aufnimmt. Es handelt sich dabei um eine hauptsächlich philosophisch begründete Lehre, die man eine *übergreifende Nomographie des Mathematischen* als Gestaltlehre und Bedeutungsforschung der mathematischen Sinngebilde nennen könnte. Damit meine ich eine gestaltmäßige Beschreibung derjenigen Gesetzmäßigkeiten, denen *alle* mathematischen Ideen in ihrem gegenständlichen Sein ausnahmslos und totaliter unterstehen, und denen sie als generellen Geistbezügen, als inneren Gesetzmäßigkeiten und Gründen des Mathematischen schlechthin folgen. *Begriff und Anschauung* des mathematischen Ideenphänomens und der mathematischen Gegenständlichkeit als solcher erfahren in diesem Werk des PROKLUS eine erste *systematisch fundierte* charakteristische Stellung und eine Zuordnung zu Standorten des Geistes, die sie befähigen, aus dem Geistraum und den in sich beschlossenen Bereichen der PLATONischen *Ideenlehre* eine ganzheitliche und generelle Erhellung der Seinsbezüge des Mathematischen sowohl,

teilung war leider negativ. Eine weitere Anfrage beim Archäologischen Institut (WINCKELMANN-Institut) der Universität Berlin, brachte mir unter dem 10. Juni 1943 ebenfalls eine negative Antwort: „In Ihrer Angelegenheit, ein Bild des PROKLUS aufzutreiben, können wir Ihnen leider auch nicht helfen. Unsere Spezialwerke zur antiken Portraitzkunde lassen uns im Stich. *Es gibt demnach kein gesichertes PROKLUS-Bildnis*. Mag sein, daß er sich unter den zahllosen namenlosen Portraitzköpfen der Spätantike verbirgt: *Eine Zuschreibung an ihn gibt es jedenfalls nicht. Auch der Gemmenbestand versagt*. Die vollständigste Zusammenstellung der Literatur zu PROKLUS fanden wir in UEBERWEGS „Grundriß der Geschichte der Philosophie“, I, 12. Aufl. (besorgt von PRAECHTER) 1926, Seite 194/5 mit Stern. *Doch gibt auch sie keinen Hinweis auf ein Bildnis ...*“— Auch die Realencyclopädie von PAULY-WISSOWA, die ich noch nachschlug, gibt keinen Hinweis auf ein Bildnis des PROKLUS, auch keinen auf eine Münze oder dgl. Man wird sich also auch künftig vergeblich nach einem PROKLUS-Bild umsehen.

als auch tiefere Einblicke in das *Wesen des Mathematischen* selbst zu ermöglichen. Es handelt sich dabei um die Eröffnung eines ganz universellen Blickfeldes, in dessen Runde man alle Formen des Geistes gleichsam aufstellen und betrachten kann. Die grundsätzliche Überschau dieser Formen im Sinne von dem Geist selbst einwohnenden Grund-, Tätigkeits- und Gestaltprinzipien und Strukturträgern, zu denen nicht nur die Denkformen und Denkweisen der Mathematik, sondern auch die aller exakten Naturwissenschaften und auch die Schaugebilde und unsinnlichen Träger der Notwendigkeit in den Künsten, den bildenden sowohl, als auch den musischen, gehören, ist in diesem Werk von PROKLUS zum ersten Male in der Geistesgeschichte vorgenommen und auf einen ersten sinnentsprechenden Ausdruck gebracht und somit „dargestellt“ worden.

Wenn es die Aufgabe einer *allgemeinen Morphologie der Wissenschaften und der Künste* und damit der beiden sichtbarsten Exponenten der Kultur ist, die kennzeichnenden Geist- und Sehformen der Einzelwissenschaften und der Einzelkünste als Typenformen des Geistigen schlechthin beschreibend und sinnvoll aufzuzeigen, um sie dann in höherer Synthesis wieder mit der Totalität des Wissenschaftlichen und des Künstlerischen in allen ihren Bezügen überhaupt, organisch zu verbinden, so muß es dabei offenbar darauf ankommen, die übergreifenden Gestaltprinzipien und die geist-funktionalen anschaulichen Gesetzmäßigkeiten und Notwendigkeiten als die ideellen Sinnträger und Geltungselemente allen wissenschaftlichen und künstlerischen Tuns schlechthin herauszubringen. Und dies hat in einem ersten großen Anfang PROKLUS für die Mathematik im Anschluß an das erste Buch der „*Elemente*“ EUKLIDS (300 v. Chr.) geleistet. „Die neuplatonische Schule ist die Erbin der älteren griechischen Philosophie geworden; *in ihr strömen alle Lehren zusammen* und ihre Kritik und Auslese ist *auf über tausend Jahre maßgebend* geblieben. Der eigentliche Begründer der Schule ist PLOTIN aus Assiut in Ägypten. Er lehrte um 250 n. Chr. in Rom. Seine Schriften gehören heute noch *zum Aktuellsten, was man in der Philosophie studieren kann*, weil er häufig gerade diejenigen Einwände berücksichtigt, welche man auf Grund einer *positivistischen Anschauung*“ (die heute die allein maßgebende in der Mathematik zu sein scheint) „geltend machen könnte. — Am Ende der Schule, im Besitz der gewaltigen, von ihr erarbeiteten Erkenntnisse, steht PROKLUS, *einer der letzten großen Philosophen des Altertums*. Man verdankt ihm einen umfangreichen Kommentar zum

1. Buch der Elemente EUKLIDS; *seine Vorrede ist eine tief durchdachte Darlegung über das Wesen und die Kräfte der Mathematik*“²⁴⁾).

Insofern nun gerade in diesen Bezügen, die auf das Wesen und die Kräfte der Mathematik gehen, in den „*Elementen*“ EUKLIDS im wesentlichen pythagoreisches Gedanken- und Schau-Gut, mit SOKRATISCHER Logik bearbeitet, in vielfachem Niederschlag sich wiederfindet, insofern in diesem ersten großen Lehrgebäude der Mathematik der Antike, das vollständig auf uns gekommen ist²⁵⁾, die ontologischen, erkenntnistheoretischen, methodischen und idealistischen philosophischen Standorte der Vorsokratiker und PLATONS zum wesentlichen Ausdruck kommen, insofern kann auch die PROKLEISCHE Gestaltlehre der Mathematik (s. Teil II dieser Einleitung) als der erste entscheidende Beitrag des Geistes angesehen werden, um zu einer ganzheitlichen idealistischen Erfassung des Mathematischen überhaupt wieder vorzudringen. Man kann die Wirkung von EUKLIDS „*Elementen*“ auf die Geistes- und Erkenntnisformung des Abendlandes nicht treffender werten, als durch die Formulierung, die A. SPEISER dieser Wertung gegeben hat²⁶⁾: „Die Elemente von EUKLID (um 300 v. Chr.) geben im wesentlichen den Stand der Mathematik um das Jahr 350 v. Chr. zur Zeit des Todes von EUDOXUS wieder, *aber durchwegs nach der PLATONISCHEN Lehre dialektisch bearbeitet*. Man kann in diesem Werke den vollendetsten Ausdruck griechischen Geistes erblicken; jedenfalls hat es seit der Zeit der Renaissance“ — die erste EUKLIDAusgabe erschien 1533 in Basel von GRYNÆUS besorgt (s. Tafel I dieser Ausgabe und Anm. 3) — „in Kunst, Philosophie und Naturwissenschaften mächtigen Einfluß ausgeübt und es wurde nächst der Bibel das verbreitetste Buch der Welt. Im 19. Jahrhundert geriet es rapid in Vergessenheit aus unbekannten Gründen“²⁷⁾).

²⁴⁾ So A. SPEISER in „PROKLUS DIADOCHUS über die Mathematik“ in: Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 65. Von PLOTINS Schriften ist hier besonders grundlegend: „Über die Zahlen“ (Enn. VI, 6).

²⁵⁾ Beste moderne Ausgabe von HEIBERG, Leipzig 1883—86, nach deren griechischem Text die *deutsche Ausgabe* von Cl. THAER in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 235, 236, 240, 241, 243 (Leipzig 1933—37), die wir hier ausschließlich benützen und fortan kurz als „THAER“ zitieren, gestaltet ist.

²⁶⁾ A. SPEISER, Klassische Stücke der Mathematik, Zürich-Leipzig 1925, S. 39.

²⁷⁾ Siehe auch M. STECK, Das Hauptproblem der Mathematik, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943, Nr. 46.

Dieser Wertung fügen wir zur Abrundung noch die Beschreibung von G. KOWALEWSKI bei ²⁸⁾ „EUKLIDS Elemente bieten in systematischem Aufbau die Grundlehren der gesamten Mathematik, sowohl der Geometrie als auch der Arithmetik. Er war so sehr von der Unersetzbarkeit dieses Lehrganges überzeugt, daß er seinem König auf die Frage, ob man keinen kürzeren und bequemeren Weg zur Erlernung dieser Dinge finden könne, wie PROKLUS berichtet, zur Antwort gab: Nein, es führt kein besonderer Weg für Könige zur Geometrie. Tatsächlich hat „der EUKLID“ bis in die neueste Zeit als Schulbuch gedient, und die berühmtesten Männer, z. B. DESCARTES, PASCAL, NEWTON, LAGRANGE, haben sich für die Beibehaltung dieser Grundlage des mathematischen Unterrichts ausgesprochen. — PROKLUS, der schon vorhin genannte Kommentator EUKLIDS aus dem 5. nachchristlichen Jahrhundert, berichtet uns, Zweck und Ziel des EUKLIDischen Werkes sei die Konstruktion und Theorie der fünf regulären Körper“ (Tetraeder, Hexaeder oder Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder), „der ganze Lehrgang also nur ein Aufstieg zu diesem Höhepunkt. Der geistreiche Göttinger Mathematiker und Dichter KASTNER“ — der bekanntlich mit CHARLOTTE BUFF, GOETHES „Lotte“ verheiratet war — „widerspricht dieser Auffassung und meint, es habe noch niemand behauptet, das Pantheon zu Rom sei seines Domes wegen gebaut ²⁹⁾. Dagegen hat sich ein Mann wie KEPLER durchaus zur Auffassung des PROKLUS bekannt. Wir wissen, welche Rolle die regulären Körper in KEPLERS „*Mysterium cosmographicum*“ ³⁰⁾ spielten, wie er sie in die Sphären der Planeten einbaute und durch diese Konstruktion die Sonnenabstände dieser Himmelskörper mit einer überraschenden Genauigkeit auf eine geometrische Formel brachte“ ³¹⁾.

²⁸⁾ G. KOWALEWSKI, Große Mathematiker, München-Berlin 1938, S. 23 ff.

²⁹⁾ Siehe die modernen Versionen dieser KASTNERSchen Deutung bei: K. REIDEMEISTER, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig-Berlin 1940 und: K. REIDEMEISTER, Mathematik und Logik bei Plato, Leipzig-Berlin 1942.

³⁰⁾ J. KEPLER, *Mysterium Cosmographicum*. Das Weltgeheimnis. Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, München-Berlin 1936.

³¹⁾ Viel wichtiger ist in diesem Zusammenhang KEPLERS „*Harmonice Mundi*“, Linz 1619. Deutsche Ausgabe als „Weltharmonik“, von M. CASPAR, München-Berlin 1939 und KEPLERS „*Astronomia Nova*“, Heidelberg 1609. Deutsche Ausgabe als „Neue Astronomie“ von M. CASPAR, München-Berlin 1929. Siehe auch: M. STECK, Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei KEPLER, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941, S. 1—32.

Aus der geistesgeschichtlichen Wertung SPEISERS und aus der witzigen Beschreibung KOWALEWSKIS sieht man bereits, daß das Ideengut der EUKLIDischen „*Elemente*“, und zwar hauptsächlich durch den PROKLEischen Versuch seiner originären Deutung und Interpretation, seine ideenformenden Kräfte wie kein anderer vollständiger Aufbau der Mathematik mehr nach ihm — wenn es einen solchen überhaupt gibt — gerade in den deutschen Geistraum besonders nachhaltig und wirkungsvoll aus- und einstrahlt. Es muß uns dies daher hier in der allgemeinen Einführung zu dem PROKLEischen Werke als besondere Aufgabe zufallen, gerade diese übergreifenden Bezüge der EUKLIDischen und PROKLEischen Gedanken und ihrer Wirkungen auf die deutschen Denker und damit auf die deutsche Geistes- und Kulturgeschichte überhaupt besonders deutlich herauszustellen. Was hier im einzelnen nicht gebracht werden kann, das wollen wir im Schlußabschnitt des II. Teils dieser Einleitung noch zusammenstellen gleichsam als quinta essentia dessen, was das PROKLEische Werk selbst unserer Zeit und ihren Menschen wieder zu sagen hat.

7. Man darf also das vorliegende Werk des PROKLUS mit Fug und Recht als den von uns aus gesehen am weitesten vorgeschobenen Posten mathematischer Philosophie oder philosophischer Mathematik bezeichnen. PROKLUS faßt darin als erster in einzigartiger Weise die wichtigsten Lehrstücke der Vorsokratiker und der PLATONischen Philosophie und Denkwissenschaft, soweit sie für die Mathematik belangvoll sind, zusammen. Er verbindet sie erstmalig mit dem spezifisch mathematischen Aufbau der PLATONischen Ideenlehre einerseits und mit den grundlegenden pythagoreischen Zahlen- und Seinslehren andererseits, wie sie sich insbesondere in den 13 Büchern der EUKLIDischen „*Elemente*“ widerspiegeln und in originärer mathematischer Fassung niedergeschlagen haben. Diese geistige Zusammenfassung und Zusammenschau erfolgt bei PROKLUS unter Gesichtspunkten, die uns gerade heute wieder etwas zu sagen haben. PROKLUS sucht in den Grundlagen des Mathematischen nach *Leitideen* gleich den Leitfossilien in der historischen Geologie, die einerseits *kennzeichnend für die mathematische Denkweise der Griechen* sind, und nach denen andererseits die geistigen Aufschlüsse in ihrem gegebenen Sein sowohl, als auch in ihrer umfassenden ideenhaltigen Mächtigkeit eingeordnet und als Prototypen für die Geistigkeit des Griechentums überhaupt aufgezeigt und ausgewiesen werden können. Um diese Leitideen in ihrer originären Fassung kennenzulernen und sie unserem Verständnis anzu-

nähern, ist es nötig, sie an den Quellen selbst aufzusuchen. Wir geben daher jetzt von CUSANUS und seinen Positionen aus einen Querschnitt dieser Ideenschicht, der uns den Gesamtaufschluß überhaupt eröffnen wird. Daß wir dies von CUSANUS aus tun, hat natürlich tiefe Gründe. In ihm, der die ganze mittelalterliche Philosophie und das mittelalterliche Weltbild revolutionierte, spiegelt sich das Ideengut der Antike in einem Sinne, der uns vielfach verständlicher ist und näher liegt, als wenn wir nach Bruchstücken bei den Griechen selbst graben. Des weiteren aber ist CUSANUS gleichsam der Pol, um den sich die neuen geistigen Achsen des Abendlandes drehen und die Weltsichten ermöglichen, die dann NIKOLAUS KOPERNIKUS und JOHANNES KEPLER konkret vollendet haben. „Ja der Kusaner ist in noch umfassenderem Sinne ein allgemeiner Brennpunkt der geistesgeschichtlichen Entwicklung: Er gehört zu den großen deutschen *Universalmenschen* wie LEIBNIZ, in denen die gesamte Überlieferung der Vergangenheit konvergiert, um dann wieder nach allen Seiten auszustrahlen und erneut auf den weitesten Gebieten fruchtbar zu werden. Im Geiste des Kusaners konzentrierte sich noch einmal die ganze Bildung des Mittelalters, die verchristlichte neuplatonische Mystik mit dem scholastischen Aristotelismus, und er vertiefte sein Verhältnis zur Antike noch weiter durch das Originalstudium PLATONS sowie anderer griechischer Philosophen und Mathematiker, die das Mittelalter nur aus zweiter oder dritter Hand gekannt hatte. Auf diese Weise wurde er ein *Wiedererwecker des Altertums und zugleich ein Anfänger der Neuzeit, der erste Humanist und Renaissancemensch in Deutschland*: ja er war sogar schon ein *Vorläufer der Reformation* und ein *Wegbereiter der exakten Naturwissenschaft des Barockzeitalters*“³²⁾.

So wollen wir denn dem CUSANUS-Forscher und PLATON-Interpreten, E. HOFFMANN, das Wort erteilen und uns diese klassische Entwicklung von CUSANUS aus ins Gedächtnis prägen, um damit für das Verständnis des Werkes von PROKLUS gewappnet zu sein. Wir zitieren im folgenden aus der tiefgehenden Einführung „Die Vorgeschichte der Cusanischen *Coincidentia oppositorum*“ von E. HOFFMANN aus der Schrift des NIKOLAUS VON CUES „Über den Beryll“³³⁾ in ihrer deutschen Ausgabe.

³²⁾ So der LEIBNIZ-Forscher D. MAHNKE in seinem Werk: *Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt*, Halle (S.) 1937, S. 76/77.

³³⁾ Philosophische Bibliothek, Bd. 217, Leipzig 1938.

THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
TO WHICH ARE ADDED,
A History of the Restoration of PLATONIC THEOLOGY,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Translation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.



VOL. I.

LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR:

And Sold by T. PAYNE and SON; B. WHITE and SON; J. ROBSON; T. CADILL;
LEIGH and Co. G. NICOL; R. FAULDER; and T. and J. ECERTON. 1792.

[Price Two Guineas in Boards.]

Henry Taylor.

Titelblatt des I. Teils der englischen Ausgabe des PROKLEISCHEN
„Euklid-Kommentars“ von T. TAYLOR, in Faksimile. (Verkleinert)

THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
TO WHICH ARE ADDED,
A History of the Restoration of PLATONIC THEOLOGY,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Translation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.



VOL II.

LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR:

And Sold by T. PAYNE and SON; B. WHITE and SON; J. ROBINSON; T. CADILL;
LITCH and Co. G. NICOL; R. FAULDER; and T. and J. ECERTON, 1792.

[Price Two Guineas in Boards.]

Titelblatt des II. Theils der englischen Ausgabe des PROKLEISCHEN
„Euklid-Kommentars“ von T. TAYLOR, in Faksimile. (Verkleinert)

„Die Meinung hat jedermann zu eigen, die Vernunft aber nur die Götter und ein geringer Teil der Menschen.“

PLATON im „Timaios“.

8. „Jeder Versuch, die philosophische Bedeutung des NIKOLAUS VON CUES zu ermessen, muß ausgehen von dem Grundsatz der gesamten CUSANISCHEN Philosophie, dem Prinzip des Zusammenfalls der Gegensätze (*coincidentia oppositorum*). Dies Prinzip hat NIKOLAUS selbst als seine maßgebende Entdeckung betrachtet; und er war überzeugt, vermöge dieses Prinzips die hinter ihm liegende Philosophiegeschichte neu durchleuchten, die Philosophie seiner Zeit von Grund aus reformieren zu können.“

Und jetzt folgt die eigentliche Vorgeschichte der CUSANISCHEN *Coincidentia oppositorum* und damit die Aufdeckung all der Positionen, die wir im Werke des PROKLUS wiederfinden werden und deren Anwendung auf die Mathematik PROKLUS als erster geleistet hat. Denn auch er stand wohl auf dem Standpunkt des Cusaners: „*Wir haben in unserer Wissenschaft überhaupt nichts Sicheres als unsere Mathematik*“³⁴), der nicht zuletzt auch der Standort von IMMANUEL KANT war.

„Die Pythagoreer ließen einen Grundgegensatz die ganze Natur durchziehen: den Gegensatz des ‚Unbegrenzten‘ und ‚Begrenzenden‘; er hat seine Spielarten in den Gegensatzpaaren von *Vielem* und *Einem*, von *Finsternis* und *Licht*, von *Bewegtem* und *Ruhendem* . . . und anderen Paaren mehr, welche schon früh in der pythagoreischen Schule zu einer förmlichen Tafel der Gegensätze zusammengestellt wurden.“ Gerade diesen Urgegensatz finden wir bei PROKLUS wieder; er wird als *Apeiron* und *Peras* bei ihm zum seinsgründenden und gestaltschöpfenden Prinzip und insbesondere auf die seinsmäßige Erzeugung der mathematischen Gebilde aus ihm und seiner Einheit angewandt. Alle Genesis im Gegenständlichen der Mathematik „folgt“ ihm aus diesem Urgegensatz der Grenze und des Unbegrenzten. Diese methodische Position des PROKLUS ist also originäres pythagoreisches Geistesgut. Denn „alle diese Sonderfälle (von Gegensatzpaaren) . . . führten die Pythagoreer zurück auf einen Urfall von Gegensätzlichkeit, nämlich den *mathematischen*, der in der Verschiedenheit von gerader und ungerader Zahl vorliegt. Die gerade Zahl, weil teilbar, ist prinzipiell unbegrenzt; die ungerade Zahl hingegen setzt der Zweiteilung eine Grenze und hat deshalb den Vorrang, denn im Begrenzen

³⁴) *De possest* (1460) = Opera, Paris 1514, tom. I, fol. 179 b.

liegt *Maß* und *Bestimmtheit*; in der *Eins* aber fallen die *Gegensätze* von *Begrenzendem* und *Unbegrenztem* im voraus zusammen. Denn aus der *Eins* entsteht die Reihe sämtlicher Zahlen, sie selber ist die ungerade-gerade *Urzahl*.“ Dies kommt an vielen Stellen des Werkes von PROKLUS, hauptsächlich in den zwei Teilen seiner Vorrede, fast mit denselben Formulierungen zum Ausdruck und führt auch bei ihm zu der folgenden, umfassenden Synthesis.

„Auf der Geeinheit der Gegensätze im Ur-Einen beruhte das Wesen des pythagoreischen Kosmos; auf dem vernünftigen Begrenzen des Unbegrenzten beruhte die pythagoreische Sinngebung des menschlichen Lebens. Physisch und ethisch galt ihnen die *Harmonie der Gegensätze* als das *Gesetz aller Ordnung*, wie wir es in der Welt der Sterne und der Töne vorbildlich erblicken und auf Erden verwirklichen sollen.“

Man sieht schon hier, wie diese pythagoreischen Standorte des Geistes auf die anfänglichen und abschließenden Hauptinhalte der Philosophie und der Mathematik und Astronomie des NIKOLAUS KOPERNIKUS, des NIKOLAUS VON CUES, JOHANNES KEPLERS und GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ' hinweisen und auf die Ergreifung eines *Apriorischen* im Sinne KANTS und des nachkantischen deutschen Idealismus insbesondere eines FICHTE ausgehen. PROKLUS sucht in den griechischen Grundlagen der Mathematik nach den (apriorischen) *Urbildern* und *Urphänomenen* im Sinne GOETHEs und seiner Metamorphosenlehre als „Gegebenheiten“ eines übergreifenden Seins und Bewußtseins überhaupt.

Über PYTHAGORAS, ANAXIMANDROS und HERAKLIT erklimmt dann diese anfängliche Problematik der Gegensätze der Vorsokratiker in PARMENIDES einen neuen Höhepunkt, den später auch PROKLUS in vollem Umfange neu ersteigt und von ihm aus Überschau auf die Mathematik hält. „*Das reine Sein* selber ist das Eine, Wahre, Ganze, Identische, Vollkommene, Ewige, Stetige, Ruhende; . . . die Reihe ihrer Gegen- teile muß daher dem Nichtsein zukommen . . . Der Dualismus ist in seiner vollen Schärfe proklamiert; *es liegt ein Abgrund zwischen der Welt des wahren Seins* und der Scheinwelt unbeständiger Buntheit. Jene wahre Welt aber müssen wir ‚denken‘, wenn wir uns ‚von der Wahrheit führen‘ lassen wollen; *denn alles echte Denken will zu wahrhaft Seiendem vordringen*. Auf die trügerische Welt hingegen beziehen sich unsere *Wörter*“ (Nominalismus!) „und sinnlichen Eindrücke“ (Empirismus und Positivismus!), „sie haben mit ihrem Gegenstande die Vergänglichkeit und Stückhaftigkeit gemein. Wird der Gegensatz:

so gefaßt, wie ihn PARMENIDES *dialektisch* (das Wort im antiken Sinne genommen) begründet und wie ihn die ganze eleatische Schule in ihrer *Logik* festgehalten hat, so ist . . . das Motiv des gemeinsamen Ursprungs der Gegensätze oder ihrer bindenden Korrelation . . . preisgegeben. Sondern zwischen *Sein und Nichtsein* und somit auch zwischen *Vernunftdenken und Sinneswahrnehmung* liegt eine Kluft. Die beiden Polarmomente des Gegensätzlichen sind nicht mehr aufeinander angewiesen, sondern sie sind *kontradiktorisch voneinander getrennt*.“

Alle diese Stufen durchschreitet PROKLUS in seinem Werke an dem Urgegensatz des *Peras* und des *Apeiron* für die Mathematik und für das mathematische Sein. „Das eine Mal wird die Gegensätzlichkeit *kosmogonisch begründet*, das zweite Mal wird sie *dialektisch gefordert*.“ Aus diesen Gesichtswinkeln heraus sucht PROKLUS nach den *Entstehungsträgern des Geistes des Menschen, der sich in der Mathematik selbst betrachtet, seine Schau-Fähigkeit entdeckt und erprobt und seine Vernunft „kritisiert“*. Dieser Morphologie des Geistes als übergreifender Genesis geht PROKLUS in seinem Werke nach und zieht für sie besonders alle Lehrstücke PLATONS heran, deren Positionen er sich zu eigen macht.

Denn „anders ist es um das Problem bei PLATON bestellt, dessen Lehre für den *Zusammenfall der Gegensätze* von besonderer Bedeutung wurde“. Wichtig ist hier vor allem PLATONS „*Symposion*“³⁵⁾, in dem die kosmogonische Art der Gegensätzlichkeit dargelegt wird. „Vergegenwärtigen wir uns nun, wie die andere Art der Gegensätzlichkeit, die *dialektische*, von PLATON zum systembildenden Faktor seiner Lehre gemacht wurde . . . PLATON *geht seinen neuen Weg*: Ist das Sein dasjenige, worauf sich die reine Denkerkenntnis unserer Vernunft richtet, so kann das Sein nicht Eines, sondern muß mit Notwendigkeit Vieles sein. Es gibt kein Vernunftdenken, das nicht von seinen *ersten Elementen* an auf konstitutive Vielheit angewiesen wäre; denn *Denken* muß *Begriffe trennen und verbinden, Andersheit und Gleichheit feststellen, Beziehungen* zwischen Verschiedenem *bejahen oder verneinen* . . . Die *Vielheit des wahren Seins* muß jener *geordneten Vielheit von Grundbedingungen entsprechen, die von der Ver-*

³⁵⁾ Siehe die feinsinnige Spezialarbeit über das PLATONISCHE „Gastmahl“ von E. HOFFMANN: *Über Platons Symposion*, Neue Heidelberger Jahrbücher, Jhg. 1941. S. 36—58, wo diese Positionen belegt sind.

nunft vorausgesetzt wird, wenn sie ihr eigenes Denken bis auf seine ersten Elemente, auf seine obersten ideellen Gesichtspunkte zurückverfolgt. Mag es sich um *logische Ideen* wie die der *Selbigkeit* und *Gleichheit* handeln, oder um sittliche, wie die der *Gerechtigkeit* und *Tapferkeit* . . .“

Dies ist auch der zentrale Ansatz des PROKLUS zur Ergreifung der Mannigfaltigkeit der Seinswelt mathematischer Gebilde und mathematischer Ideen- und Gegenstandsphänomene, die nur teilweise mit ‚logischen Ideen‘ gleichkommen. PROKLUS sucht am Urbeispiel der Mathematik nach *übergreifenden Funktionalgesetzen des Seins* schlechthin, nach dem *Zusammen von Denken und Anschauen in der Erkenntnis* und in den ersten wahrhaft geistigen Schöpfungen des Menschen, die von Innen heraus hervorbrechen, wie dies in der Mathematik und ihren Gebilden und auch in der Kunst und ihren Schöpfungen der Fall ist. Die ersten Elemente des Denkens werden von PROKLUS gesucht und auf ihre obersten ideellen Gesichtspunkte bezogen mit dem Ziele, dadurch die Mannigfaltigkeit des Mathematischen und des Wissenschaftlichen und Künstlerischen überhaupt zu ergreifen. Die *Ordnung*, die in diesen Bereichen obwaltet, kann nur von jenen ersten ideellen Sinnträgern geliefert werden.

Nach PLATON „besteht das wahre Sein nicht in einer einzelnen Einheit . . ., sondern in einer Vielheit *ideeller Einheiten*, in einer in sich zusammenhängenden Welt reiner *Seinsgestalten*. Daraufhin aber bekommt nun auch die Vielheit des unteren Bereichs einen anderen Charakter als bei den Eleaten: Es ist die Vielheit, die den *Abbildern* eignet im Gegensatz zu ihrem Modell, oder die dem *Meßbaren* eignet im Gegensatz zu seinem Maß . . . Hier ist der Ort, wo bei PLATON das *Problem der Koindenz* prinzipiell zu Worte kommt: Ist es möglich, daß an irgendeinem Punkte die abbildliche Welt der Erscheinungen ihre Teilhabe an der Ideenwelt bis zur unmittelbaren Berührung, ja bis zum faktischen ‚Zusammenfallen‘ steigert? Auf der *Möglichkeit* dieser Koinzidenz muß der ganze Sinn menschlichen Bemühens beruhen. Die Kraft, die dies verwirklicht . . . dieser Dämon, heißt *Seele*. Der vernünftigen Seele des Menschen ist nicht die Aufgabe gestellt, aus dem Vielen in ein Eines oder in ein Grenzenloses zu flüchten, sondern das ‚Maß‘ zu finden, in welchem die Gegensätze gebunden sind: Im Maß allein ist die ‚*Bestimmung*‘ zu erkennen“ — hier muß also eine umfassende *Lehre von der Definition* abzweigen, die auch für die Mathematik zentral steht und bis heute noch nicht geleistet ist — „der

alles von Haus aus Unbestimmte zugeführt werden soll. Alles Wissen und Können des Menschen beruht auf dieser Funktion seiner Seele . . . *auf dem Wege zum Sein jene ‚Mitte‘ zu finden, in welcher die harmonische Proportion von Idealem und Realem ihre Glieder koinzidieren läßt.* Jede vernünftige Seele ist mit ihrem geistigen Teil im Sein der Ideen heimisch, mit ihrem sinnlichen Teile aber in der Welt des Strebens und Begehrens verwurzelt. Zwischen beiden *Harmonie* stiften besagt, *daß die Ideenwelt zum Muster genommen wird*; denn aus ihr, nicht aus der Welt der Triebe, stammt das *Ebenmaß*. Nimmt aber so die Seele *Ideen zum Vorbild*, so wird sie *schöpferisch*: Sie prägt den Erscheinungen *‚das Siegel des Seins‘* auf; sie nötigt den Stoff der empirischen Welt, *im Hinblick auf Ideen Formung anzunehmen*.“

Gerade diese überragende Stellung des PLATONischen Ansatzes und Ausbaues werden wir in vielfachem Niederschlag bei PROKLUS wiederfinden. HOFFMANN zitiert gerade an dieser Stelle PROKLUS und schreibt: „PROKLUS gab dem Gedanken PLATONS im Kommentar zu EUKLID die Formulierung, *daß die Gleichheit das Maß auch für das Ungleiche sei*“ (Prop. XIII, theor. VI, p. 293, FRIEDLEIN). Wir haben die entscheidenden Stellen allesamt im II. Teil unserer Einleitung gesammelt und man kann sie so jetzt einmal in zusammenhängender Gedankenfolge zusammen mit den originären PLATONischen Positionen studieren und geistesgeschichtlich einordnen. Die Erneuerung des hierdurch von PLATON begründeten *Prinzips der Harmonie* erfolgt über PROKLUS durch CUSANUS, KOPERNIKUS, KEPLER und LEIBNIZ und findet auch ihre moderne Ausgestaltung wieder in den ersten grundlegenden Neuansätzen der Wissenschaft in der Schriftenreihe „Die Gestalt“. Den Zugang vermittelt dort vor allen Dingen GOETHE, dessen Lebenswerk wir im tiefsten Grunde erst zu ahnen beginnen. „Das Band, das die verschiedenen Gebiete zusammenfaßt, die in dem vorliegenden Buch behandelt werden, bildet *die antike Lehre von der mathematischen Natur der Seelenkräfte*“, so beginnt A. SPEISER das Vorwort seiner „Mathematischen Denkweise“³⁶⁾ und fährt fort: „. . . aber ich habe den Eindruck, *daß der mathematische Standpunkt in neuerer Zeit allzusehr in den Hintergrund gerückt ist und daß es nottut, ihn wieder einmal energisch zu vertreten*.“ Für diese Vertretung kann niemand besser Brücke sein als PROKLUS und sein Werk. Und seine

³⁶⁾ Zürich 1932.

Wirkung schreitet weiter zu dem Urteil SPEISERS: „An den Schluß des Buches habe ich einen Vortrag gestellt, den ich zur Feier des dreihundertsten Todestages von KEPLER gehalten habe. *In diesem Manne scheint sich mir, trotz mancher Irrtümer, die mathematische Denkweise besonders eindrucksvoll zu verkörpern*“, dem er im selben Werke die bedeutsame Stelle über KEPLER hinzugefügt hat: „Den Gipfelpunkt dieser ganzen Mathematik bildet KEPLERS „*Harmonice Mundi*“, wo mit den Mitteln der Symmetrien in der Geometrie und der Harmonien in der Musik der Bau des Weltalls ergründet und beschrieben wird. *Aber mit diesem Werk bricht alles ab, es kommt die moderne Mathematik, die sich von der Kunst abwendet, und die moderne Kunst, die, zum mindesten offiziell, von Symmetrien nichts mehr wissen will.*“ KEPLERS Standorte waren auch die des PROKLUS, hat doch gerade KEPLER in seiner „*Harmonice Mundi*“ die entscheidenden Stellen aus dem vorliegenden Werke des PROKLUS angeführt, eigenständig verarbeitet und in seine eigenen Gedankenbezirke aufgenommen. Diese *Kontinuität des Geistes* sollte man nie außer acht lassen, wenn man über die Mathematik wirklich etwas Grundlegendes zu sagen sich anschickt. Doch fahren wir mit dem Querschnitt, den uns E. HOFFMANN in so kristallener Klarheit gibt, fort mit den Gedankenentwicklungen PLATONS, die auch für PROKLUS bestimmend waren.

„Was so in der Einzelseele geschehen soll, das muß in der Seele des Alls begründet liegen, *wie alles Einzelne im Allgemeinen* . . . Doch ist zu fragen, ob in der philosophischen Methode PLATONS mittelbar nicht noch eine andere Voraussetzung liegt, die auf Zusammenfall der Gegensätze hindeutet . . . Es ist zu fragen, ob nicht in irgendeiner Weise schon dem Ideenbereich das Moment der Koinzidenz eigne“, . . . nämlich „so, daß *im Wesen der Idee* selber *urbildliche Koinzidenz* beschlossen läge. Sind wir berechtigt, die PLATONISCHE Idee so aufzufassen? . . . In Gestalt solcher *reinen Einheiten* müssen wir die Ideen denken . . . Ist dies aber geschehen, dann ist die Einheit der Idee zum ‚Gemeinsamen‘ über dem Vielen geworden, das aus ihr folgt . . . *In der Unausgedehntheit der Idee liegt also gerade die Bedingung für die große Mannigfaltigkeit dessen, was ihr zugeordnet wird.*“

So und nur so ist die EUKLIDISCHE Definition des Punktes aufzufassen und auch alle Kommentare, die PROKLUS an sie knüpft. Das anfängliche Gebilde der gesamten Geometrie ist nur in diesem übergreifenden, ideenverwobenen Sinne mit PLATON zu verstehen und auch

unserem Bewußtsein nahe zu bringen. Es war der Kardinalfehler der Mathematik, daß sie diese PLATONISCHE Position in den EUKLIDISCHEN „Elementen“ überhaupt immer übersehen hat und ohne sie auszukommen wähnte. Auch die Neueren wie TOEPLITZ und REIDEMEISTER³⁷⁾ fassen den Zusammenhang hier nur *formal* im Sinne einer modernen formalistischen Mathematik, ohne an den eigentlichen PLATONISCHEN Kern dabei heranzukommen, wie er hier und insbesondere bei PROKLUS eindeutig und klar durchbricht. Insofern sind alle diese modernen Bemühungen unfruchtbar zu nennen, weil sie nicht an den Seinskern des Ganzen herangehen, sondern ihn ängstlich von der Mathematik fernzuhalten versuchen, um ja die moderne „Formalexistenz“ zu retten. Auf diese Weise aber kommen wir nicht weiter, und dies war für mich mit ein Grund, die Ausgabe des PROKLUS und die damit verbundene mühevollen Arbeit zu übernehmen.

„Die Idee, deren Sein allem Mehr und Minder entzogen ist, hat gerade das Mehr und Minder des Teilhabens ermöglicht. Aber das Wort Zusammenfall hat PLATON in diesem Zusammenhange nicht ausgesprochen . . . Vielleicht deshalb, weil PLATON überhaupt in seinen Schriften niemals etwas Prinzipielles zweimal gesagt hat; vielleicht aber auch, weil der wahre Dialektiker nach PLATON niemals von der Idee aussagen dürfte, daß ‚in ihr‘ selbst, in ihrem wahren Sein, Gegensätzliches koinzidiere. Dies Koinzidieren bleibt für ihn ein *Bild*, vom Blickpunkt des Werdens aus gewählt und berechtigt, aber dem Maßstab nicht angemessen, der in den Ideen selber liegt. Dialektisch durchgedacht bleibt der Zusammenfall der Gegensätze für PLATON eine *Alogia* . . . Daher behandelt das Symposium die *Alogia* des Zusammenfallens nicht *begrifflich*, sondern *anschaulich* . . . — Doch noch eine letzte Seite des Koinzidenzproblems bei PLATON bleibt zu erwägen. Im Dialog Parmenides entwickelt PLATON dialektisch, was aus der Voraussetzung, daß ‚das Eins ist‘, und aus der anderen Voraussetzung, daß ‚das Eins nicht ist‘, folgt, und zwar erstens für das Eins, zweitens für das Nicht-Eins³⁸⁾.

³⁷⁾ Siehe O. TOEPLITZ, Mathematik und Antike, „Die Antike“, Bd. 1, Jhg. 1925 und seine PLATON-Studien in „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik“. Die Arbeiten von REIDEMEISTER sind in der Anm. 29 angegeben. — In diese Linie gehört auch O. BECKER und insbesondere auch J. STENZEL mit „Zahl und Gestalt bei PLATON und ARISTOTELES“, 2. Aufl. Leipzig-Berlin 1933, obwohl STENZEL noch am ehesten auf die tieferen *Seins*untergründe geachtet hat.

³⁸⁾ Siehe H. RICKERT: Das Eine, die Einheit und die Eins. 2. Aufl. Tübingen 1924.

Das Ergebnis ist, daß wir *nicht zu Entscheidungen* gelangen, sondern zu *Antinomien*“, — die ihren letzten Niederschlag in der *Mathematik der Mengenlehre* gefunden haben, nachdem sie vorher schon bei BOLZANO spukhaft herumgegeistert sind — „daß in jedem der vier Fälle Thesis und Antithesis gleichermaßen möglich sind; daß also z. B. Teilbarkeit und Unteilbarkeit, Ruhe und Bewegung, Begrenztheit und Unbegrenztheit dem Eins und dem Nicht-Eins gleichberechtigt zugesprochen werden können. *Die Dialektik kann also das Wesen des Absolut-Eins weder positiv noch negativ erreichen, da es jenseits der für alle Vernunft konstitutiven Vielheit liegt.*“

Auch diese Gedanken, zusammen mit der Entdeckung des *Irrationalen* durch das Griechentum (THEÄTET und EUDOXUS) und der Begriffe der *Aktualität* und *Potentialität* in Hinsicht auf das *Unendliche* und das *reelle Kontinuum* brechen bei PROKLUS an einigen Stellen seines EUKLID-Kommentars auf und lassen einen tiefen Blick gerade in die Ideenwelt des PLATONischen „*Parmenides*“ tun, dessen heute wohl besten Kommentar uns der Mathematiker A. SPEISER geschenkt hat³⁹⁾. „*Vereinigung der Gegensätze ist dialektisch nicht denkbar*“ — auch nicht im Bereich des Mathematischen, wie PROKLUS ganz klar auseinander setzt, denn immer gibt es *Peras* und *Apeiron* als seinsmäßige Konstituenten der mathematischen Gebilde- und Ideenwelt —. „Dies Prinzip ist Eines, und einen Gegensatz dazu kann es im genuinen Platonismus überhaupt nicht geben . . . Hiermit ist die antike Geschichte der Koinzidenz als eines kritisch erfaßten Problems für Jahrhunderte zu Ende. Erst am Ausgang des Altertums wurde es von einem christlichen Platoniker abermals gestellt.“ (S. 21 bei HOFFMANN.)

9. Diese neue Stellung nun erfolgt im *Neuplatonismus* PLOTINS und in ihrer höchsten Ausprägung vor CUSANUS — wenn man so sagen darf — bei PROKLUS. Verfolgen wir auch diese Entwicklung noch kurz bei E. HOFFMANN (S. 26 ff.) „PLOTIN war überzeugt, daß er PLATONS Ansicht folge, wenn er zuhöchst das Eine Übergegensätzliche lehrte, zu zweit den Nus, wo die Identität von Denken und Gedachtem auseinandertritt und kategoriale Vielheit herrscht, zu dritt die Weltseele, die vollends zwischen geistiger und körperlicher Welt die *Vermittlung* bringt. Aber die Trias spielt bei ihm eine ganz neue Rolle: *sie ist bereits zum Entwicklungsprinzip geworden* . . . In diesem Neu-

³⁹⁾ A. SPEISER, Ein *Parmenides-Kommentar*. — Studien zur Platonischen Dialektik, Leipzig 1937.

platonismus darf, der Sache nach, insofern von einer *Koinzidenz der Gegensätze im Absoluten* gesprochen werden, als in der unendlichen Einsheit Gottes zugleich der Grund beschlossen liegt, aus dem die Andersheit schon des noëtischen Bereiches folgt, die sich dann in der Gegensätzlichkeit der psychischen Sphäre weiter ausbreitet. *Das Urbild-Abbild-Verhältnis ist also der Ur-Fall von Gegensatz; zur Koinzidenz gelangen kann nur bedeuten: Zur Wieder-Einung mit dem Urbild kommen*, indem wir uns selber vergessen und über die noëtische Sphäre hinaus in liebender *Anschauung* nur noch vom Einen wissen, vor dem unsere Andersheit in nichts versinkt . . . *Den folgerechten Ausbau des PLOTINischen Gedankens aber gab PROKLUS: Wie aus dem Einen das Viele sich entfaltet, um wieder zu ihm zurückzustreben, so bleiben für alles Seiende drei Phasen maßgebend: Das Beharren, der Hervorgang und die Rückstrebung.*

So übergab die Antike das Problem der Gegensätzlichkeit den christlichen Denkern in der Form, daß für seine Problematik *drei Momente* konstitutiv waren: *Die Verknüpfung des Gegensatzbegriffs mit dem platonischen Eidolon, die Verbindung des Koinzidenzbegriffs mit der neuplatonischen Trias, und der Charakter des neuen Unendlichkeitsbegriffs, der die Stetigkeit einer ins Grenzenlose verlaufenden Reihe in Beziehung setzte zur supertranszendenten Einsheit Gottes, dem absolute Unendlichkeit innewohnt.*“ (S. 28 bei HOFFMANN.)

10. Verfolgen wir noch in wenigen Sätzen die weitere Entwicklung bei CUSANUS, weil wir daran später unmittelbar anknüpfen können. Die Sicht von der Antike zu PROKLUS ist jetzt ganz klar. Wir müssen sie jetzt aber auch noch von PROKLUS weg in den deutschen Geistraum kurz deutlich machen und erhellen. Nur so werden wir die Kontinuität der Gedanken in geistesgeschichtlicher und kulturmorphologischer Folge sehen und befähigt sein, die eigentliche Tiefenwirkung des Werkes des PROKLUS ganz zu ermessen. Denn PROKLUS bedeutet — kulturmorphologisch gesehen — in bezug auf dieses Zentralproblem des deutschen Denkens die ‚Mitte‘ und den ‚Mittler‘ von der Antike zur Neuzeit, die wir in dieser Hinsicht mit CUSANUS ansetzen dürfen. „*Im mathematischen Spiegel leuchtet die höchste Wahrheit nicht nur in einer entfernten Ähnlichkeit, sondern in blitzender Nähe auf*“, so heißt es bei CUSANUS⁴⁰⁾. Und MAHNKE, der gerade diesen Gedankengängen besonders tief und eindringlich nachgegangen ist und die

⁴⁰⁾ *Compl. theol.*, Kap. 1 = Op. 1514, II B, 92 b.

*deutsche mathematische Linie philosophisch belegt hat, hinauf bis zu LEIBNIZ, er sagt: „Es ist eine der größten geschichtlichen Leistungen des Kusaners, den allmählichen Übergang von der mathematischen Mystik zur exakten, mathematischen Naturwissenschaft eingeleitet zu haben“*⁴¹⁾.

Bei HOFFMANN heißt es jetzt in seinem geistesgeschichtlichen Aufriß (S. 31) weiter: „NIKOLAUS hat den Grundsatz vom Zusammenfall der Gegensätze von niemandem übernommen, sondern er hat ihn selbst gefunden und formuliert . . . Wo NIKOLAUS als Kritiker“ (der lateinischen Scholastik rationalistischer Prägung eines ANSELM) „auftritt, sind es zwei Einwände, die er gegen sie erhebt: *Sie hat das Absolute nach endlichen Maßstäben gedacht, und sie hat das Schöpferische in der menschlichen Erkenntnis übersehen.*“ Gerade diese Einwände sind auch gegen den mathematischen Formalismus und gegen die Logistik im vollen Umfange zu erheben, die eigentlich „theologisiert“ mit sogenannten rationalistischen Methoden. „Beide Fehler führt er darauf zurück, daß man nicht die geschichtliche Linie weitergeführt hatte, auf der das Koinzidenzproblem sich entwickelt hatte.“ Genau denselben Vorwurf muß man gegen Formalismus und Logistik erheben, und ich habe das gewagt, um endlich einmal eine neue sinnvolle Entwicklung in der Mathematik wieder anbrechen zu lassen⁴²⁾. „Das Absolute muß in seiner transzendenten Unendlichkeit Komplizit das enthalten, was in der Explizitheit Universum heißt . . . Wie aber dem Universum in seiner vielheitlichen Ausfaltung die Gegensätzlichkeit eignen muß, so muß im Absoluten die Koinzidenz vorausliegen. Nur von demjenigen ‚Größten‘, das zugleich ‚Kleinstes‘ ist, kann das ‚Größer oder Kleiner‘ des Ausgefalteten abstammen. Soll *comparatio* begründet werden, so ist *superlatio* vorauszusetzen. Dieser Gedanke, welcher die *complicatio* und die *coincidentia* vereint, ist der *Ansatzpunkt der ganzen CUSANISCHEN Philosophie.*“ Wir werden seine Untergründe vielfach bei PROKLUS antreffen, und ich habe es mir gerade bei der Bearbeitung des II. Teils dieser Einleitung als Aufgabe gestellt, diese Untergründe bei PROKLUS deutlich aufzuzeigen. Ich habe die Stellen angegeben, wo man in den PROKLEISCHEN Formulierungen

⁴¹⁾ D. MAHNKE, Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt, Halle (S.) 1937, S. 80. Siehe auch die folgenden Seiten über CUSANUS.

⁴²⁾ M. STECK, Das Hauptproblem der Mathematik, Berlin 1942; 2. erw. Aufl. 1943.

CUSANUS zu hören glaubt, und damit wollte ich die geistige und kultur-morphologische Brücke zwischen PROKLUS und CUSANUS herstellen und plastisch werden lassen. „Mit der Anerkennung“ jenes Cusanischen Ansatzpunktes, „ist das Denkschema der rationalistischen Methode überwunden, denn deren Verendlichung des Unendlichkeitsbegriffs durch bloße Abstraktionen“ — der finite Standpunkt HILBERTS und des Formalismus in der Mathematik — „ist aufgehoben . . . CUSANUS gab dem Koinzidenzprinzip die neue Fassung, daß, wo wir methodisch endliche Gegensätze im Unendlichen vereinen müssen (wie in der Mathematik), diese Macht unseres eigenen Denkens ein Abbild der allmächtigen Unendlichkeit Gottes sei. Denn Denken besagt: *apriorisches Denkgut explizit in Begriffsreihen entwickeln*; also die vom Ursprung her empfangenen *Stammideen unserer Vernunft* tätig in Vielheit und Verschiedenheit ausfalten; *aus der Unendlichkeit der Seinsidee die Totalität alles Endlichen begreifen*. Dies war der Kern seines Platonismus: *Er verdinglicht nicht die Idee, sondern er verlegt das ideelle Moment in die Methode der Denk-Erkenntnis*.“

In diesem Bezuge hat CUSANUS als unmittelbaren Vorgänger den PROKLUS in seinem Gedankengebäude, wie es im EUKLID-Kommentar niedergelegt ist. Von hier aus führen auch über CUSANUS die Linien unmittelbar zu KEPLER, zu KOPERNIKUS und besonders zu LEIBNIZ, in dem *das infinitesimale Bewußtsein der Griechen* gleichsam kulminiert und zur Entdeckung der *Infinitesimalrechnung* führt. Dies ist die geistesgeschichtliche Linie, auf deren Herausarbeitung es uns bei dem Werke des PROKLUS besonders ankommt, und die auch wieder in allen ihren Bezügen beachtet werden muß, wenn man die moderne Mathematik überhaupt verstehen und als Kulturgebilde einordnen will. „Ob dieser Standpunkt“, wie ihn CUSANUS einnimmt, „zu Mittelalter oder Renaissance gehöre, ist müßig zu fragen; große Denker stehen nicht zwischen, sondern *über* den Zeiten“. Dies gilt auch von KOPERNIKUS, von KEPLER, von LEIBNIZ, von KANT und nicht zuletzt von GAUSS, der wohl mit als der letzte Denker bezeichnet werden muß, dem diese Dinge vollauf klar waren, so daß sie sich auch in mathematische Entdeckungen umsetzen konnten. Wenn man sich einmal die Mühe nimmt, diese Dinge bei allen großen Mathematikern zu erforschen, so wird man auch in der Mathematik die Spreu vom Weizen zu scheiden lernen. Möge uns PROKLUS dabei ein Helfer sein!

11. Nach dieser grundsätzlichen Gesamtschau der verschiedensten Aspekte, die wir vom Werke des PROKLUS zu erwarten haben werden, muß es jetzt in der allgemeinen Einführung in seine Gedankenwelt noch unsere Aufgabe sein, die eigentliche Charakteristik dieser Aspekte im einzelnen darzustellen und sie insbesondere in die deutsche geistesgeschichtliche Entwicklung einzuordnen. Anschauung und Begriff sind dabei die beiden Pole, die es ermöglichen werden, auch hierin Klarheit zu gewinnen.

Die Anschauung „vermittelt“ dabei das Begriffliche, das in der Mitteilung nach Außen dann freilich die Vorrangstellung einnimmt, seinem Sinne und seiner Bedeutung nach aber vollkommen leer bliebe, wenn es nicht in steter Teilhabe an dem Bereich anschaulichen Seins stünde. PROKLUS sucht nach kategorialen Einteilungsgründen und Abgrenzungsprinzipien des Mathematischen vom Nicht-mathematischen, und man darf seinen Versuch vielleicht als die erste „*Kategorienlehre der Mathematik*“ bezeichnen, die ganz auf das gegenständliche Sein ihrer ideellen Gebilde als Phänomene des Geistes abgestellt ist. Er sucht nach den ideellen, *vom Geist selbst geforderten Bezugsgliedern* als denjenigen Teilen des Ganzen der mathematischen Ideenwelt und ihres Seinscharakters, die *erst vom Ganzen her* als Sinnträger und Bedeutungsglieder des Mathematischen überhaupt erscheinen, verstanden werden und dienen können. PROKLUS sucht nach der mathematischen Gestalt schlechthin in diesem und in dem präzisierten Sinne, den ich an anderer Stelle schon herausgearbeitet und geboten und besonders bei EUKLID und seinen apriorischen „Annahmen“ belegt habe⁴³).

Der übergreifende Gesichtspunkt und Blickwinkel, aus dem heraus PROKLUS ‚sieht‘, ist also die

mathematische Gestalt

überhaupt, und man kann seinen EUKLID-Kommentar auch als den — sogar weitgehend geglückten — Versuch einer ersten, wenn auch bescheidenen „*Gestaltlehre der Mathematik*“ erkennen. Sie werden wir besonders deutlich im nachfolgenden II. Teil dieser Einleitung in allen ihren Bezügen herauszuarbeiten und im einzelnen an Hand des PROKLEISCHEN Originals zu belegen haben. Nur auf einen Umstand muß dabei noch hingewiesen werden, den wir aber jetzt, nachdem wir

⁴³) M. STECK, Mathematik als Begriff und Gestalt, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942.

den geistesgeschichtlichen und problemmethodischen Aufriß von CUSANUS aus vorweggenommen und geboten haben, in allen seinen Spielarten beherrschen und ihm Rechnung tragen können.

Die diesbezüglichen PROKLEISCHEN Gedanken einer Gestaltlehre der Mathematik sind nämlich allerdings — dies soll nicht verschwiegen werden — vielfach in neuplatonische Emanationen und Emanationismen — im Sinne PLOTINS — als Philosopheme einer mehr kompilatorischen Tätigkeit eingepackt, und man muß sich schon Mühe geben, das originäre und genuine griechische Geistes- und Gedanken-gut aus dieser Hülle zu lösen, um es in seiner Eigenständigkeit neu erweisen und hinstellen zu können. Nimmt man diese Lösung vor, so kann dies für die Neubesinnung auf den mathematischen Geist und auf die mathematische Denkweise einen klassischen Beitrag von lebendiger Konkretheit abgeben.

Man muß sich dieser Aufgabe einmal unterziehen, weil gerade die ganz großen deutschen Mathematiker, Philosophen und Naturforscher, die die deutsche Linie in der Mathematik richtungsweisend bestimmen, sich in ihren Werken mehrfach auf PROKLUS und seine Gestaltlehre der Mathematik berufen, sie originär weiterbilden und dem deutschen Geist in unerhörten und einmaligen Synthesen der Anschauung und des Denkens Denkmäler der Geisteskraft und ideellen Schaufähigkeit von *Zusammenhängen symmetrischer Art* setzen, die alle Zeiten und alle Völker bisher überdauert haben und auch weiter überdauern werden. Und damit kommen wir zu einem Fundamentalpunkt des Ganzen, der bei PROKLUS nicht genug beachtet werden kann, wenn man sein Werk in geistesformender und kulturmorphologischer Sicht verstehen und als richtungsweisend für die Kultur des Abendlandes werten will.

Die „Symmetrie“ nämlich, auf die es dabei als ein *übergreifendes Prinzip* fundamental ankommt, könnte man etwa definieren als ein *Gleichmaß der Wiederholung gleichartiger Gestaltelemente*, die der Geist als *Ordnungselemente* bereitstellt und so anordnet, daß das an Zusammenhang, was ihm selbst gleicht, seinen *vollkommensten und adäquatesten Ausdruck findet*.

Dieses *allgemein geistige Symmetrieprinzip* ist gleichsam der Nerv der griechischen Denk- und Schauart überhaupt; es ist das *Ur-element*, das in den Wissenschaften sowohl, als auch in den Künsten durchbricht und sich zu erkennen gibt, wo immer beide echt und wahr sind. A. SPEISER formuliert den *allgemeinen Begriff der Symmetrie*

so ⁴⁴⁾: „Der Ausdruck ‚Symmetrie‘ bedeutet ein Zusammenstimmen verschiedener Teile eines Ganzen. *Symmetrien findet man überall dort, wo Geistiges sich in der Materie manifestiert.* Schon in der Natur treten sie auf; viele Lebewesen besitzen die spezielle Symmetrie der Spiegelbildlichkeit; die Pflanzen weisen größtenteils Drehsymmetrien auf, die besonders an Blattstellungen, an Blüten usw. sichtbar werden. *Für die Kunst bilden sie das Lebenselement,* und man kann sie in Poesie und Prosa, in der Musik und in der Malerei aufzeigen . . . So ist Kunst und Symmetrie zu allen Zeiten verbunden gewesen, und das wird auch in Zukunft so bleiben. Als die wahre Fortführung der Entdeckungen früherer Kunstepochen erscheint die Lehre von den Raumgruppen. Hier, an den Modellen der Kristallstruktur wird die neue Kunst lernen. Auf dieser Grundlage kann sie sich auch wieder an die Ornamentik wagen.

Der wahre Grund, warum die Symmetrien *mathematisch* wichtig sind, liegt in der *Gruppeneigenschaft*; wenn man zwei Deckoperationen nacheinander ausführt, so entsteht eine dritte, oder anders ausgedrückt: zwei Symmetrien, die gleichzeitig am Ornament auftreten, bedingen eine weitere Symmetrie . . . *Die Symmetrien wirken unmittelbar, ohne Dazwischentreten des Verstandes*; es muß also in ihrer Aufnahme eine Fähigkeit der Seele zur Geltung kommen, welche ihr wohlbekannt ist, *die sie sich nicht erst mühsam einüben muß.* Wo Symmetrie, da ist auch Zahl.“

Man meint eine Stelle bei PROKLUS vor sich zu haben, wenn man diese Formulierungen liest. Sie gehen auf das Wesen dessen, was hier überhaupt in Frage und zur Beantwortung steht.

12. Um diese Beantwortung zu geben, bereits hier in der Einführung zu den PROKLEISCHEN Gedanken, will ich drei große Deutsche, Mathematiker, Naturforscher und Philosophen in einem, herausgreifen und bei ihnen die *symmetrische Gestaltsynthese*, von der wir handeln und von der auch PROKLUS spricht, deutlich werden lassen.

Bei NIKOLAUS VON KUES, der uns durch unseren vorhergehenden Aufriß hier zunächst am nächsten steht, sehen wir diese Gestaltsynthese in seinem *symmetrisch gegliederten Ordnungsprinzip der Anschauungs- und Begriffs-Reihen*, die und deren Bildung er für *alle* Erkenntnis und ihre Zurückführung auf letzte Elemente als methodisches Postulat aufstellte, einerseits, in seinem *Prinzip der „coincidentia oppositorum“* andererseits, das ihm die Möglichkeit eröffnet und bietet, in der Anschauung des Endlichen das Unendliche zu be-

⁴⁴⁾ A. SPEISER in der Studie „Über Symmetrien in der Ornamentik“, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 15 ff.

fassen und zu vermitteln und — symmetrisch dazu — das Unendliche im Endlichen begriffssymbolisch zu ergreifen und für die Erkenntnistheorie sowohl als auch für die Mathematik und die exakten Naturwissenschaften in den *symmetrischen Funktionen* des 'Zählens', 'Messens', 'Wägens', die CUSANUS als solche als erster entdeckt hat, fruchtbar werden zu lassen.

Bei KEPLER vollzieht sich in seiner „*Harmonice Mundi*“ (Linz 1619), die 10 Jahre nach seiner „*Astronomia Nova*“ (Heidelberg 1609) komponiert und gestaltet wurde, jene Gestaltsynthese unter Erneuerung pythagoreischer und prokleischer Motive in seinem *Gesetz der Harmonie* von Geometrie und realer Welt, wenn ich so sagen darf, in seiner *symmetrischen Koordinierung* ideeller geometrischer Gegenstände und Seinsweisen und deren Gesetzmäßigkeiten mit dem Sein des Wirklichen als Himmelserscheinung und als Weltenlauf. Die Synthese heißt bei KEPLER „*Naturngesetz in gestaltmäßiger, ideeller mathematischer Form*“, als dessen eigenständigen Entdecker im deutschen Geistraum — unabhängig von seinem Zeitgenossen GALILEI und von ganz anderen methodischen Positionen ausgehend — wir KEPLER ansehen und vollgültig in Anspruch nehmen dürfen. Seine *weltgeschichtliche Bedeutung* liegt darin, daß er durch diese Gestaltsynthese symmetrischer Art vom geometrischen Urbild her und damit vom idealen Seienden aus, der Naturforschung und damit auch der Geistesforschung, die, im Vollzuge jenes Symmetrieprinzips, *den Geist als das zu begreifen hat, was ihm selbst gleicht*, einen ganz neuen, unerhört großartigen und dauernden Anfang gewiesen hat, der fortwirkte und besonders in KANT einen theoretischen Sichter größten Stiles fand. KEPLER hat durch seine Gestaltsynthese die ideelle mathematische Wahrheit verbunden mit der Wirklichkeit „Natur“ in symmetrischer Koordinierung, und diese Wahrheit, wie alle Wahrheit schlechthin, in der Übereinstimmung des Wirklichen mit einem übergreifenden gegenständlichen Sein und seinen Prinzipien erschaut. Mit am eindringlichsten hat dies E. HOFFMANN formuliert, wenn er schreibt ⁴⁵⁾: „Die Erkenntnis richtet sich für KEPLER (wie für NIKOLAUS CUSANUS) gar nicht auf die *res*, sondern auf den *ordo rerum*... Das Philosophische an KEPLER sind nicht seine Gesetze, sondern ist die Geburt seiner Gesetze... Die Astronomen rückten von ihm ab; die Theologen rückten von ihm ab. Der Grund aber war philosophischer Art, er lag in seiner Einsicht: *daß der Erkenntnisbegriff jeder Einzelwissenschaft etwas Philosophisches ist*... PTOLEMÄUS wollte Wahrscheinlichkeit, BRAHE stimmende Rechnung, KOPERNIKUS den geometrischen Aufriß; KEPLER ist Philosoph, weil er auf das Ganze geht, *weil er einheitliche Wissensform postuliert, welche die grundsätzliche Harmonie zwischen Gesetzesanspruch im Geiste und Gesetzeserfüllung in der Natur herstellt*...“

Der Rechtsgrund für alle exakte Naturforschung ist und bleibt das ideell aufgebaute und geplante, jederzeit und an jedem Orte reproduzierbare wissenschaftliche Experiment. Das *symmetrische Prinzip* dieses Rechtsgrundes aber, das darin besteht, daß unser Geist auf generelle Findungen plant und in Übereinstimmung damit die Frage an die Natur richtet, das also die ganze Anlage des Experiments bestimmt und sinnvoll trägt, ist ideeller Art und KEPLER

⁴⁵⁾ E. HOFFMANN, Kepler als Philosoph, Die Pädagog. Hochschule, 2. Jhg. 1930 (herausg. von A. FAUST), Bühl/Baden, S. 241—261.

hat es in der Geometrie gefunden. Eine fast parallele Symmetrisierung erreicht KEPLER in der „Weltharmonik“ auch zwischen Mathematik und Musik, worin ihm später nur noch L. EULER in seiner „Musiktheorie“ gefolgt ist.

Bei LEIBNIZ findet die symmetrische Gestaltsynthese, von der wir sprechen, eine neue spezifische Prägung in seiner *Monadologie* und *Theodizee*, indem sie dort unter originärer Erneuerung PLATONISCHER, ARCHIMEDISCHER und CUSANISCHER Positionen und Standorte die Geistformen sichtbar werden läßt, die als Grundgestalten allem Sein schlechthin zugrunde-, besser gesagt, *vorausliegen*. Die Konstruktion des Seienden, die philosophische Hauptaufgabe überhaupt, erfährt bei LEIBNIZ eine Synthese aus Anschauung und Begriff in seiner Monadenlehre und seiner „*Monade*“ als „*metaphysischer Grundgestalt*“, wie er es selbst nennt, aus den beiden — symmetrisch koordinierten — Polen und Brennpunkten des menschlichen Geistes überhaupt: Aus der Idee und der *Ideenlehre* einerseits, aus dem Begriff und der *Logik* andererseits. So formuliert erkennt man, daß gerade LEIBNIZ die Positionen aller neueren *idealistischen* Philosophie und Mathematik inauguriert, die in KANT erneut kulminieren und bei FICHTE eine weitere Erfüllung finden. LEIBNIZ entdeckt *den Schlüssel der modernen Mathematik* in Begriff und Anschauung des Differentials und des Differentialquotienten *aus dem monadologischen Ansatz seines Gesamt Denkens*. Auch in der Logik war man seit ARISTOTELES nicht weiter gekommen. LEIBNIZ fügt ihr als erster eine neue Idee, ein neues Prinzip, das des *zureichenden logischen Grundes* hinzu, der sich immer mehr auch als Seinsgrund zu erkennen gibt, ein Prinzip, das wir heute in der Anwendung in Naturforschung und Technik „*Kausalität*“ nennen.

Und dieser Ansatz einer *Gestaltsynthese in symmetrischer Ausprägung* strahlt in den deutschen Geistraum weiter aus in den deutschen, durch KANT bedingten, von LAMBERT vorbereiteten Idealismus eines FICHTE („*Wissenschaftslehre*“) und findet eine einmalige und bisher letzte Prägung großen Stils bei GOETHE, deren Tragweite und Bedeutung gerade für die exakten Wissenschaften wir heute erst zu ahnen beginnen. Auch KANT „*nennt seine Philosophie Idealismus, weil seit PLATON die Idee der großartigste Beleg für das philosophische a priori geblieben ist*“⁴⁶⁾.

13. Was wir in dem übergreifenden Begriff und seiner Anschauung „*Gestalt*“ in Verbindung mit jenem allgemeinen geistigen Symmetrieprinzip meinen, das ist bei PLATON als *Ideenlehre* angelegt und als *sokratische Logik* gestaltet. Dieses Gedankengut kommt hauptsächlich über PROKLUS zu uns in den deutschen Geistraum. Wenden wir uns also jetzt der Gestaltlehre der Mathematik, wie sie zum ersten Male in der Geistesgeschichte bei PROKLUS niedergelegt ist, zu, und suchen wir dabei nach den inneren Gründen, Eigengesetzlichkeiten, Zusammenhänglichkeiten und Eigenständigkeiten des Mathematischen als symmetrischer Prinzipien im oben intendierten Sinne

⁴⁶⁾ So H. KNITTERMEYER in seinem Werk „*Immanuel Kant*“, Bremen 1939, S. 43/44.

überhaupt. Wenn eine Besinnung des Geistes in unserer Zeit vonnöten ist, wie niemand bestreiten wird, so wird sie die Positionen der Mathematik, die Standorte des Geistes, der in der Mathematik in sich selbst reflektiert ist, nicht unbesehen aufgeben können. Alle eigentliche geistige Besinnung ist zu allen großen Geisteszeiten an diesen Standorten, den ideellen *Gestalten* und *Gestaltfeldern* der Mathematik, vorgenommen und sogar vollzogen worden und hat sich in nicht zu unterschätzendem Maße an den ideellen Gebilden und Seinsträgern der Mathematik als ihren Sinngebilden vielfach erfüllt. Daher ist das PROKLEISCHE Werk, wenn wir diese umfassenden geistigen Gesichtspunkte und diese ganzheitlichen Blickwinkel, wie sie durch die Gestalt als Einheit von Anschauung und Begriff vermittelt und gewährleistet werden, zugrunde legen und als höhere Maßstäbe anlegen und walten lassen, durchaus nicht veraltet, sondern, geistesgeschichtlich und kulturmorphologisch gesehen, hochaktuell und im Wissenschaftlichen als Geistform vielleicht „moderner“, jedenfalls viel fruchtbringender und wesentlich umfassendere Perspektiven des Geistes eröffnend, als alle nurbegrifflichen nominalistisch-positivistischen Gebäude und „Systeme“, die man seit fast einem halben Jahrhundert vielfach als die „moderne Wissenschaft“ par excellence auszugeben beliebt. Mit dem Verstehen des PROKLEISCHEN Werkes in dem eben angedeuteten Sinne einer Geistschau durch die Zeiten werden wir wieder zu einer Form des Wissenschaftlichen kommen, die wir seit LEIBNIZ in der Mathematik systematisch verloren haben und deren Kulminationspunkt das Werk von KEPLER darstellt. GAUSS ist der letzte Epigone dieser ganzheitlichen Richtung, der an geistigem Format an die genannten Denker heranreicht.

In dieser Geistschau und in dieser Besinnung auf einen neuen Anfang wollen wir das Werk des PROKLUS auf uns wirken lassen⁴⁷⁾.

⁴⁷⁾ Siehe: M. STECK, Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik, Nova Acta Leopoldina Bd. 13, Nr. 93, Jhg. 1943, S. 131—149, und die dort in den „Anmerkungen und Hinweisen“ angegebene umfangreiche Literatur.

II. Proklus Diadochus und seine Gestaltlehre der Mathematik

1. Die ontologischen und erkenntnistheoretischen Positionen des Proklus

„Die Größe des Nutzens, der den anderen Künsten und Wissenschaften aus der Mathematik erwächst, wird uns klar, wenn wir bedenken, daß sie den theoretischen Wissenschaften *vollkommene Ordnung* verleiht und den Charakter eines *sinnerfüllten Ganzen* mit Anfang, Mitte und Ende . . . Der Nutzen der generellen mathematischen Wissenschaft für die Philosophie unmittelbar und die übrigen Künste und Wissenschaften dürfte damit klar sein. Nun aber unterfangen sich einige Widerspruchsgeister, das Ansehen dieser Wissenschaft in den Staub zu ziehen, die einen, indem sie ihr den Nimbus des Schönen und Guten absprechen und behaupten, nicht diesem Zwecke gelten ihre Darlegungen; die anderen aber erklären, die auf die Sinnenwelt gerichteten Erfahrungswissenschaften seien nützlicher als ihre generellen Theoreme. — Solchen Behauptungen werden wir entgegentreten mit dem Nachweis der *Schönheit* der Mathematik . . . Folgende drei Vorzüge nämlich bewirken vorzugsweise sowohl beim Körper, wie bei der Seele die Schönheit: die *Ordnung*, die *Symmetrie*, die *klare Bestimmtheit* . . .“

PROKLUS im 1. Teil der Vorrede zum EUKLID-Kommentar.

14. Die allgemeine Einführung in das PROKLEISCHE Werk hat die ganzheitlichen und umfassenden Sichten, die es eröffnet, bloßgelegt und die durchgehenden, übergreifenden Gedanken und Leitlinien aufzuzeigen versucht. Es muß also jetzt an erster Stelle in diesem II. Teil der Einleitung unsere Aufgabe sein, von dieser Zusammenschau als vom Ganzen her die einzelnen Teile der dargestellten Perspektiven und ausgebreiteten Geisthorizonte genauer abzuwandern und in ihren Tiefendimensionen zu untersuchen, um sie in ihrer Tragweite für das Ganze verständlich und klar werden zu lassen. Das Ganze wird von diesen Teilen als seinen Sinnträgern gleichsam umfaßt und umschlossen.

Die Grundlegung einer *Gestaltlehre der Mathematik*, deren Leitlinien wir in diesem II. Teil der Einleitung und ihren einzelnen Abschnitten herausarbeiten wollen, findet sich gerade in diesem Werke erstmalig in der gesamten Geistesgeschichte niedergelegt. Sie muß als solche daher die ersten und anfänglichen Standorte des Geistes

aufzeigen und sichtbar werden lassen, aus denen heraus sie als Grundlegung erst ihre eigentliche innere Begründung empfängt. Diese ersten Standorte sind teils *ontologischer*, teils *erkenntnistheoretischer*, teils *methodologischer* Art, und gerade im Zusammen- und Verflochtensein dieser Dreierheit ist der spezifisch griechische Ansatz überhaupt erst klar zu sehen und voll zu werten. Diese Standorte müssen wir nun aufsuchen und selbst betreten, um von ihnen und ihren einzelnen Gesichtsorten aus dem Auge des Geistes jene umfassenden Sichten in ihrem Einzelsein im allgemeinsten und generellen Sinne freizugeben. Wir wollen dazu alle wichtigen Originalstellen selbst heranziehen und sie gedanklich einordnen in die Geistesgeschichte des Griechentums sowohl, als auch in diejenige der deutschen Denker, die, vielfach wesentlich von diesen Positionen ausgehend, sie originär verarbeitend und umbildend, die *deutsche Linie* als Ideenleitlinie in der Mathematik und darüber hinaus in der deutschen idealistischen Geistigkeit und ihren Räumen bestimmen.

Es gilt daher die seinsgründenden und seinsergreifenden Prinzipien der Mathematik und der Philosophie, soweit sie Ontologie der Idee ist und ihre Hauptaufgabe in der denkerischen Konstruktion des Seienden schlechthin erblickt, aufzusuchen und als die zugrunde liegenden Kräfte und Mächte aller forschenden Tätigkeit des Menschen zu erkennen. Vorher aber muß der *allgemeine* Aufriß der Ontologie und Erkenntnislehre gegeben und aus ihm das ersehen werden, was das Griechentum als *Grundlage für alle Wissenschaften und auch für die Künste* angesehen hat.

Für die Ontologie und Erkenntnislehre der Mathematik ist bei PROKLUS das Werk PLATONS leitend. Es liefert ihm in seiner ganzen ideenhaltigen Mächtigkeit die inneren Gründe für seinen Aufbau, die ersten sinn- und bedeutungsvollen und damit das Ganze tragenden Ansätze für die Durchführung und Gesamtschöpfung seiner Gestaltlehre der Mathematik. Was PROKLUS an eigenen Ordnungen und Gliederungen den Lehrstücken der Vorsokratiker, PLATONS und insbesondere denjenigen der Pythagoreer hinzufügt, ist zum großen Teile und, soweit es originär und eigenständig ist, neuplatonisches Gedankengut, das wir in den folgenden Darlegungen nur insoweit heranziehen wollen, als es für die klassisch griechische Grundlegung und ihre Weiterführung hauptsächlich im deutschen Geistraum belangvoll und bedeutsam geworden ist. PLOTIN und seine Lehren weisen meist die Wege und Zugänge, auf denen sich PROKLUS an das antike Lehrgut

herantastet, und die er einschlägt, um zu den Gegenständen der Wissenschaft schlechthin, ihren Methoden und ihren Ergebnissen, besonders aber, um zu ihren *übergreifenden Prinzipien als symmetrischen Geistgestalten* vorzudringen. Es handelt sich dabei um eine *idealistische* Ontologie und Erkenntnislehre, die grundsätzlich von allen Rationalismen und Mechanismen als Philosophemen späterer Zeitaläufe und ihrer Struktur geschieden ist. Jene waren und sind meist so heterogener Art, daß man in ihnen die durchgehenden und tragenden Gedanken nur sehr schwer erkennen kann; im Griechentum und bei PROKLUS sind sie noch homogen, bilden eine geschlossene und in sich selbst ruhende Einheit, die in ihrer Weite und großräumigen Anlage und Ausrichtung uns gerade heute wieder viel zu sagen hat. Im Verlaufe ihrer Darstellung wird Gelegenheit sein, ihre Weiterführungen insbesondere im deutschen Geistraum anzudeuten und kenntlich zu machen. Ihre Überschau und ihre Tragweite werden dann im Schlußteil dieser Einleitung vertiefter erfaßt und erkannt werden können. Denn überlickten wir das Ganze unter vollständiger Kenntnis der Teile, so werden wir die in der allgemeinen Einführung (Teil I dieser Einleitung) gebotenen Sichten bestätigt finden.

15. Für die ontologischen und erkenntnistheoretischen Standorte des PROKLUS ist vor allen Dingen der 1. Teil der Vorrede des Werkes maßgebend und richtungweisend. Hier entwickelt er die allgemeinen Grundlagen, die er in den späteren Teilen des Werkes an geeignet gewählten Beispielen aus der mathematischen Ideenwelt sinngemäß anwendet und als bei den unsinnlichen, *nur einer anschauenden Urteilskraft* unterstehenden Gebilden der Mathematik als erfüllt nachweist. Wenden wir uns jetzt diesen allgemeinen ontologischen Thesen und erkenntnistheoretischen Darlegungen als den Leitlinien des Ganzen zu.

Zu Beginn des 1. Teils der Vorrede heißt es: „Das *mathematische Sein* gehört notwendigerweise weder zu den höchsten, noch zu den niedrigsten Seinsgattungen (*Kategorien*), die im Gegensatz zum einfachen Sein der *Teilung* unterworfen sind, sondern behauptet den mittleren Platz zwischen den ungeteilten, einfachen, unzusammengesetzten Wesenheiten (*reine Ideen*) und den geteilten, durch mannigfache Zusammensetzungen und vielfache Trennungen gekennzeichneten (*Sinnendinge*).“ Zwischen die Seinsbereiche der reinen Ideen (*mundus intelligibilis*) und der Sinnendinge (*mundus sensibilis*) schiebt also der Neuplatoniker PROKLUS — eine originäre methodische Position

PLATONS in hypostasierender Umbildung benützend — einen mittleren Seinsbereich, den der mathematischen Wesenheiten und Gebilde ein. Sie sind nämlich durch die folgenden Attribute und generellen Eigenschaften ontologisch gekennzeichnet: „Denn der Charakter der *Unveränderlichkeit*, *Beständigkeit* und *Unwiderlegbarkeit* der mit ihr (der Mathematik) sich befassenden Sätze erweist ihren Vorrang vor den materiellen Seinsarten; aber die Ausführlichkeit ihrer *Erkenntnismethoden*, . . . das Fortschreiten von immer neuen Voraussetzungen zu immer neuen Folgerungen, verleiht ihr einen minderen Rang als der ungeteilten und in sich selbst vollkommen begründeten Seinswelt“ (der reinen Ideen).

Die Ontologie erscheint nun bei PROKLUS — wie übrigens auch bei PLOTIN und ganz in dessen Sinne — unmittelbar gekoppelt mit der Erkenntnistheorie, die ihrerseits ebenfalls eine ähnlich-entsprechende, symmetrische Gliederung aufweist, wenn es weiter heißt: „Deshalb . . . verteilte auch PLATON die *Erkenntnisarten* des Seienden an die höchsten, die mittleren und die niedrigsten Wesenheiten . . .“ Die höchste Welt der reinen Ideen ist die des Ungeteilten, die auf intellektuelle Art „mit einem Blick auf einfache Weise das Intelligible unterscheidet“ (die intuitive Erfassung der intelligiblen Welt durch *intellektuelle Anschauung*), und die durch „die intuitive Erfassung und Aneignung der Seinsobjekte die anderen Erkenntnisarten übertrifft“. Die Welt des Geteilten, die Sinnenwelt, „die den niedrigsten Seinsgrad hat und insgesamt dem Sinnesbereich angehört“, hat als Erkenntnisart „die *Überzeugung*, die nur einen matten Strahl der Wahrheit erfaßt“. Die mittlere Welt endlich, die von den mathematischen Seinsarten und Gebilden erfüllt ist, hat als Erkenntnisart „das *vermittelnde* (*diskursive*) *Denken*. Denn dieses beansprucht erst die zweite Stelle nach dem reinen Denken (*Dialektik* im ursprünglich antiken Sinne) und der höchsten Erkenntnis, ist aber *vollkommener*, *genauer* und *reiner* als die bloße Überzeugung“.

Die Erkenntnisfunktionen des vermittelnden Denkens der Mathematik sind dann nach PROKLUS die folgenden: „Es entwickelt und zergliedert die Unermeßlichkeit des Nus und entfaltet“ (man erkennt schon hier die *explicatio* des CUSANUS), „was im intellektuellen Denkprozeß zusammengefoldet war, verbindet dann aber hinwiederum das Gesonderte und führt es zurück auf den Nus.“

Jetzt die Erkenntnisobjekte, auf die sich die Erkenntnis als auf ihre eigentlichen Gegenstände zur Erforschung der Wahrheit richtet:

„Wie nun die *Erkenntnisarten* voneinander verschieden sind, so unterscheiden sich auch von Natur aus die *Erkenntnisobjekte*; und zwar übertrifft die intelligible Welt alle anderen durch die Unwandelbarkeit ihrer Formen; die Sinnenwelt aber bleibt in allem hinter dem höchsten Sein zurück.“ Dies ist echter Platonismus, wie wir ihn hier bei PROKLUS gleich zu Beginn seines Werkes antreffen. Nun die *mathematischen Objekte* in ihrer ontologischen Projektion: „Die mathematischen Objekte endlich und überhaupt die Objekte des vermittelnden Denkens behaupten ihren Ort in der Mitte. Vor dem Intelligiblen haben sie vermöge ihrer Trennung voneinander die größere Menge (Zahl) voraus; vor der Sinnenwelt haben sie den Vorzug der *Immaterialität*“, sind also reine Gedankendinge; „ersteren stehen sie nach in Hinsicht auf Einfachheit, letztere überragen sie durch ihre *Exaktheit* und dadurch, daß sie *schärfere Bilder des intelligiblen Seins* bieten als die Sinnen-*dinge*“. Die *mathematischen Objekte* sind also nach PROKLUS *Bilder und Modelle reiner Ideen* und ihrer Zusammenhänglichkeiten, durch die wir überhaupt erst Einblick in die intelligible Welt erhalten. Dies ist ursprüngliches PLATONISCHES Gut, hauptsächlich der Niederschlag der Lehren aus PLATONS „*Staat*“ (VI. und VII. Buch, insbesondere „*Höhlengleichnis*“). „Aber gleichwohl sind sie nur *Bilder* und prägen in geteilter Weise das Ungeteilte ab und in mannigfachen Formen die einförmigen *Urbilder des Seienden* und, um es zusammenfassend zu sagen: *Sie sind im Vorsaal der höchsten Seinsformen aufgestellt und lassen das einheitliche, ungeteilte und zeugende Sein in Erscheinung treten*, sind aber nicht hinausgelangt über die Scheidung und Zusammensetzung der Begriffe und über die bloßen Bildern eigene Realität, haben die mannigfachen und weitschweifigen Denkprozesse des Geistes noch nicht überwunden und die unmittelbare Eingliederung in die einfachen und von allem Stofflichen freien Erkenntnisse noch nicht gefunden.“

Die strenge, dreigestufte und koordinierende, symmetrische Gliederung der Ontologie und Erkenntnislehre ist festzuhalten, wenn wir später die jetzt anschließenden *seinsgründenden Prinzipien*, insbesondere die der Mathematik, einer genaueren Musterung unterziehen (s. Abschnitt Nr. 3). Der allgemeine Gedankengang des ersten Teils der Vorrede geht dann so weiter:

„Es ist aber die Überzeugung unerläßlich, daß diese *allgemeinen*“ (ontologischen und erkenntnistheoretischen) „*Voraussetzungen* weder in den vielen und gesonderten Seinsformen zuerst Bestand haben,

noch hinterher von dem Vielen ihren Ursprung gewinnen, sondern man muß annehmen, daß sie vor ihnen bestehen und durch *Einfachheit* und *Genauigkeit* sich auszeichnen.“ Damit ist wieder eine zentrale Position PLATONS aufgedeckt, nämlich die der Präexistenz der Ideen in der Seele des Menschen. Das Lehrstück von der *Anamnesis* (Wiedererinnerung) schließt sich gerade an diese Position systematisch an. „Deshalb behauptet denn auch ihre Erkenntnis den Vorrang vor den vielen anderen Erkenntnissen und bietet für diese die Prinzipien, und die vielen danken ihr ihren Bestand und werden auf sie zurückgeführt.“ Das *Problem des Entstehens der Mannigfaltigkeit aus unendlicher Einheit*, wie es dann insbesondere bei NIKOLAUS VON CUES und bei LEIBNIZ zentral wird und hinaufwirkt bis in den deutschen, durch KANT bestimmten Idealismus eines FICHTE und HEGEL, klingt schon hier deutlich bei PROKLUS an; für das Mathematische ist dafür immer noch unübertroffen die bekannte Stelle aus PLATONS „*Menon*“, wo SOKRATES aus dem Sklaven des MENON anamnetisch-mäeutisch gerade diesen Fragenkreis im Bereich der Zahlen, die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2, wie wir heute sagen würden, herausfragt. Mit einem ähnlichen Beispiel exemplifiziert auch PROKLUS diese Stelle und fährt dann allgemein fort: „Es ist eben doch nicht so, daß es von dem Geteilten“ (der Sinnenwelt) „wissenschaftliche Erkenntnis gibt.“ Vielmehr ist die höchste Form der Wissenschaft *Dialektik* im ursprünglich PLATONischen Sinne, von der PROKLUS früher schon ausgeführt hat: „Es ist also klar, daß die Mathematik denselben Prinzipien untersteht, wie alles andere Sein. Wie wir aber ihre allgemeinen Prinzipien betrachtet haben, die auf alle ihre Gattungen sich erstrecken, so wollen wir nun auch ihre allgemeinen und einfachen Lehrsätze überblicken, die der einen Wissenschaft entstammen, die alle mathematischen Erkenntnisse in einem begreift . . .“ In dieser allgemeinen übergreifenden *mathesis* (Dialektik) „vollzieht sich das Aufsteigen der Erkenntnisse von den beschränkten zu den umfassenden, bis wir unmittelbar zur Wissenschaft des *Seienden als Seiendem* hinaufgelangen“. Hier liegen die ganzen Positionen und Tendenzen der Vorsokratiker und PLATONS klar zutage. In dieser höchsten Wissenschaft — *Gestaltlehre* im ursprünglich griechischen Sinne des Wortes *μορφή* —, die *Seinsergreifung* ist und über Seinslehre (Ontologie) hinausgewachsen, herrscht die wahre Einsicht. „Denn diese will nicht die wesentlichen, für alle Zahlen geltenden (rein logischen) Gesetze und nicht das, was allen Quantitäten gemeinsam ist, erforschen, son-

dern sie betrachtet nur das alleinige Wesen und die Existenz von allem Seienden; und deshalb ist sie die umfassendste von allen Wissenschaften und alle empfangen von ihr ihre Prinzipien. Denn die höheren Disziplinen bieten jeweils immer den ihnen untergeordneten die obersten Voraussetzungen für die Beweise.“ Dies ist der originäre PLATONISCHE Kern von „Axiom“ (s. Teil I dieser Einleitung). „Die vollkommenste Wissenschaft aber reicht allen von sich aus die Prinzipien dar, den einen in beschränkterer, den anderen in umfassenderer Weise . . . Eine Wissenschaft also steht an der Spitze der vielen Disziplinen und Wissensgebiete, die die allgemeinen Voraussetzungen, wie sie in allen Seinsgattungen zur Geltung kommen, erkennt und allen mathematischen Wissenschaften die Prinzipien an die Hand gibt.“

Hierauf geht PROKLUS nochmals auf die Erkenntnisarten in ihrer Beziehung und Koppelung mit der Ontologie ein und führt aus: „Hierauf wollen wir die Frage nach dem Erkenntnisvermögen untersuchen und als Führer bei der Behandlung denselben PLATON aufstellen, der im „Staate“ gesondert die Erkenntnisobjekte und die Erkenntnisarten unterscheidet und paarweise (symmetrisch) den Erkenntnisobjekten die Erkenntnisarten zuweist. Er bezeichnet von dem Seienden das eine als *intelligibel*, das andere als *sinnlich wahrnehmbar*, und von dem Intelligiblen das eine wieder als *intelligibel (im engeren Sinne)*, das andere als das durch das diskursive Denken Erfasste; und von den Objekten der Sinneswahrnehmung die einen als *sinnlich wahrnehmbar*, die anderen als *Abbilder*. Für das Intelligible, die oberste der vier Gattungen“ (*Kategorien*) „bestimmt er *das reine Denken*; für die Objekte des diskursiven Denkens das *diskursive (vermittelnde) Denken*; für die Sinneswahrnehmung *den Glauben (die Überzeugung)*, für die Abbilder *die bildhafte Erkenntnis*.“ Das gegenseitige Verhältnis der Einzelglieder dieser „*Kategorienlehre*“ erfährt jetzt bei PROKLUS seine spezifische Bestimmung in den folgenden Formulierungen:

„Nach seiner“ (PLATONS) „Erklärung verhält sich die bildhafte Erkenntnis zur Sinneswahrnehmung ebenso wie das vermittelnde zum reinen Denken. Denn die bildhafte Erkenntnis erkennt die Bilder der Sinnendinge . . ., die den niedrigsten Rang unter den Seinsformen einnehmen und in Wahrheit nur *Bilder von Bildern* sind. Das vermittelnde Denken“, das für die Mathematik in Frage kommt, „betrachtet die *Bilder des Intelligiblen*, die von den obersten, einfachen und unteilbaren Seinsformen in den Bereich des Vielen und der Trennung

herabgesunken sind, weshalb auch diese Erkenntnis von anderen, *früheren Voraussetzungen*, abhängt.“ Hier wird deutlich, daß der Anfang aller Mathematik und aller mathematischen Erkenntnis nicht nur Bild und die *nomina* sein kann, sondern daß anfänglich andere Gründe und Voraussetzungen für sie maßgebend sind. Will man sie *metaphysisch* nennen, so nur dann, wenn dieser Terminus in einem klaren und wohlbestimmten Sinne gebraucht wird. Es sind „*Symmetrien*“ in dem allgemeinsten Sinne, den wir in der „Einführung“ auseinanderzusetzen versucht haben; *sie geben die Struktur des menschlichen Geistes selbst wieder*, der in der Mathematik und in den mathematischen Erkenntnissen sich selbst betrachtet. Wir werden noch wiederholt Gelegenheit haben, auf diesen Kardinalpunkt hinzuweisen. PROKLUS setzt dann seine Entwicklungen so fort: „*Das reine Denken aber steigt unmittelbar empor zum voraussetzungslosen Urprinzip.*“ Steht hier nicht dem *absolut Logischen* das *Urphänomen* im Sinne GOETHES gegenüber?

16. Jetzt folgen im 1. Teil der PROLEISCHEN Vorrede die Stellen über das mathematische Sein und die mathematischen Gegenstände und Sinngebilde *als Urformen* und *Urgestalten* unserer Anschauung, Stellen, die KEPLER wörtlich in seine „*Harmonice Mundi*“ (Linz 1619) aufgenommen hat⁴⁸⁾. „In der Folge haben wir zu untersuchen, welcher Art das Sein ist, das wir den mathematischen *Arten* und *Gattungen* zuerkennen müssen, ob wir zu dem Zugeständnis genötigt sind, daß es seine Existenz herleitet von der Sinnenwelt“, der ARISTOTELISCHE Standpunkt, „sei es durch *Abstraktion*, wie es gewöhnlich heißt, sei es durch Addition von Einzelzügen zu einer allgemeinen Idee, oder ob man ihm schon vor diesen die Existenz zugestehen muß, wie PLATON es fordert . . . Wenn wir nun behaupten, daß die mathematischen Seinsformen ihren Bestand von der Sinnenwelt herleiten, indem die Seele von den materiellen Dreiecken oder Kreisen die Idee des Kreises oder des Dreiecks hinterher in sich gestaltet, so ist fürs erste die Frage zu erheben, woher denn den (mathematischen) Sätzen ihre *Exaktheit* und *Unwiderlegbarkeit* zukommt. Unbedingt entweder von der Sinnenwelt oder von der Seele. Aber die Herleitung von der Sinnenwelt ist undenkbar, denn dann müßte dieser viel mehr Genauig-

⁴⁸⁾ Siehe M. STECK, Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941.

keit eignen. *Also von der Seele, die dem Unvollkommenen die Vollendung, dem Ungenauen die Genauigkeit verleiht.* Denn wo gäbe es im sinnlichen Bereich das Ungeteilte („Punkt“), das Flächen-, das Raumlose, wo die *Gleichheit* der Radian, die stets sich gleichbleibenden Proportionen der Seiten, wo die rechten Winkel? Sehen wir nicht, daß alle Sinnendinge miteinander vermischt sind, daß es bei ihnen keine Reinheit und keine Freiheit von Entgegengesetztem gibt, sondern daß alles geteilt und ausgebreitet und in Bewegung ist? Wie können wir also den unbewegten Ideen eben das beharrende Sein herleiten aus dem, was stets in Bewegung ist und bald so, bald anders sich verhält . . . Wie werden wir ferner auf die genau bestimmten und unabdingbaren Seinsformen von dem Unbestimmten (her) den Charakter höchster Vollendung übertragen? *Denn alles, was Ursache der unveränderlichen Erkenntnis ist, ist eben dasselbe in um so höheren Maße. Die Seele ist also anzunehmen als die Schöpferin der mathematischen Seinsformen und Begriffe. Wenn aber die Seele die Urbilder ihrem Wesen nach in sich begreift und ihnen das Dasein verleiht*“ — aus dem So-Sein folgt also im Bereich des Intelligiblen das Da-Sein, nicht umgekehrt — „ . . . so befinden wir uns mit solcher Einstellung in der Gefolgschaft PLATONS und möchten *das wirkliche Sein der mathematischen Wissenschaft* gefunden haben. Wenn sie (die Seele) aber ohne den Besitz und die vorherige Aneignung der Begriffe ein so ungeheuer kunstvolles und immaterielles Gewebe erzeugt und eine so bedeutende Wissenschaft ins Dasein ruft, wie kann sie dann erkennen, ob das Erzeugte wieder zeugungskräftig ist oder ein Windei und leerer Schatten statt Wirklichkeit; nach welchen Normen bemißt sie die in ihnen liegende *Wahrheit*? Und ferner, wenn sie deren Sein nicht in sich hat, wie kann sie dann eine so bunte Mannigfaltigkeit von Begriffen“ (s. oben S. 42) „erzeugen? Auf diese Weise werden wir ihre Existenz dem Zufall überantworten, ohne sie auf irgendeinen Ausgangspunkt zurückzuführen. Wenn also die mathematischen Seinsformen der Seele entstammen und diese nicht von den Sinnendingen die Idee ihrer Schöpfungen hat, so läßt sie diese auch aus den Ideen hervorgehen . . .“

Diese klassische Gedankenentwicklung, die man nicht unterdrücken kann, wenn man das spezifisch griechische Geistesgut hervorholen will, das im Werke des PROKLUS niedergelegt und vielfach gerade in den deutschen Geistraum bestimmend eingestrahlt ist, setzt dann PROKLUS noch weiter fort, und es ist der Mühe wert, seine Ent-

wicklungen schon mit Rücksicht auf das Geisteserbe KEPLERS, in extenso kennenzulernen. „Fürs zweite sodann ergibt sich für den Fall, daß wir von unten, aus dem Bereich der Sinnenwelt, die mathematischen Begriffe zusammensuchen, die Frage, ob wir nicht genötigt sind, die Beweise für besser zu erklären, die auf den Sinnendingen und nicht die auf den jeweils umfassenderen und einfacheren Seinsformen sich aufbauen? Denn wir behaupten doch, daß die Prinzipien in jedem Falle dem Beweisverfahren bei der Fahndung nach der gesuchten Wahrheit entsprechen müssen. Wenn nun das Partikuläre Prinzip ist vom Universalen und die Sinnendinge von den Objekten des vermittelnden Denkens, wie ist es dann möglich, die Schlußfolgerung des Beweises mehr aus dem Allgemeinen herzuleiten als aus dem Partikulären und das Sein der mittleren Denkobjekte vor dem der Sinnendinge als den Beweisen näher verwandt zu erklären? . . . Die Grundlagen der Beweise aber beanspruchen die Priorität und den wesentlichen Vorrang vor den partikulären Sätzen und sind die Prinzipien der Beweisergebnisse. *Die beweisenden Wissenschaften sind also weit davon entfernt, über das sekundäre und dunklere Wesen der Sinnenwelt zu spekulieren* und nicht vielmehr die Objekte des vermittelnden Denkens, die vollkommener sind als die Erkenntnisse durch Sinneswahrnehmung und Glauben, zu betrachten.“

Dieser zweite *methodisch-logische* Grund für den Ideencharakter der gesamten Objektwelt der Mathematik gilt auch heute noch in vollem Umfange und in seiner ganzen unabdingbaren Stichhaltigkeit, wenn die moderne Mathematik des Formalismus und der Logistik dies auch geflissentlich zu übersehen sich bemüht. Gerade dieser Grund war für KOPERNIKUS, KEPLER, CUSANUS und LEIBNIZ der maßgebende, ihre Konstruktionen des Seienden im *idealistischen* Sinne zu orientieren. (S. unsere allgemeine Einführung I.) Es folgt der dritte Grund. „Fürs dritte endlich sagen wir, daß man mit solcher Behauptung *den Geist geringer einschätzt als die Materie*.“ Dieser Grund ist metaphysischer Art; er kann aber auch nicht bestritten werden, wie uns gerade die jüngste geschichtliche Gegenwart lehrt. „Denn wenn die Materie das Wesenhafte, dem der Charakter des Seins und der Bestimmtheit vorzugsweise eignet, von der Natur empfängt, und der Geist nach jenen sekundäre Nachformungen und spätere Abbilder in sich ausprägt, die ihrem Wesen nach weniger wertvoll sind, indem er von der Materie abstrahiert, was seiner Natur nach von ihr untrennbar ist, macht man dann nicht den Geist schwächer und unvollkom-

mener als die Materie? . . . Doch es erscheint überflüssig, gegen diesen *Wahn*, der schon von vielen und oftmals kritisch untersucht worden ist, Stellung zu nehmen. Wenn aber die mathematischen Begriffe nicht zu fassen sind als Abstraktionen von den materiellen Dingen“ — der Standpunkt des ARISTOTELES, der hier wieder abgewehrt wird — „noch als Kollektivbegriffe des den Einzeldingen Gemeinsamen, und wenn sie überhaupt nicht sekundärer Art sind, noch von den Sinnendingen stammen, *dann muß doch unbedingt die Seele sie entweder von sich oder vom Geist erhalten oder sowohl von sich wie vom Geist*. Empfängt sie sie aber von sich allein, wie sind sie dann Abbilder der intellektuellen Seinsformen? Wie ist es denkbar, daß sie vom höchsten Sein ihre Seinserfüllung empfangen, nachdem sie doch eine Mittelstellung einnehmen zwischen der ungeteilten und der geteilten Welt? Und wie kann die im Geist beschlossene Seinswelt mit den *Urbildern des Universums* ihre Präexistenz behaupten? . . . Und wie unterscheidet sie sich dann noch von der Materie, die bloß der Möglichkeit (*potentia*) nach alles ist? . . . Es bleibt also nur die Annahme, daß die *Seele* von sich und vom Geist diese Begriffe erhalte, *und daß sie der Inbegriff der Seinsformen ist*, die ihr Wesen von den intellektuellen Vorbildern erhalten, den Eintritt in das Sein aber nach eigenem Antrieb vollziehen. *Der Geist war also nicht eine von Begriffen leere Tafel*“, die Auffassung der ARISTOTELischen *tabula rasa* wird also hier deutlich abgelehnt — „*sondern eine stets vollbeschriebene, die sich selber vollschreibt und zugleich vom Geist beschrieben wird*. . . . In dieser Erkenntnis setzt denn auch schon PLATON die Seele aus allen mathematischen Ideen zusammen, zerlegt sie nach Zahlen und verbindet (die Teile) nach den Analogien (Proportionen) und den *harmonischen Verhältnissen* und legt in ihr die *erstursächlichen Prinzipien der Figuren* nieder, *das Gerade und das Runde*, und bewegt die Kreise in ihr in intellektueller Weise.“

Man denke da auch nicht nur an PLATONS „*Timäus*“, sondern auch an seinen Dialog „*Menon*“. A. SPEISER hat gerade zu dieser klassischen Gedankenreihe so Stellung genommen⁴⁹⁾: „Dann wird in drei Ansätzen die ARISTOTELische Ansicht zurückgewiesen, daß das Mathematische *durch Abstraktion* aus den Wahrnehmungen der Sinne gewonnen werde. Zuerst führt PROKLUS die *Genauigkeit* der mathemati-

⁴⁹⁾ A. SPEISER in seiner Studie: „PROKLUS DIADOCHUS über die Mathematik“, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 65 ff.

schen Figuren ins Feld, die es in den Wahrnehmungen nicht gibt. *Dieses Argument gilt auch heute noch*, denn unsere ganze Begründung der Analysis, der Begriff der Stetigkeit, des Grenzwertes, ferner die Unterscheidung zwischen rational und irrational *sind nicht nur sinnlos im Sinnlichen, sondern ihm diametral entgegengesetzt.*“

Ferner ist dazu natürlich das VI. und VII. Buch von PLATONS „*Politeia*“ zu vergleichen, wie auch sein „*Parmenides*“.

PROKLUS fährt fort: „Die ganze Mathematik ist also zuerst in der Seele vorhanden und vor den sichtbaren Zahlen sind die eigenbewegten“ (PLATONS Lehrstück vom Einen, der Eins und der Einheit usw. im „*Parmenides*“ und von den „eigenbewegten Zahlen“ im „*Symposion*“, s. unsere Anmerkung 12, am Schluß dieser Ausgabe), „und vor den sichtbaren Figuren die lebendigen Figuren, und vor den harmonisch gestalteten *die harmonisch gestaltenden Verhältnisse*“ — dies ist die zentrale Lehre der Pythagoreer, wonach das Wesen des Seins die *Zahl* ist und sein Aufbau nach harmonischen Verhältnissen und Zahlenbeziehungen erfolgt, was dann als *Harmonieprinzip* bei CUSANUS, KEPLER und LEIBNIZ grundlegend erneuert und ausgestaltet wird → „und vor den im Kreise sich bewegenden Körpern die unsichtbaren Kreise geschaffen und der Inbegriff (Fülle) von allem ist der Geist; *und das ist eine zweite Weltordnung, die sich selbst erzeugt und von dem zuständigen Prinzip erzeugt wird* . . . In diesen Ideen west also die Seele, und weder ist die Zahl in ihr als eine (bloße) Menge von Einheiten zu fassen, noch ist der Begriff vom Ausgedehnten körperlich zu verstehen, sondern *alle Urbilder* der in (der Mathematik) in Erscheinung tretenden Zahlen, Figuren, Verhältnisse und Bewegungen sind in lebendiger und intellektueller Weise zu fassen.“

Die Konstituierung dieser „*zweiten Weltordnung*“, von der PROKLUS hier spricht, erfolgt durch die *mathematischen Gebilde*; *sie sind die unsinnlichen Träger aller Sinnzusammenhänge in den exakten Wissenschaften und in den Künsten* und liegen als innere Gründe dem gesamten *mundus sensibilis* schlechthin voraus. Damit wird schon hier die universelle Stellung sichtbar, die das Griechentum der Mathematik eingeräumt hat für die Gestaltung der gesamten Kultur, der Wissenschaften sowohl, als auch der Künste. An der Mathematik hat das Griechentum die Idee entdeckt. Sie ist und bleibt der Träger aller sinnvollen geistigen Zusammenhänge und ein sogenanntes „Weltbild“, das ohne die Idee auskommen zu können glaubt, wie das positivistisch-

nominalistische unserer Tage, geht gerade fundamental und grundsätzlich an den Ordnungsprinzipien übergreifender Art und morphologischer, gestaltmäßiger Prägung vorbei, die das ganze geistige Sein eines Volkes als seine Kultur ausmachen. Der letzte große Deutsche, der das gesehen und auch in der Naturwissenschaft durch seine Metamorphosenlehre belegt hat, war GOETHE. Wenn wir ihn wieder verstehen, besitzen wir allenfalls das Maß und die Richtschnur, die uns rückwärts wieder zu den eigentlichen Quellen unserer Kultur führen. „*Wesenhaft also und selbsttätig sind die mathematischen Ideen, die die Seele erfüllen. Indem das vermittelnde Denken sie hervorströmen läßt und zur Entfaltung bringt, legt sie den Grund zum Bau der mathematischen Wissenschaften in seiner ganzen Mannigfaltigkeit, und sie wird nie aufhören, in stets sich erneuernder Fruchtbarkeit von Entdeckung zu Entdeckung zu schreiten und ihre in sich unteilbaren Ideen zu entwickeln. Denn alles hat sie prinzipienhaft vorweggenommen und vermöge ihrer unbegrenzten Fähigkeit läßt sie aus den von ihr antizipierten Prinzipien die ganze Fülle und Mannigfaltigkeit der Lehrsätze hervorgehen.*“

17. Nun erfolgt die Bindung der *mathematischen Denkweise* an alle anderen geistformenden Tätigkeiten des Menschen in den folgenden Standorten des PROKLUS, die man zum großen Teile als vorsokratisches und PLATONISCHES Gedankengut ansprechen darf. „Nunmehr wollen wir uns dem Einfluß dieser Wissenschaft (der Mathematik) zuwenden, der unmittelbar von den obersten bis zu den niedrigsten Erkenntnissen sich erstreckt. TIMAIOS nennt die mathematische Erkenntnis *den Weg zur Bildung*, weil sie im gleichen Verhältnis steht zur Wissenschaft vom All und zur ersten Philosophie, in dem sie zur Tugend steht. Denn die *Erziehung* gibt der Seele im vornherein durch gesunde Grundsätze die rechte Richtung . . ., die Mathematik aber bereitet unser Denken und das Auge der Seele auf die Abkehr von dieser Welt vor.“ Und jetzt die eine wichtige Stellung des Menschen im *Höhlengleichnis* der PLATONISCHEN „*Politeia*“ in der PROKLEISCHEN Projektion: „Deshalb bemerkt auch SOKRATES mit Recht im „Staat“, *das Auge der Seele*, von den anderen Beschäftigungen geblendet und zerrüttet, *werde einzig von den mathematischen Wissenschaften wieder neu belebt und angeregt zur Schau des Seienden, von den Schattenbildern zur Wahrheit* und vom Dunkel hingelenkt zum intellektuellen Licht und werde überhaupt von der *Höhle* und den das Werden in ihr wirkenden Banden und den *Fesseln* der Materie zum

immateriellen und unteilbaren Sein hinangezogen. Denn die *Schönheit* und *Ordnung* der mathematischen Ideen und der unveränderliche Bestand dieser Wissenschaft verbinden uns unmittelbar mit der intelligiblen Welt und machen uns vollkommen in ihr heimisch . . .“⁵⁰⁾.

18. Es folgen jetzt die gewichtigen Teile des 1. Teils der Vorrede, in denen PROKLUS den Nutzen der Mathematik für die Einzelwissenschaften darlegt. Zuerst für die Theologie, dann für die *Naturwissenschaft*, dann für die Staatswissenschaft, dann für die Ethik, dann für die theoretischen Wissenschaften überhaupt, dann für die *Philosophie* und die übrigen *Künste*. Wir geben jetzt die Hauptstellen, soweit sie für die Mathematik selbst belangvoll sind, aus diesen Darlegungen wieder. „Weiter ist sie für die *Naturwissenschaft* von größtem Nutzen: *sie erhellt die schöne Ordnung der Verhältnisse, die dem geschaffenen All zugrunde liegt*“ — es ist dies dieselbe Auffassung, die die ganze KEPLERSche „*Weltharmonik*“ durchzieht und auch vielfach bei NIKOLAUS VON CUES, LEIBNIZ, KANT und LAMBERT durchbricht — „und die Analogie (Proportion) . . . alles in der Welt miteinander verbindet; . . . sie weist die einfachen und erstursächlichen Elemente nach, *die ganz und gar durch die Prinzipien der Symmetrie und Gleichheit zusammengehalten werden, durch die auch der ganze Himmel seine Vollendung erhielt, indem er in seinen einzelnen Teilen die entsprechenden Formen annahm*; sie erforschte endlich auch die Zahlen, die jedem der entstehenden Körper, seinen Umläufen und seiner Rückkehr zum Ausgangspunkt eigen sind . . .“ . . . „Die Größe des Nutzens, der den anderen *Künsten und Wissenschaften* aus der Mathematik erwächst, wird uns klar, wenn wir bedenken, daß sie den theoretischen Wissenschaften . . . *vollkommene Ordnung* verleiht und den Charakter eines *sinnerfüllten Ganzen* mit *Anfang, Mitte und Ende*, . . . daß sie ferner den verschiedenen Dichtungsarten als Vorbild voranleuchtet und die Worte zu den Handlungen und die Versmasse vorweg bei sich feststellt . . . Überhaupt bedürfen ja *alle Künste*, wie SOKRATES im „*Philebos*“ sagt, der Kunst zu zählen, zu messen und zu wägen (s. oben bei CUSANUS, S. 31), entweder aller zusammen oder der einen und anderen. Diese alle aber sind inbegriffen im mathematischen Lehrsystem und erhalten von daher ihren abgegrenzten Bereich. Denn sie ist es, die die Einteilung der Zahlen, die Mannigfaltigkeit der Masse, den Unterschied der Gewichte feststellt und erkennt“⁵¹⁾.

Damit rückt die Mathematik wieder in die Nähe der Kunst, der sie verschwistert ist. PLATON hat dies zum ersten Male in der Geistesgeschichte klar aufgezeigt und seitdem sind alle großen Leistungen auch in den Künsten durch die mathematische Denkweise ontologisch zu ergreifen und unserem Bewußtsein näher zu bringen. Diese Entwicklung war stetig und mit dauerndem Fort-

⁵⁰⁾ Wohl die beste Interpretation des Höhlengleichnisses hat E. HOFFMANN in „Die griechische Philosophie von Thales bis Platon“, Leipzig-Berlin 1921, S. 107, und im Archiv f. Gesch. d. Philos. 1930, gegeben. Siehe auch: „Notizen (Platon: Das Gleiche an sich. — Höhlengleichnis)“ in „Die Pädag. Hochschule“, 4. Jhg. 1932, Bühl/Baden, p. 92—96. (Herausg. v. A. FAUST.)

⁵¹⁾ Siehe NIKOLAUS VON CUES in „*Idiota de Staticis Experimentis*“, Heidelberger Akademie-Ausgabe, Leipzig 1937.

schreiten verbunden bis ins 18. Jahrhundert. Die Pythagoreer entdeckten die musikalische Harmonie, die Saitengesetze und den gesetzmäßigen Verlauf des Musikalischen überhaupt. PTOLEMÄUS hat uns eine Musiktheorie hinterlassen; KEPLER hat gerade in seiner „*Harmonice Mundi*“, auf den antiken Quellen fußend, eine ausgebaute Theorie des Musikalischen auf mathematischer Grundlage entwickelt; EULER hat eine Musiktheorie geschrieben.... Die bildenden Künste gingen denselben Weg bis zur strengen Perspektive eines LEONARDO DA VINCI, eines ALBRECHT DÜRER, eines RAFFAEL, eines MICHELANGELO, eines HOLBEIN D. J.... und die Mathematiker bis ins 18. Jahrhundert brachten die geometrische Theorie der Perspektive unter steter Rücksichtnahme auf die Kunst zum Abschluß.... Wir haben darüber ausführlich in unserer Schrift „Mathematik und Kunst“⁵²⁾ gehandelt und brauchen daher an dieser Stelle nicht nochmals auf diese inneren Bindungen einzugehen, die schon hier bei PROKLUS im Anschluß an das PLATONISCHE Lehrgut ganz klar herauskommen.

PROKLUS fährt fort: „Der Nutzen der generellen mathematischen Wissenschaft für die Philosophie unmittelbar und die übrigen Künste und Wissenschaften dürfte damit... klar sein. Nun aber unterfangen sich einige Widerspruchsgeister, das Ansehen dieser Wissenschaft in den Staub zu ziehen, die einen, indem sie ihr den Nimbus des Schönen und Guten absprechen und behaupten, nicht diesem Zwecke gelten ihre Darlegungen; die anderen aber erklären, die auf die Sinnenwelt gerichteten Erfahrungswissenschaften seien nützlicher als ihre generellen Theoreme.... Solchen Behauptungen werden wir entgegentreten mit dem Nachweis der *Schönheit der Mathematik*, ausgehend von Gesichtspunkten, von denen auch ARISTOTELES ausgeht bei seinen Bemühungen, ihr unsere Sympathie zu gewinnen. Folgende drei Vorzüge nämlich bewirken vorzugsweise sowohl beim Körper wie bei der Seele die Schönheit: die Ordnung, die Symmetrie, die klare Bestimmtheit... Diese gewahren wir aber vor allem in der mathematischen Wissenschaft: die *Ordnung* in dem Ausgang des Sekundären und Mannigfachen vom Ursprünglichen und Einfachen, denn stets hängt das Folgende mit dem Vorausgehenden zusammen und das eine hat den Wert (Rang) eines Prinzips, das andere von Konsequenzen aus den obersten Voraussetzungen; die *Symmetrie* in der wechselseitigen Übereinstimmung der Beweise und in der Zurückführung aller auf den Nus, denn das allgemeine Maß der gesamten Wissenschaften ist der Nus, von dem sie auch die Prinzipien erhält; die *Bestimmtheit* endlich in den immerwährenden und unveränderlichen Ideen, denn mit ihren Erkenntnissen steht es nicht bald so und bald anders, wie mit den bloßen Meinungen und Sinneswahrnehmungen, sondern sie legt stets dieselben Sätze vor und ist bestimmt durch die intellektuellen Seinsformen. Wenn also die Schönheit vorzugsweise auf diesen Punkten beruht und die Mathematik durch ebendiese ihr Gepräge erhält, so ist klar, daß auch ihr das Schöne zukommt.“

Dieser klassische, ontologisch-ästhetische Gedankengang des PROKLUS möchte gerade heute wieder lebendig und in den Geistern wirksam werden, die einen Neuaufbau unserer Kultur von den Quellen her erstreben und zu tragen sich anschicken. Wir führen ihn gerade aus diesem Grunde hier schon ein,

⁵²⁾ Berlin 1943; 2. Ausgabe 1944 in erweiterter Form.

damit er im Werke selbst nicht untergeht, wie er bislang untergegangen ist. Die weiteren methodischen Positionen des PROKLUS wollen wir im 2. Abschnitt kennen lernen.

Die Seinsgründung alles dessen, was wir *Wissenschaft* und *Forschung* nennen, kommt dann klar in den folgenden Stellen des PROKLUS zum Ausdruck: „Als *Wissenschaft* bezeichnet PLATON an vielen Stellen sozusagen *jede auf die Universalien ausgerichtete Erkenntnis*, die er von der Sinneswahrnehmung scheidet und ihr gegenüberstellt... Eben diese Universalienkenntnis teilt er ein in diejenige, die die *Ursachen* erkennt und jene, die mit ihrer Erkenntnis nicht bis zu den Ursachen vordringt; und für die erstere fordert er den Namen „*Wissenschaft*“, für die andere den Namen „*Erfahrung*“. Und so gönnt er denn den praktischen Künsten einmal den Namen *Wissenschaft*, *den Erfahrungen aber nie*... *Jede Erkenntnis also, die Grund und Ursache des Erkannten erfaßt, ist irgendwie Wissenschaft*. Diese *Wissenschaft*, die von der Wurzel her ihren Gegenstand begreift, teilt er nun wieder ein... Und so behauptet er denn also, die *Mathematik*, die Voraussetzungen gebrauche, stehe zurück hinter der voraussetzungslosen und vollkommenen *Wissenschaft*, der *Dialektik*. „Denn nur eine ist die *Wahre Wissenschaft*, durch die wir befähigt sind, alles Seiende zu erkennen und von der alle Prinzipien für die anderen sich herleiten, mögen sie ihr nun näher oder ferner stehen.“

Als Abschluß des 1. Teils der Vorrede und damit auch der ontologisch-erkenntnistheoretischen allgemeinen Darlegungen findet sich nochmals bei PROKLUS eine klassische, auf die *Dialektik* bezügliche Stelle, mit der wir hier schließen wollen. Es heißt dort: „Nun wollen wir uns hinwiederum der Frage zuwenden, in welchem Sinne PLATON im „*Staate*“ die *Dialektik* als *krönenden Abschluß der mathematischen Wissenschaften* bezeichnete und welches ihr einigendes Band ist.... Da sagen wir nun: Wie der *Nus* thront über dem diskursiven Denken und es vollendet, ebenso entfaltet sich die *Dialektik*, die die *Philosophie in Reinkultur darstellt*, unmittelbar über den mathematischen Disziplinen, begreift den ganzen Komplex derselben in sich und verleiht von sich aus den *Wissenschaften* die mannigfachen Methoden... Von diesen geleitet und zur Vollendung geführt, findet die *Mathematik* ihre Resultate... Die *Dialektik* ist also in der Tat der krönende Abschluß der mathematischen Disziplinen: sie bringt alle ihre intellektuellen Kräfte zur vollen Entfaltung, sie verleiht dem *Exakten* an ihr in noch höherem Maße den Charakter des *Unwiderlegbaren*... sie bestimmt durch ihre Untersuchungen ihre ersten Prinzipien, sie offenbart die Unterschiede der ihnen unterstellten Gattungs- und Artbegriffe, sie lehrt die *Synthesen*, die aus den Prinzipien die Folgerungen hieraus ableiten, und die *Analysen*, die wieder zurückkehren zum Ursprung und zu den Prinzipien....

Auch vieles andere noch erstreckt sich in seinem *geltenden Einfluß* sozusagen auf alle Disziplinen und gehört zu den wesentlichsten Erscheinungen des *allgemeinen mathematischen Seins*. Nach unserer Ansicht ist das letzte einigende Band für sie die *eine und allgemeine Mathematik*“ — eine *universale mathesis* im idealistischen Sinne LEIBNIZENS, nicht im Sinne des westlichen Rationalismus —, „die die Prinzipien aller Teildisziplinen in einfacher Weise in sich begreift, die gründlich untersucht hat, was ihnen gemeinsam ist und worin sie sich unterschei-

den, und *angibt, was bei allen in gleicher Weise gilt*.... Auf noch höherer Stufe wäre die Dialektik das einigende Band der mathematischen Disziplinen. Denn sie ist es, die die *generelle Mathematik* zur vollen Auswirkung bringt...., sie zur *wahren Wissenschaft* stempelt und ihr den Charakter der *Unveränderlichkeit* und *Unwiderlegbarkeit* verleiht“⁵³⁾.

2. Die Prokleische Methodologie der Mathematik

„Mit jeder Zeichnung zeuch voran
Und scheuch' den Krämergeist hintan!“

Nach PROKLUS der Wahlspruch der Pythagoreer.

19. Als das Kernstück der philosophischen Aspekte des PROKLEISCHEN Werkes kann man seine Methodologie der Mathematik ansehen. Darin sind alle bedeutsamen methodischen Positionen der vor-sokratischen und PLATONISCHEN Philosophie verarbeitet und darüber hinaus von PROKLUS selbst eine Klarstellung der wichtigsten anfänglichen methodischen Begriffsbildungen der Mathematik geboten und erreicht. Kein Werk, das uns aus dem Altertum überkommen ist, hat vordem so umfassend und tief die ursprünglichen Standorte des Geistes, soweit sie den Forschungsweg (*methodos*) betreffen, aufgezeigt; keines ist so aufs Ganze der methodischen Prinzipien der Mathematik gedrungen; keines hat eine solch umfassende Zusammenschau der verschiedensten methodologischen Fragen und ihrer Lösungen geboten. Das hat tiefe geistesgeschichtliche Gründe, die bis ins 20. Jahrhundert nachgewirkt haben. Auch heute kann man kein Werk nennen, das auch nur entfernt an die von PROKLUS gegebene Methodenlehre der Mathematik heranreichen würde.

Alle Philosophie ist als Logik, Erkenntnislehre und Ontologie der Idee, vielleicht sogar als Metaphysik, zuerst, ganz am Anfang, an *methodische Grundlagen* gewiesen. Alle Erkenntnisformung überhaupt nimmt ihren Ausgang von methodologischen Ordnungen und Prinzipien und arbeitet mit methodischen Kriterien. Man hat dies in der Mathematik der Neueren immer geflissentlich übersehen und diese Seite des Forschens der Antike und der Geister der deutschen mathematischen Linie für nichts geachtet. Und doch ruhen gerade in den

⁵³⁾ Siehe die grundsätzliche Darstellung dieser Lehren des PROKLUS bei A. SPEISER: „Proklus Diadochos über die Mathematik“, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 65—70.

methodologischen Haltungen der großen idealistischen Forscher und ihrer Systeme die Bindekräfte der gesamten Erkenntnis überhaupt. Einzelwissen kann nicht wieder spezialwissenschaftlich legitimiert werden. Es muß vielmehr einen einheitlichen Grund des Wissens geben, der erst seinerseits imstande ist, Einzelwissenschaften zu setzen und zu fundamentieren. Ohne diesen Rechtsgrund, der von methodologischer Struktur ist, gibt es keine Wissenschaft und kein Wissen.

Wenn Forschung, auf welchem Gebiete auch immer, überhaupt einen Sinn haben und uns eine Ergreifung des Seins ermöglichen soll, die ihr bleibenden Wert durch die Zeitläufte und gegenüber der denkerischen Kritik der Zeiten verleihen sollen, so muß es ihr anfänglich darum zu tun und daran gelegen sein, ihre Wege und Zugänge zu ihren Gegenstandsbereichen zu kennen, klar aufzuzeigen, bewußt werden zu lassen und schließlich zu erkennen. Die Forschung muß es sich in einer grundsätzlichen Besinnung auf ihren Anfang angelegen sein lassen, die methodischen Verfahrensweisen, die sie zu ihren Ergebnissen befähigen, selbst zu erkennen, ihre Tragweite abzustecken und ihre eigentliche Sinnhaltigkeit für die Erkenntnis der wissenschaftlichen Wahrheit zu prüfen. Wenn irgendwo das Wort am Platze ist, daß die Mathematik mehr ein Tun als eine Lehre sei, so ist es dies hier bei den methodologischen Anfängen des Wissenschaftlichen überhaupt. Und jene Besinnung grundsätzlicher Art muß immer wieder und wieder vorgenommen und vollzogen werden, sobald sich der Geist selbst wieder orientiert und zu einem neuen Ansatz, der Entdeckung neuer Geistformen, Geistgestalten und Sehgebilde sich anschickt.

Diese methodischen Anfänglichkeiten aller Wissenschaften sind nämlich entscheidend für die *Geltung* ihrer Ergebnisse, wie auch für ihre *Gewinnung*. Sie garantieren, wenn sie unter sich selbst eine Ordnung bilden, auch die Ordnung des Wissens und seiner „Ableitung“ überhaupt. Wo man aber über sie hinaus zu sein wähnte, wie dies in den Einzelwissenschaften des ausgehenden 19. und des 20. Jahrhunderts vielfach in Übung gekommen war, da merkten einige tieferbohrende Geister doch gar bald, daß man im Verlaufe der Forschung und des schöpferischen Entdeckungsaktes wissenschaftlicher Zusammenhänglichkeiten immer wieder auf sie verwiesen wurde. Sie sind daher schlechthin *notwendig* und unentbehrlich für den Aufbau der Wissenschaften, die ja nicht nur aus fertigen, abschließenden Aussagen bestehen, sondern auch aus all den Zwischen-Inhalten und „Mittelgliedern“, die zu jenen führen.

a) Man muß, um eine Aussage wissenschaftlicher Art zu *erhalten*, einen Forschungsweg beschreiten. Der Weg kann ein Irrweg sein. Man muß ihn also verlassen und einen neuen suchen. Schon dieses Erkennen und Suchen der „richtigen“ Wege ist eine methodische Tätigkeit und erfordert selbst methodische Maßnahmen, die aus keiner Wissenschaft und auch nicht aus den Künsten weggedacht werden können. Als solches Tun gehören sie also zur Wissenschaft selbst notwendig hinzu und gipfeln in einer regelrechten *Wissenschaftslehre*.

b) Man muß, um eine Aussage wissenschaftlicher Art zu *erhärten*, nach den sicheren Gründen Ausschau halten, die in einem Organismus weitverzweigter elementarer logischer Schlüsse und Anschauungselemente belegen, sich schließlich darbieten, um in einer *strengen Begründungsordnung* als „Evidenzlehre“ die Sicherung der Aussage zu gewährleisten. Dieses Ausschau-Halten nach den Gründen und Vordergliedern jeder Erkenntnis ist eine methodische Tätigkeit, die ebenfalls aus keiner Wissenschaft weggedacht werden kann. Als solches Tun gehört sie also zur Wissenschaft notwendig selbst hinzu und gipfelt in einer regelrechten *Prinzipienlehre* der Wissenschaften.

c) Man muß endlich, um eine Aussage wissenschaftlicher Art zu *verstehen*, nach ihren einzelnen Sinnträgern und nach ihren möglichen Sinnformen suchen; erst dann wird einem die ganzheitliche unteilbare Gestalt und die generelle Bezogenheit der Aussage selbst aufgehen. Diese Tätigkeit des Suchens nach den *Sinnträgern und Bedeutungsformen als Normen unseres verstehenden Bewußtseins* überhaupt, ist eine methodische und gehört ebenfalls zu jeder Wissenschaft hinzu. Ohne dieses Tun bliebe sie bedeutungsleer und sinnfrei, wie die modernen Systeme des Positivismus, des Nominalismus, Formalismus und der Logistik in der Mathematik im besonderen. Sie bliebe ein formales Gerüst und Gerippe, ohne tiefere innere Bezüge der Gegenständlichkeit und des Inhaltes überhaupt. Als solches Tun aber gipfelt diese methodische Tätigkeit in einer regelrechten *Bedeutungslehre*, die uns die ideellen *Modelle* liefert und bereitstellt, auf Grund deren wir uns den Sinn einer wissenschaftlichen Aussage und die Bedeutung eines großen Kunstwerks annähern und sie in unser eigenes Bewußtsein aufnehmen und einbeziehen.

Auf alle diese methodischen Standorte und Probleme geht PROKLUS in seinem Werke ein und durchdringt sie mit PLATONISCHEM, vorsokratischem und neuplatonischem Gedankengut. Er liefert am Beispiel des für die Geistesgeschichte in dieser Hinsicht wichtigsten Gegen-

standsbezirks der Mathematik eine erste Methodenlehre dieser Disziplin und läßt dadurch die wahren *fundamenta mathematicae* sichtbar werden und ans Licht treten, die insbesondere der griechischen Mathematik des EUKLIDischen Grundwerkes der „*Elemente*“ und der Mathematik der deutschen Linie bis hinauf zu GAUSS das Gepräge geben. Aber darüber hinaus legt PROKLUS in seiner Methodologie den Grund für die methodischen Grundhaltungen auch aller späteren und zukünftigen *ganzheitlichen Mathematik*. Nur wenige neue methodische Formen können wir heute den PROKLEischen zuzählen und hinzufügen, um sie alle zu einer geschlossenen Methodenlehre der Mathematik, die dem heutigen Stande der Forschung angepaßt ist und gerecht wird, zu verarbeiten. PROKLUS hat alle wichtigen methodischen Formen und Sehgebilde bereits erschaut, ihre Tragweite überblickt und ihre Notwendigkeit für den Aufbau des Mathematischen schlecht-hin dargetan. Wir wollen daher dieses Kernstück seines Werkes möglichst vollständig und umfassend in den Originalformulierungen hinstellen und der zukünftigen Forschung, die als Methodenforschung seit fast 200 Jahren in der Mathematik brach liegt (nämlich seit LAMBERTS Tode), an die Hand geben.

20. Schon im 1. Teil der Vorrede brechen diese methodischen Standpunkte im Zusammenhang mit der eben erörterten Ontologie und Erkenntnislehre auf und weisen in allgemeiner Formulierung bereits hin auf die späteren, hauptsächlich im Anschluß an die EUKLIDischen Definitionen, Postulate und Axiome erörterten methodischen Darlegungen in ihrem Einzelsein. Im Anschluß an die Ausführungen über die *Dialektik* als höchste Wissenschaft überhaupt, wird jetzt diese auch in methodischer Hinsicht gekennzeichnet. Es heißt dort: „Doch nach der Behandlung des Wesens der mathematischen Seinsformen wollen wir uns nunmehr aufschwingen zu der *einen* Wissenschaft von ihnen, deren Präexistenz von den vielen wir bewiesen haben. Untersuchen wir also ihre *Aufgabe*, ihre *Erkenntnis-methode* und ihre *wirksame Tragweite*.“

Die Leistung der gesamten Mathematik ist also . . . dem vermittelnden Denken zuzuweisen und weder von der Art, wie die des reinen Intellekts, der dauernd in sich begründet ist und vollkommen selbständig nur von sich aus bestimmt und sich in sich selbst verschließt, noch wie die der Überzeugung und Sinneswahrnehmung. Denn deren Erkenntnisse zielen auf die Außenwelt ab . . ., *erfassen aber nicht die innere Begründung des Erkannten. Die Mathematik*

hingegen setzt mit der Erinnerung“ — Lehre von der Anamnese, insbesondere aus PLATONS „Menon“ — „den Hebel von außen an, wendet sich aber schließlich den inneren Ideen zu; sie empfängt zwar Anregung vom sekundären Sein, läuft aber hinaus auf das bevorzugte Sein der ideellen Seinsformen . . . Sie entwickelt und entfaltet die körperlose Welt der Ideen, indem sie bald von den Prinzipien zu den Folgerungen schreitet“ (progressive Methode), „bald den umgekehrten Weg einschlägt“ (regressive Methode), „und bald von dem vorher Erkannten den vorliegenden Problemen sich zuwendet, bald von den Problemen den vorangehenden Erkenntnissen . . . Durch Suchen gelangt sie zum Finden und von unvollkommener Stufe erhebt sie sich zur Vollendung.

Sie hat aber zwei Methoden: die eine läßt den ganzen Reichtum der Prinzipien sich entfalten und führt so zu den *mannigfachen Wegen* der wissenschaftlichen Theorie; die andere führt die vielen Ableitungen wieder zurück auf die eigenen Voraussetzungen. Die eine strebt nach Einheit und faßt das Viele zusammen, die andere scheidet das Einfache in das Mannigfache, das Allgemeine in das Spezielle, und die Prinzipien, die am Anfang stehen, in die von den Prinzipien abgeleiteten und vervielfachten Erscheinungen. Denn *von oben ausgehend*“ (d. h. von der Dialektik her) „schreitet sie (durch den ganzen Seinsbereich) hinab bis zu der sichtbaren Schöpfung, verbindet sich mit der Natur und liefert im Verein mit der *Naturwissenschaft* eine Fülle von Beweisen, wie sie hinwiederum von unten emporsteigend sich sozusagen der intellektuellen Erkenntnis nähert und mit der Betrachtung der *obersten* Prinzipien sich befaßt. Deshalb hat sie denn auch unter ihren Schöpfungen die ganze *Mechanik* hervorgebracht, die *Optik* und *Katoptrik* und viele andere Wissenschaften, die mit der Sinnenwelt verflochten sind und sich dieser bei ihrer Tätigkeit bedienen. Bei ihrem Aufstieg hinwieder gewinnt sie ungeteilte und *immaterielle Denkkkräfte* und mit deren Hilfe vervollkommenet sie *ihre nur Stückwerk darstellenden Begriffe* und die auf diskursivem Weg gewonnenen Kenntnisse, *gleicht ihre Gattungs- und Artbegriffe* jenen Wesenheiten“ (*den Ideen*) „an und offenbart die Wahrheit über die Götter und die Wissenschaft vom (wahrhaft) Seienden in den ihr eigenen Gedankengängen.“

Diese allgemeinen Darlegungen werden jetzt durch die Gedankenentwicklung in PLATONS „*Phädras*“ gleichsam exemplifiziert und wer darauf achtet, wie diese Beispielgebung vorgenommen und gewählt

ist, der erkennt auch hier wieder die *enge Bindung ideeller Art zwischen der Mathematik und den Künsten*. „Im ‚Phädrus‘ bietet uns SOKRATES drei Personen, die emporgeführt werden, den Philosophen, den Liebenden und den Musiker.“ (Siehe auch die Parallelführung im „Symposion“⁵⁴.) „Aber für den Liebenden beginnt die Emporführung und die Wanderung von hier bei der *sichtbaren Schönheit* und er bedient sich als Stufen der mittleren Arten des Schönen; der Musiker ferner, der den dritten Platz einnimmt, wendet sich von den sinnlich wahrnehmbaren Harmonien den *unwahrnehmbaren Harmonien* und ihren Verhältnissen zu; dem einen ist das *Auge*, dem anderen das *Ohr Mittel der Erinnerung*. Woher und durch welche Vermittlung kommt hingegen dem echten Philosophen die Anregung zur intellektuellen Erkenntnis und die Erweckung zum wirklichen Sein und zur Wahrheit? . . . Wer nun von Natur aus so veranlagt ist, ist schon von sich aus aufgeschlossen und im Bann des wahren Seins, doch muß man ihm, sagt PLOTINOS, auch noch die *Kenntnis der Mathematik vermitteln* zur Gewöhnung an das immaterielle Sein, *und indem er sich dieser wie Figuren bedient*, soll er sich führen lassen zur *dialektischen Weisheit* und überhaupt zur *Betrachtung der Welt des Seienden*. . . . Denn (die Figuren) zeigen in den Zahlen die Bilder der überseienden Eigentümlichkeiten und lassen die Kräfte der *intellektuellen Figuren* in denen des vermittelnden Denkens erkennen.“ . . . Denn die Mathematik führt uns zur intellektuellen Erkenntnis „und bereitet uns darauf vor, indem sie das *Auge der Seele* reinigt und sie frei macht von den von den Sinneswahrnehmungen herrührenden Hindernissen für die Erkenntnis des Alls.“ Mit der Mathematik verhält es sich so: „Sie steht der obersten Wissenschaft (*Dialektik*) nach und ist im Vergleich mit ihr unvollkommen, aber gleichwohl Wissenschaft, *nicht als ob sie voraussetzungslos wäre*, sondern insofern sie die eigenen Ideen in der Seele erkennt, *die Gründe angibt für die Schlußfolgerungen* und so *im Besitz der Gründe für die Objekte ihrer Erkenntnis* ist. Soviel sei bemerkt zu PLATONS Meinung über die Mathematik.“

„Nunmehr wollen wir die Frage behandeln, welche Anforderungen an den Mathematiker zu stellen sind und wie man ihn eigentlich erkennen kann.

⁵⁴) Vgl. die in der Anm. 35 angegebene Arbeit von E. HOFFMANN, die erstmalig den tiefsten Sinn von PLATONS „Gastmahl“ erschlossen hat, sowie die allgemeine Einführung zu dem vorliegenden Werke des PROKLOS.

a) . . . Man muß *Richtlinien gewinnen für die Prüfung* und fürs erste die *Fälle erkennen*, bei welchen man die Beweisführung *ausrichten muß* auf die gemeinsamen Erscheinungen und jene, wo man die besonderen Erscheinungen jedes Einzelfalles berücksichtigen muß. Denn vieles gilt in gleicher Weise für das, was der Art nach verschiedenen ist. Vieles hingegen trägt denselben Namen; das Gemeinsame aber unterscheidet sich in jedem einzelnen Fall hinsichtlich der Art, wie z. B. die Ähnlichkeit bei Figuren und Zahlen. In solchen Fällen darf man also nicht einen einzigen Beweis vom Mathematiker fordern, *denn Figuren und Zahlen haben nicht dieselben, sondern verschiedene Prinzipien, entsprechend der zugrunde liegenden Gattung* . . . Denn jeder Begriff bringt eine ganz besondere Beschaffenheit mit sich, an der alles teilhat“ — das PLATONISCHE Lehrstück der *Methexis* —, „was unter diesen Begriff fällt.“

b) Zweitens ist festzustellen, ob seine Beweisführung der zugrunde liegenden Materie entspricht, also z. B., ob seine Ausführungen *zwingender und unwiderlegbarer Art sind* und nicht bloß überreden (wollen) und voll von Wahrscheinlichkeitsgründen sind . . . *Denn jeder Vertreter von Wissenschaft und Kunst muß seine Darlegungen so gestalten, daß sie dem Gegenstand seiner Beschäftigung entsprechen*. So fordert PLATON im „*Timaios*“ vom Naturforscher nur Wahrscheinlichkeitsgründe, da er sich eben mit solchem Gegenstande befasse, *von dem aber, der über die intelligible Welt und das beständige Sein vorträgt, fordert er unwiderlegbare und exakte Beweise*. Denn die Gegenstände der Wissenschaften und Künste bedingen sofort einen Unterschied, wie z. B. wenn der eine unbewegter, der andere bewegter Art, der eine von einfacherer, der andere von zusammengesetzter Struktur ist, der eine der intelligiblen, der andere der Sinnenwelt angehört. Wir werden also wieder von der gesamten Mathematik denselben *exakten Charakter* fordern: denn gesetzt den Fall, ein Zweig befaßte sich mit der Sinnenwelt, ein anderer wäre Erkenntnis intelligibler Objekte, dann wären beide nicht in gleichem Maße exakt, sondern der zweite in höherem Grade. Deshalb sprechen wir der *Arithmetik* größere Exaktheit zu als der *Harmonik* . . .

c) Fürs Dritte sagen wir, daß auch über *Identität und Verschiedenheit* sich klar sein muß, wer mathematische Vorträge in der rechten Weise beurteilen will, ferner über das *Wesentliche* und *Akzidentielle*, über die *Proportion* und alles dergleichen. Denn fast alle Irrtümer gehen darauf zurück, daß man glaubt, mathematisch streng zu

beweisen, ohne es in Wirklichkeit zu tun, wenn man das Identische als verschieden bei jeder Unterart beweisen will oder das Verschiedene als identisch, oder wenn man das Akzidentielle im Sinne des Wesentlichen faßt oder das Wesentliche im Sinne des Akzidentiellen.

d) Und noch ein vierter Punkt! Da die Mathematik den mittleren Rang einnimmt zwischen dem Intelligiblen und der Sinnwelt und viele Bilder vom Göttlichen in sich aufweist, aber auch viele Beispiele naturwissenschaftlicher Wahrheiten, so muß man auch die *dreifachen Beweisarten* bei ihr beachten, die mehr intellektuelle, die mehr ins Einzelne gehende, endlich diejenige, die nur an den Glauben sich anlehnt. *Denn je nach den Aufgaben müssen auch die Beweise verschieden sein und entsprechend den Gattungen des Seins (Kategorien) auseinander gehalten werden*, da sie mit diesen allen zusammen am Webstuhl sitzt und allen das Gewebe ihrer Sätze *harmonisch* anpaßt.“ Man wird bei dieser Stelle unmittelbar an GOETHE, seine „Mütter“ und seinen „Faust“ erinnert, wo er den Erdgeist sprechen läßt: „... so sitz' ich am sausenden Webstuhl der Zeit und wirke der Gottheit lebendiges Kleid.“

* * *

21. Nun erfolgt bei PROKLUS die *Klassifizierung der mathematischen Disziplinen* nach ihren Hauptgegenständen, Zahl und Raum, was wieder die strenge methodische Art der Griechen besonders deutlich herauskommen läßt. Sie haben immer das Bedürfnis, abzugrenzen und feste Bereiche zu erforschen. „Es ist nunmehr betreffs der Unterarten der Mathematik festzustellen, welche und wieviele sie sind. Denn nachdem wir sie als Ganzes und als universale Gattung uns vorgeführt haben, müssen wir nun auch die Artunterschiede der Teildisziplinen berücksichtigen.

Bei den Pythagoreern war es nun herkömmlich, die generelle Mathematik in vier Teile zu zerlegen⁵⁵⁾:

- a) einem weisen sie den *Zahlbegriff*,
 - b) einem anderen den *Begriff der Raumgröße* zu,
- und jeder dieser Teile umfaßt nach ihnen wieder eine Zweiheit:

- | | | |
|---|---|----------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> a) a) der Zahlbegriff existiere nämlich entweder <li style="padding-left: 2em;">absolut für sich, <li style="padding-left: 2em;">b) oder werde in seiner Beziehung zu einem anderen betrachtet; | } | Kategorie der
Quantität |
|---|---|----------------------------|

⁵⁵⁾ Siehe PLATONS VI. Buch der Republik.

- | | |
|--|-----------------------------|
| b) α) und die Raumgröße sei entweder <i>ruhend</i> | } Kategorie der
Qualität |
| β) oder <i>bewegt</i> . | |

Nun untersuchte die *Arithmetik* die Zahl an sich, die *Musik* in bezug auf etwas anderes; die *Geometrie* die unbewegte Größe, die *Sphärik* (Himmelsmechanik, Astronomie) das an sich Bewegte.“ Damit haben wir die alte pythagoreische Einteilung des *Quadriviums* aller alten Universitäten. Es heißt dann bei PROKLUS weiter: „Sie betrachteten aber Größe und Zahl weder als Größe noch als Zahl schlechthin, sondern die bei beiden *bestimmte* (konkrete) Größe. . . . Wenn dies aber Männer behaupten, die in aller Weisheit bewandert sind, so werden wir dabei weder an die Quantität in den Sinnendingen denken wollen, noch an die Größe, wie sie in der Körperwelt in Erscheinung tritt. Denn deren Erforschung, meine ich, ist Aufgabe der Naturwissenschaft, nicht der Mathematik selbst.“ So ist zu sagen, daß nach dem *Prinzip der Differenzierung der Seinsgattungen*, „*der Geist in Ruhe verharrend und sich als Einheit und Vielheit denkend* die Zahlen und ihre Erkenntnis, die *Arithmetik*, von sich ausgehen läßt; nach dem Prinzip der Einigung des Vielen hingegen und seiner Gemeinschaft und Verbindung mit der Seele die *Musik*. . . . Und wiederum indem er seine Tätigkeit gründete auf das ruhige Verharren in sich selbst, brachte er aus sich die *Geometrie* hervor, sowie die eine wesenhafte Figur und die schöpferischen Prinzipien aller Figuren; indem er diese aber auf die Bewegung festlegte, erzeugte er die *Sphärik*. . . . Das also ist die Lehre der Pythagoreer und ihre Einteilung der vier Wissenschaften.“

Die Geschlossenheit dieser methodischen Gliederung kann uns im Bewußtsein ihrer geistesgeschichtlichen Wirkung nur heute noch Bewunderung abnötigen, nachdem die mathematischen Disziplinen heute fast ganz auseinandergefallen sind und man zugibt, daß man nicht einmal mehr ihre eigentlichen Gegenstände angeben kann, wie dies der Formalismus „erreicht“ hat.

Jetzt gibt PROKLUS noch die andere Gliederung des GEMINOS an, die ebenfalls außerordentlich interessant ist und deutlich zeigt, wie weit wir darin heute gekommen sind.

„Manche wollen indes die Mathematik auf andere Weise gliedern wie GEMINOS: a) sie weisen dem einen Teil als Gegenstand, womit sie sich befasse, nur *das Intelligible* zu, b) dem anderen *die Sinnendinge*. (Dabei bezeichnen sie als 'intelligibel' offenbar alles, was die Seele an Schauungen für sich hervorrufft, sich absondernd von den verstofflichten Seinsformen.)

a) Der mit dem Intelligiblen sich befassenden Wissenschaft weisen sie zwei, und zwar die ersten und hauptsächlichsten Teildisziplinen zu, die *Arithmetik* und die *Geometrie*.

b) Der anderen hingegen, die sich mit den Sinnendingen beschäftigt, sechs: die *Mechanik*, die *Astronomie*, die *Optik*, die *Geodäsie*, die *Kanonik* und die *Rechenkunst* („Logistik“)...

Das also sind die *Unterarten der generellen Mathematik*. Die *Geometrie* teilt man wieder ein in die *Planimetrie* und *Stereometrie*. Denn von den Punkten und Linien gibt es keine eigene Wissenschaft, insofern durch diese auch nicht eine einzige Figur zustande käme ohne Zuhilfenahme von Flächen oder Körpern. In allen Fällen ist es jedenfalls *Aufgabe der Geometrie*, mag es sich nun um Flächen oder Körper handeln, zusammensetzen oder zu vergleichen oder das Zusammengesetzte wieder zu trennen.

Ebenso wird die *Arithmetik* eingeteilt in die Lehre von den Linear-, von den Flächen- und den Körperzahlen. Denn sie untersucht die Arten der Zahlen an sich, wie sie von der Einheit ausgehen...

In gleicher Weise werden nun auch die Aufgaben und Forschungsgegenstände der sechs Disziplinen (*Naturwissenschaften*), die sich mit Sinnendingen befassen, von PROKLUS im einzelnen dargelegt. Abschließend führt PROKLUS zur Methodenlehre im 1. Teil der Vorrede dann noch den Zusammenhang mit der *Dialektik* aus. Es heißt dort am Schluß: „... ebenso entfaltet sich die *Dialektik*, die die Philosophie in Reinkultur darstellt, unmittelbar über den mathematischen Disziplinen, begreift den ganzen Komplex derselben in sich und verleiht von sich aus den Wissenschaften die *mannigfachen Methoden*, die wirksamen, scheidenden und erkennenden, ich meine die *analytische* (oder hypothetische), die *trennende* (oder diäretische), die *bestimmende* (oder horistische) und die *beweisende* (oder apodeiktische). Von diesen geleitet und zur Vollendung geführt, findet die Mathematik ihre Resultate teils auf dem Wege der *Analyse*, teils der *Synthese*, teils geht sie nach der *trennenden*, teils nach der *bestimmenden* Methode voran und dann wieder legt sie das Gesuchte durch *Beweise* fest. So paßt sie ihre Methoden ihren jeweiligen Gegenständen an, bedient sich aber jeder einzelnen bei der Behandlung ihrer... Wahrheiten, weshalb ihr denn auch die *Analysen*, die *Definitionen*, die *Trennungen* und die *Beweise* eigentümlich sind und nach Art und Weise der mathematischen Erkenntnis gehandhabt werden.“

Schließlich noch der *Name*. „Was nun den *Namen der Mathematik* selbst und der mathematischen Studien betrifft, den die Alten diesen Wissenschaften gegeben haben, wo ist er nach unserer Ansicht wohl herzuleiten? Und welchen treffenden Sinn birgt er in sich? Nach meiner Ansicht scheint mir diese Bezeichnung der Wissenschaften... von den Pythagoreern zu stammen, die wohl wußten, daß alles sogenannte Lernen eine Wiedererinnerung ist“ — das PLATONISCHE Lehrstück von der *Anamnese* — „nicht von außen in die Seele hineingelegt, wie die von den Sinnendingen stammenden Bilder der Phantasie sich einprägen und nicht von fremden Einflüssen herrührend,

wie die Erkenntnis durch Überzeugung (s. Nr. 1 dieses II. Teils der Einleitung), sondern geweckt von den Sinneswahrnehmungen, *unmittelbar aber erzeugt im Schoße des in sich gekehrten Denkens*. Sie waren sich auch bewußt, daß man die Fälle der Wiedererinnerung zwar an vielen Beispielen nachweisen kann, vorzugsweise aber doch, wie auch PLATON sagt, an der Mathematik. Denn wenn jemand (seine Zuhörer) vor *Figuren* führt, sagt dieser, dann zeigt er am augenscheinlichsten, daß das Lernen eine Wiedererinnerung ist⁵⁶⁾. Darum zeigte denn auch SOKRATES im „*Menon*“ (s. oben) durch dieses Beweisverfahren, daß das Lernen nichts anderes ist, als *ein Sich-Wieder-Erinnern der Seele an ihre eigenen Ideen*. Der Grund hierfür liegt darin, daß das Prinzip der Erinnerung zugleich auch das *Denkprinzip* der Seele ist. Dieses west in den mathematischen Begriffen und hat diese Wissenschaften in sich antizipiert, wenn es damit auch nicht in Tätigkeit tritt. Es trägt also im Verborgenen *alle wesenhaft in sich* und läßt die einzelnen ans Licht treten, wenn es befreit wird von den Hemmnissen der Sinneswahrnehmung. . . . *Nur wenn wir unseren Geist davon freimachen, dann können wir die Ideen in ihm nach seiner Weise erkennen, in Wirklichkeit Wissende sein und die wesenhafte Erkenntnis erzeugen.* — Und nochmals klingt jetzt das PLATONISCHE „*Höhlengleichnis*“ an (s. oben) in den folgenden Worten: „Aber als Gefesselte und mit geschlossenem Auge der Seele möchten wir niemals die uns zukommende Vollkommenheit erlangen. Das also ist das Lernen, *die Erinnerung an die unsichtbaren Ideen in der Seele*, und demzufolge wird die Wissenschaft, die zur Erinnerung an diese Ideen uns vorzugsweise verhilft, *Mathematik* genannt. Auch die Art der Aufgabe dieser Wissenschaft wird auf Grund des Namens klar: Sie bringt die uns *angeborene* Wissenschaft ans Licht, weckt das reine, reinigt das vermittelnde Denken, offenbart die wesenhaft in uns vorhandenen Ideen, hebt Vergessen und Unwissenheit auf, die uns von Geburt aus anhaften, und macht uns frei von den Banden der Unvernunft nach dem Willen Gottes, der in Wahrheit Patron dieser Wissenschaft ist, der die intellektuellen Gaben ans Licht bringt, alles mit göttlicher Weisheit erfüllt . . .“

Soweit die „*Wissenschaftslehre*“ des PROKLUS, wie sie im 1. Teil der Vorrede gefaßt ist.

⁵⁶⁾ Es ist hier wohl an die bekannte Stelle über die „*geometrische Figur*“ aus PLATONS „*Menon*“ gedacht. Wir geben sie später (in der Nr. 3, S. 88) wörtlich wieder.

22. Im zweiten Teil der Vorrede geht PROKLUS jetzt über die Mathematik und ihre methodischen Positionen ins Einzelne und eröffnet damit den Zugang zu den späteren Aufstellungen einer bis ins kleinste Detail ausgearbeiteten *Methodenlehre der Mathematik*. Die Entwicklungen dieses zweiten Teils der Vorrede sind gleichsam das Präludium für die nachher folgende Hauptkomposition. Da heißt es zunächst:

„Daß nun die *Geometrie* ein Teil der gesamten Mathematik ist, und daß sie die zweite Stelle nach der *Arithmetik* einnimmt, von der sie ihre Seinserfüllung und ihren exakten Charakter erhält, . . . ist schon von den Alten dargelegt worden . . . Sinngemäß möchte die Einführung in sie sich gestalten, wenn wir die Stellung, die die ihr zugrunde liegende Materie in der Welt des Seins inne hat, untersuchen und sodann ihr Wesen. Denn aus seiner richtigen Erfassung wird auch die Bedeutung der sie erkennenden Wissenschaft . . . erhellen . . . Denn wenn die *Figuren*, mit denen der Mathematiker sich befaßt, dem Sinnesbereich angehören und untrennbar sind von der Materie, wie können wir dann noch behaupten, die Geometrie befreie uns von der Sinneswelt und wende uns hin zu dem körperlosen Sein (der Ideen), gewöhne uns an die Schau der intelligiblen Welt und sei die beste Vorbereitung zur Tätigkeit des reinen Denkens? *Wo hätten wir auch im Sinnesbereich einen unteilbaren Punkt gesehen oder eine flächenlose Linie oder eine Oberfläche ohne Tiefendimension oder die Gleichheit der vom Zentrum ausgehenden Radien oder überhaupt all die vieleckigen und vielflächigen Figuren, über die die Geometrie unterrichtet?* Und ferner: Wie bleiben die Lehren dieser Wissenschaft *unwiderleglich*, wenn doch die sichtbaren Körper und Figuren ein Mehr oder Weniger zulassen, in allseitiger Bewegung und Veränderung sich befinden, ganz und gar der Unbestimmtheit der Materie anheimgegeben sind, wenn *Gleichheit* zugleich mit der entgegengesetzten Ungleichheit besteht und das Unteilbare im Zustand der Teilung und des räumlichen Abstandes zum Vorschein kommt? Fällt aber der Gegenstand der Geometrie außerhalb des Bereichs der Materie, *so werden auch die Ideen rein und getrennt von der Sinneswelt insgesamt ungeteilt und ohne Körper und Ausdehnung sein*⁵⁷⁾ . . . Denn

⁵⁷⁾ Es handelt sich natürlich hier ausschließlich um den *geometrischen Raum*, wie auch A. SPEISER in seiner Darstellung dieser Stellen (a. a. O. S. 71 ff.) besonders hervorhebt.

all das beweist, daß Teilung die Seinsform der geometrischen Materie ist, und daß sie nicht in ungeteilten Begriffen west.“ (s. Nr. 1, wo in der Ontologie „*Teilung*“ das gliedernde Merkmal für die Seinsbereiche ist.) . . . „*Jedes Allgemeine und Universale wird entweder in den Einzeldingen sichtbar und hat sein Dasein in diesen . . . oder es existiert vor den vielen Einzeldingen und erzeugt deren Menge, indem es Abbilder von sich den vielen Dingen vermittelt . . . oder es erhält im intentionalen Denken von dem Vielen her Gestalt . . .* Gemäß diesen dreifachen Seinsweisen werden wir finden, daß die einen *Universalien* vor dem Vielen, die anderen in dem Vielen existieren, die der dritten Art gemäß ihrem *kategorialen Verhältnis* zu ihm.“ Damit sind schon hier die wesentlichen Positionen des mittelalterlichen *Universalienstreites* sichtbar und vorweggenommen.

Diese methodische Einteilung wird nun ferner im einzelnen ausgeführt und von PROKLUS durch mathematische Beispiele belegt. Die „*Phantasie*“ ist es, die die geometrischen Vorstellungen erzeugt und sie ins Leben ruft . . . „Denn da der Geist die *Idee* (als geistigen Seinsinhalt) zwar hat, aber zu schwach ist, sie in ihrer Zusammenfassung zu schauen, so entfaltet er sie, legt sie auseinander“ (*comPLICatio-explicatio*) „und entläßt sie in die im Vorsaal weilende Phantasie und in ihr oder auch mit ihr läßt er ihre Erkenntnis sich abspielen . . . Wenn der Geist aber einmal imstande wäre, alle Ausdehnung und alle Bilder und die Vielheit zusammenzuhalten, bildlos und einfach zu schauen und so zu sich zurückzukehren, dann würde er erst so recht die geometrischen Ideen schauen, die ungeteilten, die unausgedehnten, die wesenhaften, deren Inbegriff er ist. Und diese seine Tätigkeit wäre das schönste Ziel des Studiums der Geometrie und wahrhaftig die Leistung des Geschenkes des Hermes, das ihn von einer Kalypso emporführt zu einer vollkommeneren und geistigeren Erkenntnis und ihn frei macht von den an die Phantasie gebundenen Annäherungsversuchen . . . Und das ist es, wonach der *wahrhafte Mathematiker* streben muß, . . . daß er sich emporreißt von der Welt der Ausdehnung . . . zur *reinen Tätigkeit des Geistes*“ — wer denkt bei diesen Formulierungen nicht an GOETHE —, „derzufolge er alles unausgedehnt und ungeteilt schauen wird.“ . . .

„Über die *Wissenschaft selbst, die sich mit den Figuren befaßt* (Geometrie), wollen wir nun sprechen. Die Geometrie hat es also zu tun mit der Erkenntnis der Figuren und Körper und ihrer Grenzen, ferner mit ihren Verhältnissen, mit den Vorgängen in ihnen und mit

den mannigfachen Lagen und Bewegungen. Sie geht aus von dem *unteilbaren Punkt* und endet bei den *Körpern*, deren mannigfache Unterschiede sie erkundet und kehrt hinwiederum von dem Komplizierteren zu dem Einfacheren und dessen Prinzipien zurück. Dabei bedient sie sich ebenso der *Synthesen*, wie der *Analysen*, geht immer von *Voraussetzungen aus und nimmt ihre Prinzipien von der ihr übergeordneten Wissenschaft*“ (der *Dialektik*); „sie stellt ferner sämtliche *dialektische Methoden* in ihren Dienst, bei den *Prinzipien* die Scheidung von *Art* und *Gattung* und die *Definitionen*, bei den Folgerungen aus den Prinzipien die *Beweise und Lösungen von Problemen*, damit sie zeige, wie das Kompliziertere vom Einfacheren ausgehe und wieder dahin zurückkehre.

Getrennt behandelt sie ihre *Gegenstände*, getrennt ihre *Axiome*, von denen sie bei ihren Beweisen ausgeht, und ihre Forderungen (*Postulate*), getrennt die wesentlichen *Eigenschaften*, von denen sie nachweist, daß sie ihren Trägern wirklich zukommen. *Denn jede Wissenschaft hat einen anderen Gegenstand, mit dem sie sich befaßt, und dessen Möglichkeiten zu ergründen sie sich zur Aufgabe macht; jede hat andere Prinzipien, die sie für die Beweise verwendet, und andere wesentliche Gegebenheiten.* Die Axiome aber sind allen gemeinsam, wenn auch jede, entsprechend dem jeweiligen Stoff, sich ihrer in eigener Weise bedient.“

Dies ist der klassische Sinn des Wortes Axiom und seiner Bedeutung. Die Axiome *stammen aus der höchsten Wissenschaft, der Dialektik, und sind daher allen Wissenschaften gemeinsam.* Dies kann nicht wegdisputiert werden, wie dies Formalismus und Logistik tun, um die Einseitigkeit ihrer Ansätze zu decken. Vielleicht hat bisher allein FICHTE diese Lehren der Platoniker streng beweisen können.

Und PROKLUS fährt fort: „... nur was aus den Prinzipien der Geometrie sich herleitet und nur wer hierin die Prüfung besteht, erweist sich als Mathematiker. *Was aber nicht von ihnen sich herleitet, hat mit Geometrie nichts zu tun* ... Deshalb gibt uns auch die Geometrie *Kriterien* an die Hand, mit deren Hilfe wir unterscheiden können, was ihren Prinzipien gemäß ist und was gegen deren *Wahrheit* verstößt. Die verschiedenen Methoden nämlich, durch die man die Fehlschlüsse der Sophismen nachweisen kann, bieten uns die Möglichkeit dazu, denn andere Folgerungen ergeben sich aus den *geometrischen*, andere aus den *arithmetischen Prinzipien* ... Diejenige Wissenschaft, die sich auf einfachere Prinzipien stützt, ist sicherer

als diejenige, die von komplizierteren Voraussetzungen ausgeht, und diejenige, die das ‚Warum‘ namhaft macht“ (*causa*), „ist besser als die, die nur das ‚Daß‘ erkennt, und *diejenige, die das Intelligible behandelt, übertrifft diejenige, die nur mit der Sinnenwelt sich befaßt*. Nach den Zuweisungen des Sicherheitscharakters ist die Arithmetik sicherer als die Geometrie, denn ihre Prinzipien haben den Vorzug der Einfachheit. *Denn die Einheit ist ohne Lage, der Punkt aber hat eine Lage und die Geometrie geht vom Punkte aus und noch dazu von seiner Lage, die Arithmetik aber von der Einheit.*“ (Siehe Nr. 4.)

Und jetzt folgt bei PROKLUS die gewichtige Stelle, die sich mit der *griechischen Entdeckung des Irrationalen* beschäftigt und deutlich zeigt, daß die moderne logistische Interpretation dieser griechischen Schöpfung durchaus abwegig ist, wie ich dies in meinem „Hauptproblem der Mathematik“⁵⁸⁾ wiederholt dargelegt habe. Es heißt nämlich jetzt bei PROKLUS weiter: „Denn der Satz, daß jedes Verhältnis ausdrückbar sei, ist der Arithmetik allein eigen, keineswegs auch der Geometrie, denn in ihr gibt es auch irrationale Werte. Und daß die Differenzen von Quadraten an eine untere Grenze gebunden sind, ist der Arithmetik eigen; denn in der Geometrie gibt es eine kleinste Größe überhaupt nicht. Hingegen ist der Geometrie vorbehalten die *Lehre von den Lagen* — denn die Zahlen haben keine Lage —, von den *Berührungen* — denn nur bei kontinuierlichen Größen gibt es Berührung —, von den *irrationalen Teilungen* — denn wo die Teilung bis ins Unbegrenzte geht, da hat auch das Irrationale seinen Platz.

Beiden gemeinsam ist die Lehre von den Teilungen, wie sie EUKLID im 2. Buch der „*Elemente*“ entwickelt . . . Von diesen gemeinsamen Lehrsätzen werden die einen von der Geometrie auf die Arithmetik übertragen, andere umgekehrt von der Arithmetik auf die Geometrie, andere endlich kommen beiden in gleicher Weise zu und leiten sich her von der gesamten mathematischen Wissenschaft.“

„Es ist nun eben Aufgabe des Mathematikers, zu erkennen, aus welchen gemeinsamen Prinzipien sich die gemeinsamen, und aus welchen sich die besonderen Lehrsätze herleiten und so das, was zur Geometrie gehört und nicht dazu gehört, zu scheiden und das eine dieser, das andere jener Wissenschaft zuzuweisen.“

⁵⁸⁾ 2. Auflage Berlin 1943.

23. „Nun aber wollen wir wieder *von vorne* beginnen und Ausgangspunkt und Ziel der gesamten Geometrie ins Auge fassen. Denn so werden wir die *Ordnung ihres Lehrsystems* erkennen. Da werden wir denn inne werden, daß sie sich erstrecke auf die *ganze Welt des Seins* und auf alles ihr Augenmerke richte und *alle Seinsformen in sich umfasse*. In ihrem höchsten und geistigsten Bezirk betrachtet sie das *wahrhafte Sein* und belehrt in Bildern über die Eigentümlichkeiten des Göttlichen und die Kräfte der intelligiblen Formen“ — es ist genau die Formulierung, die später auch CUSANUS in seiner „*Visio Dei*“ und KEPLER wieder aufnehmen —; „denn sie hat die Begriffe davon in ihren eigenen Schauungen...“

Und jetzt folgt bei PROKLUS das berühmte „*Mathematikerverzeichnis*“, durch das die Geschichte der Mathematik wertvollste Aufschlüsse über die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften im Griechentum und über die Einzelergebnisse und welchen Forschern sie geistig zugehören, erhalten hat. Wir brauchen darauf um so weniger einzugehen, als dies von allen Darstellern der Geschichte der antiken Mathematik ausgewertet worden ist. Klassisch geworden ist die Stelle über EUKLID, die wir aber doch hierhersetzen wollen: „Nicht viel jünger als diese ist EUKLID, der die „*Elemente*“ zusammenstellte, viele Ergebnisse des EUDOXUS zusammenfaßte, viele des THEAITETOS zum Abschluß brachte und die weniger stringenten Beweise seiner Vorgänger in eine unwiderlegbare Form goß. Er lebte zur Zeit des ersten PTOLEMAIOS, denn ARCHIMEDES, der nach dem ersten PTOLEMAIOS lebte, erwähnt EUKLID und man erzählt auch in der Tat, PTOLEMAIOS habe ihn einmal gefragt, ob es nicht für die Geometrie einen kürzeren Weg gebe, als die Lehren der „*Elemente*“. Er aber antwortete, es führe kein königlicher Weg zur Geometrie (s. oben)... Er gehörte zur *Platonischen Schule* und war mit dieser Philosophie vertraut, weshalb er auch als Ziel der gesamten Lehre der „*Elemente*“ die Darstellung der sogenannten Platonischen Körper aufstellte. Von ihm stammen auch noch eine große Menge anderer mathematischer Schriften, alle ausgezeichnet durch bewundernswerte Exaktheit und wissenschaftliche Spekulation, so z. B. seine „*Optik*“ und „*Katoptrik*“, seine „*Elementenlehre zur Musik*“, ferner sein Buch „*Über die Teilung der Figuren*“. Besondere Bewunderung verdient bei seinem Elementarbuch der Geometrie der *systematische Aufbau* und die Auswahl der für die „*Elemente*“ geschaffenen Lehrsätze und Konstruktionsaufgaben. Denn nicht, was man überhaupt anführen könnte, nahm er auf, sondern was zur *grundlegenden Einführung* diene, ferner die *verschiedenen Arten der Schlußfolgerungen*, die teils von den Prinzipien ihre Gültigkeit gewinnen, teils auf Beweisen basieren, alle aber unwiderlegbar, exakt und für die Wissenschaft geeignet sind. Dazu kommen noch *alle dialektischen Methoden*, die *trennende* beim Auffinden der Figuren, die *definierende* bei den Wesensbestimmungen, die *beweisende* bei dem Fortschreiten von den Prinzipien zu den in Frage stehenden Sätzen, die *analytische* bei der Rückkehr von diesen zu den Prinzipien (s. oben). Auch die genaue Darlegung der *verschiedenen Arten der Umkehrungen*, der einfacheren und komplizierteren, kann man in diesem Werke zur Genüge kennen lernen, ferner auch, *welche Umkehrungen vollständig möglich* sind, *welche als Ganzes von Teilen* und *umgekehrt*, und *welche als Teile von Teilen* (s. unten). Weiterhin betonen wir den Zusammenhang der gefundenen, die *systematische Ordnung* der

vorangehenden und der folgenden Sätze, die Eindringlichkeit, mit der er alles im einzelnen darlegt. *Oder merkst du nicht, daß du abirrst vom Pfade der Wissenschaft und in den entgegengesetzten Irrtum und in Unklarheit dich verstrickst, wenn du irgendetwas Beliebigen hinzufügst oder hinwegnimmst?* Da aber vieles den Anschein der Wahrheitsliebe und wissenschaftlichen Konsequenz erweckt, aber weg von den Prinzipien auf Abwege führt und oberflächlichere Naturen täuscht, so übermittelte er auch *Methoden* zur scharfen Erkenntnis solcher Irrwege. Im Besitze dieser werden wir imstande sein, die Anfänger dieser Wissenschaft in der Auffindung der *Fehlschlüsse* zu schulen und selbst vor Täuschungen bewahrt zu bleiben. Die Schrift, in der er uns die Befähigung hierzu vermittelt, betitelte er „*Fehlschlüsse*“. Er zählt uns darin der Reihe nach ihre verschiedenen Arten auf und schult bei jeder durch mannigfache Untersuchungen unseren Geist, indem er dem Falschen das Wahre gegenüberstellt und dem Täuschungsmanöver die Widerlegung anpaßt. Diesem Werke eignet also eine *reinigende und geistschulende Wirkung*; das Elementarbuch aber bietet eine exakte (unwiderlegbare) und vollkommene Anleitung zur wissenschaftlichen Behandlung der geometrischen Probleme... Denn die grundlegendsten und einfachsten Lehrsätze, die aufs engste verwandt sind mit den ersten Voraussetzungen, sind hier zu einem *vollkommenen System* zusammengeschlossen, und die Beweise der anderen Sätze stützen sich auf diese als auf die einleuchtendsten und gehen von ihnen aus.“

Und im Anschluß an diese klassische Stelle über EUKLID, die die Gesamtheit der methodischen Standorte des Griechentums sichtbar werden läßt, wie sie in mathematischer Fassung in EUKLIDS „*Elementen*“ niedergelegt sind, folgt jetzt bei PROKLUS die eigentliche, ins Einzelne gehende Darstellung der *Methodenlehre der Mathematik*, die wir jetzt noch kurz umreißen wollen.

24. Die Detailausführungen des PROKLUS über die Methodologie der Mathematik nehmen ihren Ausgang von der Titelbezeichnung der EUKLIDischen „*Elemente*“. Es heißt da: „*Elemente* nennt man jene Sätze, deren Betrachtung sich auswirkt auf die Erkenntnis der anderen und von denen aus die Lösung der bei diesen vorhandenen Schwierigkeiten gewonnen wird. Denn wie die geschriebene Sprache grundlegende, einfachste und unteilbare Elemente kennt, die wir Buchstaben nennen, so gibt es auch in dem Gesamtbereich der Geometrie gewisse Sätze von überragender (übergreifender) Bedeutung, die den Rang von Prinzipien beanspruchen gegenüber den daraus sich ergebenden Folgerungen, einen umfassenden Geltungsbereich haben und die Beweise für die vielen Einzelfälle ermöglichen.

Elementarhaft aber sind jene Sätze, deren Bedeutung sich auf mehrere andere erstreckt, die einfach sind und interessant, aber nicht den Rang von Elementen beanspruchen können, weil ihre Erkennt-

nis keinen inneren Bezug hat auf das gesamte Gebiet der Wissenschaft.

Wiederum spricht man von „Element“ in doppeltem Sinne, wie MENAICHMOS sagt. Denn das Grundlegende ist Element für das Grundgelegte. So wird man vieles als wechselseitige Grundlage voneinander bezeichnen können; denn *die grundlegenden Beziehungen sind wechselseitig* — symmetrisch — (s. allgemeine Einführung). „Im anderen Sinne bezeichnet man als „Element“ das Einfachere, in das das Zusammengesetzte aufgelöst wird . . . So sind die *Postulate* die Elemente der Lehrsätze.“

Und jetzt wieder der allgemeine methodische Aufriß: „Es besteht nun aber in jeder Wissenschaft eine Schwierigkeit in der rechten *Auswahl* und *Ordnung* der Elemente, von denen alles andere abgeleitet, und auf die es wieder zurückgeführt wird . . . Die einen faßten die Beweise kürzer, die anderen zogen das Verfahren endlos in die Länge; die einen gingen dem Absurditätsverfahren (*deductio ad absurdum*), die anderen dem *Analogieschluß* aus dem Wege; wieder andere ersannen Sicherungen gegen diejenigen, die die Prinzipien zu entkräften suchten . . .

In jeder dieser Beziehungen möchte man finden, daß das Elementarbuch des EUKLID den Vorzug verdient vor den übrigen. Denn seine Brauchbarkeit (Anwendung) fördert die Wissenschaft von den wirkursächlichen Figuren; die *klare Gliederung* aber ist bedingt durch das Fortschreiten vom Einfacheren zum Komplizierteren und den Ausgang der Untersuchung von den *Axiomen*; der *umfassende Charakter des Beweisverfahrens* endlich durch das Fortschreiten von den ersten und grundlegenden Sätzen zu den in Frage stehenden Problemen . . .

Die vollständige Übersicht über den Inhalt des Werkes wollen wir in folgender Weise geben. Da wir behaupten, daß diese Wissenschaft, die *Geometrie*, auf Voraussetzungen beruhe und von bestimmten Prinzipien aus die abgeleiteten Folgerungen beweise — *denn nur eine ist voraussetzungslos*“ (die *Dialektik*), „*die anderen aber empfangen ihre Prinzipien von dieser* — so muß man unbedingt gesondert die Prinzipien der Wissenschaft lehren und gesondert die Folgerungen aus den Prinzipien; *von den Prinzipien braucht man nicht Rechenschaft zu geben, wohl aber von den Folgerungen hieraus*. Denn keine Wissenschaft beweist ihre eigenen Prinzipien und stellt sie zur Diskussion, sondern hält sie für an sich gewiß; sie sind ihr klarer als die Ableitungen; erstere erkennt sie in deren eigenem Licht, die Ableitungen aber durch die Prinzipien . . .“ Hier also wieder eine klassische Stelle über das, was die Griechen „*Axiom*“ nennen.

„Vor allem also galt es, die *Prinzipien zu sondern von den Ableitungen*... Das tut denn auch EUKLID, indem er sozusagen bei jedem Buch (der „*Elemente*“) die allgemeinen Prinzipien dieser Wissenschaft voranstellt. Sodann teilt er auch noch die allgemeinen Prinzipien ein in:

- a) *Definitionen*
- b) *Postulate*
- c) *Axiome*.

Das alles ist nämlich voneinander verschieden und Axiom, Postulat und Definition sind nicht dasselbe... Wenn vielmehr das, was als Prinzip genommen wird,... an sich evident ist, so handelt es sich um ein Axiom. Wenn aber der Hörer das Verständnis einer Behauptung als von sich aus einleuchtend nicht schon in sich hat, die Behauptung aber gleichwohl aufgestellt wird und er die Annahme zugibt, so handelt es sich um eine Definition. Wenn aber die Behauptung noch unbekannt ist und die Annahme gleichwohl erfolgt, obwohl der Lernende sie nicht zugibt, dann sprechen wir von einem Postulat.... Auf diese Weise sind also nach der Lehre des ARISTOTELES Axiom, Postulat und Definition voneinander verschieden.

Die *Ableitungen aus den Prinzipien* hinwiederum zerfallen in:

- a) Aufgaben (*Problemata*) und
- b) Lehrsätze (*Theoremata*).

Erstere begreifen in sich die *Konstruktion der Figuren*, die Teilungen, das Hinwegnehmen oder Hinzufügen und überhaupt alles, was man mit ihnen tun kann; die letzteren weisen die *wesentlichen Eigenschaften* auf.

Es gibt nun aber in der Geometrie sowohl *Probleme, wie Theoreme*. Weil aber die Theorie das Überwiegende in ihr ist..., so haben alle Probleme auch Anteil an der Theorie, aber nicht umgekehrt; denn die *Beweise* insgesamt sind das Werk der Theorie. Alle Sätze aber in der Geometrie, die auf die Prinzipien folgen, werden auf Grund von Beweisen angenommen, so daß das *Theorem allgemeinerer Art ist* (als das Problem). Aber nicht alle Theoreme bedürfen der Probleme, sondern es gibt deren, die in sich („*intrinsek*“) den Beweis für die gestellte Frage enthalten. Diejenigen aber, die Theorem von Problem scheiden, sagen, *jedes Problem* lasse von den Prädikaten über die betreffende Materie jedes einzelne zu und das Gegenteil, *jedes Theorem* aber lasse nur das Prädikat an sich zu, nicht aber auch sein Gegenteil. Unter ihrer „*Materie*“ verstehe ich dabei die *Gattung*, die zur Untersuchung steht..., unter dem ausgesagten Akzidens aber das *wesentliche Akzidens*... Wo es sich also um ein allgemeines Akzidens handelt, das der gesamten Materie eigen ist, da ist von *Theoremen* zu sprechen. Wo aber kein allgemeines Gesetz vorliegt, das für den ganzen Bereich der betreffenden Materie (durchgehend und generell) gilt, da ist ein *Problem* anzunehmen.

Die Anhänger des ZENODOT aber, der zur Schule des OINOPIDES gehört und ein Schüler ANDRONS ist, schieden das Theorem vom Problem, insofern das *Theorem nach dem Gesetz fragt*, das ausgesagt wird, von dem ihm zu Grunde liegenden Gegenstände, das *Problem aber nach der Voraussetzung*, durch die etwas bedingt ist. Deshalb definierte auch die Schule des POSEIDONIOS das erstere als die *Aufgabe, derzufolge untersucht wird, ob es zutrifft oder nicht*, das

Problem aber als die *Aufgabe*, bei der untersucht wird, was oder von welcher Beschaffenheit etwas ist, und sie behaupteten, die *theoretische Aufgabe* (Theorem) müsse man als Aussage formulieren, ... die *problematische Aufgabe* (Problem) hingegen als Frage.

Doch daß ein Unterschied ist zwischen Problem und Theorem ist aus dem Gesagten klar; daß aber auch die Elementarlehre des EUKLID teils Probleme, teils Theoreme enthält, wird daraus klar werden, daß der Meister selbst im einzelnen am Ende der Beweise bald hinzufügt „*was auszuführen war*“, bald „*was zu beweisen war*“ als Charakteristikum der Lehrsätze (*theoremata*). Freilich findet auch in den Problemen ein Beweisverfahren statt; aber bald lohnt der Beweis um der Konstruktion willen, bald an und für sich die aufgewandte Mühe, da er imstande ist, die *Eigenart* des untersuchten Problems vor Augen zu stellen.“

Der zweite Teil der Vorrede schließt mit der Devise der Pythagoreer:

„Mit jeder Zeichnung zeuch voran
Und scheuch den Krämergeist hintan“¹,

die von PROKLUS so erläutert wird: „Sie wollten damit zum Ausdruck bringen, daß man jene Geometrie betreiben muß, die bei jedem Lehrsatz einen Schritt nach oben tut, die Seele emporhebt und ihr nicht gestattet, in die Tiefen der Sinnenwelt herabzusteigen, die gemeine Notdurft des menschlichen Lebens zu befriedigen und im Streben darnach auf die Abkehr von dieser Welt zu vergessen“.

25. Es folgt jetzt die ausführliche Behandlung der EUKLIDischen Definitionen, in deren Kommentaren PROKLUS jetzt wieder eine Reihe von methodologischen Klarstellungen bringt, die aber nur im Zusammenhang mit seinen im folgenden Abschnitt zu behandelnden seinsgründenden Prinzipien der Mathematik, *Peras und Apeiron*, der Grenze und des Unbegrenzten, vollauf verständlich werden, so daß dies erst in der Nr. 3 dieser Darstellung Platz finden kann.

Dagegen können wir bei der PROKLEischen Behandlung der *Postulate* und *Axiome* EUKLIDS und ihrer Kommentierungen die allgemeinen und generellen methodologischen Gedankengänge hier anschließen. Es ist dies ein Kardinalpunkt der gesamten PROKLEischen Methodologie der Mathematik, auf den die moderne Mathematik gar nicht mehr geachtet und ihn vollständig übergangen hat. Um so berechtigter ist es, die zentrale Unterscheidung von *Postulat* und *Axiom*, wie sie PROKLUS bringt, ganz deutlich herauszukehren. Gerade PROKLUS sieht das *Verhältnis von Postulat und Axiom* noch ganz klar, das in der heutigen Axiomatik ganz verwischt worden ist. Denn für die Heutigen hat das Axiom nur eine immanente Bedeutung, „deren transienter Charakter, zugleich eine als objektiv gültig ange-

sehene *Wahrheit* zu enthalten, ihr gleichgültig ist“ (A. Voss). Anders PROKLUS, nach dem die *Postulate* die *Möglichkeit des Konstruktiven in den mathematischen Wissenschaften* dartun, die *Axiome* dagegen *Eigenschaften einer Figur, bei deren Verneinung die Konstruktion*, d. h. das Postulat, *überhaupt nicht möglich wäre*. Auf diesen ganz fundamentalen *logischen* Unterschied scheint in der neueren Zeit nur G. VAILATI besonders hingewiesen zu haben⁵⁹⁾. Daß er vorhanden ist und beachtet werden muß, dies kommt bei PROKLUS ganz deutlich heraus und soll jetzt nach den Originalstellen angegeben werden. Es handelt sich dabei um eine logisch-methodologische Haltung und Auffassung, die wir in der modernen Mathematik leider verloren haben, die aber als integrierend für eine umfassende und ganzheitliche *Gestaltlehre der Mathematik* anzusehen und zu werten ist. Wir werden bei einem Neuaufbau des Mathematischen vom Sinn, von der Bedeutung und von der Gestalt her gerade dieser wichtigen Position der Antike in vollem Umfange Rechnung tragen müssen und sie nicht länger entbehren können.

Bei PROKLUS heißt es: „Die *geometrischen Prinzipien* zerfallen in drei Teile:

1. die *Definitionen*,
2. die *Postulate*,
3. die *Axiome*.

Nachdem wir deren Unterschied voneinander schon früher dargelegt haben, soll es jetzt unsere Aufgabe sein, im besonderen und genauer uns zu verbreiten über die *Postulate* und die *Axiome*.

Gemeinsam ist nun den Axiomen und den Postulaten, daß sie *keiner Begründung und keiner geometrischen Beweise bedürfen*, sondern daß sie als bekannt angenommen werden und Prinzipien sind für das Folgende. Sie unterscheiden sich aber voneinander ebenso, wie die *Lehrsätze* (Theoreme) von den *Aufgaben* (Problemen) verschieden sind. Wie wir nämlich bei den *Lehrsätzen* die Aufgaben stellen, die Folgerungen aus den Voraussetzungen einzusehen und zu erkennen, wir aber bei den *Aufgaben* den Auftrag erhalten, etwas zu finden und zu tun, *ebenso wird auch bei den Axiomen das angenommen, was auf der Stelle ersichtlich ist* und unserem ungeschulten Denken keine Schwierigkeiten bereitet, *bei den Forderungen aber suchen wir das zu finden, was leicht zu beschaffen und festzustellen ist*, den Verstand bei den Bemühungen darum nicht ermüdet, keines komplizierten Verfahrens und keiner Konstruktion bedarf. Eine ohne Beweise einleuchtende Erkenntnis also und das mühelose Finden scheiden die Forderungen und die Axiome... *Denn es müssen eben in jedem Fall die*

⁵⁹⁾ Congresso IV di matematica, Roma 1908, p. 573.

Prinzipien vor den Folgerungen aus den Prinzipien durch Einfachheit, durch den Wegfall von Beweisen und durch die eigene Evidenz sich auszeichnen. Denn ganz allgemein, bemerkt SPEUSIPP, stellt der denkende Geist die einen seiner Forschungsobjekte ohne irgendwelche komplizierte Gedankengänge klar heraus, richtet sie im vorhinein als Material für die künftige Forschung zurecht und hat einen überzeugenderen Kontakt mit ihnen, als das Auge mit dem, was es sieht; andere aber, die er nicht sofort begreifen kann, sucht er, indem er mit veränderter Methode zu jenen Prinzipien vordringt, als deren Folgerung zu erfassen....

Es fehlt also viel, daß diese Aufgaben durch ein einfaches Verfahren von uns auf den ersten Blick gelöst werden. Wir müssen uns damit begnügen ihrem *Werdeprozeß* zu folgen (*genetische Methode*)... Beide also, die Postulate und die Axiome... müssen den Charakter des Einfachen und leicht Faßlichen haben; aber das *Postulat* trägt uns auf, zur Darlegung eines Akzidens irgendeinen Gegenstand zu *beschaffen* und ausfindig zu machen, der einfach und leicht zu finden ist, das *Axiom* hingegen irgendein wesentliches Akzidens zu nennen, das ohne weiteres den Hörenden bekannt ist, wie z.B. daß das Feuer warm ist oder irgendeine andere *Wahrheit von höchster Klarheit*, deren Bezweifeln gegenüber wir sagen, es fehle ihnen an gesundem Verstand oder sie bedürften der Züchtigung. *So ist das Postulat mit dem Axiom homogen*, unterscheidet sich aber von ihm auf die angegebene Weise... ARISTOTELES behauptet, wie wir schon früher dargelegt haben, das *Postulat* sei beweisbar und werde darum nicht ohne weiteres vom Hörer zugestanden, gleichwohl aber als Prinzip angenommen, das *Axiom* aber sei an sich unbeweisbar und alle würden es vermöge ihrer seelischen Veranlagung zugestehen...“

Jetzt erfolgt bei PROKLUS wieder die Gabelung gemäß der früher gegebenen Einteilung der Mathematik in Geometrie und Arithmetik. „Von den *Axiomen* hinwiederum sind die einen der *Arithmetik* eigen, die anderen der *Geometrie*, eine weitere Gruppe ist *beiden gemeinsam*. Denn daß jede Zahl durch die Einheit gemessen wird, ist ein *arithmetisches Axiom*, daß gleiche Strecken einander kongruent sind, und daß jede Raumgröße ins Unendliche teilbar ist, sind *geometrische Axiome*; der Satz aber, daß Größen, die einer dritten Größe gleich sind, auch unter sich gleich sind, und was sonst noch von der Art ist, ist *beiden gemeinsam*“ (*gemischte Axiome*).

Im Kommentar zum 1.—5. Axiom führt dann PROKLUS noch folgendes in diesen Zusammenhang gehörige aus: „...Die Wissenschaften zerfallen ihrer Gattung nach in solche, die sich mit *unmittelbaren Sätzen* befassen, denen wir unbedingt ob ihrer Evidenz zustimmen, und solche, die Beweise verwenden, die die Prinzipien von ersteren empfangen und dann in der erforderlichen Weise für die eigenen Schlußfolgerungen davon Gebrauch machen. ...Alle *Axiome* sind als unmittelbar einleuchtend darzustellen, als von sich aus bekannt und überzeugend. *Wer nämlich das Klarste einem Beweise unterwirft, bekräftigt nicht seine Wahrheit, sondern vermindert die Klarheit, die wir besitzen in den vor jedem Unterricht uns eigenen Vorstellungen*“ (Anamnesis).

Und jetzt die außerordentlich wichtigen Ausführungen des PROKLUS, die direkt auf das hinweisen, was wir in der allgemeinen Einführung zu diesem Werke die Symmetrie der mathematischen

Grundgesetzmäßigkeiten als eigentlichen Geistformen und Geistgestalten gesagt haben. PROKLUS formuliert das so: „Soviel war also im vornhinein zu sagen über die *Axiome*, zur Kennzeichnung ihres eigentlichen Wesens und zur Feststellung, daß alle zur gemeinsamen Gattung der mathematischen Disziplinen gehören. Denn jedes von ihnen bewahrheitet sich nicht bloß bei den Raumgrößen, sondern auch bei den Zahlen, den Bewegungen und den Zeiten. Und das muß so sein! Denn das *Gleiche* und *Ungleiche*, das *Ganze* und der *Teil*, das *Größere* und das *Kleinere* sind den getrennten und den zusammenhängenden Quantitäten gemeinsam. Die wissenschaftliche Betrachtung der Zeiten bedarf ihrer aller als evidenten Sätze ebenso wie die der Bewegungen, Zahlen und Größen und bei all diesen ist das Axiom wahr, daß zwei Größen, die einer dritten gleich sind, auch unter sich gleich sind und so auch jedes beliebige, das wir von den übrigen nehmen. Unterschiedslos gebraucht sie ein jeder, entsprechend seinem eigenen Gegenstand, soweit dieser es fordert, der eine bei den Größen, der andere bei den Zahlen, der dritte bei den Zeiten. Und so gestalten sich die Folgerungen in jeder Wissenschaft individuell, wenn auch die Axiome gemeinsam sind.“

26. Es folgen endlich die Kommentare des PROKLUS zu den Lehrsätzen des EUKLID und in diesen Kommentaren legt PROKLUS nochmals eine Fülle methodologischer Gedanken fest, die geeignet sind, seine ganzen bisherigen methodischen Entwicklungen nun am jeweiligen Einzelbeispiel klarzulegen und in ihrer Allgemeinheit zu erhärten.

„Nun wollen wir die Ausführungen über die Lehrsätze (*Theoreme*) und Aufgaben (*Probleme*) hinsichtlich ihrer Unterschiede, ihrer beiderseitigen Teile und ihrer Gliederungen rekapitulieren...

Jede Wissenschaft ist zweifacher Art:

- a) entweder bemüht sie sich um die *unmittelbaren Sätze*, oder
 - b) sie liefert, gestützt auf diese, *Beweise* und *Konstruktionen*, zieht überhaupt *Folgerungen* aus den Prinzipien
- und entwickelt so ihr *System*.

Bei der Behandlung der Geometrie scheidet sie sich in die Erledigung der *Probleme* und die Gewinnung von Lehrsätzen (*Theoreme*). Sie bezeichnet als *Probleme* Aufgaben, bei denen sie sich zum Ziele setzt, nicht Vorhandenes ausfindig zu machen, ans Licht zu bringen und zu beschaffen, als *Theoreme* aber Sätze, durch die sie das, was zutrifft oder nicht zutrifft, sehen, erkennen und beweisen will.... Alle Fragen, über die man Untersuchungen anstellen kann, erörtert die *Geometrie* und weist die einen den Problemen, die anderen den Theoremen zu. *Denn sie fragt nach dem Wesen, und zwar auf zweifache Weise, entweder nämlich nach Sinn und Begriff, oder nach dem unmittel-*

baren Wesen des Gegenstandes ... Außerdem fragt sie nach der Möglichkeit der Existenz an und für sich und vor allem in den Erörterungen, indem sie prüft, ob die eben gestellte Aufgabe möglich ist oder unmöglich, wie weit die Möglichkeit der Lösung sich erstreckt und auf wie viele Fälle. Endlich fragt sie nach der Qualität.

Jedes Problem aber und jedes Theorem, die aus ihren vollständigen Teilen sich (sinnvoll) zusammensetzen, müssen alle folgenden Stücke in sich schließen:

1. die *Aufgabe* (Protasis)
2. die *Angabe* (Ekthesis)
3. die *Thesis* (Diorismos)
4. die *Konstruktion* (Kataskeue)
5. der *Beweis* (Apodeixis)
6. die *Schlußfolgerung* (Symperasma).

Davon besagt die *Aufgabe*, was gegeben ist und was gesucht wird. Denn die vollständige Aufgabe enthält beides. Die *Angabe* nimmt das Datum (das Gegebene) für sich allein und gibt ihm die geeignete Fassung für die Untersuchung. Die *Thesis* macht im besonderen klar, wonach eigentlich gefragt wird. Die *Konstruktion* fügt dem Gegebenen das noch Fehlende zur Erreichung des gesuchten Ergebnisses hinzu. Der *Beweis* folgert in sachkundiger Weise aus dem, was zugegeben wird, den vorliegenden Satz. Der *Schluß* lenkt wieder zur Aufgabe zurück und bekräftigt das Resultat.

Das sind die sämtlichen Teile der Probleme und Theoreme. Die wesentlichsten aber, die bei allen vorhanden sind, sind die *Aufgabe*, der *Beweis* und der *Schluß*. Denn man muß in vorhinein wissen, was in Frage steht; dies muß sodann durch *Mittelglieder bewiesen werden*; und endlich ist das Beweisresultat zu ziehen. Von diesen drei Stücken (auch nur) eines auszulassen ist unmöglich. Die übrigen werden vielfach verwendet, vielfach aber auch, soweit sie ohne Nutzen sind, weggelassen.

Jedes *Datum* wird aber auf eine der folgenden Weisen gegeben: Entweder durch die Lage, oder eine Proportion, eine Größe, oder eine Art. Bezüglich des sogenannten *Beweises* werden wir finden, daß er zuweilen den eigentlichen Anforderungen des Beweises genügt und von den *Mittelgliedern der Definition* aus den gesuchten Beweis führt — das ist nämlich *die vollkommenste Form des Beweises* — zuweilen nur von Merkmalen ausgeht. ...Denn die *geometrischen Wahrheiten* haben wegen der ihnen zugrunde liegenden Materie (Gattung) immer einen *unbedingten Charakter*, nicht immer aber werden sie ins Reine gebracht durch die *Beweismethoden*.

Auch die *Schlußfolgerung* zieht man gewöhnlich sozusagen in doppeltem Sinne. Denn man schließt, daß man den Beweis auf der Grundlage des Datums, aber auch im allgemeinen Sinne erbracht habe, indem man von dem partikulären *Ergebnis* dem *allgemeinen* sich zuwendet. Indem man nämlich die Besonderheit des Gegenstandes nicht mit berücksichtigt, sondern das Datum vor Augen stellt..., so glaubt man, eben die Folgerung, die in diesem Falle sich ergeben, sei mitbewiesen für jeden ähnlichen Fall. *Man vollzieht also den Übergang zum Allgemeinen*, damit wir nicht meinen, es handle sich nur um ein Teilergebnis. Der Übergang ist aber vollkommen begründet, da man sich der Angaben zum

Beweise bedient, nicht insofern sie so oder so lauten, sondern insofern sie den anderen Fällen ähnlich sind... Dabei sind im allgemeinen die *Postulate* von Vorteil bei den *Konstruktionen*, die *Axiome* bei den *Beweisen*. ... Wir haben nun an dem einen Beispiel des ersten Problems all diese Übungen vorgenommen und klar gemacht. Es sollen aber die Hörer auch bei den anderen sich diese Fragen vorlegen: welche Hauptstücke sind verwendet und welche ausgelassen, wievielfach ist das gegebene Datum und von welchen Prinzipien leiten wir die Konstruktionen oder die Beweise her? Denn ein kurzer zusammenfassender Überblick über diese Dinge trägt nicht wenig bei zur *Schulung des Geistes* und zum Durchdenken geometrischer Gedankengänge.

27. Doch nachdem nun dieses Kapitel erledigt ist, wollen wir uns in Kürze verbreiten über Punkte, die damit zusammenhängen, und uns fragen: Was ist:

- a) ein Hilfssatz (*Lemma*),
- b) ein Fall (*Ptoxis*),
- c) ein *Porisma*,
- d) ein Einwand (*Enstasis*),
- e) eine Zurückführung (*Apagoge*)?

Von einem *Lemma* spricht man nun häufig bei jedem Satz, der zur Gewinnung eines anderen Ergebnisses verwendet wird, indem die Mathematiker behaupten, aus so und so vielen *Hilfssätzen* sei ihnen der Aufbau des Beweises geglückt. Im eigentlichen Sinne aber versteht man unter *Lemma* in der Geometrie einen Satz, der des Beweises bedarf. Wenn wir nämlich bei der Konstruktion oder beim Beweis irgendeine Annahme machen, die nicht bewiesen ist, sondern der Begründung bedarf, dann fordern wir für die Annahme, als an sich zweifelhaft, eine *Prüfung* und nennen sie ein *Lemma*, das sich von der Forderung und dem Axiom durch seine Beweisbarkeit unterscheidet... Was das Finden der *Lemmata* anlangt, so ist das beste Mittel hierfür die Geschicklichkeit des Geistes hiezu... Gleichwohl werden verschiedene Methoden hierfür empfohlen. Die beste ist jene, die das gesuchte Problem auf *analytischem* Wege (im klassischen Sinne) zurückführt auf ein anerkanntes Prinzip... Die zweite ist die *trennende*, die den vorliegenden allgemeinen Komplex in Teiglieder auflöst und dem Beweise die Möglichkeit zur Erhärtung des betreffenden Problems erschließt durch Beseitigung aller anderen Möglichkeiten... Die dritte Methode bedient sich der Zurückführung auf eine Unmöglichkeit (*deductio ad absurdum*). Sie beweist nicht unmittelbar, was in Frage steht, sondern widerlegt das Gegenteil und findet so per accidens das Richtige. Das ist also die wissenschaftliche Erklärung des *Lemmas*.

Der *Fall* (*Ptoxis*) unterrichtet über die verschiedenen Arten der Konstruktion und den Lagenwechsel durch Umstellung der Punkte, Linien, Ebenen oder Körper. Überhaupt ist die Entfaltung seiner mannigfaltigen Möglichkeiten auf dem Gebiete der *Zeichnung* zu sehen, weshalb er als Veränderung in der Konstruktion auch „Fall“ genannt wird.

Die Bezeichnung *Porisma* verwendet man bei gewissen Problemen, wie bei den von EUKLID verfaßten „*Porismen*“. Im eigentlichen Sinne gebraucht man den Ausdruck, wenn aus den geführten Beweisen noch ein weiterer Lehrsatz erhellt, der von uns nicht aufgestellt wurde, den man deshalb auch „Glücks-

fund“ nennt, sozusagen eine Art Nebengewinn des wissenschaftlichen Beweises“ (s. unten die noch ausführlicheren Darlegungen über das *Porisma*).

Der *Einwand* (*Enstasis*) hindert den ganzen Ablauf des Beweisverfahrens, mag er nun bei der Konstruktion oder beim Beweise begegnen; dabei ist es nicht notwendig, die Richtigkeit des Einwandes zu erweisen, wie derjenige, der einen Satz vorlegt, seine Richtigkeit nachweisen muß, sondern man muß den Einwand entkräften und zeigen, daß der, der ihn erhebt, nur täuschen will.

Die *Zurückführung* (*Apagoge*) endlich ist der Übergang von einem Problem oder Lehrsatz zu einem anderen, dessen Erkenntnis oder Lösung auch die vorliegende Aufgabe klärt“ (*Reduktion*).

Nun folgt noch die Einteilung der *Probleme* nach AMPHIMONOS in:

- a) *regelmäßige*, worunter die einfachen Probleme verstanden werden,
- b) *mittlere*, „diejenigen mit mehreren Behandlungen in bestimmter Zahl“,
- c) *unregelmäßige*, „die ungezählte Variationen zulassen“.

„Im eigentlichen Sinne aber bezeichnet *Problem* in der Mathematik die Aufgabe einer wissenschaftlichen Zwecken dienenden Konstruktion. Denn was dabei geschieht, hat die wissenschaftliche Theorie zum Endzweck.

Nicht selten bezeichnet man auch einige *unmögliche Dinge* als „Probleme“; eigentlich aber führt diese Bezeichnung jede ausführbare Aufgabe, die weder zu viel noch zu wenig Angaben enthält. Von den „überladenen Problemen“ bezeichnet man diejenigen, die zuviel an unmöglichen und nicht vorkommenden Akzidentien bringen, als „*unmögliche Probleme*“; die mit möglichen Angaben überlasteten nennt man zu „*umfangreiche Probleme*“. „*Mangelhaft*“ ist ein Problem — man nennt es „*unzureichend*“ — wenn es eines weiteren Zusatzes bedarf, damit es aus dem Zustand der Unbestimmtheit in den der Ordnung und wissenschaftlichen Bestimmtheit übergeführt werde.

Hieraus folgt, daß die eigentlichen sogenannten *Probleme* alle Unbestimmtheit vermeiden und nicht zu denen gehören wollen, deren Möglichkeiten unbegrenzt sind. Man nennt aber gleichwohl auch diese „Probleme“, weil der Name nun einmal gleich ist“.

Dies ist die große und bedeutsame Ausbeute aus dem PROKLUSSEN Kommentar zum ersten Lehrsatz des EUKLID in methodologischer Hinsicht. Welche Vollständigkeit schon hierbei erreicht ist, kann uns nur stille Bewunderung abnötigen für eine Zeit, auf deren geistigen Untergründen die heutige hochentwickelte Mathematik steht, die zu Unrecht über ihre Formalismen diese methodischen Positionen übersehen zu dürfen glaubt.

Aber der einmal begonnene methodische Gedankengang wird im Kommentar zum 2. Lehrsatz gleich wieder aufgenommen und weitergeführt und liefert nun zunächst eine Einteilung der Probleme und der Theoreme.

„Von den Problemen, wie auch von den Theoremen sind:

- a) die einen *aptotisch*,
- b) die anderen *polytotisch*.

Von denen, die dieselbe Methode durch mehrere Konstruktionen hindurch aufweisen und bei Änderung der Lagen dasselbe Beweisverfahren einhalten, sagt man, sie hätten „Fälle“; diejenigen aber, deren Abwicklung an eine (feste) Lage

und an eine (feste) Konstruktion geknüpft ist, sind aptotisch. Denn der Fall ist lediglich bei der Konstruktion, sei es von Theoremen oder von Problemen zu gewahren.“ Man sieht die strenge Parallelführung mit der oben gegebenen Einteilung des PROKLUS. Die *Ptois* von dort wird hier zum Einteilungsgrund für die Lehrsätze und Probleme. Dies ist die Ausbeute methodologischer Art aus dem Kommentar des 2. Satzes des EUKLID.

Auch im Kommentar zum 4. Satz des EUKLID finden wir bei PROKLUS die methodologischen Standorte wieder durchbrechen. Im Mittelpunkt steht hier der Begriff der Gleichheit in seiner konstituierenden Möglichkeit für die Geometrie. Daß PROKLUS diesen zentralen Begriff der Mathematik mit der *Dialektik* verbindet, ist spezifisch für die mathematische Denkweise des Griechentums überhaupt (s. Nr. 3). Es heißt dann bei ihm: „Vielleicht gehen wirklich der äußeren Anordnung nach die *Probleme* den *Theoremen* voran, besonders für diejenigen, die von den im sichtbaren Bereich sich bewegenden Künsten sich erheben zur Höhe der reinen Wissenschaft. Dem inneren Werte nach aber gehen die Theoreme den Problemen voran und es scheint die *ganze Geometrie*, *soweit sie mit den zahlreichen Künsten zusammenhängt*, in ihrer Tätigkeit problematisch ausgerichtet, soweit sie aber der höchsten Wissenschaft sich nähert, in rein geistiger Betrachtung von den Problemen zu den Theoremen, von den niedrigeren zu den höchsten Seinsordnungen, von den mehr praktischen Künsten zu den reinen Geisteswissenschaften emporzuführen.“

Jetzt im Kommentar zum 5. Satz des EUKLID wieder die methodologische Fragestellung in der Einteilung der Theoreme für sich.

„Von den Theoremen sind die

- a) einen *einfach*,
- b) die anderen *zusammengesetzt*.

Einfach nenne ich jene, die in ihren Voraussetzungen und Folgerungen keine Trennung aufweisen, da sie nur ein Datum und einen Fragepunkt haben; *zusammengesetzt* hingegen diejenigen, bei denen die Voraussetzung oder die Folgerungen bei Einfachheit der Voraussetzung oder beide Faktoren sich aus mehreren zusammensetzen. Von diesen wiederum sind die einen *komplex* (gekoppelt), die anderen *inkomplex*. Zu den inkomplexen gehören jene, die, obwohl zusammengesetzter Natur, nicht in einfache Theoreme aufgelöst werden können; *komplex* aber sind jene Lehrsätze, die sich in einfache auflösen lassen. Von den *zusammengesetzten* Theoremen entfällt bei den einen, die von derselben Voraussetzung ausgehen, die Zusammensetzung auf die *Schlußfolgerung*, bei den anderen auf die Voraussetzungen, *während aus allen der gleiche Schluß gezogen wird*, bei der dritten Klasse auf die Schlußfolgerung und die Voraussetzungen. Von den *komplexen Sätzen* sind die einen *allgemein*, die anderen aber folgern *aus den Teilen das Ganze*.... Überhaupt aber haben diese Zusammensetzungen die Mathematiker nur der Kürze halber und der Analyse wegen ersonnen. Denn vieles, was nicht zusammengesetzt ist, entzieht sich der Analyse; das Zusammengesetzte allein bietet eine leichte Möglichkeit zur Zurückführung auf die Prinzipien.“

Man sieht wieder den vollständigen Parallelismus des Aufbaues des PROKLUS mit den Einteilungsgründen, die er im Kommentar zum 1. Satz ent-

wickelt hat. Dies kommt auch noch in der folgenden Stelle zum Ausdruck, wo er weiteres über das, was er oben „*Einwand*“ nannte, ausführt: „Von einem geschulten Vertreter der Wissenschaft darf man erwarten, daß er Möglichkeiten vorsieht zur Entkräftung von Einwänden, die dem, was dargelegt werden soll, widerstreiten und Mittel und Wege der Zurückweisung bereithält, damit nicht nur der Beweis des Wahren vermittels des bereits Bewiesenen, sondern auch die Widerlegung des Irrtums durch jene erfolge.“

Der 6. Satz des EUKLID gibt in seiner Kommentierung PROKLUS Gelegenheit, auf das schon wiederholt genannte *Beweisverfahren der Deductio ad absurdum* und auf den Begriff der „*Umkehrung*“ näher einzugehen. Es heißt dort: „Dieser Lehrsatz läßt zum ersten Mal an den Theoremen die folgenden zwei Dinge in Erscheinung treten:

- a) die *Umkehrung* und
- b) die Hinausführung auf etwas Unmögliches (*Deductio ad absurdum*).

Man spricht also im Kreise der Mathematiker von „*Umkehrung*“ einmal vorzugsweise und im eigentlichen Sinne, wenn die Lehrsätze die Schlußfolgerungen und Voraussetzungen miteinander vertauschen und somit die Folgerung des vorausgehenden Satzes zur Voraussetzung im folgenden gemacht, die Voraussetzung aber als Schlußfolgerung gezogen wird. Von den Umkehrungssätzen selbst aber ist man gewohnt, die einen als *Leitsätze*, die anderen als die *Umkehrungen* zu bezeichnen. Denn wenn man irgendeine Gattung zugrundelegt und das ihr eigene Akzidens beweist, so sprechen wir von einem *Leitsatz*; wenn man aber das Akzidens zur Grundlage macht, zur Schlußfolgerung hingegen die Gattung, der das Akzidens zukommt, so nennt man das die *Umkehrung*.

Die Zurückführungen auf etwas Unmögliches (*Deductio ad absurdum*) laufen alle auf eine evidente Unmöglichkeit hinaus, deren Gegenteil allgemein anerkannt ist. Es kann aber sein, daß die einen hinauslaufen auf *Widersprüche mit den Axiomen*, den *Postulaten* oder den *Definitionen*, die anderen auf *Widersprüche mit bereits bewiesenen Sätzen*. Es nimmt aber jede Zurückführung auf eine Unmöglichkeit das Gegenteil der Thesis an und schreitet von dieser Voraussetzung aus voran, bis sie bei einem anerkannten Widersinn anlangt, dadurch die Voraussetzung aufhebt und die ursprüngliche Thesis erhärtet.

Man muß nämlich ganz allgemein wissen, daß *alle mathematischen Beweise entweder von den Prinzipien ausgehen oder zu ihnen hinstreben*, wie irgendwo PORPHYRIOS sagt. Die von den Prinzipien ausgehenden sind wieder zweifacher Art:

- a) entweder gehen sie von den Axiomen und der in ihnen selbst liegenden Evidenz allein aus, oder
- b) von den früheren Beweisen.“

Sie können dann noch so charakterisiert werden: „Die zu den Prinzipien zurückführenden aber bejahen diese entweder oder heben sie auf. Die die Prinzipien bejahenden heißen *Analysen* und ihnen sind die *Synthesen* entgegengesetzt. Man kann nämlich von diesen Prinzipien aus in Ordnung bis zum Fragepunkt voranschreiten und das ist *Synthese*. Die die Prinzipien aber aufheben, werden *Zurückführungen auf etwas Unmögliches* genannt. Denn allgemein gültige und evidente Sätze in irgendeinem Punkte umzustoßen, ist Auf-

gabe dieses Verfahrens. Auch hierbei findet eine Art *Schlußverfahren* statt, aber nicht dasselbe wie bei der Analyse. Denn bei den Zurückführungen auf eine Unmöglichkeit ist die Verflochtenheit der Sätze gemäß der zweiten Art der *hypothetischen Schlüsse* gegeben.“

Im Anschluß an den 7. Lehrsatz folgt nun wieder einiges zur Methodologie Wesentliche, das sich auf die Formulierungen in *affirmativer* oder *negativer* Weise bezieht und mit dem Vorhergehenden in unmittelbarem Zusammenhang steht. „Zumeist lauten die Sätze der geometrischen und arithmetischen Theoreme affirmativ. Der Grund hierfür liegt nach ARISTOTELES darin, daß die *Form genereller* Bejahung für die Wissenschaften sich besonders eignet, da sie für sich genügt und keinerlei verneinender Ergänzung bedarf, während die *Form genereller Verneinung* auch der Bejahung bedarf, wenn ein Beweis zustande kommen soll. *Denn ohne Bejahung gibt es keinen Beweis und keine Schlußfolgerung*; deshalb haben bei den beweisenden Wissenschaften die meisten Beweise die bejahende Form und nur selten finden in ihnen verneinende Schlußfolgerungen Anwendung.“ (S. im Schlußteil dieser Einleitung die Darlegungen von CUSANUS über die logische Form genereller Verneinung.) Einige nicht unwichtige Bemerkungen über die „*Umkehrungen*“ und über die *Deductio ad absurdum* werden noch im Kommentar zur 8. EUKLIDISCHEN Proposition nachgetragen. Schließlich enthält der Kommentar zu dem der 15. EUKLIDISCHEN Proposition angefügten *Porisma* nochmals eine ausführliche Erklärung dieser Art von Sätzen, die hier folgen soll: „Einer der geometrischen Termini ist *Porisma*. Man nennt nämlich Porismen Lehrsätze, die bei Beweisen anderer Sätze mit abfallen (s. oben), sozusagen Hermesgaben und Gewinne der Forschenden, dann (aber auch) Sätze, die zwar unter Beweis stehen, aber ein *Finden* verlangen, weder eine bloße Konstruktion, noch eine einfache Untersuchung... Es ist also das *Porisma* ein Lehrsatz, der mühelos durch den Beweis eines anderen Problems oder Theorems klargestellt wird. Denn wie durch Zufall stoßen wir anscheinend auf Porismen. Sie treten uns entgegen ohne unsere Zielsetzung und ohne unser Suchen, weshalb wir sie auch den Gaben des Hermes verglichen haben. Und vielleicht haben die bedeutenden Mathematiker sie hiernach benannt um der Masse, die wie verzaubert den sich zeigenden Schatz anstarrt, anzudeuten, daß eben das die wahren Gaben des Gottes und die Glücksfunde sind, aber nicht, was sie sich darunter vorstellt. Denn diese Gaben erzeugt der uns verliehene Reichtum, und die fruchtbare Kraft der Wissenschaft fügt sie zu den Hauptsätzen der Forschung hinzu, um den unerschöpflichen Reichtum an Lehrsätzen zu enthüllen. — Die Eigenart der Porismen ist also in diesem Sinne zu bestimmen. *Einzuteilen* aber sind sie fürs erste *nach den Wissenschaften*; die einen Porismen sind nämlich *geometrischer*, die anderen *arithmetischer* Art. Die zweite (Art der Einteilung der Porismen) ist bestimmt durch die vorangehenden *Aufgaben*, denn die einen folgen auf Probleme, die anderen auf Theoreme. Die dritte Einteilung ist gegeben durch die *Beweise*. Die einen werden nämlich auf dem Wege des *direkten Beweisverfahrens*, die anderen durch Zurückführung auf etwas Unmögliches (*indirektes Beweisverfahren*) mitbewiesen. Auch auf vielfache andere Weise kann man noch die Porismen einteilen.“

Nach einigen weiteren Bemerkungen über *ortsbestimmende* oder *topische* Theoreme im Anschluß an die 35. EUKLIDISCHE Proposition, folgt dann nochmals

eine ausführliche *Einteilung der Umkehrungen* (s. oben) im Kommentar zur 39. EUKLIDischen Proposition. Dort heißt es bei PROKLUS: „Eine Bemerkung ist noch am Platze. Dreierlei *Arten der Umkehrungen von Lehrsätzen* gibt es:

- a) Entweder des Ganzen mit dem Ganzen,
- b) oder des Ganzen mit dem Teil,
- c) oder eines Teils mit einem Teile.

Denn nicht das ganze Datum im einen Satz ist Thesis im anderen und nicht die ganze Thesis ist Datum, sondern nur ein Teil.“

Damit ist im wesentlichen die Methodologie der Mathematik, wie sie PROKLUS bietet, abgeschlossen. Es ist ein stattliches Gebäude, das er aufgerichtet hat, und das ihm für seinen ganzen Aufbau die Leitlinien an die Hand gibt. Auf Grund dieser strengen Einteilungen tastet er sich an die einzelnen Lehrsätze des EUKLID heran, spaltet sie gleichsam methodologisch auf, um von ihnen aus dann die *Begründung innerer Art* für den EUKLIDischen Aufbau überhaupt zu erhalten. Dies hat auch deutlich NIKOLAI HARTMANN gesehen, wenn er in seiner Schrift (s. Anm. 2 oben) die „*mathematischen Methoden*“ in einem besonderen Kapitel (S. 35—57) abhandelt, aus dem wir einige markante Stellen, auf die es dabei wesentlich ankommt, zum Schluß noch herausheben wollen: „Diese Systematisierung (des PROKLUS) war nicht äußerlicher Natur, nicht (bloße) Klassifikation“ (S. 2). Denn *die Mathematik* „ist selbst ein *methodisch zusammenhängendes Ganzes* und muß, wie sie über alle ihre Leistungen sich die Rechenschaft des Nachweises erbringt, *auch ihren eigenen Prinzipien die Sicherheit der Rechenschaft zuteil werden lassen*... Wenn aber *die Mathematik* ein solches *selbst konstituierendes Verhältnis zu ihren eigenen Prinzipien* hat, so kann das nichts anderes heißen, als daß sie eine *Methode besitzt*, welche, *von ihren spezielleren Leistungen ausgehend, rückwärts schließt und so die aufwärts gehende Hinführung zu den Prinzipien bewerkstelligt*.“ Wir bringen daher auch erst im folgenden Abschnitt diese seinsgründenden Prinzipien, wie sie PLATON aufgestellt und PROKLUS verarbeitet hat und wie sie hauptsächlich über CUSANUS in den deutschen Geistraum einströmen. „Wenn aber einmal neben der *absteigenden* auch die *aufsteigende Methode* Geltung haben soll, so ist es nicht zu umgehen, daß diese letztere ihr gleichwertig dastehen und gleichsam ihr *methodisches Korrelat* bilden muß... Sie müssen beide einander durchdringen, d. h. sie müssen beide *das ganze Gebiet des mathematischen Inhalts* umspannen und durchziehen.... In dieser doppelten Methodik nun hat PROKLUS das Mittel in der Hand, der Mathematik den beiderseitigen Zusammenhang, den mit der *Noesis* und den mit der *Aisthesis*, zu wahren... Die reine Noesis hat es nur mit dem ewigen Urbegrifflichen zu tun, aus deren Identität sie selbst den Charakter der Moné gewinnt. Die Aisthesis ist das Gegenstück hierzu. *Das Mathematische in ihrer Mitte ist auch in dieser Hinsicht ein echtes „Mittleres“*.... Denn ist das Mathematische in seiner Prägnanz einmal gewonnen, so kann es sehr wohl immanent in sich selbst operieren.... *Aber gerade die Gewinnung seines Problems ist nicht ohne den Anlaß des Sinnlich-Dinglichen zu vollziehen*. Das ist systematisch so wahr wie historisch. Hat doch gerade die ältere Mathematik der Pythagoreer die Zahl und das Raumgebilde *nicht rein begrifflich*, sondern

in eins mit den Naturerscheinungen gedacht, zu deren Bestimmung sie sie erdachte.“ (S. 40.)

Von dieser Position aus sind auch die methodischen Leistungen der großen Deutschen zu werten, wie wir in der allgemeinen Einführung bereits ausgeführt haben und im Schlußteil der Einleitung nochmals belegen wollen.

3. Die seinsgründenden Prinzipien der griechischen Mathematik

„Soll man nun aber auch die erste Ursache anführen, durch die die Kreisfigur in Erscheinung trat und ihre Seinsvollendung erhielt, so möchte ich die *höchste Ordnung des Intelligiblen* namhaft machen. Denn der Mittelpunkt gleicht dem Prinzip der *Grenze* (Peras); die von diesem ausgehenden Linien aber, die, soweit es auf sie ankommt, der Zahl und der Größe nach unbegrenzt sind, geben ein Bild des *Unbegrenzten* (Apeiron). Die (Kreis-)Linie aber, die die unbegrenzte Ausdehnung der Radien begrenzt und sie wieder zum Zentrum zurückführt, gleicht dem aus dem Intelligiblen gebildeten unsichtbaren *Kosmos*, der durch das *Peras* und das *Apeiron* errichtet wird ...“

PROKLUS in seinem Kommentar
zur 15. und 16. Definition des EUKLID.

28. Aus den ontologischen und erkenntnistheoretischen, sowie aus den methodologischen Untergründen griechischer Denkungsart und griechischer Ideenschau wächst dann bei PROKLUS organisch das Lehrstück heraus, das sich mit den seinsgründenden Prinzipien der Mathematik befaßt. Für die Entstehung der *Mannigfaltigkeit des Mathematischen*, der Gebilde des Raumes sowohl, als auch derjenigen der Zahl, muß es Prinzipien geben, die das Einzelsein dieser Sinngebilde in ihrer vielgestaltigen Unterschiedlichkeit als aus letzten inneren Gründen „vermitteln“. Alle Mannigfaltigkeit der geometrischen Formen und Gestalten und alle Mannigfaltigkeit der arithmetischen Zusammenhänglichkeiten müssen ihre Wurzeln in übergreifenden Trägern und in zugrunde liegenden Urelementen des Denkens sowohl, als auch der Anschauung haben. Diese übergreifenden, das Ganze als Ganzes und von ihm ausgehend, seine Teile als Sinnträger und Bedeutungselemente des Ganzen erfassenden Seins- und Sinnprinzipien ermöglichen im Verein mit der Methodologie nicht nur die strenge Systematik des Aufbaues griechischer Mathematik, insbesondere griechischer Geometrie, sondern gewährleisten auch die immer-

während und immermögliche Zurückführung der Gegebenheiten auf letzte Elemente eines höchsten Gegenstandsbereichs und seiner dinglichen Ordnung. Sie umfassen auch das logische Ableitungsschema, demzufolge alle Mannigfaltigkeit des Mathematischen aus höheren Einheiten seine innere Rechtfertigung als generelle Gesetzmäßigkeit erfährt. Diese übergreifenden Prinzipien sind gleichsam die Rechtsgründe für den Gesetzesanspruch des Geistes als seinem eigentlichen Innen-Element sowohl, wie für die Gesetzeserfüllung in der Natur als seiner postulativen Funktion, die auf das Außen geht. In ihnen liegen die *Brennpunkte des Geistes* überhaupt vor und offen, die alle Mannigfaltigkeit in sich vereinigen und von denen auch alle Mannigfaltigkeit ausgeht. So formuliert, erscheinen diese Prinzipien als die Gewährsträger eines einheitlichen und eines ganzheitlichen Bewußtseins des Geistes überhaupt, der nicht nur nach dem Gesetz und nach seiner Form fragt, sondern auch auf seine innere Begründung ausgeht und hinzielt. Die Frage und ihr Ziel sind in gleicher Weise in diesen Prinzipien umschlossen und daher gehen alle Gebilde der Geometrie als der Lehre vom Raum oder von den Räumen und alle Gestalten der Arithmetik als der Lehre von der Zahl oder von den Mannigfaltigkeiten im mathematischen Sinne von diesen Prinzipien aus und münden letztlich auch wieder alle in sie ein.

Damit hat das Griechentum in einmaliger, später nie mehr erreichter Geschlossenheit einen Standort des Geistes entdeckt und bezogen, der die Sicht nach oben und nach unten, nach der Höhe und Weite des Geistes und nach seiner Tiefe freigibt und es erlaubt, von ihm aus generelle Übersicht auf das Einzelne sowohl, wie auch auf das Mannigfaltige zu halten.

In Begriffs- und Anschauungsreihen einer Urgegensätzlichkeit, wie wir es schon in der allgemeinen Einführung von CUSANUS aus aufgerissen haben, schreitet der menschliche Geist voran und in sich zurück, um alle mathematischen Gebilde als *entstehend* zu denken und anzuschauen. Dabei hat eine generelle Methexis statt. Diese Teilhabe erstreckt sich unterschiedslos auf alles mathematische Sein schlechthin und verleiht aller Gegenständlichkeit im Ideellen eines Übergegenständlichen sowohl, wie im Realen eines phänomenologischen Bewußtseins die Partizipation an höchsten und übergreifendsten *Ordnungen des Geistigen* überhaupt. In der Urgegensätzlichkeit dieser übergreifenden Prinzipien koinzidiert die höchste Einheit alles Mathematischen als mathematisches Sein schlechthin. *Peras* und

Apeiron, die Grenze und das Unbegrenzte, sind die Namen dieser höchsten übergreifenden Ordnungen des Geistigen. Was in ihnen begriffen und angeschaut wird, was sich in ihnen sinnvoll und bedeutsam verdichtet, ist die Genesis allen Seins überhaupt. Aus ihnen strömen der Mathematik ihre exakten Begriffsbildungen sowohl, wie ihre strengen Anschauungsbilder als Modelle zu; aus ihnen folgt regulativ die Ordnung der mathematischen Methoden; aus ihnen fließt der gesamte systematische Aufbau der Ideenwelt des Mathematischen als *Kosmos des Intelligiblen*, der von höchster Harmonie durchwirkt ist, überhaupt. „Hier erkennt man in PROKLUS den Pythagoreer im besten Sinne des Wortes“ (N. HARTMANN). PROKLUS folgt in der Wertschätzung der Bedeutung des Begriffspaars *Peras-Apeiron* dem PLATONISCHEN „*Philebos*“. Durch ihn sind *Peras* und *Apeiron* zu systembildenden Faktoren jenes Weltbildes geworden, das in PLATONS Altersschriften erstmals vorgetragen wurde und von dem dann alle Späteren abhingen.

Bevor wir aber dieses fundamentale Lehrstück von *Peras* und *Apeiron* an Hand der Originalstellen aus dem PROKLEISCHEN Werk darstellen, ist noch ein kurzes Wort über diese übergreifenden Prinzipien als *konstituierende* Kräfte der Mathematik zu sagen. Mit ihnen hängen unmittelbar die Ideen der *Gleichheit*, der *Symmetrie*, der *Ordnung*, der *Harmonie* zusammen. Gerade sie aber wirken sich in allen Bereichen des Mathematischen als die großen Uranfänglichkeiten aus und ermöglichen einen systematischen Aufbau, der in jedem einzelnen Teile an den Prinzipien partizipiert. Die *Ganzheitlichkeit der Gestalt* dieses Aufbaues aber empfängt Maß und Ziel, Klarheit und Begründung — „Gesetz“ — durch die Prinzipien. Es liegt hier nicht eine Stufung im Sinne des mittelalterlichen Stufenkosmos vor; keine Auffassung dieser Prinzipien wäre abwegiger. Sondern es ist ein Zusammen und eine Gesamtschau im Sinne der Harmonie der Pythagoreer und ihres Gedankens des Kosmos, die hier zutage treten. Gerade hierdurch aber und in diesen Momenten strahlt diese geschlossene und ästhetisch so befriedigende, wie logisch umfassende und metaphysisch zurückwirkende Lehre in den deutschen Geistraum ein und verdichtet sich dort bei CUSANUS, KOPERNIKUS, KEPLER, LEIBNIZ, LAMBERT und KANT, hinaufwirkend bis zu GAUSS und RIEMANN, zu systematischen Erneuerungen des *Harmonieprinzips* als der hervortretendsten Geistgestalt der (allgemeingeistigen) *Symmetrie* überhaupt. Dieser weiten Horizonte und Perspektiven vor allen Dingen auf die deutsche Geistesgeschichte und die abendländischen Wissenschaften

und Künste eingedenk, die von diesen übergreifenden Prinzipien eröffnet werden, wollen wir jetzt an die Darstellung dieses Lehrstückes, wie es im Werke des PROKLUS niedergelegt und „aufgehoben“ ist, gehen und seine Entwicklungen mit denen der allgemeinen Einführung, wie ich sie von CUSANUS aus geboten hatte, zusammenhalten.

29. Schon bei EUKLID heißt es in der 13. Definition des 1. Buches der „Elemente“ wörtlich: „*Grenze ist das, worin etwas endigt*“⁶⁰). Und bei PROKLUS ist dies nun im 1. Teil der Vorrede seines Werkes ins Allgemeine und Generelle gesehen und so verarbeitet: „Da wir nun aber die Prinzipien des *gesamten Bereichs* des mathematischen Seins erforschen, so steigen wir unmittelbar (auf *dialektische* Weise) *hinauf* zu den Prinzipien, die den ganzen Seinsbereich durchwalten und *alle Dinge aus sich erzeugen*, ich meine nämlich die *Grenze (Peras)* und das *Unbegrenzte (Apeiron)*.“

Denn von diesen, den beiden ersten Prinzipien nach der unergründbaren und allen unfaßbaren Wirkursache des Einen, gewann alles andere Bestand und auch das *mathematische Sein*, indem diese *alles zusammen* (Mannigfaltigkeit) und *gesondert* (Einzelsein) hervorbrachten, das Hervorgehende aber in dem entsprechenden *Maße* und der gebührenden *Ordnung* seinen Ausgang empfing und teils als höchste (*Ideen*), teils als mittlere (*mathematische Gebilde*), teils als niedrigste Wesenheiten (*Sinnendinge*) sein Dasein erhielt. Denn die intelligiblen Seinsgattungen haben gemäß ihrer Einfachheit vor allem Anteil (*Methexis*) an der *Grenze* und dem *Unbegrenzten*: Vermöge ihrer *Einheit* und *Identität*, ihrem *dauernden* und *steten Bestand* sind sie erfüllt von der *Grenze* . . .; vermöge der *Verteilung* aber auf eine große Menge, der *Andersheit* und des *Prozesses des Entstehens* unterstehen sie auch der *Wirkung* des *Unbegrenzten* . . .

Denn die *Zahl*, mit der *Einheit* beginnend, *hat die Möglichkeit, sich ins Ungemessene zu mehren*, aber immer ist die *genommene* (gewählte) *begrenzt*; und ebenso geht die *Teilung der Raumgebilde* (-größen) *ins Unendliche*. Aber die *geteilten Größen sind alle begrenzt* und in *Wirklichkeit sind die Teile jedes Ganzen begrenzt*. Gäbe es (aber) das *Unbegrenzte nicht*, dann wären alle Größen *kommensurabel* und es gäbe keinen . . . *irrationalen* (Maßzahlen-) *Wert*. Denn diese Begriffe bedingen einen Unterschied in der Geometrie und Arithmetik . . .“

⁶⁰ Siehe THAER a. a. O.

Es ist dies für die Existenz dieser Gestaltprinzipien, die sich als begriffliche und gestaltliche „*Korrelate*“ direkt fordern, ganz genau dieselbe Begründung des *infinitesimalen griechischen Bewußtseins*, das hier bei PROKLUS sichtbar wird, die der erste Begründer dieser Gedankenreihe, ANAXAGORAS, ebenfalls gibt. In einem seiner „*Fragmente*“, die auf uns gekommen sind, heißt es nämlich: „Im Kleinen gibt es kein Kleinstes, sondern es gibt immer noch ein Kleineres. Denn was ist, kann durch keine noch so weit getriebene Teilung je aufhören zu sein. Aber auch im Großen gibt es noch immer etwas, was größer ist“⁶¹). Diese Gedankenreihe wird dann für das Mathematische von den, dem Kreis der PLATONischen Akademie angehörenden Mathematikern THEÄTET und EUDOXUS fortgesetzt und gipfelt bei diesen Griechen in einer regelrechten *Theorie des reellen Kontinuums* schon im Altertum, die wir hauptsächlich im 10. Buch der EUKLIDischen „*Elemente*“ niedergelegt finden, und die ihre besondere Ausgestaltung im Sinne dieser Gestaltprinzipien bei ARCHIMED in der *Exhaustionsmethode* erfährt und besonders in den deutschen Geistraum zu CUSANUS und seinem Prinzip der „*Coincidentia oppositorum*“ hinaufreicht, dann bei KEPLER in seiner „*Astronomia Nova*“ als „*Integration*“ wieder durchbricht und schließlich bei LEIBNIZ ihre bleibende Form und ihren krönenden Abschluß in der Entdeckung der *Infinitesimalrechnung* findet.

PROKLUS fährt fort: „*Würde aber die Grenze aufgehoben, dann würde man in der Mathematik nichts gewahren von Kommensurabilität, Gemeinsamkeit der Verhältnisse, Identität der Seinsformen, von Gleichheit und von dem, was sonst zur besseren Ordnung gehört; auch gäbe es kein Wissen um diese Dinge, noch unveränderliche (eindeutige) und exakte Begriffe.*“

Auf diesen Standort, der rein PLATONisches Gut ist, wollen wir nachher nochmals kurz im Zusammenhang der apriorischen Elemente der EUKLIDischen „*Elemente*“ eingehen. Die *Idee der Gleichheit* erscheint also auch hier wieder bei PROKLUS als *Symmetriegestalt des Mathematischen* und ist in ihren Funktionalgesetzen, die wir schon an anderer Stelle ausführlich dargelegt haben⁶²), als *Symmetrieprinzip*, das wir aus der Anschauung heraus einfach haben, auch für das Begriffliche der Mathematik und aller ihrer Gebiete unentbehrlich.

⁶¹) Text und Übersetzung bei E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle (S.) 1923, S. 46 ff.

⁶²) Siehe M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942.

Die „Grenze“ (Peras) in diesem prinzipienhaften, gestaltungsmäßigen und apriorischen Sinne ist bei EUKLID für das Geometrische im 1. Buch der „Elemente“ in der 14. Definition⁶³⁾ so gefaßt: „*Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.*“ Und fast die gleiche Formulierung treffen wir schon im PLATONISCHEN „Menon“ an, wo es heißt:

„MENON: Das soll, nach deiner Erklärung, eine *Figur* sein . . .

SOKRATES: Sage mir denn: du nennst etwas ein ‚*Ende*‘? Ich denke dabei an etwas wie eine *Grenze* und ein *Letztes*. Unter alledem verstehe ich dasselbe . . .

.....
SOKRATES: ‚*Fläche*‘ nennst du etwas und etwas anderes wieder ‚*Körper*‘, wie das, womit man in der *Geometrie* operiert?

.....
SOKRATES: Schon jetzt könntest du mich wirklich verstehen, aus diesen Angaben, was ich eine *Figur* nenne . . . Denn von jeder *Figur* behaupte ich das: *soweit etwas das Körperliche begrenzt, ist es eine Figur!* Oder zusammenfassend gesagt: *Grenze des Körperlichen ist die Figur.*“

Und weiter kommt dieser Sinn noch oft bei EUKLID in den folgenden Büchern der „Elemente“ heraus: z. B. im 11. Buch als 2. Definition: „*Eine Begrenzung eines Körpers ist eine Fläche.*“

Die geometrische Figur als Typus der Mathematik repräsentiert das griechische Gestaltprinzip *Peras*. — Das „Unbegrenzte“, *Apeiron*, faßt EUKLID genetisch im Anschluß an EUDOXUS in der 4. Definition des V. Buches der „Elemente“ in den Worten: „*Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von (gleichartigen) Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.*“

Dieses, heute als „*Axiom des EUDOXUS*“ oder als „*Axiom des Messens*“, fälschlich auch immer wieder als „*ARCHIMEDISCHES Axiom*“ bezeichnete *Stetigkeitsaxiom der Geometrie*, das auch heute noch ganz in dieser Form in der Mathematik Verwendung findet, wird erst voll auf verständlich — auch im Rahmen der Entwicklungen und Darlegungen des PROKLUS —, wenn man noch die ihm bei EUKLID als 1.—3. Definition des V. Buches der „Elemente“ vorstehenden Definitionen hinzunimmt, die so lauten:

⁶³⁾ S. bei THAER a. a. O.

„1. *Teil einer Größe ist eine Größe, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt.*“

Damit ist die *Kommensurabilität* geometrischer Größen unter Zugrundelegung einer allgemeinen (Maß-) Einheit gefaßt, an der Grenze verankert dadurch, daß hier die Existenz einer Maßeinheit zum Zwecke und Sinn des Messens — und damit aller *Metrik in der Mathematik* — überhaupt definitiv festgelegt wird.

„2. *Und Vielfaches die größere von der kleineren, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird.*“

Und endlich:

„3. *Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.*“

Damit ist durch die obige Formulierung des Axioms des EUDOXUS im Sinne der Griechen und des PROKLUS auch Apeiron, das Unbegrenzte, als Typus der Mathematik repräsentiert durch den *Fortgang in einer Anschauungs- und Begriffsreihe von „gleichartigen Größen“* (Strecken oder dergl.), wie Peras durch Figur repräsentiert war. Und diese Repräsentation ist ebenfalls gestalthaft. Man sieht dabei klar die methodischen Positionen der CUSANUS und LEIBNIZ bereits hier im Griechentum im vollen Umfange aufleuchten.

Als Abschluß dieser hochwichtigen und für das Griechentum sowohl, wie für PROKLUS zentral stehenden Gedankenreihe, die sich um Peras und Apeiron gruppiert und den *eigentlichen Kern der Prokleischen Gestaltlehre der Mathematik* ausmacht, heißt es dann noch im 1. Teil der Vorrede weiter: „Es kann also die Mathematik ebenso wenig wie die anderen Seinsgattungen die beiden Prinzipien entbehren. — *Es ist also klar, daß die Mathematik denselben Prinzipien untersteht, wie alles andere Sein . . .*“

Und dann folgt die dialektische Verbindung dieser Urprinzipien mit der Methodenlehre ebenfalls noch im 1. Teil der Vorrede, wo es dann heißt: „Die Mathematik hat aber zwei Methoden: die eine läßt den ganzen Reichtum der Prinzipien sich entfalten und führt so zu den mannigfachen Wegen der wissenschaftlichen Theorie; die andere führt die vielen Ableitungen wieder zurück auf die eigenen Voraussetzungen.“ Ganz in diesem Sinne ist das für die Mathematik Wesentliche dieser Methoden zu Beginn des 13. Buches der „Elemente“ bei EUKLID gefaßt in den folgenden Formulierungen:

„Was ist eine *Analysis* und was eine *Synthesis*?

Eine *Analysis* ist die Zugrundelegung des Gefragten als anerkannt um seiner auf anerkannt Wahres führenden Folgerungen willen.

Eine *Synthesis* ist die Zugrundelegung des Anerkannten um seiner auf Vollendung oder Ergreifung des Gefragten führenden Folgerungen willen.“

Die Verbindung der Urprinzipien *Peras* und *Apeiron* mit dieser methodologischen Grundlegung lautet dann bei PROKLUS so: „Da die Mathematik nämlich das *Eine* und das *Viele*, die Grenze und das Unbegrenzte, als Prinzipien für sich aufstellte und ihr Erkenntnisgegenstand den mittleren Platz erhielt, so ergeben sich auch ganz entsprechend zwei Erkenntnismethoden der gesamten Wissenschaft . . .“

Und weiter nochmals eine bedeutsame Stelle aus dem 1. Teil der Vorrede im Zusammenhang mit der Einteilung der Wissenschaften, wie wir sie in Nr. 2 schon gegeben haben. Es heißt da bei PROKLUS: „Da der Geist aber bei der Erzeugung dieser Wissenschaften sich nicht bestimmen ließ von den unbegrenzten Entfaltungsmöglichkeiten seiner Ideen, sondern von dem je nach den Gattungen begrenzten Umfang, deshalb sagt man, sie hätten von Zahl und Größe die Funktion des Unbegrenzten losgelöst und befaßten sich fortan nur mehr mit dem Begrenzten. Denn der Nus legte in ihn vor allem die Prinzipien von der Zahl und von der Größe.“

Das erinnert unmittelbar an eine Stelle, die uns von ARCHYTAS von Tarent (400 v. Chr.) überliefert ist, und die so lautet: „Treffliche Einsichten scheinen mir die Mathematiker sich erworben zu haben, und es kann daher nicht auffallen, daß sie die Beschaffenheit der einzelnen Dinge richtig zu beurteilen wissen. Denn da sie sich über die Natur des Alls treffliche Einsichten erworben haben, mußten sie auch für die Beschaffenheit des Einzelnen einen trefflichen Blick gewinnen. So haben sie denn auch über die Geschwindigkeit der Gestirne und über ihren Auf- und Untergang eine klare Einsicht überliefert und über Geometrie, Arithmetik und Sphärik und nicht zumindest auch über Musik. Denn diese Wissenschaften scheinen verschwistert zu sein. Denn sie beschäftigen sich mit den beiden verschwisterten Urgestalten des Seienden (nämlich Zahl und Raumgröße).“

Und PROKLUS setzt seinen obigen Gedankengang noch so weiter fort: „Denn da der Geist ganz gleichförmig in sich ist, eine Einheit

und unteilbar, und auch wieder getrennt und die Welt der Begriffe erzeugend, hat er teil (*Methexis*) sowohl an *endlicher Begrenzung*, wie auch an *wesenhafter Unendlichkeit*, die ihm vom Intelligiblen zukommt. *Aber er denkt diese Unendlichkeit nur in Begrenzung . . .*“ Das ist die Position, die später haarscharf von CUSANUS eingenommen wird (siehe den Schlußteil dieser Einleitung) und an vielen Stellen seiner „*Docta ignorantia*“, aber etwa auch in der folgenden Stelle des „*Liber de mente*“ zum Ausdruck kommt: „Wie sich unser Geist zum unendlichen und ewigen Geist verhält, so verhält sich die Zahl unseres Geistes zu der Zahl, die aus dem göttlichen Geist hervorschreitet . . . Es kann nicht mehr als ein *unendliches Prinzip* geben, und dieses allein ist unendlich einfach; das erste Verursachte kann nun offenkundig nicht unendlich einfach sein, es kann aber auch nicht zusammengesetzt sein aus Komponenten, die von ihm verschieden sind, denn dann wäre es nicht das erste Verursachte, sondern seine Komponenten würden ihm naturgemäß vorangehen. Man muß daher zulassen, daß das erste Verursachte so zusammengesetzt ist, daß es nicht aus Anderem, sondern *aus sich selber* zusammengesetzt ist, und unser Geist kann nicht fassen, daß irgend etwas diese Beschaffenheit haben könne, es sei denn die Zahl oder etwas, *was der Zahl unseres Geistes gleicht*. Daraus, daß der göttliche Geist etwas so, anderes anders schaut, ist die Vielheit der Dinge entstanden. Hieraus findest du bei genauem Zusehen, daß die Vielheit der Dinge nichts anderes als eine Art und Weise des Anschauens des göttlichen Geistes ist. *So schließe ich, daß man unwiderleglich sagen kann, das erste Exemplar der Dinge in der Seele des Schöpfers sei die Zahl*“⁶⁴).

Apeiron ist also korrelativ im Sinne einer Denk- und Anschauungsforderung als Postulat der Erkenntnis mit *Peras* zusammengebunden zu einer Einheit, die nicht gesprengt werden kann und darf. Das Denken unseres Geistes ist finit und begrenzt; wenden wir es aber auf eine Anschauungsreihe an, so ergreifen wir im Endlichen das Unendliche, im Begrenzten das Unbegrenzte.

„Willst Du ins Unendliche schreiten,
Geh' nur im Endlichen nach allen Seiten!“

⁶⁴) Text und Übersetzung bei E. CASSIRER, Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance, Leipzig 1927.

30. Die wesentlichen weiteren Darlegungen des PROKLUS zu dem urgegensätzlichen Paar *Peras* und *Apeiron* finden sich dann in den Kommentaren zu den Definitionen des 1. Buchs der EUKLIDischen „Elemente“. Gleich zur 1., der Mathematik bisher am problematischsten erschienenen Definition des EUKLID: „*Ein Punkt ist, was keine Teile hat*“, finden sich bei PROKLUS wieder die wesentlichen seinsgründenden Positionen in folgenden Darlegungen: „Daß der Mathematiker auf dem Wege vom Zusammengesetzten zum Einfachen emporsteigt: vom dreifach Ausgedehnten zu der dieses *begrenzenden Fläche*, von der Fläche zu deren *Begrenzung*, der Linie (Kurve), von der Linie zu dem aller Ausdehnung (Begrenzung) baren Punkt, ist schon häufig gesagt worden und jedermann klar. Da aber diese *Begrenzungen* vielfach wegen ihrer Einfachheit höher zu stehen scheinen als das zusammengesetzte Sein, vielfach aber auch Akzidentien gleichen, die in dem von ihnen *Begrenzten* ihre Existenzen haben, so ist festzustellen, in welchen Seinsgattungen man beide Dinge zu suchen hat. Ich behaupte nun also, daß die immateriellen *Grenzen*, die in gesonderten Ideen und selbständig in sich beruhenden Seinsformen existieren, stets das Sein der einfacheren als ursprünglicheren den zusammengesetzten voranstellen...; *daher bestehen über den begrenzten Wesenheiten die begrenzenden, die ungeteilter, einförmiger und ursprünglicher sind*. Denn das Eine in den immateriellen Seinsformen übertrifft an Vollkommenheit das Viele und das Ungeteilte das, was allenthalben nach außen hervorgeht, und das *Begrenzende* das, was die *Begrenzung* von einem anderen empfängt.“

„Kennen etwa auch die immateriellen Seinsformen die Reihenfolge von Anfang, Mitte und Ende,... sind die einen der *Grenze*, die anderen dem *Unbegrenzten* zugeordnet? In der Tat. Wenn auch alles an diesen Prinzipien teilhat, so stammen die Wesen doch teils von dem einen und haben mehr davon abbekommen, teils von dem anderen. Der Punkt also, der im Bereich der Idee völlig unteilbar ist, hat gleichwohl, *wenn er auch von der Grenze sein Sein hat*, verborgenerweise die *unbegrenzte Kraft in sich*, derzufolge er alle Ausdehnungen erzeugt; und der Ausgang aller Ausdehnungen erschöpft nicht seine unbegrenzte Fähigkeit..., aber der Körper und die Idee des Körpers haben an dem *unbegrenzten Sein* in höherem Maße Anteil... Was aber zwischen dem Punkt und dem Körper liegt, gehört *je nach dem Abstand von den Extremen*, entweder in den Bereich dessen, was überwiegend an der *Grenze* Anteil hat oder an der *Unbegrenztheit* partizipiert. Deshalb begrenzt es und wird begrenzt. Soweit es sein Sein empfängt von der *Grenze*, kann es wieder anderes begrenzen; soweit es aber an dem *Unbegrenzten* teilhat, bedarf es der Begrenzung von fremder Seite....“

Dann die diese Darlegungen direkt weiterführenden zur 3. EUKLIDischen Definition: „*Die Grenzen der Linie sind Punkte*.“ PROKLUS führt dazu aus: „Die Linie ist also *zugleich unendlich und begrenzt*: unendlich vermöge ihres eigenen Ausgangs, begrenzt vermöge der Teilhabe an dem begrenzenden Prinzip.... Deshalb sagt man auch, daß in den Abbildern die Punkte, die *Ende* und *Anfang* der Linie einnehmen, sie begrenzen. Dort also ist die *Grenze* vom Begrenzten gesondert; hier aber ist sie zweifach: denn sie existiert in dem Begrenzten selbst. Und das erbringt wohl einen vortrefflichen Beweis dafür, daß die *Ideen*, solange sie in sich bleiben, vermöge ihrer Ursächlichkeit den Vorrang haben vor den

teilhabenden Dingen, wenn sie sich aber jenen hingeben, eine Seinsweise annehmen, die deren Beschaffenheit entspricht...“

Jetzt zur 4. EUKLIDischen Definition der Geraden, die bislang für die Mathematik auch immer sehr problematisch war, weil man den generellen Zusammenhang mit den seinsgründenden Prinzipien nicht mehr beachtet hat.

„Nach PLATON existieren nach dem Einen drei Wesenheiten: Die *Grenze*, das *Unbegrenzte* und das *Gemischte*. Diesen Prinzipien verdanken die Arten der Linien, der Winkel und der Figuren ihr Sein.“ Und jetzt erfolgt, anschließend an PLATON, bei PROKLUS die eigentliche Konkretisierung der Prinzipien des *Peras* und des *Apeiron* in folgenden Formulierungen: „Es scheint aber die Kreislinie der *Grenze* zugeordnet zu sein und zu den anderen Kurven im selben Verhältnis zu stehen, wie die *Grenze* zu allem Seienden.... Die Gerade aber fällt unter die *Unbegrenztheit*: denn wenn sie auch ins Unendliche verlängert wird, hört sie doch nicht auf. *Und wie von der Grenze und dem Unbegrenzten alles andere ausgeht*, so von der Kreislinie und der Geraden jede Mischgattung der Linien.... *Deshalb hat auch die Seele das Gerade und das Runde a priori ihrem Wesen nach in sich*....“

Auch zur 6. Definition EUKLIDS: „*Die Grenzen der Fläche sind Linien*“ führt PROKLUS noch einiges in diesen Zusammenhang Gehörige aus, nämlich: „Denn die Seele *begrenzt* und vollendet die Tätigkeit der Natur und diese die Bewegung der Körper...“

31. Ganz zentral aber wird die Wirkung dieser Prinzipien und ihre Stellung bei PROKLUS im Zusammenhang mit seiner Seinslehre im Kommentar zur 14. Definition des EUKLID, der der Figur (s. oben), wo es jetzt bei PROKLUS heißt: „So setzt also die Figur oben bei den Göttern selbst ein und erstreckt sich bis auf die letzten Wesen und wird auch in ihnen von den *ersten Ursachen* her sichtbar. Denn vor dem Unvollkommenen muß das Vollkommene bestehen, vor dem, was in anderen existiert, das, *was seinen Grund in sich selbst hat*“ — *causa sui* ist — „vor dem, was voll ist von Mängeln seiner selbst, das, was das eigene Sein unverfälscht bewahrt.“ Und nun die gewichtige Stelle gegen ARISTOTELES: „Weder sind also die immateriellen Formen existenzlos und nur die materiellen allein existieren, wie einige behaupten, noch auch existieren sie zwar, wie andere meinen, außer dem Bereich der Materie, haben aber nur ein gedachtes Sein durch *Abstraktion*. Denn wie kann die *Vollendung*, die *Schönheit und Ordnung der Figuren* bei der Annahme einer bloßen Abstraktion aufrecht erhalten werden? Denn von der gleichen Beschaffenheit wie die Sinnendinge, muß ihnen vielfach die unabdingbare und reine Vollendung fehlen. Nehmen sie aber die Eigenschaften der *Genauigkeit, Ordnung und Vollendung* an, woher gewinnen sie dann diese? Doch nur entweder von den Sinnendingen — aber in ihnen finden sie sich nicht — oder von den intelligiblen Wesen — aber in diesen sind sie vollkommener. *Denn sie aus dem Nichts abzuleiten, ist schon das Undenkbarste von allem*... Es existieren also vor den Sinnesfiguren die... Ideen der Figuren und wir empfangen zwar die Anregung von den Sinnendingen, erzeugen aber die Begriffe in uns, die Bilder von anderen Dingen, *und mit deren Hilfe erkennen wir die Sinnenwelt in ihren Urbildern*, das Intellektuelle und Göttliche aber in seinen *Abbildern*.“ Diese Argumentation ist klassisch und widerlegt von vorneherein alle modernen positivistischen, formalistischen und logistischen An-

sätze der Mathematik. Die Frage des Mathematischen ist in erster Hinsicht eine Frage der Geltung und damit eine Frage der wissenschaftlichen Wahrheit überhaupt. Also muß auf ein *Kriterium* ausgegangen werden, das es erlaubt zu entscheiden, wann eine Aussage wahr, d. h. wann sie auf die letzten seinsgründenden Prinzipien zurückführbar ist, und wann nicht. *Warum ist Wahrheit nur durch Ideen möglich?* Auf diese Frage hat PROKLUS hier mit PLATON die Antwort gegeben und alle nachfolgende *idealistische Philosophie und Mathematik* gibt sie im Grunde und in den letzten Bezügen ebenso (s. Teil 5 dieser Einleitung). Dies ist also ein Kernpunkt, den wir endlich auch in der Mathematik und ihrem ersten Ansatz zum Durchbruch bringen sollten. Formalismen und Logismen führen nur in Verflachungen des Geistes hinein und sind niemals geeignet und imstande, eine so wohlgeordnete Mannigfaltigkeit der Seinswelt, wie sie die Mathematik in ihren Gebilden darstellt, geltungsmäßig zu fundamentieren.

PROKLUS fährt fort: „Wie nun die Natur nach der schöpferischen Seite hin den Sinnesfiguren vorangeht, so projiziert die Seele durch die Tätigkeit ihrer Erkenntniskraft in die Phantasie wie in einen Spiegel die *Ideen der Figuren*; diese aber nimmt sie in Bildern auf und, da sie nun Vorstellungen der inneren Formen hat, so verleiht sie mit deren Hilfe der Seele die Wendung nach Innen und die von den Bildern zu sich selbst zurückkehrende Tätigkeit, ganz so, wie wenn einer sich in einem Spiegel sähe und, nachdem er die Fähigkeit der Natur und seine eigene Gestalt hinlänglich bewundert, nun sich unmittelbar zu sehen wünschte und eine solche Kraft bekäme, daß er ganz und gar zugleich *Subjekt und Objekt des Sehens würde*.“

Kann man das, was hier in Frage steht, moderner und prägnanter durch ein Gleichnis formulieren, als es hier bereits bei PROKLUS geschehen ist? Und nochmals läßt er das PLATONISCHE „Höhlengleichnis“ anklingen in den Worten: „Denn auch der Seele geht es ganz ebenso: sie blickt außer sich in die Phantasie und schaut hier die *Schattenumrisse der Figuren* und voll Erstaunen über deren *Schönheit und Ordnung* bewundert sie ihre *eigenen Ideen*, die Ursachen von alledem; einmal aber von Bewunderung“ (— die berühmte *admiratio* schon hier —) „ergriffen, wendet sie sich ab von der Schönheit der Schattenumrisse, die in Bildern sich bewegt, *und sucht sie selbst*, will in ihr Inneres eindringen und da den Kreis und das Dreieck sehen...“.

Und jetzt nochmals der Hinweis auf *Peras* und *Apeiron* in den folgenden Worten des PROKLUS: „Unser Meister (EUKLID), der zuerst die Figuren in der Phantasie untersucht und diese definiert und an zweiter Stelle die Frage behandelt, ob die Definition auch auf die Sinnendinge paßt, erklärt, die Figur sei etwas von einer oder einigen *Grenzen* Umschlossenes (s. oben). Da er sie nämlich bereits materiell und ausgedehnt in der Vorstellung nimmt, nennt er sie mit Recht begrenzt und beschränkt. Denn alles, was Materie in sich hat, sei es intelligible, sei es sichtbare, erhält seine Grenze von anderswoher und ist nicht selbst Grenze sondern begrenzt; aber es ist nicht Grenze seiner selbst, sondern ein anderes ist in ihm das Begrenzende, ein anderes das Begrenzte... Es vereinigt sich nämlich mit der Quantität und besteht mit dieser *und die Quantität (als Kategorie) wird ihm zum Substrat, dessen Idee und Form eben Figur und Gestalt bilden*. Denn diese begrenzen es und verleihen ihm den so oder so beschaffenen Charakter (das So-Sein, das Wesen) und die Grenze, sei

sie nun einfach oder zusammengesetzt. Denn da die Figur selbst den zweifachen Ausgang der *Grenze* und des *Unbegrenzten* in den eigenen Seinsformen zeigt..., verleiht sie die eine Begrenzung und die einfache Form dem von ihr durch die Grenze Umschlossenen, die vielen Begrenzungen aber durch das Unbegrenzte... Wenn aber ein spitzfindiger Logiker dem Satz EUKLIDS zur Last legen wollte, daß er mit Hilfe der Arten die Gattung definieren wolle..., dann wäre ihm zu erwidern, daß auch die Gattungen das Wesen der Arten in sich vorwegnehmen... Die Idee der Figur ist also nur eine und umfaßt die Unterschiede der vielen Figuren, die je nach der Grenze in ihnen und dem Unbegrenzten gegeben sind...“

Man sieht so deutlich die Aufgabe, die einer modernen Mathematik wieder gestellt werden muß, ganzheitliche Wissenschaft als Gestaltlehre, als übergreifende Morphologie zu sein. „Aber woher nimmt die Idee der Figur ihren Ausgang und durch welche Ursachen erhält sie ihre Seinsvollendung? Ich behaupte, daß sie fürs erste ihr Sein empfängt von der Grenze und dem Unbegrenzten und dem aus beiden Gemischten, weshalb sie auch selbst die einen Formen mit der Grenze, die anderen mit dem Unbegrenzten und eine dritte Gruppe endlich mit dem Gemischten erzeugt... Zweitens wird sie konstituiert von der Ganzheit, die in verschiedene Teile gegliedert wird, weshalb sie auch jeder Art den Ganzheitscharakter verleiht und jede Figur in ihre verschiedenen Arten aufteilt... Drittens verleiht ihr Kraft die allwirksame Vielheit und durch diese entläßt sie alle möglichen Formen und erzeugt die mannigfachen Ideen der Figuren und hört nicht auf, sich zu entfalten, bis sie zur letzten Möglichkeit gekommen und die ganze Mannigfaltigkeit der Arten zum Vorschein gebracht hat. Und wie im transzendentalen Bereich das eine mit dem Seienden und das Seiende mit dem Einen mitexistierend sich erweist“ (siehe PLATONS „Parmenides“), „so zeigt auch die Idee der Figur selbst... und enthüllt ihr ganzes Wesen in jeder Art in eigentümlicher Weise und es ist all ihr ganzes Wesen in allem und jedem, und das Ganze in allem zusammen und in jedem einzelnen gesondert... Viertens empfängt sie von der ersten der Zahlen (der Einheit) die Masse des Ausgangs der Arten, weshalb sie auch alle, nach Zahlen geordnet, zum Dasein bringt... Aus welchem Grunde das geschieht, ist der großen Menge unfafßbar; für die aber, die wissen um die Bedeutung der Zahl und der Figur, ist die Darlegung des Grundes leicht einzusehen. Fünftens erhält die Idee durch eine andere zweite Ganzheit, die in gleichgeartete Glieder eingeteilt wird, ihre letzte Vollendung, durch die Einteilung der Arten in gleiche Einzelwesen... Auch das, was wir mit den Abbildern zur Übung tun, muß viel früher seinen vorgängigen Bestand in den Prinzipien haben.“

Dann folgt zur 15. und 16. Definition des EUKLID, zu der des Kreises, die gewichtige Stelle im Text des PROKLUS, die wir diesem ganzen Abschnitt als Motto vorangestellt haben. Zur 17. Definition des EUKLID folgt dann im Kommentar des PROKLUS eine in Hinsicht auf die moderne Mengenlehre und die Theorie der transfiniten Zahlen gewichtige Stelle, die so lautet: „Wenn es aber nur einen Durchmesser, hingegen zwei Halbkreise gibt und Durchmesser von unbegrenzter Zahl durch den Mittelpunkt gehen, so ergibt sich die Folgerung einer Verdoppelung der Zahl nach Unbegrenzten. Einige werfen nämlich diese Schwierigkeit auf beim Schnitt der Größen, der ins Unendliche fortgeführt wird. Dagegen

bemerken wir, daß die Größe zwar ins Unendliche fort geschnitten wird, *aber nicht in eine unendliche Zahl. Denn letzteres bewirkt erst in Wirklichkeit die Unendlichkeit*, ersteres nur in der Potenz, und *letzteres bedingt das Wesen des Unbegrenzten*, ersteres nur seinen Ursprung... *Es wird also niemals eine Verdoppelung des Unbegrenzten geben*, sondern die entstehenden Verdoppelungen werden stets Verdoppelungen von unbegrenzten (konkreten) Zahlen sein... Und wie soll auch nicht jede Raumgröße nur begrenzte Teilungen zulassen, *nachdem die Zahl vor den Raumgrößen besteht und alle ihre Teilungen bestimmt, die Unbegrenztheit vorwegnimmt und immer das wirklich Vorhandene (Konkrete) begrenzt.*“

Hier müßte die moderne Analysis den Hebel ansetzen, um über ihre „vagen Vorstellungen von Menge und Funktion“ (H. WEYL) hinauszukommen und wahrhafte Grundlegungen ihres Lehrgebäudes zu bieten. Solange das Unendliche in die Mathematik im formalistischen Sinne eingeht, werden wir nicht weiter kommen und die Paradoxien des Unendlichen werden bleiben. Sie schwinden aber, wenn wir uns auf Standorte stellen, die mit diesen klassischen die unverrückbare Basis gemeinsam haben.

32. Und jetzt folgt im Kommentar zur 12. EUKLIDISCHEN Proposition eine ganz fundamentale Stelle, die uns über den Sinn des griechischen *Apeiron* vollständig aufklärt und zeigt, daß wir es stets im Sinne von „das Unbegrenzte“ zu fassen haben, *nicht* im Sinne des heutigen Unendlichen der Mathematik. Es heißt dort: „Es scheint angezeigt, die *Seinsweise des Unendlichen überhaupt* zu untersuchen. Denn es ist klar, gibt es eine unendliche Gerade, dann auch eine unendliche Ebene, und zwar *in Wirklichkeit*, wenn das Problem seine Geltung haben soll. *Daß es nun in der Sinnenwelt keine unendliche Größe in irgendwelcher Ausdehnung gibt*, zeigen der unsterbliche ARISTOTELES und die von ihm die Philosophie überkommen haben zur Genüge. Denn weder daß ein im Kreis sich bewegender, noch irgendein anderer einfacher Körper unendlich sei, ist möglich. *Denn der Ort eines jeden ist begrenzt.* — *Aber auch, daß den gesonderten und unteilbaren Ideen diese Unendlichkeit zukomme, ist undenkbar.* Denn wenn in ihnen weder Ausdehnung noch Größe ist, dann wohl noch viel weniger eine *unendliche Größe*. Es bleibt also nur übrig, *daß das Unendliche in der Phantasie existiere, aber ohne daß die Phantasie das Unendliche erkennt*“.

Das ist auch genau die Position des CUSANUS; unser Denken ist finit. Wir können das Unendliche uns nur annähern, es aber niemals erkenntnismäßig-begrifflich ergreifen. Und PROKLUS gibt selbst die Begründung für seine Auffassung in den folgenden Worten: „Denn sobald sie *erkennt, bringt sie an das Erkenntnisobjekt Gestalt und Begrenzung heran*, und hemmt durch die Erkenntnis den Ablauf der Vorstellung, durchmißt und umgrenzt sie.“ Sobald wir also erkennen, begrenzen wir; die Erkenntnisfunktion ist notwendig mit *Peras* gekoppelt; nur im intuitiven Erfassen waltet auch das andere Prinzip, das *Apeiron*. „*Das Unendliche ist also nicht Gegenstand der erkennenden, sondern vielmehr der in bezug auf das Erkenntnisobjekt unbegrenzt schweifenden,*

aber nicht erkennenden Phantasie, die das als „unendlich“ anspricht, wovon sie, *da es unermesslich, ablassen muß und was sie begrifflich nicht erfassen kann*. Denn wovon sie als unermessbar absteht, das nennt sie unendlich.“ Hierin kommt in klarster Weise zum Ausdruck, daß die Griechen das Unendliche stets im Sinne des Unbegrenzten aufgefaßt haben, und diese Auffassung geht in der ganzen deutschen mathematischen Linie durch. Nur einem intuitiven Geist, der das Ganze in allen seinen Teilen auf einmal erfaßt und überschaut, ist es möglich, das Unendliche zu erfassen; die menschliche Erkenntnis reicht dazu nicht hin. Wir nähern uns das Unendliche nur durch finite Prozesse des Denkens an und fassen begrifflich nur das Unbegrenzte. Die *unendliche Einheit* aber ist dem Menschen verschlossen; sie kann nur von Gott gedacht werden. So kommt die Auffassung immer wieder im deutschen Geist-raum vor, und es wäre nötig, daß bald auch die Mathematik auf diese Position Rücksicht nähme. (Siehe Teil 5 dieser Einleitung.)

In der folgenden Stelle des PROKLUS, die hieran unmittelbar anschließt, glaubt man direkt CUSANUS zu hören und eine seiner Schriften vor sich zu haben: „Wenn wir daher die als unendlich gegebene Linie wie auch alle anderen geometrischen Formen, die Dreiecke, Kreise, Winkel, Kurven..., in die Phantasie verlegen, werden wir uns nicht verwundert fragen, wie es eine in Wirklichkeit unendliche Linie gibt und sich diese, trotz ihrer unendlichen Ausdehnung in die begrenzten Erkenntnisobjekte einreihet? Der Verstand (ratio bei CUSANUS) aber, dem die Begriffe und die Beweise entstammen, bedient sich des Unendlichen nicht zum Beweise: denn das Unendliche ist durch die Wissenschaft überhaupt nicht erfaßbar, sondern sie zieht es nur als (Arbeits-) Hypothese heran. Er verwendet zum Beweise nur das Begrenzte und nimmt das Unbegrenzte nicht des Unendlichen, sondern des Begrenzten wegen an, da er des Unendlichen nicht weiter bedarf.... Damit nun der Verstand ohne Gefahr der Widerlegung und des Zweifels der begrenzten Linie sich bediene, nimmt er das Unendliche an und bedient sich des unbegrenzten Dranges der Phantasie als Sprungbrett zur Schöpfung der Idee des Unendlichen.“ — CUSANUS fährt dann fort, daß es eben nicht die ratio, sondern der intellectus ist, der das Unendliche als „*coincidentia oppositorum*“ faßt (s. unsere allgemeine Einführung und Teil 5 dieser Einleitung).

Auch im Kommentar zur 20. Proposition des EUKLID findet sich noch eine kleine Stelle, die einiges Licht auf die griechische Auffassung des Apeiron wirft. Es heißt dort bei PROKLUS: „Das Feuer z. B. erwärmt: das ist der Sinneswahrnehmung klar; aber auf welche Weise es erwärmt, das zu erfassen ist Sache der Wissenschaft.... Ferner, daß wir uns bewegen, ist den Sinnen klar; wie wir uns aber bewegen, das zu erklären ist für den Verstand schwierig, ob im ungeteilten Continuum oder von Abstand zu Abstand und wie wir die unendlich vielen Räume durchmessen“.

Diese Stelle könnte direkt als Ansatz für die moderne Fassung des Infinitesimalen bei LEIBNIZ benützt und herangezogen worden sein, da sie das, auf was es wirklich ankommt, unzweideutig schon gefaßt hat. Sie möge daher auch für eine zukünftige geistesgeschichtliche Entwicklung des Infinitesimalen und seines Bewußtseins, zusammen mit derjenigen, die ich früher bereits bei

KEPLER aufgewiesen habe, gebührend berücksichtigt und eingeordnet werden⁶⁵). Sie ist für das, was in Rede steht, ganz fundamental.

Hinsichtlich der Darlegungen des PROKLUS, die sich auf die Symmetrie der Gleichheit beziehen, will ich auf den folgenden Abschnitt dieser Einleitung verweisen, wo ich dies im Zusammenhang mit den Grundgestalten der Mathematik im einzelnen abhandeln werde. Das hier dargebotene, geschlossene griechische Lehrstück von *Peras und Apeiron* als den seinsgründenden Prinzipien der griechischen Mathematik, mußte für sich stehen, da es in seiner ganzen Umfänglichkeit so prinzipiell ist, daß es sich lohnte, von ihm aus einmal eine umfassende geistesgeschichtliche Untersuchung der Wirkung dieser Prinzipien in den deutschen Geistraum hinein unter Anführung aller bis heute zugänglichen Belegstellen vorzunehmen. Doch dies kann hier nicht unsere Aufgabe sein. Sie ist teilweise von D. MAHNKE, dem LEIBNIZ-Forscher, bereits in Angriff genommen worden⁶⁶), müßte aber nach unserem Dafürhalten noch wesentlich erweitert werden, hauptsächlich um die fundamentalen diesbezüglichen Positionen PLOTINS und insbesondere auch des späteren florentinischen Neuplatonismus der MAR-SILIUS FICINUS und PICO DELLA MIRANDOLA. Man würde dann auch sehen können, wie diese Gedanken besonders bei NIKOLAUS KOPERNIKUS, der in seinem Hauptwerk PICO direkt erwähnt, gewirkt haben und wie sie dann von ihm hinaufreichen zu der ganzen geschlossenen Entwicklung über PARACELUS zu KEPLER und weiter zu LEIBNIZ und KANT. (Siehe Teil 5 dieser Einleitung.)

4. Die Urgestalten des Mathematischen als seine Sinnträger

„Denn die Geometrie fragt nach dem Wesen, und zwar auf zweifache Weise: entweder nach *Sinn und Begriff* oder nach dem *unmittelbaren Wesen* des Gegenstandes.“

PROKLUS im Kommentar zur 1. EUKLIDischen Proposition.

33. Wenn wir in diesem Abschnitt der Einführung in das PROKLEISCHE Werk darauf ausgehen, die Konkretisierung der allgemeinen und eigentlichen Gestaltlehre der Mathematik, wie sie im Werk des PROKLUS niedergelegt ist, darzustellen, so muß dabei — wie für alle zukünftige Morphologie des Mathematischen, die auf das Ganze geht — mit einem klassisch gewordenen Gedankengang und mit einer Argumentation begonnen werden, die heute noch genau so gelten, wie sie zu Zeiten PLATONS und der Pythagoreer, die sie entdeckt, aber auch bis hinauf zu KOPERNIKUS, CUSANUS, KEPLER und LEIBNIZ gegolten

⁶⁵) Siehe M. STECK, Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941.

⁶⁶) In „Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt“, Halle (S.) 1937.

haben, die sie vielfach in ihre gedanklichen Entwicklungen eingebaut haben. Die These dieses Gedankenganges lautet:

Am Anfang steht für die Mathematik die Idee!

Der Beweis dieser These kann rein rational geführt und etwa folgendermaßen formuliert werden; er stellt gleichzeitig den Existenzbeweis für das Ideelle überhaupt dar. Der Beweis ist indirekt und als solcher von einer Sicherheit, wie alle indirekten Beweise in der Mathematik, die gemeinhin als die sichersten überhaupt gelten. Würden wir die Gegenstände der Mathematik, ihre eigentlichen anfänglichen Sinngebilde und Urgestalten, den Punkt, die gerade Linie, die Kurve, die Ebene, die krumme Fläche, den Körper, den Raum, die Räume und Raumformen dadurch gedanklich erzeugen, daß wir sie aus den Dingen der Wirklichkeit, also aus dem realen Sein durch Abstraktion gewinnen, wie dies vom Positivismus, vom Empirismus, vom mathematischen Formalismus und von der Logistik bis auf unsere Tage immer wieder und in den mannigfachsten Variationen behauptet worden ist, ohne daß auch nur die Spur eines Beweises dafür angetreten wurde, so würde es überhaupt keine Mathematik geben. Denn den Sinnendingen kommt niemals die Genauigkeit und die Vollkommenheit der Bildung zu, die wir als Haupteigenschaften den mathematischen Objekten grundsätzlich beilegen und zuzuschreiben gewohnt sind. Möchte man aber diese Haupteigenschaften des Mathematischen durch Abstraktion erhalten, so liegt in diesem Verfahren ein offensichtlicher Zirkelgang vor. Denn wenn die Abstraktion in diesem Zusammenhang des Ausgehens von der Empirie überhaupt einen Sinn haben soll, so kann sie nur bedeuten, daß unser Geist bei ihrem Vollzug von den Ungenauigkeiten und Unvollkommenheiten der sinnlichen Dinge ab, sieht' und auf die Genauigkeit und Vollkommenheit der Idee hin, sieht'. Denn wenn er nur abstrahiert, um zu abstrahieren und in diesem Zustand zu verbleiben, so wäre offenbar nicht zu erreichen, was er durch Abstraktion erreichen möchte, nämlich die Erzeugung der mathematischen Objekte. Jede Abstraktion, die als schöpferischer Akt vom Geiste vollzogen wird, setzt eine *Richtung* und ein *Musterbild* voraus, zu dem hin sie vollzogen wird. Diese Richtung und dieses Musterbild aber können nur *ideeller Art* sein. *Jede Richtung der Abstraktion wäre ausgeschlossen, wenn es die Idee nicht gäbe und den Geist, aus dem sie dringt.*

Damit aber ist der *Nachweis der Existenz der Idee* geführt, die vor aller „Erfahrung“, vor aller Sinnenwelt, als schöpferisches und

eigenständiges Gut des Menschen und seines Geistes selbst betrachtet werden muß. Niemals ist es möglich, vom *mundus sensibilis* auf den *mundus intelligibilis* in seinem Seinscharakter und in seiner ontologischen Struktur zu „schließen“. Alle diese „Schlüsse“ ergeben Scheinbeweise. Wollten wir z. B. „aus der Erfahrung“ etwa die gerade Linie der Mathematik erzeugen dadurch, daß wir etwa einen gespannten Faden nehmen, ein Haar, das wir spannen, oder einen Lichtstrahl, den wir sehen, und nun von all seiner Stofflichkeit, seiner Dicke, seiner unvollkommenen Spannung oder, im Falle des Lichtstrahls, weiter von seinem Gebrochensein durch die Atmosphäre oder dgl. absehen, abstrahieren, so setzt gerade die Abstraktion von diesen, die wirklichen Dinge charakterisierenden Eigenschaften voraus, daß wir wissen, daß die Abstraktion gerade von diesen Eigenschaften absehen muß, d. h. daß wir wissen, *was eine mathematische Gerade ihrem Wesen nach ist*. Der Zirkelgang ist also offenbar. Wir könnten die Abstraktion niemals als schöpferische Tätigkeit des Geistes vollziehen, *wenn die Idee*, zu der hin wir sie vollziehen, *nicht wäre*. — Etwas anderes ist es, daß wir durch die Dinge der Wirklichkeit vielleicht hin und wieder angeregt werden, nach einer bestimmten mathematischen Idee Ausschau zu halten. Aber es bleibt bei der Anregung von außen; *alles Wesentliche ist in der Mathematik Innenwelt und Selbstbetrachtung des Geistes, der sich selbst transzendiert*. Wer das nicht begreift, weiß von Mathematik, im eigentlichen Sinne nichts und kann daher nur verschwommen und ungenau über sie sprechen, rein formal-begrifflich ein guter „Rechner“ sein, aber nicht mehr. —

Der eben vorgeführte klassische Existenzbeweis für die *Idee*, die aller Mathematik voransteht, ist auch durch alle Künste empiristischer, positivistischer und formalistischer Prägung nicht umzustoßen. Soweit kann man nämlich *das Ideelle auch rein rational beweisen* mit derselben Stichhaltigkeit, die einem mathematischen Beweis eigen zu sein pflegt. Man braucht an dieser entscheidenden und grundlegenden Stelle, am Beginn und Ursprung der Mathematik überhaupt, noch nicht seine Zuflucht zu einer sogenannten „*Anschauungsgeometrie*“ zu nehmen, die sich angeblich zwischen die rein begrifflich-formale, abstrakte und die empirische Geometrie des wirklichen Raumes, die Geometrie der Erfahrung, einschieben soll. Hier am Ursprung ist die Anschauung noch ganz unnötig, wenn es sich allein um den Existenzbeweis der Idee handelt. Auf ihm basieren nämlich auch alle Gebäude

der Mathematik des Formalismus, wie auch alle der Logistik. Doch zeigt diese moderne Zwischenschaltung nur, daß man den obigen Gedankengang bis heute nicht verstanden hat, denn woher eine rein begrifflich-formale (abstrakte) Geometrie — die angebliche Leistung des Formalismus —, wenn dies „Geometrie“ überhaupt genannt werden darf, *ihre Geltung empfängt*, diese Frage führt gerade auf den obigen Gedankengang des Existenzbeweises der Idee. Formalismus und Logistik haben also nicht zu Ende gedacht, was über 2000 Jahre vorher schon zu Ende gedacht worden war und mit die einzigartige Entwicklung der deutschen mathematischen Linie als stetige Gedankenentwicklung von der Antike her ermöglicht hat. Man kann zwar aus den formalistischen „Axiomen“ formale Eigenschaften der mathematischen Gebilde ableiten und deduzieren, niemals aber ihren Seinscharakter und damit ihre ideelle Geltung und Wahrheit überhaupt. Und damit ist „endlich auch die alte Frage nach dem mathematischen Wesen der geraden Linie“ durchaus vom Formalismus nicht beantwortet, es sei denn, man versteht unter „Wesen“ nur formale Eigenschaften, nicht aber das Sein der Geraden. „Wesen“ war und ist aber immer So-Sein eines Gegenstandes und davon kann auch, trotz Formalismus und Logistik, heute nicht abgewichen werden. Könnte man das Sein der mathematischen Gebilde, ihre Geltung und den Wahrheitswert ihrer gegenseitigen Zusammenhänge formal allein „ableiten“ aus einigen nominalistischen „Axiomen“, *so wären wir am Ende des Denkens angekommen und am Ende der Entdeckung neuer schöpferischer Anschauungen*. Die Mathematik und alle ihre Sinngebilde müssen ihre Geltung und daher auch ihre Wahrheit von einem Bereich her empfangen, der als Reich der Bedeutungen und der unverrückbaren Normen aller formalistischen Mathematik vorausliegt. Dies kann aber nur der Bereich der Idee sein und alle Leerformen des Formalismus blieben ewig reine *nomina*, wenn es diesen Bereich der Idee als schöpferisches Reich unseres Geistes nicht gäbe. *Warum ist Wahrheit nur durch Ideen möglich?*, so lautet die Kernfrage meines „Hauptproblems der Mathematik“⁶⁷⁾. Und es war und ist dies die Kernfrage aller idealistischen Mathematik und Philosophie seit PLATON bis KANT und FICHTE gewesen und geblieben. Wir kommen um sie nicht herum und sie fordert in jedem schöpferischen Zeitalter des Geistes eine Antwort. Möge diese in unserer Zeit wieder zugunsten der Idee ausfallen!

⁶⁷⁾ Berlin 1942; 2. erw. Aufl. 1943.

Man kann die „sinn- und bedeutungsfreie“ Situation des mathematischen Formalismus und der Logistik nicht durch Kombinationen aus Empirismen zu retten versuchen. Jede solche Rettung ist für das Mathematische seinem Seinscharakter und seiner Geltung nach notwendig irrelevant. Man kann aus keiner noch so weit getriebenen und verfeinerten, bis in die subtilsten Verästelungen gesteigerten und genährten Empirie, selbst aus einer unendlichen Empirie eines Bacon nicht, den Seinscharakter der Idee, der aller Mathematik vorangeht, „erschließen“ wollen. Auch alle „Anwendungsgeometrie“ und empirische Mathematik wäre in ihrem Tun sinnlos, wenn es vorher die „Ideengeometrie“ nicht gäbe, wenn die Urgestalten des Mathematischen bloße nomina, sinn- und bedeutungsfreie Zeichen und Leerformen des Geistes wären. Ohne die Idee, die wir kraft unseres ganzen Menschseins in unserem Geiste und in unserer Seele einfach haben, ist eine *mathesis pura* unmöglich und ohne die Idee ist für das Mathematische einfach nicht auszukommen.

Die Ideen sind unserem Geiste freilich in *innerer Anschauung* gegeben. Sie konstituieren aber nur dann eine Wissenschaft als *theoria*, wenn sie mit dem Begrifflichen zusammengenommen werden, da wir als Menschen in Begriffen denken. Ohne sie blieben auch sie richtungslos und würden von Phantasiegebilden und mystischen Wesenheiten kaum zu unterscheiden sein. Eine reine „Anschauungsgeometrie“ wäre wie eine reine „Begriffsgeometrie“ einseitig und würde nie das Ganze des Mathematischen geben. Diese Unterscheidungen sind daher auch nur wenig bedeutsam, weil sie an das Wesen der Sache selbst gar nicht heranreichen.

Zu Ende gedacht liefert jene Gedankenfolge, die wir auseinander-gesetzt haben und in der wir den Existenzbeweis für das Ideelle überhaupt erblicken dürfen, die Geometrie und alle geometrischen Raumformen der Mathematik schlechthin, weder eine „Begriffs“- noch eine „Anschauungs-Geometrie“, sondern das Zusammen beider als eine *Seinswelt*, die nicht aufgespalten werden kann, ohne ihren tiefsten Sinn zu ändern und sogar zu verlieren und alle ihre generellen Bezogenheiten, soweit sie im Seinscharakter der Idee wurzeln, zu verbiegen und anzutasten. Die Mathematik ist aus Begriff und Anschauung als den Polen einer ungebrochenen Einheit konstituiert, und so wenig es im realen Sein etwa einen Südpol allein oder einen Nordpol allein im Reiche des Magnetismus gibt und die Eigenschaften eines jeden für sich allein erforscht werden könnten, so wenig gibt es in der

Mathematik eine „Begriffsgeometrie“ allein und eine „Anschauungsgeometrie“ allein und der Versuch, jede für sich gesondert zu erforschen, kann nur immer zur halben Wahrheit führen. Das eine ist nur möglich durch das andere und beide bilden eine Einheit im Seienden, deren Geltungs- und Wahrheitsgrund Idee heißt. Sie müssen wir daher wieder als Anfang aller Mathematik betrachten und ansehen lernen und so werden wir auch zu einem *idealistischen Neuaufbau morphologischer Art* befähigt sein.

Dies alles ist bereits in den bisherigen Gedankenentwicklungen des PROKLUS auch vielfach ganz klar herausgekommen und es bleibt uns daher nur, die Konstituenten einer allgemeinen Morphologie der Mathematik, wie sie bereits bei PROKLUS vorliegen, in den Originalstellen seines Werkes explizit aufzuweisen und damit eine Konkretisierung des Allgemeinen im Einzelnen an Hand der PROKLEISCHEN Gedanken zu erreichen. Es muß jedoch betont werden, daß diese Gedanken des PROKLUS auf dem Hintergrunde zu betrachten sind, den wir in den Abschnitten 1—3 aufgerollt haben. Gerade der Mathematiker ist leicht geneigt, Gedanken abzulehnen, die sich nicht unmittelbar in die Formel bannen lassen. Auch in der Mathematik aber gilt das Wort aus GOETHES „Faust“: „... und was sie dir nicht offenbaren mag, das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben.“ Nur was an der Mathematik rein begrifflicher Natur ist, wird sich der formalen Formel beugen; was aber ihren Seins- und Ideencharakter anlangt, das wird sich immer der nurbegrifflichen Einordnung entziehen. Es ist aber deshalb nicht weniger „Mathematik“ und vor allen Dingen nicht weniger wertvoll. Man sollte aus der Geistesgeschichte gelernt haben, daß man mit Wertungen außerordentlich vorsichtig sein muß, besonders dann, wenn es sich um die grundlegendsten Dinge überhaupt dreht. Dies mag als Einführung für die Entwicklungen genügen, die wir jetzt abschließend im Werke des PROKLUS uns noch gegenständlich werden lassen wollen. Mögen sie der Grundstock sein, aus dem ein neues Reis idealistischer Mathematik, das am Baume der Gedanken der großen deutschen Mathematiker wächst, hervortreibt und zu einer Neubesinnung auf die eigentlichen geistigen Grundlagen der gesamten Mathematik führen. Aus dieser Besinnung muß eine *Renaissance des Mathematischen* erwachsen und das gute Alte bewahren, mit den halben Wahrheiten aber endgültig brechen. Wer den Geist auf Formeln einengt und das Mathematische *ohne eigentlichen Gegenstand* nur im formalen Calcul und in seiner Widerspruchslosigkeit — die bis heute nicht bewiesen ist — sieht und an dieser formalistisch-nominalistischen Doktrin wie an einer Glaubenslehre festhält, bloß weil er selbst so ausgebildet und erzogen worden ist, das andere aber nie mehr ernstlich und von seinen Wurzeln her durchdacht hat, dem wird auch PROKLUS nichts bieten können. Solche Menschen, die dem idealistischen Ansatz des Mathematischen keine Anerkennung und keine Gerechtigkeit mehr widerfahren lassen, müssen einsehen, daß er doch der weittragendere ist. Eine andere Lösung scheint es da nicht zu geben. Wer aber noch jung ist, in die Zeiten blickt, ihre Gedanken neu denkt und seinem eigenen Bewußtsein und Wissen einbezieht, der wird Gewinn haben und sehen können, wie tief auch die Alten schon in das Wesen der Mathematik selbst eingedrungen sind.

Wenden wir uns also jetzt zu der Konkretisierung der Gestaltlehre der Mathematik, wie sie bei PROKLUS gegeben ist, und gewinnen wir dabei die Standorte, die uns im letzten Abschnitt dieser Einleitung dann die Mittel an die Hand geben, einen tiefen Blick in die deutsche Geistesgeschichte überhaupt zu tun, um, gesättigt von seinen Inhalten und Eindrücken, daraus die Lehre für die Gegenwart zu ziehen.

34. Schon im 2. Teil der Vorrede kommt eine Stelle vor, die sich auf die beiden Grundgegenstände der Geometrie und der Arithmetik, von denen beide ausgehen, bezieht und lautet: „Denn die *Einheit* ist ohne Lage; der *Punkt* aber hat eine Lage und *die Geometrie geht vom Punkte aus und noch dazu von seiner Lage*, die Arithmetik aber von der Einheit.“

Die Hauptausführungen des PROKLUS stehen natürlich in den Kommentaren zu den Definitionen, Postulaten und Axiomen EUKLIDS, und diese Stellen wollen wir nun möglichst vollständig heranziehen, um die Gestaltlehre des PROKLUS in ihren einzelnen Teilen deutlich werden zu lassen.

Zur 1. und bislang problematischsten Definition des EUKLID, deren kritische Diskussion in der Mathematik sehr weit vorgetrieben ist, ohne daß man freilich die Problematik des Griechentums vollauf berücksichtigt hätte, führt PROKLUS eine große Zahl wertvollster Gedanken aus, die wir jetzt besprechen wollen. EUKLID definiert: „*Ein Punkt ist, was keine Teile hat.*“

Erkenntnistheoretisch gesehen ist damit das mathematische Existenzproblem im Zusammenhang mit der griechischen Problematik „*Teil-Ganzes*“ aufgerichtet. Beide hat das klassische Griechentum nur — ich möchte sagen — unter einem spezifisch logisch-metaphysischen Aspekt gesehen, der ganz deutlich auch wieder bei EUKLID in seinem VIII. Axiom zu finden ist (s. unten), das lautet: „*Das Ganze ist größer als der Teil.*“ In beide EUKLIDISCHE Formulierungen geht aber des weiteren noch ein Gemeinsames ein, das *Prinzip der Teilbarkeit*. Damit aber haben wir schon in diesen beiden Formulierungen EUKLIDS wieder ein Hauptproblem der griechischen Philosophie und Mathematik, das *Problem des Atomismus*, im Mathematischen das *Problem des Infinitesimalen*. Die erste Definition des EUKLID, die des Punktes, ist eigentlich keine Definition im modernen Sinne. Und doch kann man sagen, daß damit von EUKLID der erste Versuch gemacht wird, innerhalb eines mathematischen Lehrgebäudes zu „erklären“, was ein „mathematischer Punkt“ ist, und diese inhaltliche Bestimmung als „Erklärung“ und Beschreibung der Gestalt eines mathe-

matischen Gegenstandes zu geben. Der EUKLIDISCHE „Punkt“ ist bereits eine Urgestalt des Mathematischen, ein Unteilbares an Sinn und Bedeutung, ein Urbild und eine Uridee schlechthin und neben der „Zahl“ die Grundgestalt der gesamten Mathematik überhaupt. Dies ist spezifisch für die Erkenntnistheorie des Griechentums. In ihm waltet das Bedürfnis vor, den in der rein formalen mathematischen Deduktion verwendeten *Begriff* auch inhaltlich näher zu bestimmen und insbesondere seine Bedeutung „erklären“ zu wollen in der klaren Einsicht, daß die formale Seite der Idee mit ihrem Sinngehalt oder mit ihrer Gestalt zu einer Einheit zusammengefügt werden muß, um ein Ganzes auszumachen.

Dies wird uns auch von PROKLUS unzweideutig bestätigt, wenn er im Kommentar zur 1. EUKLIDISCHEN Definition ausführt:

„Denn die Materie schwächte ihre *Vollkommenheit*, und die Idee der Fläche höhlt das Fläche aus, und die Idee der Linie schwächt die Ausdehnung in einer Richtung und wird so allenthalben teilbar, *die Idee des Punktes* aber wird körperhaft und zugleich mit dem von ihm Begrenzten auseinander gezerrt.“ Und jetzt die Anwendung der seinsgründenden Prinzipien *Peras* und *Apeiron* für die gedankliche Erzeugung des Punktes: „Kennen etwa auch die immateriellen Seinsformen die Reihenfolge von Anfang, Mitte und Ende und sind die einen Seinsformen einheitlicher, indes die anderen mehr zur Vielfältigung neigen, halten die einen ihre Kräfte mehr zusammen, indes die anderen zur Trennung drängen, sind die einen der *Grenze*, die anderen dem *Unbegrenzten* zugeordnet? In der Tat. Wenn auch alles an diesen Prinzipien teilhat, so stammen die Wesen doch teils von dem einen und haben mehr davon abbekommen, teils von dem anderen. *Der Punkt also, der im Bereich der Idee völlig unteilbar ist, hat gleichwohl, wenn er auch von der Grenze sein Sein hat, verborgenerweise die unbegrenzte Kraft in sich, der zufolge er alle Ausdehnungen erzeugt, und der Ausgang aller Ausdehnungen erschöpft nicht seine unbegrenzte Fähigkeit . . .* Da nun auch der Punkt eine Grenze ist, wahrt er in der Teilhabe seine eigene Kraft; da er aber verdeckt die Unbegrenztheit besitzt und allenthalben notwendigerweise bei dem von ihm Begrenzten sich findet, so ist er auf zahllose Art in ihm (dem Körper); und da das Unbegrenzte dort die Fähigkeit hatte, das Ausgedehnte hervorzubringen, *so war er der Potenz nach in dem Teilhabenden . . .* Denn die *Idee des Punktes* ist führend für die ganze Reihe (der mathematischen Gegenstände) und

vereint alles Geteilte, verbindet und scheidet seine Ausgänge, erzeugt und umschließt alles auf allen Seiten. Deshalb hat auch in den Abbildern (den sinnlichen Figuren) alles wieder andere Grenzen; *die letzte von allen aber ist der Punkt.*“

Damit ist der Punkt schon selbst zum *konstituierenden Prinzip* der mathematischen Gebilde geworden. Er ist das *Da* und *Dort* im Raume, bezeichnet die *Stelle* und den *Ort* im Raum; er ist überall und nirgends, er konstituiert den EUKLIDischen Raum als die Gesamtheit und den Inbegriff aller Stellen und Orte. „Denn alle (mathematischen Sinngebilde) existieren a priori . . . , aber in ungeteilter und einförmiger Weise, so daß alle in einer einzigen Seinsform bestehen gemäß der Idee des Punktes, die sie in verborgener und ungeteilter Weise in sich schließen . . . Wie also die Einheit in einem Falle die Zahlen erzeugt, in einem anderen sozusagen materielles Substrat der Zahlen ist, in beiden Fällen aber *Prinzip* und nicht das, was die Zahl, aber Prinzip auf verschiedene Weise, *ebenso ist auch der Punkt einmal konstituierendes Prinzip der Raumgebilde*, dann wieder in anderer Weise Prinzip und nichts als schöpferische Ursache.“

„Einzig der Punkt ist also *ungeteilt auf dem Gebiet der Geometrie* und die Einheit auf dem der Arithmetik und *die Idee des Punktes, mag sie auch im Vergleich zu einer anderen unvollkommen sein, ist in Hinsicht auf die vorliegende Wissenschaft vollkommen*. Wollen wir also nicht glauben, die Definition des Punktes sei verfehlt, und nicht behaupten, sie sei ungenügend. *Denn für die geometrische Materie und ihre Prinzipien genügt sie vollkommen*; nur das allein besagt sie nicht ausdrücklich, daß der Punkt das für mich Ungeteilte ist und mein Prinzip, und daß das Einfachste nichts anderes ist als dieser, und so muß man die Sprache des Mathematikers verstehen.“

Es ist jetzt außerordentlich interessant, bei PROKLUS zu sehen, wie in den EUKLIDischen Definitionen und hinter ihnen die ganze PLATONische Philosophie als Erkenntnis- und als Seinslehre, als Begriffliches und als Gestaltliches steht. Dies kommt in den folgenden Sätzen des PROKLUS klar zum Ausdruck und widerlegt ein für allemal die modernen Deutungen der EUKLIDischen „Definitionen“, wie sie etwa TOEPLITZ, REIDEMEISTER u. a. geben⁶⁸⁾. Es heißt nämlich bei PROKLUS wörtlich: „EUKLID hat uns durch die Verneinung von Teilen“ (d. h. durch seine Punkt-Definition) „das Prinzip der ganzen, seiner wissenschaftlichen Betrachtung unterliegenden Seinswelt gezeigt. Denn die verneinenden Sätze

⁶⁸⁾ a. a. O. Anm. 29 und 37 oben.

kommen den Prinzipien zu, wie PARMENIDES uns belehrt, der die erste und letzte Ursache durch bloße Verneinungen kennzeichnet. Denn jedes Prinzip ist in seinem Sein verschieden von dem von ihm sich herleitenden Wesen, und die Ausschließung dieser macht uns sein Eigenwesen klar. Denn was Ursache dieser ist, aber nichts von denen, deren Ursache es ist, wird durch diese Weise des Unterrichts der Erkenntnis einigermaßen näher gebracht.“

Damit ist der vorsokratische Sinn der EUKLIDischen Punkt-Definition ein für allemal erhärtet und gegeben. Der Punkt ist Ursache, letzte Ursache des Seins der geometrischen Gebilde und kann daher als solche nur negativ bestimmt werden. Aber gleich wendet sich PROKLUS auch der Frage der konkreten Erfassung des Punktes zu, wenn er fortfährt: „Nun könnte aber jemand bei der Frage in Verlegenheit kommen, wie der Mathematiker einen ungeteilten Punkt in der Vorstellung erfassen kann, wenn diese doch alles in Gestalten und Teilen empfängt. Denn nicht nur die Begriffe im denkenden Geist, sondern auch die Erscheinungsformen der intellektuellen und göttlichen Ideen empfängt die Vorstellung gemäß ihrer eigenen Art, indem sie von dem Gestaltlosen Gestalten und von dem Figurenlosen Figuren erzeugt.... Es ist also notwendig, daß sie die in sich beschlossene Idee eines jeden in sie eingehenden Erkenntnisobjektes hervortreten läßt, daß sie aber schließlich endet bei *Gestalt, Figur und Ausdehnung*. Wenn sie also von solcher Art ist, eignet ihr irgendwie auch das Ungeteilte und es ist zu sagen, daß eben darnach das Wesen des Punktes sich hauptsächlich bestimme.“

Und jetzt die Darlegung der Auffassung der Pythagoreer bei PROKLUS: „Da nun aber die Pythagoreer den Punkt auch definieren als *Einheit mit einer bestimmten Lage* (s. oben), so ist zu klären, was sie damit eigentlich sagen wollen. Daß nun die Zahlen von der Materie freier und reiner sind als die Raumgrößen, und das Prinzip der Zahlen einfacher als das der Raumgrößen, ist jedem klar. Wenn sie aber von der *Einheit sprechen, die eine bestimmte Lage hat*, so scheinen sie mir damit anzudeuten, daß *Einheit und Zahl nur in der Vorstellung ein Sein haben*... Der Punkt aber erscheint in der Vorstellung, ist gewissermaßen lokalisiert und etwas Materielles im Sinne der intelligiblen Materie“.

Deutlicher kann man das, was ich oben als das *Da* und *Dort* im Raume erklärt habe, nicht bei den Alten suchen. Es ist schon vollständig vorhanden. Der Punkt bezeichnet die Stelle, die Örtlichkeit im Raume, weiter nichts und deshalb hat er „*Lage*“. Das kommt bei PROKLUS besonders deutlich heraus, wenn er die Einheit 1 der Arithmetik im Gegensatz stellt zum Punkt, zur „Einheit mit Lage“ im Sinne der Pythagoreer. Es heißt nämlich abschließend im Kommentar zur 1. EUKLIDischen Definition bei PROKLUS: „Die 1 ist also, weil immateriell, ohne Lage und hat absolut nichts zu tun mit Dimensionen und Örtlichkeiten. Der Punkt aber hat eine Lage, weil er im Inneren der Vorstellung in Erscheinung tritt und materieller (im Sinne der intelligiblen Materie) Art ist. Wegen ihrer engeren Verbindung mit den Prinzipien ist aber die 1 auch einfacher als der Punkt. Denn durch seine Lage überschreitet der Punkt die Grenze der Einheit. Zusätze aber bewirken bei immateriellen Dingen eine Minderung der Dinge, die den Zusatz erhalten.“ A. SPEISER drückt diesen Gedankengang modern so

aus: „Das Raumschema hat nicht die Kraft Existenz zu setzen; das haben die Philosophen des 18. Jahrhunderts klar gesehen und als Aporie empfunden“⁶⁹⁾.

Auf spätere Andeutungen an die Definition des Punktes wollen wir dann an den diesbezüglichen Stellen eingehen.

35. Es folgt die 2. EUKLIDISCHE Definition: „*Eine Linie ist eine Länge ohne Fläche.*“ Auch hier handelt es sich wieder um die Beschreibung einer Urgestalt des Mathematischen, um die Beschreibung der Kurve. Wir wollen zuerst sehen, was PROKLUS zu dieser „Definition“ sagt. „Den zweiten Platz nimmt die Linie ein, insofern sie die erste und einfachste Ausdehnung ist, die der Mathematiker ‚Länge‘ mit dem Zusatz ‚ohne Fläche‘ benannt hat, *da die Linie für die Fläche die Bedeutung eines Prinzips hat.* Über den Punkt als das (erste) Prinzip aller Raumgrößen unterrichtete er nämlich einzig auf dem Wege der *Negation*; über die Linie aber teils *affirmativ*, teils *negativ*. Sie ist nämlich eine ‚Länge‘ und damit geht sie über die Unteilbarkeit des Punktes hinaus, aber ein ‚Länge ohne Fläche‘, da sie frei ist von den anderen Ausdehnungen. Denn alles Flächenlose entbehrt auch der Tiefe, aber nicht umgekehrt. Indem er ihr die Fläche absprach, hat er ihr auch die Tiefe abgesprochen, weshalb er gar nicht beifügte, daß sie ohne Tiefe ist, da dies ohne weiteres aus dem Begriff des Flächenlosen folgt.“

Man sieht aus dieser ersten Position des PROKLUS, daß er bestrebt ist, immer *höchste Gattungsbegriffe*, also *ideenhafte Bildungen* zu verwenden, wenn er ein Gebilde beschreiben will. „Länge“, „Fläche“, „Flächenloses“, „Tiefe“ sind alles *unerklärte Begriffe*. Sie sind aber als Ideen *anschaulich* da und dürfen für die Gestaltbeschreibung morphologisch „vorausgesetzt“ und als „bekannt“ angenommen werden. *Weil sie höchste Gattungen bezeichnen, stehen sie jenseits der bloßen Begriffserklärung und Nominaldefinition und haben teil an den Ideen, die vor aller Begrifflichkeit in der Vernunft des Menschen wesen.* Dies ist die originäre Auffassung nicht nur des PROKLUS, sondern der Vorsokratiker, PLATONS und der Pythagoreer. Diese höchsten Gattungen sind *apriorisches Gut* des Menschen und als solches von einer Klarheit und Evidenz, die „unbeschreibbar“ ist, weil sie von jeder Vernunft überhaupt „gewußt“ wird. Von den höchsten Gattungen also läßt sich eine begriffliche Erklärung deshalb nicht geben, weil sie Vorstellungselemente, erste Seinsglieder überhaupt sind und als solche auch

⁶⁹⁾ In seiner Studie: Über die Zahlen und den Raum bei den Neuplatonikern, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 77.

für die Mathematik und ihre Gebilde, ihre Sinn- und Bedeutungsgebilde, in Anspruch genommen werden müssen.

PROKLUS führt dann eine zweite Definition der Kurve ein, die sich auf die ‚Bewegung‘ — wieder ein höchster Gattungsbegriff — stützt, denn niemand kann wesenhaft erklären, was ‚Bewegung‘ ist, wie man nicht erklären kann, was ‚Funktion‘ oder ein anderer höchster Gattungsbegriff ist. *Von den höchsten Gattungen hat der Mensch nur Anschauungen, keine Begriffe. Man kann daher auch niemals das Anschauliche in ein Begriffliches überführen wollen, wie das die Mathematik der Neueren versucht hat.* Jedes solche Beginnen ist ein Fehler, weil man sich dabei an einem unteilbaren, *begrifflich unberührten und unberührbaren* und nicht aufspaltbaren Bereich unsinnlicher und rein intelligibler Schauungen vergreift. „Man definiert sie (die Kurve) aber auch auf andere Weise, die einen, indem sie sie einen sich bewegenden Punkt nennen, die anderen eine Größe, die nur nach einer Richtung ausgedehnt ist. Aber unsere Definition ist vollkommen zutreffend, da sie das Wesen der Linie ausdrückt; wer sie aber einen sich bewegenden Punkt nannte, möchte *vom zeugenden Prinzip* her Licht über sie verbreiten, und er beschreibt nicht jede Linie, sondern *nur die immaterielle*. Denn diese erzeugt der Punkt, der selbst keine Teile hat, aber Ursache des Bestandes des Geteilten ist.“ Denn der Punkt hat „Lage“, und verschiedene „Lagen“ kennzeichnen eine „Bahn“ des Punktes, die man „Linie“ nennt. „Die Bewegung aber zeigt den Ausgang an und die zeugende Kraft, die unvermindert auf alle Ausdehnung sich erstreckt, selbst unveränderlich verharret, aber allem Geteilten *das Sein* verleiht.“

Und jetzt führt PROKLUS die obige Lehre der Pythagoreer über den Punkt hier weiter aus, indem er fortfährt: „Der Punkt ist nämlich zweifacher Art: *entweder für sich, oder in der Linie*, und da er einzig und allein Grenze ist, *ohne ein Ganzes oder Teile zu haben, kommt er dem höchsten Seienden gleich und ist der Einheit* (der Arithmetik) *gleichgeordnet*.“ Der Punkt ist also mit die *höchste Gattung der Mathematik*, die *höchste Seinsgattung* und insofern *Kategorie der Mathematik* schlechthin, wie die Einheit. Was wir also oben über die höchsten Gattungen gesagt haben, das findet sich hier bei PROKLUS auch für den Punkt ausgesprochen und kann durch keine moderne Interpretation wegdisputiert werden. Achtet man auf diese *kategoriale Stellung der ersten Gebilde und Urgestalten der Mathematik*, so findet man in ihnen die wirklichen Sinnträger des Mathema-

tischen überhaupt. Diese kategoriale Stellung, die diese Gebilde haben, entfernt sie auch notwendig von aller gewöhnlichen Art der „Definition“ und rückt sie eben in das Gebiet des allein Schaubaren, des Intelligiblen schlechthin. Das kommt auch bei PROKLUS in der folgenden Beschreibung der Kurve unzweideutig zum Ausdruck: „Die *Linie* aber, die als erste Teile und ein Ganzes hat, die zugleich einfach ist wegen der Ausdehnung in einer Richtung und zweifach wegen ihres Ausganges: ist sie nämlich *unbegrenzt*, so hat sie Anteil an der unbegrenzten Zweiheit, ist sie aber *begrenzt*, so bedarf sie zweier Grenzen . . . Deshalb also trägt sie den *Ganzheitscharakter* in sich und erzeugt jene *Ordnung*, die ausgedehnte Einheit ist und zugleich Zweiheit.“ Man glaubt in diesen Formulierungen CUSANUS zu hören.

Und nun versucht PROKLUS gerade *jene höchsten Gattungen*, die er verwendet hat, noch näher ontologisch zu bestimmen, indem er ausführt: „Denn sie (die Linie) war es, die den Ausgang in die *Länge* hervorbrachte, die gestreckte Ausdehnung nach einer Richtung mit der Teilhabe an der Zweiheit. Die *Fläche* aber, die Dreiheit und Zweiheit ist und *Aufnahmeort der ersten Figuren* und die zuerst *Figurengestalt* annahm, gleicht in erster Linie der dreifach ausgedehnten Natur, die alles Sein umschließt, irgendwie aber auch der diese trennenden Zweiheit. Der *dreidimensionale Körper* aber, der durch die alle Verhältnisse in sich begreifende Vierzahl bestimmt ist, *wird auf jene Seinsordnung bezogen* . . .“ — Dies ist die Lehre der Pythagoreer, die bei PROKLUS so lautet: „Daß aber der Punkt der Einheit, die Linie der Zweiheit, die Fläche der Dreiheit nachsteht, zeigt irgendwo PARMENIDES, der der Einheit zuerst das Viele und dann das Ganze abspricht. *Geht aber das Viele dem Ganzen vor, dann auch die Zahl dem Zusammenhängenden*, die Zweiheit der Linie und die Einheit dem Punkt. *Denn der das Viele negierende Begriff kommt der Einheit zu, die das Viele erzeugt*“ (also genau wie später bei CUSANUS die Ableitung der Mannigfaltigkeit aus unendlicher Einheit); „*der Begriff aber, der das Viele und das Ganze negiert, dem Punkte*, durch den alles Ausgedehnte existiert. Denn von diesem (dem Ausgedehnten) sagt man, es habe Teile.“

36. Und jetzt folgt in der 3. Definition des EUKLID: „*Die Grenzen der Linie sind Punkte*“, gleichsam die *Synthese* der beiden ersten Definitionen im Zusammenhang mit den seinsgründenden Prinzipien. Das *Peras* wird für die Gebilde als Sinn- und Seinsträger entscheidend. „Alles Zusammengesetzte empfängt vom Einfachen und alles Geteilte

vom Unterteilten seine Begrenzung, und deren Abbilder werden in den mathematischen Prinzipien vorgelegt.“ So beginnt PROKLUS seinen Kommentar zur 3. Definition des EUKLID. Das *Bausteinprinzip* der Griechen tritt dabei in einer Weise in Erscheinung, die charakteristisch ist und nicht nur methodisch von Bedeutung, sondern auch wesentlich für das Sein der Dinge. „In den immateriellen Seinsformen aber existiert *a priori* die ungeteilte Idee des Punktes“, so fährt PROKLUS fort. „Deshalb sagt man auch, daß in den Abbildern die Punkte, die Ende und Anfang der Linie einnehmen, sie begrenzen. Dort also ist die Grenze vom Begrenzten gesondert, hier aber ist sie zweifach: denn sie existiert in dem Begrenzten selbst. Und das erbringt wohl einen vortrefflichen Beweis dafür, daß die Ideen, solange sie in sich bleiben, vermöge ihrer Ursächlichkeit den Vorrang haben vor den teilhabenden Dingen, wenn sie sich aber jenen hingeben, eine Seinsweise annehmen, die deren Beschaffenheit entspricht . . .“ (s. oben).

Dieser Standorte wollen wir uns auch erinnern, wenn wir die Definition der Geraden durchgehen, die bisher immer noch nicht verstanden wurde, weil man gerade auf diese ontologischen Bezüge in der Mathematik nicht geachtet hat. Diese Definition, die 4. EUKLIDISCHE des 1. Buches, schließt jetzt unmittelbar an und lautet: „Eine Linie ist gerade, wenn sie gleich ist dem Abstand ihrer Endpunkte (— wenn sie auf gleicher Strecke liegt, wie ihre Endpunkte; — wenn sie zusammenfällt mit der Entfernung zwischen ihren Endpunkten —).“

Diese Definition des EUKLID hat zu allen Zeiten der Mathematik große Schwierigkeiten bereitet, und es war vielen unerfindlich, welchen Sinn sie haben sollte. Eine große und umfangreiche Literatur ist darüber entstanden. Nie aber hat man diese Definition in den Zusammenhang des spezifisch PLATONISCHEN Aufbaus der EUKLIDISCHEN „Elemente“ hineingestellt, sondern immer für sich betrachtet, ohne Berücksichtigung der Ideenlehre und ohne Einbeziehung der seinsmäßigen Bezüge und der seinsgründenden Prinzipien *Peras* und *Apeiron* der griechischen Mathematik überhaupt. PROKLUS gibt diese Zusammenhänge und man sollte sie jetzt, wo das ganze Werk in einer deutschen Ausgabe zugänglich ist, endlich einmal auch zu verstehen und einzuordnen versuchen. PROKLUS beginnt seinen Kommentar zu dieser Definition mit einer Einteilung der Kurven vom Standpunkt des *Peras* und *Apeiron* aus. „Es scheint aber die Kreislinie der Grenze zugeordnet zu sein und zu den anderen Linien in demselben Verhältnis

zu stehen, wie die Grenze zu allem Seienden . . . Die Gerade aber fällt unter die *Unbegrenztheit*: denn wenn sie auch ins Unendliche verlängert wird, *so hört sie doch nicht auf* . . . Deshalb hat auch die Seele *das Gerade*“ (man bemerke jetzt wieder, wie es allein auf die *höchsten Gattungen* ankommt) „und *das Runde a priori* ihrem Wesen nach in sich.“

„Die Definition der Geraden hat aber EUKLID so gegeben, wie wir sie hierher gesetzt haben, und er will damit zum Ausdruck bringen, daß allein die Gerade denselben Abstand hat wie die Strecke zwischen den sie begrenzenden Punkten . . . Deshalb sagt man auch allenthalben nach einer gemeinen Redensart, diejenigen, die den geraden Weg gingen, täten keinen Schritt zuviel, die aber nicht, gingen weiter als notwendig. PLATON definiert die *Gerade als eine Linie, deren Mitte den Enden symmetrisch gegenüberliegt*. ARCHIMEDES hinwiederum definierte die *Gerade als kürzeste Linie von allen, die dieselben Endpunkte haben*. Auch alle anderen Definitionen der Geraden laufen auf denselben Sinn hinaus . . .“

Soweit betrifft der Kommentar des PROKLUS zur 4. Definition das Wesen der Geraden. Es kommen aber in den Kommentaren zu den Propositionen des EUKLID noch klare Darlegungen vor, die die Gerade betreffen, und sie wollen wir ob ihrer Wichtigkeit noch anführen. Sie hängen direkt mit der Eigenschaft der *Geodätischen* zusammen und erinnern direkt an die erste Überlegung von BERNOULLI zur Aufstellung und Definition des Begriffs der geodätischen Linien überhaupt. Im Anschluß an die 1. Proposition und den dort vorgebrachten Einwand sagt PROKLUS im Kommentar: „Hierauf ist fürs erste zu sagen, daß dieser Satz, zwei Geraden haben keine gemeinsame Schnittstrecke, in gewissem Sinne in den *Prinzipien* yorweggenommen wurde: denn die Definition der Geraden schließt ihn in sich, wenn anders eine Gerade ist, die die gleiche Lage hat wie ihre Endpunkte. Denn daß der Abstand der Punkte mit der Geraden gleich ist, macht die Verbindungslinie zwischen ihnen zu einer *einzigsten, kürzesten*; würde man sie daher teilweise mit der anderen zusammenpassen, so wäre sie auch im übrigen mit ihr kongruent. Denn vollkommen ausgedehnt, muß sie wegen ihrer Kürze ganz mit der ganzen zusammenfallen.“

Damit ist bei diesem Satz *das Gerade* in seiner *kategorialen Einordnung* als ein Mittleres, als Übergang und Grenzlage zwischen dem *Konkaven* und *Konvexen* indirekt „definiert“, und zwar *von höchsten Seinsgattungen aus*. Auch im Kommentar des PROKLUS zur 4. Proposition des EUKLID tritt diese Stellung der Geraden nochmals sichtbar auf, wenn es dort heißt: „Es umschließen also nicht zwei Geraden einen Raum . . . Der Grund davon liegt darin, daß die Gerade die *kürzeste* ist von allen, die dieselben Endpunkte haben. Das *Kleinste* ist aber immer nur eines und wird stets zum Maßstab für alles andere. Wie der rechte Winkel, der nur einer ist, zum Maße für die unbegrenzte Zahl der anderen Winkel wird, denn durch diesen finden wir auch die anderen, so dient auch die Gerade zum Maße für die ungeraden (Linien).“

Und jetzt die *kategoriale Hauptstellung* der Geraden im Kommentar zur 15. Proposition des EUKLID bei PROKLUS: „Es scheint aber dieses 15. Theorem (von der Gleichheit der Scheitelwinkel, die zwei Geraden bilden) sein Vertrauen zu setzen auf die *Gleichmäßigkeit der Geraden* und ihre *vollkommene Spannung*, weil Linien, die sich so verhalten und gegenseitig schneiden, notwendigerweise ähnliche, ja dieselben Neigungen zueinander auf beiden Seiten haben müssen.... Bei den geraden Linien aber bewirkt die *vollkommene Dehnung Gleichheit des Abstandes der Abschnitte der einen Geraden von denen der anderen*“. Diese Stelle steht für die Geradendefinition im Sinne EUKLIDS und der Griechen überhaupt zentral und enthält alle Elemente, die bei BERNOULLI zu ihrer Verallgemeinerung der *geodätischen Linien* führen. „Die *vollkommene Dehnung bewirkt Gleichheit*“ im Sinne eines *symmetrischen Prinzips* unseres Geistes, der ideell anschaut und begrifflich ergreift und beide Tätigkeiten immer zusammen und in einem vollführt und vollzieht. Nochmals tritt diese geistesgeschichtlich so bedeutsame Formulierung bei PROKLUS auf in der folgenden Formulierung:

„Das sind also die *geometrischen Beweise*. Es ist aber klar, daß die Ursache dieses Akzidens zu sehen ist in der Vergrößerung oder Verkleinerung der dem Winkel gegenüberliegenden Seite selbst. Ist sie nämlich größer, so erweitert sie den Winkel; wird sie aber kleiner, verkleinert sie auch diesen und *zieht ihn auf den engeren Raum zusammen*. Der (innere) Grund hiervon ist die *vollkommene Dehnung der Geraden*. Denn vollkommen gedehnt verändert sie auch nach Maßgabe ihrer eigenen Vergrößerung und Verkleinerung die Größe der Winkel.“ (Aus dem Kommentar zur 18. Proposition des EUKLID.)

Dies möge genügen, um die Gerade im Sinne der griechischen Geometrie zu charakterisieren. Auch wir Modernen könnten daraus noch einiges lernen, wie mir scheint.

37. PROKLUS setzt dann im Anschluß an die 5. Definition EUKLIDS seine kategorialen Charakteristiken der Urgestalten des Mathematischen fort. Diese 5. Definition lautet: „*Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.*“ — „Auf den Punkt und die Linie folgt die Fläche mit zweifacher Ausdehnung in die Länge und Breite, aber ohne Tiefe, was ihr ein einfacheres Sein verleiht als dem dreifach Ausgedehnten. Deshalb hat auch unser Meister zu den zwei Ausdehnungen ein „nur“ hinzugefügt, da es eine dritte Ausdehnung bei der Fläche nicht gibt, und dieses Wörtchen hat dieselbe Bedeutung wie die Verneinung der Tiefe (s. oben), *damit er auch hier durch die Verneinung* oder den der Verneinung gleichwertigen Zusatz *den Vorrang der Fläche* gegenüber dem Körper *in Hinsicht auf Einfachheit*, durch die positiven Bestimmungen, hingegen ihre untergeordnete Stellung gegenüber den ihr vorangehenden Gebilden bezeichne. Andere definierten sie . . . als *Begrenzung des Körpers*: denn das Begrenzende bleibt

hinter dem Begrenzten nur um eine Ausdehnung zurück; wieder andere als eine Größe mit zwei Ausdehnungen . . .“ Also auch hier wieder die *kategoriale Auffassung* des PROKLUS, die auch im Kommentar zur 6. Definition EUKLIDS: „*Die Grenzen der Fläche sind Linien*“ uns entgegentritt als *Synthesis*, wie sie uns oben bei Punkt und Linie entgegengetreten war. Es ist eine kunstvolle Anordnung, in der diese Definitionen mit Beziehung auf die Prinzipien *Peras* und *Apeiron* stehen, und nur wenn man diese ganz erfaßt hat, wird man auch die EUKLIDischen Definitionen voll werten können. Es heißt dort: „Von diesen ist wie aus Bildern zu entnehmen, *daß alles, was einfacher ist, als das ihm jeweils unmittelbar folgende Seiende, diesem immer Begrenzung und Ende verursacht*. Denn die Seele begrenzt und vollendet die Tätigkeit der Natur und diese die Bewegung der Körper . . . So wird denn auch hier (in der Mathematik) der Körper von der Fläche, die Fläche von der Linie, und diese wieder vom Punkte *begrenzt*; denn dieser ist die Grenze von allem“. Der Punkt erscheint also wieder als kategoriales Prinzip, und zwar als letztes und erstes, hinter das nicht mehr zurückgegangen werden kann.

Und in demselben Zusammenhang schließt jetzt die ebenfalls viel gelästerte EUKLIDische Ebenen-Definition 7 an: „*Eine Fläche ist eben, wenn sie dieselbe Ausdehnung hat wie die sie begrenzenden Geraden*.“ Auch sie muß durchaus kategorial aufgefaßt werden im Sinne einer höchsten Gattung, obwohl die Ebene hier formal als Artbegriff zur Gattung „Fläche“ erscheint. Dies kommt unzweideutig in der folgenden Haupteigenschaft der Ebene zum Ausdruck. Wenn man nämlich in ihr eine Gerade herumführt, so fällt diese immer ganz in die Ebene hinein. (Das Analogon mit dem Kreis auf der Kugel und damit jene Dualität auf der Kugel leuchtet dabei unmittelbar ein.) Bei PROKLUS wird diese Haupteigenschaft so formuliert: „Willst du also das *Wesen des Geraden in ebenen Flächen* untersuchen, so nimm die Ebene, mit der die Gerade vollkommen übereinstimmt; wenn aber das *Wesen des Runden*, so nimm die Kugel . . .“ . . . Daher gab EUKLID „auch seinem Werke den Untertitel *ebene Geometrie*“ und so muß man sich vorstellen, wie die Ebene vor ihm sozusagen ausgebreitet und vor seinen Augen liegt und wie sein Geist gewissermaßen alles darauf schreibt, indem die Phantasie sich sozusagen in einen Planspiegel verwandelt, *auf den die im Geiste vorhandenen Ideen ihre Bilder projizieren*.“

Auch die 8. Definition EUKLIDS, die des Winkels, arbeitet mit einer *höchsten Gattung*, die an *Peras* und *Apeiron* als ihre Seinsgründe angeschlossen ist, nämlich mit 'Neigung'. PROKLUS führt in seinem Kommentar dazu wieder das Wichtigste aus in der folgenden Form: „Den Winkel weisen einige der alten Autoren der *Kategorie der Relation* zu und bezeichnen ihn als die Neigung von Linien oder Flächen gegeneinander; andere beziehen auch ihn mit ein in die *Qualität*, wie das Gerade und Krumme; wieder andere führen ihn auf die *Quantität* zurück.“ All dies widerlegt PROKLUS und fährt fort: „... so müssen wir im Anschluß an unseren Meister die Behauptung vertreten, der Winkel sei nichts von dem Genannten an und für sich, *er verdanke vielmehr sein Sein der Vereinigung all dieser Kategorien* ... und so verhält es sich auch (mit der einfachsten Figur der Geometrie) mit dem Dreieck.“

38. Dies wird nun im einzelnen ausgeführt und führt auch in den Kommentaren zu den folgenden Definitionen EUKLIDS, die sich auf den Winkel beziehen, in diesem Sinne weiter. Der *kategoriale Gedankengang* wird auch im Kommentar zur 10.—12. Definition fortgeführt, wobei insbesondere die Folgerichtigkeit und Ordnung zu beachten ist, mit der PROKLUS auch die Frage klärt, *warum es nur drei Arten von Winkeln gibt*: weil eben alle Winkel am rechten Winkel gemessen werden und von ihm ihr Maß empfangen. Direkt klassisch ist die folgende pythagoreische Einteilungsbegründung im Kommentar zur 10.—12. Definition, die wir, *weil sie das Übergreifende der Prinzipien Peras und Apeiron so deutlich zeigt*, doch hierher setzen wollen: „Die Pythagoreer führen die Lösung der Frage bezüglich der dreifachen Einteilung (der Winkel in rechte, stumpfe und spitze) auf die Prinzipien zurück und wissen so ohne Schwierigkeit Gründe anzuführen für diesen Unterschied der ... Winkel. Denn da von den Prinzipien das eine die Grenze zum Wesen hat und seinen Schöpfungen Ursache ist der Begrenzung und der Identität, der Gleichheit und überhaupt all dessen, was zum besseren Komplex gehört, das andere aber *unbegrenzt* ist und den von ihm Erzeugten den Ausgang ins Unendliche verleiht und Mehrung und Minderung und Ungleichheit und jegliche Art von Andersheit und überhaupt die Reihe des Unvollkommeneren eröffnet, und da nun auch die Winkel diesen Prinzipien ihr Sein verdanken, so hat deshalb ganz natürlich die *von der Grenze herrührende Idee* den rechten Winkel gebildet, der allein der Gleichheit und Ähnlich-

keit mit jedem anderen rechten Winkel unterworfen und immer fest begrenzt ist, immer derselbe bleibt und weder Vergrößerung noch Verkleinerung zuläßt. *Die Idee aber, die von der Unbegrenztheit herkommt, die zweite Stelle einnimmt und die Zweizahl in sich hat, ließ auch zwei Winkel ausgehen „rechts“ und „links“ vom Rechten, durch Ungleichheit getrennt, die in Hinsicht auf Größer und Kleiner und Mehr und Minder unbegrenzte Bewegungsfreiheit haben, da der eine mehr und weniger stumpf, der andere mehr und weniger spitz sein kann . . .“*

Man sehe in diesen Darlegungen nicht nur auf die darin enthaltenen metaphysischen Spekulationen, sondern in der Hauptsache auf die Tatsache, daß es den Griechen ein Bedürfnis war, *auch eine so einfache Einteilung wie die der Winkel restlos auf die seinsgründenden Prinzipien Peras und Apeiron zurückzuführen, ein Bestreben, das sie auch bei der Einteilung der Dreiecke geleitet hat, ja, das im ganzen EUKLIDISCHEN Aufbau für die Einteilung der gesamten figuralen Welt der Geometrie obwaltet*, wenn man nur einmal darauf achtet oder darauf zu achten hingewiesen worden ist. Immer west in diesen Einteilungen das Sein der Prinzipien mit; sie sind niemals *bloße Klassifikation*, wie in der heutigen formalen Mathematik, sondern beziehen wesentlich ihre Einteilungsgründe, ihre inneren Begründungen überhaupt, aus den Seins-Prinzipien. Ganz deutlich kommt dieses *kategoriale Verhältnis der Griechen zu den höchsten Gattungen* auch in der anschließenden Stelle zum Ausdruck; es ist spezifisch für die *griechische mathematische Denkweise* überhaupt und kann niemals mehr abgestritten werden, wie dies in den letzten Jahrzehnten wiederholt (hauptsächlich durch die Logistik) geschehen ist, wo man die Griechen für die Deckung des formalistischen Ansatzes in der Mathematik in Anspruch genommen hat. Es heißt dort bei PROKLUS: „*. . . daß EUKLID, als er sich die Definition des rechten Winkels zum Ziele setzte, eine Gerade nahm, die auf einer anderen Geraden senkrecht stand und zwei gleiche Nebenwinkel bildete. Daß er aber den spitzen und stumpfen Winkel nicht mehr definierte, indem er eine Gerade nahm, die nach der einen oder anderen Seite sich neigte, sondern mit Bezugnahme auf den rechten Winkel. Denn dieser ist das Maß auch für diejenigen, die keine rechten Winkel sind, wie die Gleichheit das Maß ist auch für das Ungleiche*“ (s. Allgemeine Einführung oben).

Die folgenden EUKLIDischen Definitionen von „Grenze“ und „Figur“ haben wir schon im vorhergehenden Abschnitt gründlich besprochen und angeführt, was PROKLUS in den zugehörigen Kommentaren dazu zu sagen hatte. Jene Ausführungen sind aber auch im gegenwärtigen Zusammenhang so grundlegend für das Verständnis der *Gestaltlehre* des PROKLUS, daß es nötig ist, sich jene Formulierungen im einzelnen nochmals anzusehen. Interessant ist dann wieder die Projektion des Ganzen genau so wie bei KEPLER, wie bei KOPERNIKUS, wenn es im Kommentar zur 20.—23. Definition bei PROKLUS heißt: „*Deshalb ist auch die Welt durch diese Figuren in hervorragender Weise geordnet und erhielt von ihnen ihr Sein, da ja an Bewegung und Veränderung ihre Existenz geknüpft ist.*“ Die nachfolgende Einteilung der Dreiecke im Kommentar zur 24. bis 29. Definition des EUKLID in genau sieben Arten läßt wieder die schon oben ausgeführte Bindung *kategorialer* Art an die Prinzipien ganz deutlich werden.

* * *

39. Wir kommen zu den Postulaten und Axiomen EUKLIDS und zu den Darlegungen, die PROKLUS an sie knüpft. Sie müssen im Rahmen der gesamten Mathematik als *fundamental* betrachtet werden. Im Mittelpunkt steht das Symmetrieprinzip der Gleichheit, dem vor allen Dingen für alle Bereiche des Mathematischen *konstituierende* Kraft zukommt. Es ist eine *Symmetrie des menschlichen Geistes*, die wir in der Idee der Gleichheit antreffen, und wenn sich irgendwo der Geist selbst in seiner Struktur am reinsten spiegelt, dann ist es in dieser Idee, deren Tiefenwirkungen wir jetzt bei EUKLID im Rahmen seiner Gestaltlehre der Mathematik aufsuchen wollen. Nach allgemeinen Darlegungen über das Wesen von Postulat und Axiom, über ihre Gemeinsamkeiten und über das, worin sie sich unterscheiden, folgen jetzt zuerst die Postulate EUKLIDS und ihre Kommentierung durch PROKLUS.

Die Forderungen bestehen allgemein darin, daß die Möglichkeit der *expliziten Ausführung einer gedanklichen Konstruktion* gefordert wird. Jede Forderung EUKLIDS bezieht sich immer auf ein Konstruktives. Es steht bei ihm in all seinen Möglichkeiten noch ungebrochen da. Die erste Forderung ist die des Habens eines gedanklichen „*begrenzten Lineals*“ als Konstruktionsmittel. Die zweite Forderung ist die des Habens eines gedanklichen „*unbegrenzten Lineals*“ als Konstruktionsmittel. Und die dritte Forderung endlich

ist die des Habens eines für alle Möglichkeiten ausreichenden „*ideellen Zirkels*“ als Konstruktionsmittel. Damit werden in den EUKLIDischen Postulaten die *ideellen Werkzeuge* der geometrischen Konstruktion gefordert, die man als die klassischen überhaupt anspricht. Hat man sie und ihre Verwendung, so kann die Forderung der Möglichkeit einer gedanklichen Konstruktion überhaupt erst erwogen und abgesteckt werden. Verdeutlichen wir uns den an den seinsgründenden Prinzipien teilhabenden Sinn der EUKLIDischen Postulate einmal am ersten Postulat: „*Es wird gefordert, daß man von jedem Punkt zu jedem Punkt eine Gerade ziehen kann.*“

EUKLID setzt die Ausführbarkeit der Konstruktion zwar als Postulat, sie fordert er eigentlich; die Möglichkeit für die Ausführbarkeit aber durch Gestalten von Sinn und Bedeutung nimmt er auf Grund seiner früheren Definitionen von „Punkt“ und „Gerade“ hier als gegeben an. Aber auch diese Möglichkeit ist problematisch, wenn wir kritisch sind; sie ist von vorneherein weder durch Denken, noch durch Vorstellung verbürgt. Daher müssen erst die inneren Gründe für das Bestehen- oder Nichtbestehenkönnen einer solchen Möglichkeit aufgewiesen werden. Wir sehen diese Gründe in einer Einsicht, die sich begrifflich und gestaltlich vielleicht so fassen läßt: Wenn die Existenz zweier Punkte in ihrem Verschiedensein der Lage in Begriff und Gestalt angenommen und zugegeben wird, so besteht nach dem, was wir nachher über die *Idee der Gleichheit* und über die *Idee der Isomorphie* zu sagen haben werden, sicher die Möglichkeit, diese beiden begrifflich und gestaltmäßig miteinander zu verknüpfen durch eine höhere Art logischer und gestaltlicher „Copula“, d. h. aus dieser Zweiheit von Elementen eine neue, begriffliche und gestaltliche Einheit herzustellen, gleichsam die Zweiheit als neue Einheit, als neues „Element“ zu ‚sehen‘. Dadurch wird der Gegenstandsbereich „Punkte“ erweitert zu einem Gegenstandsbereich „Punkte und Gesamtheit von je zwei Punkten“ nach Begriff und Gestalt, also zu einem „Feld“ aus „Punkten“ und „Geraden“. *In dieser Erweiterung des Gegenstandsbezirks zu einem Feld, d. h. zu einem Bereich von Objekten, die logisch und gestaltlich gegenseitig voneinander abhängig sind, in einer gewissen „Funktionsbeziehung“ zueinander stehen, sehen wir den eigentlichen Grund für das Bestehen der Möglichkeit der geforderten gedanklichen Konstruktion. Genau denselben Ansatz macht auch KANT in anderem Zusammenhange, wie wir in der allgemeinen Einführung bereits dar-*

gelegt haben. Dies scheint vollends deutlich zu werden, wenn man einmal noch die folgende Überlegung anstellt.

Primär könnte man natürlich allein im Gegenstandsbezirk „Punkte“ bleiben und ihn nicht zu einem „Feld“ erweitern. Die „Punkte“ blieben dann „mathematische Einsiedler“ und könnten nicht in Wechselwirkung zueinander treten. Dadurch aber, daß man den Gegenstandsbezirk „Punkte“ zu einem Feld erweitert und damit eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen je zwei Elementen schöpferisch erzeugt und vollzieht, *ist die Möglichkeit des Konstruktiven überhaupt erst gegeben*, d. h. damit erst wird die Möglichkeit der geforderten gedanklichen Konstruktion auch existentiell gewährleistet, dies sowohl begrifflich, wie gestaltlich.

Im Rahmen der Entwicklungen des PROKLUS kommt dies ebenfalls heraus, wenn vielleicht auch in all zu metaphysischer Verkleidung, so daß man den wahren Kern dessen, was er im Kommentar sagen will, nicht sogleich sieht. Jetzt aber dürfte die folgende Stelle bei PROKLUS keine Schwierigkeiten mehr bereiten: „Es scheint aber die erste dieser drei Forderungen *in Bildern* uns klarzulegen, *wie das Seiende von seinen ungeteilten Ursachen umschlossen und begrenzt wird*, und daß es schon vor Beginn seiner Existenz, allseits von diesen umfaßt ist. *Denn bestehen die Punkte, so ist die Gerade die Verbindung von dem einen zu dem anderen und wird von ihnen begrenzt und zwischen ihnen eingeschlossen*“. Hier haben wir die Andeutung zur *Felderweiterung* direkt vor uns. „Die zweite Forderung, *die wie das Seiende, verbunden mit den eigenen Prinzipien, zu allen Ausgängen hervorgeht*, wobei es den Zusammenhang mit jenen wahrt und von ihnen sich nicht losreißen läßt, aber vermöge der unendlichen Kraft der Ursache veranlaßt wird, nach allen Richtungen auszugehen. Die dritte Forderung endlich zeigt uns, wie die Ausgänge wieder zurückkehren zu den eigenen Prinzipien. Denn die Drehung des sich Bewegenden um den bleibenden Punkt, die den Kreis ausmacht, sinnbildet die Rückkehr im Kreise.“

Geschlossener und enger kann also die Bindung der mathematischen Gebilde an die seinsgründenden Prinzipien *Peras* und *Apeiron* nicht mehr gestaltet werden. Bei PROKLUS ist dies bis zu einem Höchstmaß erreicht.

Es folgt die 4. Forderung EUKLIDS von der Gleichheit aller rechten Winkel. Er dient bekanntlich als *kategoriales Maß* für alle Winkel schlechthin, wie wir bereits oben gesehen haben. Daher ergänzt

PROKLUS im Kommentar zu dieser Forderung jetzt lediglich: „Es geht aber auch aus dieser Forderung klar hervor, daß der rechte Winkel der Gleichheit verwandt ist, wie der spitze und stumpfe der Ungleichheit. Denn der rechte Winkel ist (kraft Definition) wesentlich der Gleichheit zugeordnet: denn beide unterstehen der *Grenze*, wie auch die Ähnlichkeit; der spitze und stumpfe Winkel aber der Ungleichheit wie auch die Unähnlichkeit. Denn sie kommen von der *Unbegrenztheit* her. Daher kommt es auch, daß die einen auf die Quantität der Winkel schauen und den rechten gleich dem rechten nennen; die anderen aber im Hinblick auf die Qualität von Ähnlichkeit sprechen: *Denn was bei den Quantitäten die Gleichheit, das ist bei den Qualitäten die Ähnlichkeit.*“

Damit ist von PROKLUS wieder ein fundamentaler Gedanke ausgesprochen, den wir nachher bei der Idee der Gleichheit und bei der Isomorphie wieder antreffen werden.

Als 5. EUKLIDISCHE Forderung folgt das berühmte *Parallelenpostulat*, das zu der Entdeckung der Nichteuklidischen Raumformen Anlaß gegeben hat. Diese Entwicklung ist bekannt und braucht hier nicht näher dargelegt zu werden (s. unsere Kommentare).

* * *

40. Wir kommen zu den EUKLIDISCHEN *Axiomen*. Das erste lautet: „*Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind auch einander gleich.*“

In diesem ersten EUKLIDISCHEN Axiom sehen wir bereits etwas ganz Prinzipielles: Einerseits steht darin natürlich implizit das logische Prinzip der *Identität*: $A = A$; andererseits aber ist darin schon genau die *gesetzmäßige Funktion* erkannt, die der *Idee der Gleichheit* im Mathematischen als *Symmetrieprinzip unseres Geistes*, der sich in der Mathematik selbst betrachtet, zukommt: Die Einteilung der mathematischen Dinge als Klassenbegriffe. Die Idee der Gleichheit ist mathematisch gekennzeichnet durch *notwendige und hinreichende Bedingungen*, durch Eigenschaften universeller und allgemeinsten, kategorialer Art. Die Idee der Gleichheit im Mathematischen folgt bestimmten *Denk- und Gestaltungsgesetzen*. Es sind dies für jeden mathematischen Objektbereich die folgenden:

1. Die Idee der Gleichheit ist reflexiv:

Jedes mathematische Ding ist sich selbst gleich: $A = A$.
(Reflexivität der Gleichheitsidee; Identität.)

2. Die Idee der Gleichheit ist symmetrisch oder kommutativ:
Ist $A = B$, so ist auch $B = A$.

(Symmetrie oder Kommutativität der Gleichheitsidee.)

3. Die Idee der Gleichheit ist transitiv:

Gilt $A = B$ und $B = C$, so gilt auch $A = C$.

(Transitivität der Gleichheitsidee.)

Damit sind die drei fundamentalen Eigenschaften aufgewiesen, die die Idee der Gleichheit besitzt, und die die ganzen Objektbereiche des Mathematischen grundlegend beherrschen. Man kann sie die *Funktionalgesetze der Idee der Gleichheit* nennen.

Es gilt nun folgendes: *Jede andere mathematische, auf einen bestimmten Objektbereich sich erstreckende Idee, die denselben Charakter wie die Idee der Gleichheit hat, die also ebenfalls den drei genannten Gesetzen folgt, liefert, genau wie die Gleichheit, aus dem ursprünglichen Objektbereich einen neuen.*

Die bekannteste mathematische Idee, die das leistet, ist die der Äquivalenz. Darunter versteht man eine ideelle Verknüpfung der mathematischen Dinge a, b in einem Objektbereich dann, wenn für diese ideelle Verknüpfung allgemein und generell, formal-begrifflich, wie material-gestaltlich, folgende Gesetze vom Charakter der Idee der Gleichheit gelten:

1. $a \sim a$ (*Reflexivität der Äquivalenz*).
2. Ist $a \sim b$, so ist auch $b \sim a$ (*Symmetrie oder Kommutativität der Äquivalenz*).
3. Ist $a \sim b$ und $b \sim c$, so ist auch $a \sim c$ (*Transitivität der Äquivalenz*).

(*Beispiele:* Die Ähnlichkeit geometrischer Figuren (s. oben) ist eine Äquivalenz; die Gleichzähligkeit ist eine Äquivalenz; die Zahlenkongruenz (im Sinne von GAUSS) ist eine Äquivalenz.)

Dem mögen einmal noch einige fundamentale Beispiele aus den EUKLIDischen „Elementen“ überhaupt beigefügt werden, um die Wichtigkeit und Notwendigkeit dieser Dinge in einem mathematischen Aufbau gebührend gegenüber dem Formalismus zu unterstreichen.

1. *Transitivität des Parallelismus:* „Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel.“ (EUKLID, I. Buch, Satz 30).
2. *Parallelismus und Kongruenz:* „Strecken, welche gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind auch selbst gleich und parallel.“ (EUKLID, I. Buch, Satz 33).

3. *Transitivität der Proportion*: „Mit demselben Verhältnis zusammenfallende Verhältnisse fallen auch miteinander zusammen.“ (EUKLID, V. Buch, Satz 11).
4. *Äquivalenz der Ähnlichkeit*: „Derselben geradlinigen Figur ähnliche sind auch einander ähnlich.“ (EUKLID, VI. Buch, Satz 21.)
5. *Äquivalenz der Kommensurabilität*: „Was derselben Größe kommensurabel ist, ist auch einander kommensurabel.“ (EUKLID, X. Buch, Satz 12.)
6. *Äquivalenz des Parallelismus im Raum*: „Derselben Geraden parallele Geraden sind, auch wenn sie mit jener nicht in derselben Ebene liegen, einander parallel.“ (EUKLID, XI. Buch, Satz 9.)

Von diesen grundlegenden *Ideen der Gleichheit* oder den *Ideen vom Charakter der Gleichheit* aus ist es jetzt auch möglich, ihre begriffliche und gestaltliche Funktion zu kennzeichnen, die darin besteht, daß diese Ideen die *Erzeugung eines neuen Objektbereichs* aus einem ursprünglichen zu leisten imstande sind. Hierdurch ist nämlich involviert, zwei Dinge ihrem Begriff sowohl, als auch ihrer Gestalt nach, dann als begrifflich und gestaltlich voneinander verschieden anzusehen, wenn sie diesen Gesetzen vom Charakter der Gleichheit nicht folgen und nicht genügen.

Im ideellen Bereich des Mathematischen erkennt man insbesondere daraus, daß jede ideelle Verknüpfung mathematischer Dinge, die den ideellen Gesetzen der Idee der Gleichheit folgt und genügt (also die drei genannten fundamentalen Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besitzt) immer die Bildung von „*Klassen*“ oder „*Familien*“ ermöglicht.

D. h. aber: Wo auch immer im mathematischen Begriffs- und Gestaltbereich, der immer von der Idee der Gleichheit oder einer ihr entsprechenden aus konstituiert ist, die Idee der Gleichheit oder Vertretbarkeit selbst auftritt und auftreten muß, da hat sie die drei genannten fundamentalen Eigenschaften. Also ist mit allen mathematischen Dingen, die durch die Idee der Gleichheit oder eine ihr entsprechende Idee verbunden sind, eine Klassenbildung möglich, d. h. eine systematische Einteilung in Typen nach Begriff und Gestalt, nach formalem Sein der Dinge und nach ihrer (materialen) Bedeutung.

Dies führt auch zu der für die ganze Erkenntnistheorie grundlegenden Neufassung der *Idee der Isomorphie* in der folgenden Form⁷⁰⁾:

⁷⁰⁾ Vgl. dazu: M. STECK, Mathematik als Begriff und Gestalt, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942.

Liegt irgendein begrifflich und gestaltlich gegliederter und geordneter Objektbereich O_1 aus idealen Objekten, insbesondere mathematischen Gegenständen vor, die durch die Idee der Gleichheit und durch gewisse Verknüpfungen axiomatischen Charakters $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ miteinander verbunden sind und ist zu einem zweiten Objektbereich O_2 idealer Gegenstände eine eindeutige Zuordnung derart herstellbar, daß unter den Gegenständen von O_2 Verknüpfungen gelten, die denen von O_1 *vermöge der Idee der Gleichheit entsprechen*, so ist es (wegen der drei fundamentalen Eigenschaften der Idee der Gleichheit oder einer ihr entsprechenden) *immer möglich, die Dinge von O_1 den Dingen von O_2 selbst eindeutig so zuzuordnen, daß sich entsprechende Dinge beider Objektbereiche* (d. s. solche, die durch entsprechende Verknüpfungen und durch die Idee der Gleichheit miteinander verbunden sind) *selbst entsprechen oder korrespondieren*. Die beiden Objektbereiche O_1 und O_2 sind dann *isomorph*, d. h. gestaltlich oder dem Sinn und der Bedeutung nach gleich; die beiden Objektbereiche besitzen die *gleiche Struktur* oder sind totaliter gleichgestaltet, d. h. mit Gestalten gleicher Struktureigenschaften erfüllt.

Die vermöge der Idee der Gleichheit ermöglichte eindeutige Zuordnung beider Objektbereiche selbst ist eine *isomorphe Abbildung* oder ein *Isomorphismus* von O_1 auf O_2 und, wegen der Symmetrie der Gleichheitsidee, *umkehrbar*, d. h. auch gleichzeitig eine isomorphe Abbildung von O_2 auf O_1 .

Dies könnte man den tiefsten Kern dessen nennen, was im 1. EUKLIDISCHEN Axiom über die Gleichheit und ihre Funktionalgesetze steht. PROKLUS charakterisiert die EUKLIDISCHEN Axiome über die Gleichheit in seinem Kommentar so: „Zur Kennzeichnung ihres eigentlichen Wesens und zur Feststellung, daß alle *zur gemeinsamen Gattung der mathematischen Disziplinen gehören*, ist zu sagen: Denn jedes von ihnen bewahrheitet sich nicht bloß bei den Raumgrößen, sondern auch bei den Zahlen, den Bewegungen und den Zeiten. Und das muß so sein.“ Denn sie geben eben *universelle Symmetrieeigenschaften unseres Geistes* überhaupt an und wieder. „Denn das *Gleiche und Ungleiche*, das *Ganze* und der *Teil*, das *Größere* und das *Kleinere* sind den getrennten und den zusammenhängenden Quantitäten *gemeinsam*. Die wissenschaftliche Betrachtung der Zeiten bedarf ihrer aller als *evidenter Sätze*, ebenso wie die der Bewegungen, Zahlen und Raumgrößen und bei allen diesen ist das Axiom *wahr*,

daß zwei Größen, die einer Dritten gleich sind, auch unter sich gleich sind und so auch jedes beliebige, das wir von den übrigen nehmen. *Unterschiedslos gebraucht sie ein jeder entsprechend seinem eigenen Gegenstand*, soweit dieser es fordert, der eine bei den Raumgrößen, der andere bei den Zahlen, der dritte bei den Zeiten. *Und so gestalten sich die Folgerungen in jeder Wissenschaft individuell, wenn auch die Axiome gemeinsam sind.*“

41. Es bleibt uns, abschließend noch die verstreuten Darlegungen zu sammeln, die sich im Texte des PROKLUS über Gleichheit und was zu ihr unmittelbar in Beziehung steht, finden. Im Kommentar zur 13. Proposition des EUKLID lesen wir noch: „Man kann aber auch hieraus wieder entnehmen, daß die Gleichheit auch für die Ungleichheit Maß und Grenze ist... Denn wie anders kommt es zur Harmonie, ja gewissermaßen zur Gleichheit der Welt des Werdens, die teilhat am Mehr und Weniger... und des Intelligiblen, wenn nicht durch Teilhabe, indem jene Prinzipien vermöge ihrer zeugenden Kräfte ausgehen und sich nur vervielfachen.“ Und im Kommentar zur 18. Proposition des EUKLID kommt wieder die *kategoriale* Stellung der Idee der Gleichheit so heraus: „Der Grund hiervon ist der, daß die einen von den Dreiecken lediglich von der Gleichheit (der Seiten oder Winkel oder beider) abstammen, andere lediglich von der Ungleichheit, wieder andere von beiden, da sie ihr Sein teils der Gleichheit, teils der Ungleichheit verdanken.“

Und abschließend zum dritten Buch des Kommentars des PROKLUS findet sich noch folgende bedeutsame Stelle, die auch in unserer Darstellung der Konkretisierung der allgemeinen Gestaltlehre der Mathematik, wie sie in dem PROKLEISCHEN Werk niedergelegt ist, den Abschluß bilden soll. Sie lautet: „Denn dreierlei ist mit der Existenz verbunden: Das Sein, das Dasselbige und das Andere (Die drei ersten Kategorien in PLATONS „Sophistes“), ebenso in den Quantitäten wie in den Qualitäten je nach der Eigenart ihrer Träger. Dadurch wird wie durch Bilder klar, daß jedes Dreieck mit sich selbst identisch und doch auch wieder von sich verschieden ist wegen der Vielheit, die in ihm sich findet, und daß alle miteinander identisch sind und doch auch wieder verschieden voneinander. Denn bei jedem einzelnen Dreieck findet man das Gleiche und Ungleiche und ebenso bei mehr als einem.“

Die Spannung von Sein und Möglichkeit, durch die Postulate im Reich des Konstruktiven eröffnet und kategorial an Peras und Apeiron gebunden, wird gleichsam geeint durch die Idee der Gleichheit, die alle mathematischen Bezirke durchwaltet und in symmetrienformender Weise die Gegenständlichkeit der Mathematik zur Harmonie zusammenschließt. Diese große Synthese, die wir jetzt in den einzelnen Abschnitten dieses II. Teils unserer Einleitung an Hand der Gedanken des PROKLUS nachzuzeichnen versucht haben, sie strahlt nun in den deutschen Geistraum aus und führt zu neuen Zusammenhänglichkeiten von Idee und Wirklichkeit einerseits, von mathesis universalis und scientia generalis andererseits. Krönend steht über allem, und seismäßig alles tragend die Leitidee der PLATONISCHEN Dialektik, in der die übergreifenden Prinzipien aller Wissenschaften beschlossen liegen. Ihre eigentlichen Strukturelemente wollten

wir dem heutigen Bewußtsein wieder nahe bringen und erreichen, daß sie wieder kritisch gesichtet und in die eigenen Gedanken- und Forschungsbezirke aufgenommen werden. Zu diesem Zwecke haben sich Herausgeber und Übersetzer die mühevollen Arbeit nicht verdrießen lassen, ein so altes Werk wie das des PROKLUS im neuen Gewande erstehen zu lassen als ein Vermächtnis an alle die, die wieder echte, ganzheitliche und eigenständige, die idealistische Wissenschaft und Geistigkeit überhaupt wollen.

5. Die Grundlagen eines mathematisch orientierten Idealismus im Prokleischen Werke

„Gehalt ohne Methode führt zur Schwärmerei,
Methode ohne Gehalt zum leeren Klügeln,
Stoff ohne Form zum beschwerlichen Wissen,
Form ohne Stoff zum hohlen Wähnen.“

GOETHE.

42. Die allgemeine Einführung in das Werk des PROKLUS hat die großen und weitausgreifenden Perspektiven, die es erschließt, in geistesgeschichtlicher und kulturmorphologischer Sicht erarbeitet. In den vorstehenden Einzelabschnitten des II. Teils der Einleitung habe ich einerseits die Leitgedanken des Werkes in der Originalfassung den generellen Positionen der allgemeinen Einführung zugeordnet, andererseits zu zeigen versucht, daß wir im EUKLID-Kommentar des PROKLUS die erste wesentliche bedeutsame und umfassende kategoriale Gestaltlehre der Mathematik vorfinden, die in ihrer Eigenständigkeit und Originalität als solche bislang nicht beachtet worden ist, am wenigsten von der Mathematik selbst. *In ihr sind die Grundlagen eines totalen mathematischen Idealismus enthalten.* Dies zu zeigen und durch die Werke markanter Forscherpersönlichkeiten des deutschen Geistraumes zu belegen, soll jetzt — soweit dies in der allgemeinen Einführung noch nicht geschehen ist — abschließend unsere Aufgabe sein. Wir werden damit jene Gedanken der allgemeinen Einführung im Grundsätzlichen abrunden und somit die gesamte Einleitung in das PROKLEISCHE Werk, wie wir sie bieten zu müssen glaubten, unter Aspekten sehen, deren Sinngehalte gerade für die heutige Zeit und ihr Suchen nach einer neuen Geistgestalt fruchtbar und bestimmend sein können. Wir erstreben dabei grundsätzlich die Formung und Bereitstellung der Grundelemente eines ganzheitlichen mathematisch orientierten Idealismus, der uns zu einer neuen Renaissance der Mathematik sowohl, als auch

des gesamten Geisteslebens des Abendlandes führen kann, in dem sich *die mathematische Denkweise als Symmetriegestalt des Geistes* überhaupt niederschlägt und zu erkennen gibt. Die „Umwertung aller Werte“, von der wir gesprochen, wird so zum ersten zur Bewahrung und Festigung dessen, was wir an bleibenden, bedeutsamen Gedanken von unseren geistigen Ahnen überkommen und ererbt haben; sie wird zum zweiten all das scheiden und trennen müssen, was einerseits zu Ganzheitlichkeiten, andererseits zu Einseitigkeiten des Geistes geführt hat, einerseits zu allsinnigen, andererseits zu einsinnigen Entwicklungen, um nur das Ganzheitliche und Allsinnige zu erhalten; sie wird zum dritten endlich die Wege und die neuen Elemente eines vollgültigen mathematisch orientierten Idealismus und damit die neue Ergreifung des ganzheitlichen und allsinnigen Strebens als neue Geistgewalt aufweisen und sichtbar machen müssen. Dies sind drei Fundamentalaufgaben, deren jede die Lösung der vorhergehenden voraussetzt. Der ersten aber steht als Fundament das PROKLEISCHE Werk und sein Gedankengehalt mit voran.

In allen drei Aufgaben, die, als Einheit begriffen und auch einer einheitlichen Lösung zugeführt werden müssen, west der neue, in seiner Sinnhaltigkeit wesentlich durch die anfänglichen Fundamentalphasen der Mathematik bestimmte *deutsche Humanismus des 20. Jahrhunderts*, zu dem sich Europa langsam zu bekennen anschickt. Möge uns das PROKLEISCHE Werk für seinen Auf- und Ausbau als eine gewichtige Grundlage dienen, die dann in der Hauptsache von deutschen Mathematikern, Philosophen und Naturforschern idealistischer Richtung, aber auch von den deutschen Künstlern verbreitert und vertieft und bedeutsam erhöht werden muß. Diese Grundlagen jetzt noch im Einzelnen in diesem Schlußabschnitt anzugeben und vor allen Dingen bewußt werden zu lassen, ist eine Aufgabe, die die genannten drei Fundamentalaufgaben als Einheit in sich begreift, und deren Lösung unumgänglich ist. Damit allein läßt sich nämlich — in geistesgeschichtlicher Beweisführung — die Begründung für die These finden, daß das PROKLEISCHE Werk über einen Zeitraum von fast anderthalb Jahrtausenden und ihre geistigen Komponenten hinweg in unsere Zeit hineinragt und als solches wesentliche Fundamente für die *Neuordnung der Geistformen in Europa* legen kann. Denn daß wir eine solche Neuordnung auch im Geistigen vornehmen müssen, wenn das gegenwärtige Ringen überhaupt einen Sinn haben soll, dürfte jedem Einsichtigen klar sein. Es handelt sich bei der

geistigen Neuordnung aber im Anfänglichen um eine neue *Orientierung des Geistes* und seiner Inhalte schlechthin.

Diese Orientierung des Geistes mit dem Ziel einer Neuordnung seiner gesamten Mächtigkeit überhaupt, muß natürlich am Geiste selbst, an festen Marken seines innersten Wesens vorgenommen werden, wenn es überhaupt eine 'Orientierung' sein soll. Diese Marken, Normen und Richtpunkte für die Ortung der Geistgestalt des Abendlandes als Träger idealistischer Geistigkeit überhaupt, sie sind mit im PROKLEISCHEN Werk zu finden. Als solche Haltepunkte und Festorte des Bewußtseins werden sie jetzt im Schlußabschnitt unserer Einleitung erscheinen müssen und uns den Entwurf einer neuen idealistischen Planung und Durchdringung des Wissenschaftlichen und des Künstlerischen ermöglichen. Leisten sie dies, so sind sie als unabdingbare und unentbehrliche, schlechthin notwendige Träger einer einheitlichen, wohlgefügteten, organisch gewordenen und totalen *Weltanschauung* aufgewiesen und zu werten und bilden als solche mit die Grundpfeiler der abendländischen Kultur — die gerade jetzt von außen her in höchster Gefahr ist — schlechthin, deren neuen Aufgang wir Deutschen durch das gegenwärtige Ringen erstreben und einleiten wollen. Auch im Geistigen der Lebensformen der Wissenschaften und der Künste geben Genies, die unser Volk hervorgebracht hat, die Richtung auf Neuentwicklungen an. Sie und ihr Wirken noch abschließend zu kennzeichnen, ist eine Forderung, die uns dieses alte ehrwürdige Werk des PROKLUS gleichsam auferlegt, um seine Gedanken gleichsam vor den Schranken des kritischen Geist-Gerichtes des 20. Jahrhunderts zu rechtfertigen und damit höheren geschichts- und geistformenden Mächten zu übergeben, die berufen sind, den neuen Aufgang¹ des Abendlandes in allen seinen Bezügen zu tragen.

*

*

*

„Der Intellekt ergreift nicht, was er nicht in sich selber findet.“

NIKOLAUS VON CUES in „De Venat. sap.“

43. Die allgemeine Einführung gab die großen geistesgeschichtlichen Sichten von einem Pol aus, um den sich gleichsam die Achsen des abendländischen Geistes überhaupt drehen. Die Einsichten des Deutschen NIKOLAUS VON CUES lieferten den Schlüssel zum Verständnis des PROKLEISCHEN Werkes überhaupt. Wir werden daher auch hier „

wo es darum geht, seine Tiefenwirkungen in unsere Zeit hinein zu erfassen, diesem ersten deutschen Humanisten, der die geistige Welt vor ihm aus den Angeln hob, anvertrauen und von CUSANUS ausgehend die Grundlegung eines neuen, wesentlich durch die mathematische Denkweise bestimmten Idealismus aufzeigen können. Die Universalität der Weltanschauung des Cusaners wird uns alle Einzelsichten freilegen, die wir im PROKLEISCHEN Werk vielfach als Konturen eines einheitlichen geistigen Bewußtseins nur angedeutet fanden, die aber als solche Umrisse natürlich den Kern und die Inhaltlichkeit dessen umgrenzen, was wir mit „Idealismus“ überhaupt zu bezeichnen gewohnt sind. Wenden wir uns also jetzt zuerst dieser Weltanschauung des Cusaners zu und vertrauen wir uns dabei wieder — wie in der allgemeinen Einführung — der Cusanus-Forschung, wie sie insbesondere E. HOFFMANN zu so herrlicher Blüte gebracht hat, an⁷¹⁾.

„Zu diesem Zwecke soll es uns nicht genügen, aus dem zweiten Buche der *Docta ignorantia*, wo der Philosoph sein Weltbild entwickelt, die neuen Züge und Momente dieses Bildes zusammenzustellen. Uns möge hier weniger interessieren, was Nikolaus sich ausdenkt als wie er es ausdenkt. Man kennt ihn auf allen Gebieten als Neuerer; nicht nur in Philosophie, Theologie und Mathematik, sondern auch in Philologie, Technik und Medizin. Derselbe Mann, der als einer der ersten Deutschen neben dem Lateinischen das Griechische und Hebräische erlernte . . . legte auch *erste Fundamente*, auf denen später die *Integralrechnung* aufgebaut werden konnte; derselbe, welcher dem Gottesgedanken der Mystik jene radikale Wendung gab, daß er einer Erkenntnislehre nicht mehr im Wege stand, sondern sie begründen half, *konstruierte* auch *das erste Hygrometer* aus trockener Wolle; der Wiederentdecker des logischen *Principium identitatis indiscernibilium* auf neuer Basis war zugleich der Mann, der als erster (ohne hier von dem antiken Vorbild etwas zu wissen) *den Puls mit der Wasseruhr zählte*. Man kann auch für die Kosmologie seine Tat in einem Satze zusammenfassen: *er rückte aus originellen Gründen die Erde aus ihrer früher angenommenen Ruhelage im Mittelpunkt der Welt und erkannte das Weltganze als eine grenzenlose, homogene Einheit.*“

⁷¹⁾ Die folgenden Anführungen sind der Abhandlung „Das Universum des Nikolaus von Cues“ (Cusanus-Studien I) von E. HOFFMANN (Sitz.-Ber. der Heidelberger Akad. d. Wiss. (phil.-hist. Kl.) Jhg. 1929/30, 3. Abhandl.) entnommen.

Damit war er der geistige Wegbereiter des NIKOLAUS KOPERNIKUS und seiner Tat und ermöglichte aus geistigen Untergründen heraus die Findungen, die JOHANNES KEPLER zum Begründer der modernen Himmelsmechanik werden ließen. „Was bedeutete ihm das Universum? Mit welchen gedanklichen Mitteln machte er es zum Gegenstand einer wissenschaftlichen Betrachtung? In welchem Zusammenhang mit den anderen Problemen seiner Philosophie stand das Problem des Universums?“ Und auf diese Fragen, die bei CUSANUS zentral stehen, gibt E. HOFFMANN die Antwort: „Das Universum ist ihm 'das Eine in der Vielheit'; . . . Das Universum ist der *Inbegriff des Seins*, des wahrnehmbaren und denkbaren, des sinnlichen und des unsinnlichen Seins.

Dieser universale Inbegriff kann unter drei Gesichtspunkten gedacht werden: erstens als das von Gott Verschiedene; zweitens als das in sich Totale; drittens als das durch einen Zweckbegriff mit Sinn Erfüllte.“

In allen drei Denkweisen des Universums finden wir schon hier bei CUSANUS die methodischen Formen wieder, die auch bei KEPLER und bei KOPERNIKUS leitend waren, und die teilweise schon im PROKLEISCHEN Werke wirksam sind, wirksam in der originären Verarbeitung PLATONISCHEN Gedankengutes und pythagoreischer Lehrstücke.

„Um dies zu zeigen“, fährt E. HOFFMANN fort, „und um klarzumachen, wie hier ein einheitliches *methodisches Prinzip* entdeckt ist, welches in neuartiger und umstürzender Weise *alle Provinzen des Denkens* durchdringen muß, trage ich in Umrissen drei Lehrstücke vor, für welche die *Docta ignorantia* die Grundlage bildet, auf der CUSANUS zeitlebens weitergebaut hat.

Das erste Lehrstück nennt sich *Coincidentia oppositorum* . . . CUSANUS pflegt die *Coincidentia oppositorum* klarzumachen an einem mathematischen Beispiel. — Der Inhalt des Quadrats a^2 ist arithmetisch rational; der Inhalt des Kreises πr^2 ist arithmetisch irrational. Ich kann beide endlichen Figuren nicht aneinander messen, ich kann die eine nicht in die andere verwandeln. Sie sind '*opposita*', zwischen denen eine '*comparatio*' zunächst nicht möglich ist. — Nun aber hat CUSANUS von seiner Studienzeit in Padua an die griechischen Mathematiker gelesen. Wie machen sie es, daß dennoch Quadrat und Kreis ineinander übergeführt, daß die *opposita* miteinander verglichen, ja zur Einheit gebracht werden können? — Die griechischen Mathe-

matiker haben die, wahrscheinlich im Problemzusammenhang mit dem PLATONISCHEN *πύρεσθαι εἰς οὐράν* entstandene *Exhaustionsmethode*. Sie schreiben dem Kreise ein Quadrat ein und lassen dies Viereck zum regelmäßigen Fünfeck, Sechseck usw. wachsen. Die Zahl $[n]$ der Ecken wird immer größer; solange n aber endlich bleibt, wird das Vieleck nie mit dem Kreise identisch. Sobald hingegen n als eine unendlich große Zahl gedacht wird, ist das n -Eck ein Kreis geworden, d. h. der Kreisinhalt ist ausdrückbar durch das absolut größte dieser regelmäßigen Polygone: --

Die Mathematik liefert also eine Erkenntnisart, welche es nicht bei der Opposition endlicher Gegensätze bewenden läßt, sondern welche die Komparation zwischen ihnen ermöglicht. Daher die einzigartige Rolle, welche CUSANUS der Mathematik für unser Denken zuschreibt . . . Die Mathematik zeigt einen Weg vom Relativen zum Absoluten, sie gibt eine *'abstracta veritas in ratione'* . . . Diese Methode des Mathematikers erweist sich als eine *'Visio mentalis'*, genauer als ein *'Recurrere ad visum intellectualem'*, worunter etwas *Überrationales* zu verstehen ist, aber nichts Mystisches, denn das *Überrationale* — später heißt es folgerichtig transzendental — „ist vom Rationalen her gewonnen . . . Jede einzelne Seite des n -Ecks bleibt inkomparabel mit dem ihr zugehörigen Kreis(bogen)abschnitt; erst der Gedanke des unendlichen Wachstums von n hebt den Gegensatz auf: es ist der Gedanke der unendlichen, d. h. *empirisch nie und nirgends* realisierbaren 'allergrößten' Vieleckigkeit.

Nun ist aber dies mathematische Beispiel mehr als ein Beispiel. Der Mathematiker kann in seiner mathematischen Denktechnik nur Wege gehen, welche *allgemein logisch* zu rechtfertigen sind. Das mathematische Denken wird daher von CUSANUS als *'Signifikation'* für rationales Denken überhaupt angesehen“ . . . Und es ist dieser ganze Gedankengang überhaupt „nur möglich, indem ich die *'Comparatio'* überkröne durch eine *'Superlatio'*. Subjekt und Prädikat im Urteil zur Einheit zu bringen, ist nur möglich mittelbar: durch Rekurs auf einen 'transzendenten' Begriff, welcher gestattet, da Einheit zu sehen, wo die elementare Logik nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten eigentlich unabänderliche Gegensätzlichkeit sehen müßte. *Abstraktes und Kontraktes können nur in einem Absoluten zur Einheit gelangen.* Das Absolute steckt also in jedem Urteil, wie die unendliche Figur in allen geometrischen Verfahrensweisen; aber das Absolute selber

ist in seinem Sein so gänzlich vom Abstrakten und Kontrakten der relativen Welt geschieden wie die unendliche Figur in ihrem Sein von allen endlichen. Absolutes und Relatives stehen zueinander genau in dem Verhältnis wie Maßstab und Gemessenes.

Es gibt keine kontinuierlichen Denkschritte vom Endlichen zum Unendlichen. Zwischen Comparation und Superlation fehlen alle Stufen. Die Superlatio überkrönt unmittelbar die Comparatio, ja alles Komparieren hat erst Sinn im Hinblick auf die Möglichkeit des Superlativs, des *'Maximum absolutum'*; aber das Unendliche selber, in welchem ich die gemessenen, verglichenen, endlichen Gegensätze koinzidieren lasse, ist jenseits aller Vergleichbarkeit mit dem Endlichen: *'Finiti et infiniti nulla proportio'*. Alles Vergleichen, alles Messen, also alles Erkennen und Wissen hört auf, sobald der Gegenstand des Wissens das Unendliche selber, das Absolute in seiner adäquaten Wesenheit sein soll. Weil Wissen Vergleichen ist, müssen die Objekte des Wissens grundsätzlich untereinander denselben Charakter haben; ich kann nur vergleichen, wo irgendeine *'Gleichheit'* (PLATONS *ισότης*) zugrunde liegt. Es besteht aber keine Gleichheit zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen. Superlatio ist nicht fortgesetzte Comparatio, sondern jene ist absolut, wie diese relativ ist.“

Man sieht in diesem einen Lehrstück des CUSANUS schon deutlich die Standorte auftauchen, die von KEPLER, von LEIBNIZ und auch von KANT eingenommen und durchschritten werden. Die Logik in ihrer alten ARISTOTELISCHEN Form reicht nicht aus. Sie selbst muß transzendiert werden, um das Absolute zu ergreifen und jedem Urteil seinen logischen Ort überhaupt anweisen zu können. „Mit dem logisch Allgemeinen bleiben wir immer noch in der homogenen Sphäre des Endlichen; Artbegriffe und Gattungsbegriffe, ja sogar die höchsten *'Universalialia'* gehören immer noch zum *'Universum'*“; auch die allgemeinsten Begriffe sind immer noch relativ, immer noch *'Welt'*. Mit dem absolut Unendlichen aber sind wir prinzipiell über die Welt hinaus, und eine *Kluft* ist gesetzt, *die durch keine diskursive Logik zu überbrücken ist*. Daher bleibt uns für das Unendliche nur die *negative Form des Wissens*“ — man vergleiche dazu schon die Darlegungen bei PROKLUS — „wie wir es ja/ auch nur negativ benennen können: als unendlich, unvergleichlich, unvergänglich usw.: *Unsere doctrina ist ignorantia*.“

Damit ist die ganze scholastische Logik, die auf ARISTOTELES allein und ausschließlich aufbaute, überwunden und diese Überwin-

dung hat die weitreichendsten Konsequenzen, die vor allen Dingen im deutschen Geistraum besonders deutlich als „Idealismus“ sichtbar werden. Denn „fällt nun aber die scholastische Logik, welche durch eine kontinuierliche Folge von Syllogismen bis zum Absoluten kommen will“ — insofern ist eben der mathematische Formalismus unserer Tage und die Logistik ebenfalls Scholastik —, „so fallen für die Wissenschaft, für das rational-relationale Denken alle jenen Zwischenglieder mit, welche vermöge dieser Logik als Übergangsstufen zwischen dem Endlichen und Unendlichen angesetzt sind ... Es fällt logisch alles, was Stufenkosmos der Hochscholastik heißt ... Und aus der neuen Logik ergeben sich bei CUSANUS selber bereits Schlußfolgerungen, die den Stoff zu späteren Konflikten in sich bergen. Das für die Kirche wichtige *Dogma, daß die Erde im Mittelpunkt der Welt und ihrer konzentrischen Schalen ruhe, wagt CUSANUS als logisch absurd anzugreifen*: das grenzenlose Universum kann gar keinen Mittelpunkt haben, er wäre etwas Absolutes in der Welt des Relativen ... Desgleichen ist für CUSANUS wie mit einem Schlage abgetan die Auffassung, die Erde sei ein unvollkommener, der Fixsternhimmel der vollkommene Teil des Kosmos, und irgendein Bereich zwischen beiden ein Teil von mittlerer Vollkommenheit. Hier zeigt sich in seiner Logik der *radikale Sieg des Platonismus* mit seiner grundsätzlichen Tmematik ... Der cusanische Gegensatz von Endlich und Unendlich verschmilzt mit dem platonischen von Idee und Erscheinung. Hier gilt die grundsätzliche Dualität. Etwas ist entweder Idee oder Erscheinung; zwischen beiden aber gibt es keine Halbidee.“

Damit aber haben wir bereits die zentrale Position bei CUSANUS erklommen, die im PROKLEischen Werk durchgeht und ihn zum ersten Schöpfer einer Gestaltlehre der Mathematik aus den beiden übergreifenden Prinzipien des *Peras* und *Apeiron* werden läßt. „Man sieht, wie es die von der syllogistischen und hierarchischen Logik emanzipierte Denkform des CUSANUS ist, welche einem“ KOPERNIKUS, „GALILEI und KEPLER den Weg bahnte, ihre Probleme zu stellen. *Der Revolution in der Astronomie ging die Revolution in der Logik voran.* (Dies gilt ganz unabhängig davon, inwieweit für CUSANUS der astronomische Kosmos noch der alte und der Fixsternhimmel noch die *octava sphaera* war. Zunächst handelt es sich um eine *Reformation der Logik, nicht der Astronomie*, und physikalisch wirkte sie sich bei CUSANUS selbst stärker aus als astronomisch. Er war, wie seine ganze Zeit, astronomisch interessiert und erregt; aber das war noch mehr Verdienst der Araber als des Abendlandes. *Dagegen daß im Abendland dann die Nova astronomia*“ (mit KEPLER) „*kommen konnte, lag an der neuen Logik, und die hatten die Araber nicht. Es genügte nicht, daß es exakte Astro-*

nomen gab wie TOSCANELLI; denn daß man subtilster Beobachter sein und trotzdem bei der ptolemäischen Denkform verharren konnte, zeigte noch TYCHO BRAHE.“).... „Jetzt herrscht PLATONS Begriff der ‘Teilhabe’ der Erscheinung an der Idee.... Die Erscheinung ist ‘Signum’ (vgl. PLATONS *σημεῖον*) für die Idee: das Zeichen kann besser oder schlechter sein. Aber das Zeichen bleibt stets Vertreter, Repräsentant. Die Grundtatsache der neuen Logik ist die Kluft zwischen den ‘signa sensibilia’ und der absoluten Idee, die sie vertreten... Es gibt keine Physik der Wertstufen. Alles Physikalische ist Erscheinung. Und alle Erscheinungen sind untereinander individuell verschieden; denn wären sie es nicht, so müßten sie am Absoluten in ‘präzis gleicher Weise’ partizipieren. Dies ist dem Begriffe nach ausgeschlossen. CUSANUS folgert aus der Methexis-Lehre unmittelbar das *Principium identitatis indiscernibilium*: Zwei gleiche Dinge in der Welt annehmen hieße, das Absolute (die Gleichheit) an der Stätte der Relativität aufsuchen.“

44. CUSANUS hat eine Reihe der grundlegenden Gedanken des PROKLUS zu Ende gedacht und in einer Weise erhöht, daß sie zu einem neuen Anfang in der Geistesgeschichte des Abendlandes überhaupt werden konnten. Und jetzt werden wir auch im zweiten Lehrstück des CUSANUS eine Reihe der methodischen Positionen finden, die bereits PROKLUS einnimmt und speziell für die Mathematik fruchtbar werden läßt. PROKLUS kann gleichsam nicht verallgemeinern, nicht generalisieren und in dieser Begriffsbildung das ganze Sein umfassen, sonst hätte er bislang als der bedeutendste Vorläufer des CUSANUS aufgefaßt werden müssen. Er haftet zu sehr noch am Anwendungsmäßigen seiner allgemeinen Gedanken auf mathematische Fragen; aber in der Anlage und Konzeption hat er wesentliche, von CUSANUS ausgebaute Standorte des Geistes bereits bezogen. Dies kommt auch jetzt ganz deutlich wieder zum Ausdruck. Das zweite Lehrstück des CUSANUS handelt von *complicatio* und *explicatio*. Er „erläutert auch das zweite Lehrstück wiederum an einem mathematischen Beispiel“. Wir werden sehen, daß gerade hierbei die Vorläuferschaft des PROKLUS und seiner Gestaltlehre der Mathematik ganz in die Augen springt.

„Der Mathematiker unterscheidet Punkt, Linie, Fläche, Körper. Aber diese elementaren Gebilde sind für die Größenlehre keineswegs nur quantitativ, nur additiv verschieden; sondern der Unterschied von Punkt und Linie ist der, daß im Punkte dasjenige Sein komplizit vorhanden ist, welches in der Linie explizit zutage tritt. Die Linie ist die Entfaltung des im Punkt angelegten, noch eingefalteten Seins. Und so ist die Fläche die Explikation der Linie, der Körper die Explikation der Fläche... Die Explikation ist das Erkenntnismittel, durch welches allein der Verstand die Regel und Ordnung der elementaren Gebilde denken kann....

Wiederum also ist der Gedanke des CUSANUS erkenntnistheoretisch gerichtet. Er verwendet das Lehrstück, um zu zeigen, daß die Reihenbildung, die der erkennende Intellekt erzeugt, nicht die eines bloß graduellen und additiven Anstiegs, sondern vielmehr die einer fortgesetzten Entwicklung ist. Dieses Prinzip aber wendet der Intellekt auf die Gegenstände der Mathematik an, nicht weil er es erst aus ihnen herausliest, sondern weil es das Prinzip seines eigenen Wachstums ist. Von diesem Prinzip, von der schöpferischen Einheit, hat der

Geist 'präzises' Wissen. Der menschliche Geist nimmt nicht additiv zu, sondern entwickelt sich durch Entfaltung eines komplizit in ihm liegenden Gehaltes. 'Vergebens haben die meisten, die auf die Weisheit Jagd gemacht haben, sich bemüht, die Wesenheiten der Dinge zu ergreifen. Der Intellekt ergreift nicht, was er nicht in sich selber findet....' Doch ist er 'nicht das Prinzip der Dinge, er hat nicht die Aufgabe, ihre Wesenheiten zu determinieren, sondern unser Verstand ist Prinzip seiner eigenen Verfahrensweisen, die er determiniert, und diese hat er sämtlich begrifflich (notionaliter) in seiner eigenen Kraft komplizit enthalten' (*De venat.* 29) was wir im Körperlichen an Werden wahrnehmen, kann nur vom Geistigen aus gedeutet werden: 'Was sucht alle Sinnentätigkeit anderes als Verständigkeit, was der Verstand anderes als das Vernünftige, was die Vernunft anderes als den wahren Grund?' (*De genesi*)."

Die Fortbildung dieser Gedankenreihe und ihre spekulative Wendung im idealistischen Sinne bei BRUNO, LEIBNIZ und GOETHE ist deutlich. Ein beweisendes Beispiel dafür ist eine Stelle aus BRUNOS Lehrgedicht „*De Immenso*“ und die GOETHEsche dichterische Gestaltung derselben in seinem bekannten Gedicht (1815) „Was wär ein Gott“:

GIORDANO BRUNO:

1. Non est deus vel intelligentia exterior,
2. circum rotans et circumducens,
3. dignius enim illi debet esse internum principium motus,
4. quod est natura propria, anima propria,
5. quam habent tot quot in illius gremio et corpore vivunt,
6. hoc generalis spiritu, corpore, anima, natura, animantia.

J. W. von GOETHE:

1. Was wär ein Gott, der nur von außen stieße,
2. Im Kreis das All am Finger laufen ließe?
3. Ihm ziemt's, die Welt im Innern zu bewegen,
4. Natur in sich, sich in Natur zu hegen,
5. So daß, was in ihm lebt und webt und ist,
6. Nie seine Kraft, nie seinen Geist vergißt*)

„Beide Lehrstücke wollen erkenntnistheoretisch darauf hinaus, daß, wo echtes Erkennen ist, es sich nicht um ein Abbilden gegebener Dinge handelt, sondern um eine *Aktivität der Vernunft, die dem Absoluten verwandt*, ihr eigenes Wesen in eine Vielheit von Erkenntnisarten und Erkenntnisinhalten auseinanderfaltet, so wie der Punkt explizit zur Linie, das Jetzt explizit zur Zeitreihe wird... All diese Reihung ist *Significatio*. Alle Gesetze, nach denen wir dann das Empirische in Klassen teilen und ordnen, haben diesen Ursprung. Die ganze Systematik der Wissenschaften beruht auf dieser Potenz des Geistes, zugleich Einheit zu bleiben und doch in die Vielheit sich zu entfalten.... So ist unser Geist einerseits dem Absoluten verwandt, wofern dieses ihm als methodisches Prinzip innewohnt; und

*) Diese besonders deutliche Herausstellung eines geistigen Parallelismus in den Auffassungen zweier durch Jahrhunderte getrennten Denker verdanken wir W. TROLL. Siehe: GOETHEs Morphologische Schriften, Ausgewählt und eingeleitet von Wilhelm TROLL, Jena o. J. S. 22 der „Einführung“.

er kann andererseits ein Analogon zur Welt heißen, sofern alle Reihung sinnlicher Vielheit erst durch ihn gesetzt wird, in ihm komplizit enthalten ist.“

All diese Positionen fanden wir bereits bei PROKLUS angedeutet und für die Mathematik fruchtbar gemacht. Es ist lediglich noch einiges zur geistesgeschichtlichen Einordnung dieser Lehrstücke des CUSANUS zu sagen, um das abzurunden, was wir bereits in der allgemeinen Einführung dargelegt haben. „Das erste Lehrstück hat heraklitischen Charakter, es verneint für die Sphäre des Absoluten die Geltung des Satzes vom Widerspruch. Das zweite Lehrstück hat pythagoreischen Charakter, es behauptet die Affinität zwischen Erkenntnissubjekt und Erkenntnisobjekt auf Grund einer vom Schöpfer präformierten Harmonie.... Als das Eine in Vielem ist die Welt Harmonie. Welt kann nur als Vielheit gedacht werden, aber unter dem Einheitsbegriff der Totalität, und dieser ist 'Spiegelung' — Symmetrie — „des Einen in Vielem...“

Und auch die folgenden Gedanken hängen aufs engste mit denen des PROKLUS zusammen, wie man wohl nicht näher deutlich zu machen braucht, wenn man das PROKLEISCHE Werk verstanden hat. „Aber ein anderes ist Seele, ein anderes Geist. Über die Seele spekuliert er christlich, *über den Geist hellenisch*. Die Seele weist ihn auf den Schöpfergott, der Geist auf das Absolute... Daher seine Vorliebe für mathematische Beispiele. Sie beruht darauf, daß *die mathematische Mens ihre Orientierung nicht von den sinnlichen Objekten her, sondern aus den Vernunftbegriffen als den 'Zeichen ihres eigenen Wesens' gewinnt*. Aus der Vergleichung des mathematischen Begriffs der 'präzisen Gleichheit' mit der im stofflichen Sein niemals vorhandenen, immer nur 'ein Überschreitendes und Überschrrittenes' belassenden empirischen Gleichheit gewinnt das Denken des CUSANUS seinen methodischen Ausgangspunkt. Der Mensch ist das Maß aller Dinge (*De ber.* 5), aber nicht im protagoreischen, sondern in demjenigen Sinne, daß er sie mißt, wobei der Maßstab die Wahrheit ist, d.h. nach CUSANUS die absolute Notwendigkeit, die weder mehr noch weniger sein kann, als sie ist.“

Und noch eines ist anzuführen, um die Fortführung der Gedanken des PROKLUS bei CUSANUS und ihre spezifische Weiterbildung durch ihn zu zeigen. „Wie Punkt, Linie, Fläche dem Körper in der 'Ordnung' vorangehen, aber in ihm erst aktuell werden, so wird auch das Universum erst konkret in der individuellen Wirklichkeit des '*actu ipsum esse*' (*D. ign.* II, 6).... Aus diesem Begriff der 'Kontraktion' ergibt sich nun für CUSANUS auch der der '*Abstraktion*'. Betrachtet man die beiden Begriffspaare *Complicatio-explicatio* und *Contractio-abstractio*, so ist nicht etwa das erste ontologisch, das zweite logisch zu verstehen; sondern durch das erste soll das Problem Einheit-Vielheit begriffen werden, durch das zweite das Problem Besonderes-Allgemeines. Beide Begriffspaare müssen kombiniert werden; dann steht zwischen dem Einen Absoluten und dem Einzelnen Individuellen das Universum als Medium: es ist das Eine für die Vielheit, das Allgemeine für die Besonderheit. *Abstraktion aber ist das logische Verfahren, den Weg der Kontraktion rückwärts zu gehen, um die Erscheinung aus ihren Grunde zu begreifen.*

Hieraus wird die Stellung der CUSANISCHEN Philosophie zum *Universalienproblem* deutlich: Die Universalien sind weder konkret wie die Dinge, noch absolut wie Gott, sondern sie sind 'abstrakt' in dem genau bestimmten Sinne, daß sie zum Universum als solchem gehören. Universum und Universalien gehören

zusammen. *Universalia wie Gleichheit und Ähnlichkeit, Haben und Sein, Ruhe und Bewegung, werden nicht etwa durch abstrahierende Begriffsbildung künstlich gesetzt, sondern sie 'sind'.* Nur sofern sie als wirkliche Ordnungen im Universum ein unsinnliches Sein haben, können sie uns als Erkenntnisgründe dienen. Dies Sein der Universalia ist nun von ganz bestimmter Modalität, die es uns gestattet, an dieser Stelle das Verhältnis des CUSANUS zu PLATON“ — und damit auch zu PROKLUS — „eindeutig zu fassen. CUSANUS verwendet die PLATONISCHEN Ideen in zwei verschiedenartigen Weisen: Erstens übernimmt er von ihnen die *ovota*, ihren Maßstabcharakter und ihre Transzendenz.... Zweitens aber verwendet er die Ideen als Universalia, als konstitutive Seins- und Erkenntnisprinzipien im Universum“ — wie vor ihm schon PROKLUS für die Mathematik.

45. Das dritte Lehrstück des CUSANUS endlich hat „den Begriff der *Concordantia* zum Gegenstand.“ Hier wird das Rätsel von Immanenz und Inhärenz gelöst. „Ist das Moment bezeichnet, wo dem Universum Unsterblichkeit eignet, so kann das Innewohnen des Unendlichen im Endlichen ohne Widerspruch zusammengedacht werden mit dem Eingefaltetheitsein alles Einzelnen im Ur-Einen. Immanenz und Inhärenz sind nur noch zwei verschiedene Aspekte einer und derselben Beziehung, die im Grunde ihres Wesens die zwischen *Sinn und Zeichen*, zwischen *Idee und Erscheinung* ist.“ Das Gleichnis von der *Visio Dei* spielt hier fundamental herein. Man mag dies in der Abhandlung von E. HOFFMANN, aus der wir zitieren, im einzelnen selbst nachlesen. Zusammenfassend können wir auch mit Rücksicht auf die Entwicklungen des PROKLUS so mit E. HOFFMANN sagen: „Die Lehrstücke... scheint CUSANUS selber für im Sinne PLATONS angelegt gehalten zu haben: Das Absolute, in welchem die Gegensätze koinzidieren, ist für ihn die Stätte der wahren 'Idee'; das Problem der *Complicatio* und *Explicatio* fällt für ihn zusammen mit dem Problem der *Methexis*; die *Concordantia* alles Individuellen ist für ihn PLATONS Verhältnis des Einen zum Vielen, illustriert am Spiegelgleichnis. So hat es denn besonderes Gewicht, wenn CUSANUS einmal von PLATON sagt, dieser habe mehr gesehen als andere Philosophen (*De venat. sap.* 12). Aber sein Platonismus geht noch weiter.“ Und gerade darin wird er bedeutsam für die jetzt anschließend zu zeichnende Entwicklung bei KOPERNIKUS und KEPLER. „PLATON erkennt keine Leiter mit unendlich vielen Sprossen“ — wie es die ARISTOTELISCH-THOMISTISCHE Stufung von Entelechien als Bild des Weltganzen war — „an, sondern er hat zwei Welten und die *Methexis* der einen an der anderen. Das Prinzipielle also ist: statt einer sehr großen Zahl von Zwischengliedern *Ein einziger Begriff der Synthesis*... Die Andersheit der beiden Welten ist grundsätzlich und radikal... Universalität des Einzelnen in einem Naturbegriff, in dem alles Einzelne Glied ist. Das ist PLATONS Lehre, sie ist griechisch und kosmologisch gedacht.“ Und hier ist auch die tiefste Berührung des CUSANUS mit PROKLUS. „Statt einer spekulativen Teleologie, die in den Naturerscheinungen Wohltaten für die Lebewesen sieht, nunmehr eine *funktionale Kosmologie auf mathematischer Basis*. Das ist prinzipiell Rückkehr zum Timaios“, den gerade PROKLUS als das höchste und reifste Werk PLATONS angesehen hat, wie MARINOS in der PROKLUS-Biographie berichtet⁷²⁾: „Er pflegte

⁷²⁾ Siehe Anm. 16, 17, 18 oben.

aber oft zu sagen: Wenn es in meiner Macht läge, dürften von allen Schriften der Alten nur die Orakel und der *Timaios* gelesen und verbreitet werden; alle anderen würde ich aus dem Volke wegnehmen, weil einzelne Menschen, die auf Geratewohl und ohne genaue Prüfung an sie herangehen, dadurch Schaden erleiden“. (Kap. 38.)

Und dies ist nun das Wesentliche: „Kosmologie war immer eine Art Doxologie des Schöpfers gewesen. Das bleibt sie auch bei CUSANUS, aber sie wird noch mehr: der Gott, dem das *Gloria in excelsis* gilt, wird zugleich zum *absoluten Peras*, in dem *all unsere Erkenntnis gegründet ist*. Schon für PLOTIN galt, daß alles Viele nur durch die Einheit Bestand habe; CUSANUS aber fordert, daß das Viele mit Bezug auf die Einheit durch Komparation untereinander begriffen werde. — Das ganze Mittelalter hat vom *Timaios*, wenn auch beschränkt, Kenntnis gehabt... Aber erst CUSANUS macht, wie PLATON im *Timaios*, aus dem *Universum wieder einen Inbegriff, aus der Summe der Erscheinungen wieder eine Totalität* und schafft somit für die Erkenntnis einen Gegenstand, welcher *logisch aller Einzelerkenntnis vorangeht*.“

„Wie stimmen nun die drei Lehrstücke zueinander? Welches ist ihr Sinn? Inwiefern machten sie Epoche? — *Die Originalität des CUSANUS besteht* nicht in einer neuen Art des Resultates, sondern — wie es CASSIRER treffend ausgedrückt hat — *in einer neuen 'Kategorie'*, mit deren Hilfe er zum Resultate kommt.“ Diese neue „Kategorie“ darf man als von PROKLUS vorbereitet ansehen. Dies wird vollends deutlich, wenn wir die geistigen Richtungen kurz mit E. HOFFMANNs Worten charakterisieren, die gerade für die vorliegende Problematik entscheidend sind.

„1. Auf der äußersten Linken stehen die *Nominalisten*. Sie erklären: eine Rationalisierung ist hier gar nicht möglich; Glaube und Wissen sind grundsätzlich zweierlei... Ideen sind dem Denken unzugänglich. Unsere Begriffe sind Wörter, von Wörtern aus abstrahieren wir, wir bilden *Universalia*, Allgemeinbegriffe; aber diese sind unwirklich. Wir kommen auf dem Wege der Abstraktion zu keiner Realität; im Gegenteil, wir entfernen uns von ihr... Die Nominalisten verwenden also gar keine Kategorie.

2. Die *aristotelischen Realisten* sagen: Wir gehen nicht von Wörtern aus, sondern von Dingen. Alle Naturdinge aber zeigen ein Streben nach Höherem, eine Tendenz der Vervollkommnung: höchstes Ziel ist Gott. Diese teleologische Signatur der Welt ist im Einklang mit dem Schöpfungsgedanken... Die aristotelischen Realisten also arbeiten mit der Kategorie der Finalität.

3. Die *platonischen Realisten* gehen weder von Wörtern aus noch von Dingen, sondern von dem Gegensatz Idee und Erscheinung. Gott hat die Welt der Erscheinung geschaffen, indem er auf die Ideen hinsah. Er hat die Ideen als Vorbilder verwendet, um die Dinge nach ihnen abzubilden.... Die platonischen Realisten arbeiten mit der Kategorie der Kausalität. Sie halten sich für Platoniker, sind aber Fortsetzer des CLEMENS; denn sie machen die Ideen zu Urbildern im Geiste Gottes, was sie bei PLATON nicht sind und nicht sein können, ohne ihrer platonischen Selbständigkeit beraubt zu werden.

4. An letzter Stelle nenne ich die *emanationistische Mystik*“ (zu der, hinsichtlich des Universalienproblems, wie wir gesehen haben, in gewissem Sinne auch PROKLUS gehört) „auf der großen Linie, die von PLOTIN über den Areopagiten

zu Meister ECKHART führt. Sie arbeitet mit der Kategorie der Substantialität. Die Welt ist Ausfluß aus Gottes Wesenheit; daher ist sie Geist von seinem Geist....

CUSANUS ist von keiner der vier Systembildungen unberührt, ja er bejaht in gewissem Sinne alle vier.... *Der emanationistischen Mystik steht er ganz nahe.* Wie er den Meister ECKHART durchgearbeitet hat, zeigt sein Handexemplar, welches noch heute in Cues liegt.“ Auch die Übereinstimmung zwischen PROKLUS und CUSANUS beruht natürlich auch auf buchstäblicher literarischer Abhängigkeit. CUSANUS hat einzelne Kommentare des PROKLUS (s. Anm. 1 oben) ganz genau gekannt, bis auf jede Silbe durchstudiert, sogar verschiedene Handschriften kollationiert und stellenweise sogar den lateinischen Text mit dem griechischen Original verglichen. PROKLUS und DIONYSIOS AREOPAGITA waren für ihn die beiden Hauptzeugen der PLATONischen Wahrheit. (Briefliche Mitteilung von Herrn Prof. E. HOFFMANN an den Herausgeber.)

„Aber trotz alledem denkt CUSANUS nach einem ganz neuen Gesichtspunkt, den seit PLATON keiner so verwendet hat wie er. Dieser Gesichtspunkt wird bezeichnet durch den Ausdruck '*Symbolice investigare*'. In allererster Linie ist Gott für CUSANUS weder Substanz noch Ursache noch Zweck der Welt noch auch der Ratio grundsätzlich konträr, sondern Gott ist ihm jenes 'Sinnvolle', für welches die Welt Symbol und Zeichen ist: der 'Ursinn', *welcher durch Endliches nur vertreten werden kann.*“ — Damit ist CUSANUS rückwärts mit PLATON und PROKLUS verbunden, vorwärts mit KOPERNIKUS, KEPLER, LEIBNIZ, KANT und FICHTE. „Das CUSANISCHE 'Signum' ist am nächsten verwandt dem PLATONISCHEN *σημειον* Die Kategorien der Ursache und des Zwecks und der Wesenheit treten zurück hinter der neuen Kategorie der Bedeutung... Als Resultat haben wir festzustellen: Aus der Arbeit an scholastischen, mittelalterlichen Problemen wächst unter dem bestimmenden Einfluß der griechischen Philosophie der neue Gedanke heraus, vermöge dessen CUSANUS seinen Weltbegriff findet. Hierdurch wird er der erste genuine Platoniker in der christlichen Philosophie und der philosophische Klassiker des *deutschen Humanismus*.“

Damit haben wir die umfassende Position gewonnen, die es ermöglicht, alle die bekannten Gedanken des PROKLUS in ihrer Tiefenwirkung auf die deutschen Denker zu sehen als Grundlage eines mathematisch orientierten Idealismus, den wir jetzt noch durch einzelne Stufen bei KOPERNIKUS, KEPLER, LEIBNIZ und KANT aufbrechen sehen wollen.

46. Gehen wir von hier aus kurz zu KOPERNIKUS über und verfolgen dort das Werden und Wachsen seiner Tat. Aus dem Vorwort seines Hauptwerkes wissen wir⁷³⁾, „daß er durch die Mängel der bisherigen *speziellen Astronomie*, die weder zu einem allgemein anerkannten, noch zu einem in sich harmonischen Weltsystem gelangt sei, veranlaßt worden ist, nach 'anderen Vermutungen über die Bewegungen der Weltsphären' zu suchen. (Es wird dort außer PHILOLAOS auch ARISTARCH von Samos erwähnt).... Es sind demnach mehrere Pythagoreer und ein Platoniker, die KOPERNIKUS den ersten Anstoß zur Aufstellung

⁷³⁾ Anführungen aus: D. MAHNKE, Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt, Halle (S.) 1937, S. 127 ff.

seines neuen Weltsystems gegeben haben. Pythagoreisch-platonischer oder *neuplatonischer* Herkunft ist auch seine naturphilosophisch-religiöse Grundanschauung, daß das Weltganze als 'sichtbarer Gott' die vollkommenste Gestalt einer genauen Kugel besitzen und alle Teile der Welt sich in der besten harmonischen Ordnung befinden müssen, ferner daß die Sonne als 'Leuchte der Welt' sinnvollerweise ihren 'königlichen Thron in der Mitte dieses schönsten Tempels' innehalt.“ Durch die neuesten Forschungen steht aber des weiteren fest, „daß KOPERNIKUS auch Schriften der Renaissance-Pythagoreer und Platoniker NIKOLAUS VON KUES und MARSILIO FICINO gekannt hat“⁷⁴⁾. Schon in seiner Studienzeit⁷⁵⁾ „begegneten ihm PLATOS Bücher, wenn auch nur in des FICINUS Übersetzung, und wie wenig er sie noch verstand, das eine Bedeutende verstand er doch an ihnen, daß eine Welt hier war, nach der er selber suchte und in deren Suchen seinem Leben ein Genüge geschehen wird (S. 45/46).... MARSILIUS FICINUS, der Führer der florentinischen Geister in den letzten Jahrzehnten des 15. Jahrhunderts, hatte die *platonische Renaissance* bringen wollen (S. 84).... Heut lächelt man gern darüber, aber in Wahrheit, diese Menschen hatten etwas, was uns Heutigen bitter nötig fehlt: *sie sahen die Welt als Ganzes, und in diesem Ganzen wirken sinnvoll Kräfte*.... Alle ihre Magie war „falsch“, und doch, in einem weiteren Blickfeld, wo die Einzelheiten nicht mehr für sich selber, wo sie als Aussagen eines Wollens, eines *geistigen Seins* bestehen, werden sie zu richtigen (S. 86).... Der nächste Freund des florentinischen Philosophen nannte sich PICO.... aus dem Hause der MIRANDOLA (S. 87).... In den Gedanken der florentinischen Philosophen also“ — die ihrerseits als die modernen Neuplatoniker auf die alten der PLOTIN und PROKLUS zurückgingen — „finden sich alle Elemente des von NIKOLAUS KOPERNIKUS entworfenen Weltbildes wieder... Die Anregungen zu seinem Weltbild, das ja unser Weltbild wurde, verdankt der deutsche Astronom der Renaissance der Platoniker und PYTHAGORAS.“

KOPERNIKUS, der gereifte alte, sagte von sich: „Deswegen habe ich mich der Arbeit unterzogen, die Schriften aller Philosophen, deren ich habhaft werden konnte, zu lesen, um festzustellen, ob nicht einmal einer von ihnen die Meinung geäußert hatte, daß die Bewegungen der Himmelskörper andere seien, als die annehmen, die in den Schulen Mathematik lehren.“ KOPERNIKUS lernt Griechisch und diese Sprache „öffnete ihm den Zugang zu den Männern, die er suchte, und um derentwillen er die griechische Sprache lernte, zu PYTHAGORAS und PLATO (S. 112).... Denn das, was NIKOLAUS KOPERNIKUS als sein System aufstellt, ist gleichermaßen ein Ergebnis seiner Beobachtungen, des Messens und des Wägens, wie es der Wiedergeburt der alten Autoren, vor allem der Wiedergeburt pythagoreischen und platonischen Gutes zu verdanken ist. Aus ihren Erklärungen nahm er den Mut, das auszusprechen, was seine Beobachtungen und Berechnungen ihm als neue Theorie gegeben hatten“ (S. 113).... Im

⁷⁴⁾ Ibid. S. 128.

⁷⁵⁾ Anführungen aus: W. E. PEUCKERT, Nikolaus Kopernikus, Leipzig 1943. Siehe auch die hervorragende Darstellung von A. FAUST „Die philosophiegeschichtliche Stellung des Kopernikus“ in: „Nikolaus Kopernikus, Bildnis eines großen Deutschen“, herausg. von F. KUBACH, München-Berlin 1943, S. 96—211 und die ausführlichen Anmerkungen dazu, S. 318—370.

45. Abschnitte der „Ansichten der Philosophen“ PLUTARCHS „mußte NIKOLAUS KOPERNIKUS dem Satz begegnen: ‘Die gewöhnliche Meinung ist, daß die Erde ruht; PHILOLAOS, der Pythagoreer, aber nimmt an, daß sie sich, wie Sonne und Mond, in einem schiefen Kreise bewege. HERAKLIDES aus Pontos und der Pythagoreer EKPHANTOS lehren auch, daß sich die Erde bewege, aber nicht fortschreitend, sondern nach Art eines Rades sich drehend, wodurch sie von Abend gegen Morgen um ihren eigenen Mittelpunkt geführt wird.’“ (S. 120.)

„Er weiß es so sehr, daß er die Richtigkeit der Dinge nach dem Maß bemißt, nach der Erkenntnis, ob sich in ihnen *Harmonie* und *Symmetrie* und Einfachheit beweist, denn alles Verwickelte ist gegenüber dem Harmonischen und Einfachen als ein weniger *Schönes* zu erkennen; und so errechnet er für seine Planetenbahnen einfache und kreisförmige Bewegungen... So drängt er auf die Vereinfachung der Zahlen, — bis sich ein klares und durchsichtiges Weltbild *voller Symmetrie und Harmonie* ergibt, ein Weltbild, in dessen Aufbau, dessen Ordnung, *Harmonie und Wahrheit* sich in gleichem Maße spiegeln. Noch hat es Schrammen und Unregelmäßigkeiten, aber an seiner Richtigkeit ist nach seinen Rechnungen schon nicht mehr zu zweifeln (S. 125)... So wird der 12. Mai des Jahres 1504 zu einer ersten Bewährungsprobe seiner Lehre und zu jenem Datum, das die neue Sternenkunde von der alten scheidet (S. 133)... Die Scheide, die eine wissenschaftliche Astronomie von einer mythisierenden Astronomie getrennt hat, liegt auf diesem Tage, der die neuen, von dem Pythagoreer NIKOLAUS KOPERNIKUS errechneten Gesetze finden ließ; die Scheide, die zwischen dem Mittelalter und der Neuzeit ist, läuft über den 12. Mai des Jahres 1504. — Sie tauscht die Wertigkeiten der Wissenschaften gegeneinander und sie zeigt damit aufs neue, daß hier zwei verschiedene Kulturen miteinander grenzen. (Dasselbe das hier geschieht, geschieht an einer zweiten Wissenschaft des Mittelalters, an der hoch gehaltenen Alchimie. Die Alchimie, die eine magische Kunst war, sinkt, und ihre Magd, die simple Chemie, setzt sich immer deutlicher an ihre Stelle. Wir haben die hier entscheidende Grenze in den Jahren 1528—1531 anzusetzen, in jenen drei Jahren, in denen THEOPHRASTUS PARACELSYS von den Archidoxen mit ihrer alchimistischen Färbung zu dem *Opus Paramirum* schritt.) (S. 134/35)... Denn die *magia naturalis* jener Jahre, in welcher sich noch die ganze neuplatonische Mystik... fortzuretten versuchte, sank hin, und an die Stelle der FICINUS und PORTA traten die LIONARDO DA VINCI, TORRICELLI und KOPERNIKUS; an Stelle der unbegreiflichen und geheimen natürlichen Mächte, welche die *magia naturalis* wußte, setzte sich die *Physik*. Die mathematischen und die exakten Wissenschaften erscheinen.“ (S. 135.)

47. „Die Rechnungen und Beobachtungen (des KOPERNIKUS) nämlich gehen weiter, auch als KOPERNIKUS in Preußen ist, wohin er 1503 zurückzukehren hatte. Und dann, am Ende aller dieser Berechnungen und Beobachtungen zieht er als ihre gültige Summe *sieben axiomatische Schlüsse*, die sieben Axiome des kopernikanischen „*Commentariolus*“, seiner Schrift „*De hypothesibus motuum caelestium a se constitutis commentariolus*“, die er in seinen ersten preußischen Jahren geschrieben und nach dem Gebrauch pythagoreischer Weisen nur den nächsten Freunden übermittelt hat. Das erste der Axiome postuliert das Grundgesetz des Forschers, die große und entscheidende Lehre, daß die Welt in *Harmonie und Ordnung* stehe, denn wo ein Mittelpunkt ist, da ist Gliederung und Aufbau, da

ist eine Bezogenheit der Teile auf ihr Zentrum. Prima Petitio: *Omnium orbium caelestium sive sphaerarum unum centrum non esse*, Es gibt nicht nur einen Mittelpunkt für alle himmlischen Bahnen oder Sphären ^{75a}). — Secunda Petitio: *Centrum terrae non esse centrum mundi, sed tantum gravitatis et orbis Lunaris*, der Mittelpunkt der Erde ist nicht der Mittelpunkt der Welt, sondern nur derjenige der Schwere und der Mondbahn. Tertia Petitio: *Omnes orbes ambire Solem, tanquam in medio omnium existentem, ideoque circa Solem esse centrum mundi*, Alle Bahnen gehen um die Sonne herum, die sozusagen in der Mitte aller steht, und deshalb ist die Mitte der Welt in der Umgebung der Sonne. (S. 136/37)... Ein Mann war ehemals ausgezogen, um die Ordnung und die Symmetrie und Harmonie der Welt zu suchen und zu finden, und seine Erkenntnis, daß Symmetrie und Ordnung herrschen, — und daß sie noch größer sind, als welche vor ihm dachten. Denn das behauptet das zweite und dritte Axiom: die Ordnung und Harmonie ist nicht nur irdisch, sie ist mehr als irdisch, *sie ist sonnenmäßig*. Das zweite zerstört die alte Lehre, macht unsere Erde kleiner, und das dritte macht die neu gefundene Ordnung dafür um so größer.

Nun wird, zum ersten Male im abendländischen Denken, eine Unermeßlichkeit des Raumes, die Tiefe des Himmels, „*gleichungs*“mäßig, *mathematisch ausgesprochen*!“ (S. 137—39.)

„Was aber steht hinter diesen Thesen? Wir wissen, von wo her sie die Stütze empfangen, wissen um ihre *pythagoreischen, neuplatonischen* Hintergründe... Denn hinter seinen Entwürfen und seinen Gedanken steht noch, was viel mehr ist als eine Renaissance der pythagoreischen Philosophen. Er setzte die Unruhe an die Stelle der Ruhe, den unermeßlichen Raum an Stelle des geschlossenen und begrenzten. Das scheint ein Wechsel zweier Anschauungen und nicht mehr, *in Wahrheit ist es jedoch der Wechsel zweier Seinsgefühle*.“ (S. 140.)

Es folgen die Mannesjahre des KOPERNIKUS und die Vertiefung und eigentliche wissenschaftliche Begründung dieser Thesen in seinem Hauptwerk. „KOPERNIKUS schreibt seine *‘Revoluciones’*, in einzelnen Sätzen noch ein wenig anders, als wir sie heut kennen, im ganzen jedoch in ihrer jetzigen Fassung nieder. ‘Unter den verschiedenen Studien’, beginnt er, ‘unter den vielen verschiedenen Studien der *Wissenschaften und Künste*, durch welche sich der Menscheng Geist entwickelt, halte ich diejenigen vorzüglich für wert, ergriffen und mit dem höchsten Eifer betrieben zu werden, welche sich mit den schönsten und wissenschaftigsten Gegenständen beschäftigen. Diese sind nun diejenigen, welche von den himmlischen Umläufen der Welt, dem Laufe der Gestirne, den Größen und Entfernungen, dem Auf- und Untergange und den Ursachen der übrigen Himmelserscheinungen handeln, und endlich die gesamte Form entwickeln. Was aber ist schöner als der Himmel, welcher ja alles Schöne enthält?... Deshalb, wenn der Wert der Wissenschaften (ihre Würde) nach dem bestimmt wird, wovon sie handeln, wird diejenige von allen die weitaus höchste sein, die von einigen Astronomie, von anderen Astrologie, von vielen der Alten aber die Vollendung der Mathematik genannt wurde. In der Tat steht diese, dem freien

^{75a}) Die deutschen Übersetzungen dieser Axiome bei PEUCKERT sind schlecht. Wir geben sie daher nach E. ZELLER in dem von F. KUBACH herausgegebenen Sammelwerk (Anm. 75), S. 27 ff.

Manne würdigste, das Haupt aller Wissenschaften, auf den verschiedenen Arten der Mathematik; Arithmetik, Geometrie, Optik, Geodäsie, Mechanik und welche sonst noch sind, alle beziehen sich auf jene... Welchen Nutzen und welchen Schmuck die Astronomie aber dem öffentlichen Wesen verleiht... das hat PLATO am besten wahrgenommen... Aber diese mehr göttliche als menschliche Wissenschaft, die nach den höchsten Dingen fragt, entbehrt nicht der Schwierigkeiten...“ (S. 194—96.) So die Einleitung zum Hauptwerk des KOPERNIKUS. Man wird bereits bemerkt haben, wie sehr er auf dem Boden PLATONS und der NEUPLATONIKER steht. „Es handelt sich hier weniger um ein Werk der reinen, als um ein solches einer *philosophischen Astronomie*; KOPERNIKUS strebt immer und immer wieder von den Berechnungen und Tabellen fort zu einer *Erkenntnis der Ideen*, zur Erfassung der ‘Gesetze’. Ihm sind“ — genau wie später KEPLER — „die Ziffern nur Hilfen, nie der Selbstzweck, und sein Ziel ist, über sie hinaus die wahre und entscheidende Erkenntnis zu erreichen: die Ordnung der Welt, die Gott schuf, und die auch im Werke Gottes, im Geschaffenen, Ihn verrät.“ Gerade im Kapitel 1 des ersten Buches des Hauptwerks wird deutlich. „in welchem Maße es sich bei diesem Werk *um eine philosophische*, nicht um eine Ziffernarbeit handelt. Es werden die *allgemeinen* Prinzipien angeführt“ und „so wird von neuem, *aus einer mathematisch-philosophischen Spekulation*, erschlossen, was zu erweisen die Aufgabe und die Absicht dieses Werkes ist.“ (S. 197 bis 199.) Und dann folgt im 9. Kapitel die Vorbereitung zur Darstellung des Kerns der neuen Lehre in den Worten: „Ist aber die Erde ein Planet, so wird man sich auch überzeugen, daß die Sonne die Mitte aller Welt einnimmt. Und dieses lehrt uns das Gesetz der Ordnung, in welcher die Gestirne aufeinander folgen, und das von der Harmonie der Welt.“

„Dem allem folgt nun das 10. Kapitel, das größte und wichtigste des 1. Buches, in welchem die neue kosmische Ordnung vorgetragen wird. ‘In der Mitte von allem aber herrscht die Sonne. Wer nämlich wollte in diesem herrlichen Tempel diese Leuchte an einen anderen oder besseren Ort setzen, als an diesen, von dem aus sie das Ganze erleuchten kann?... So lenkt in der Tat die Sonne, auf dem königlichen Throne sitzend, die sie umkreisende Familie der Gestirne.’“ (S. 200—202.) [s. oben S. 139.]

Im ersten Buch der „*Revoluciones*“ werden die großen, neuen Gesetze *philosophisch* begründet; die Arbeit der folgenden Bücher gilt dem strengen *mathematischen Beweis* der neuen Ordnung. „So wächst in den drei Allensteiner Jahren dieses Werk, der Grundstein alles abendländischen kosmischen Denkens, der vierhundert Jahre und noch länger trägt.“ (S. 203.)

48. Dieser mehr kulturmorphologische Aufriß möge jetzt noch kurz durch den rein wissenschaftlichen, wie ihn etwa M. CASPAR bietet, ergänzt werden ⁷⁶⁾. Wir leiten damit gleichzeitig zu KEPLER über, von dem wir in einer eigenen Schrift gezeigt haben ⁷⁷⁾, wie sehr er auf dem Boden des PROKLUS gestanden ist. KOPERNIKUS und KEPLER gehören eigentlich zusammen, auch geistesgeschichtlich; nur wenn man ihr Werk zusammenschaut, wird man allenfalls Maßstäbe

⁷⁶⁾ In „Kopernikus und Kepler“, München-Berlin 1943.

⁷⁷⁾ M. STECK, Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941.

und Richtpunkte haben, nach denen man beide als mit die größten Deutschen bezeichnen darf, die je gelebt haben. Sie haben das wissenschaftliche idealistische Bewußtsein der deutschen Forschung auf der großen Linie für alle Zeiten geprägt und der deutschen wissenschaftlichen Leistung eine spezifische Gedankengestalt gegeben, die uns nur Vorbild sein könnte, nachdem heute die Wissenschaften vielfach in einen „Betrieb“ übergegangen sind. Sie haben, insbesondere KEPLER hat für alle Zeiten die *idealistische mathematische Denkweise*, hauptsächlich aus Bausteinen, die er bei PLATON und PROKLUS gefunden und bei CUSANUS in neuer umfassender Weise geformt sah, in den Rang erhoben, daß sie allen anderen Forschungsweisen überlegen wurde und ihre spezifische Sinnhaltigkeit der ganzen abendländischen Kultur in den Wissenschaften und in den Künsten aufprägen konnte. KEPLER und sein Werk sind der Kulminationspunkt dieser Denkweise und geben die exakte Begründung für den Primat der Idee vor aller bloßen Empirie, vor allem Nominalismus und Positivismus, wie sie in den heutigen Wissenschaften und ihren Vertretern sich als Ausfluß englischer Philosopheme festgesetzt haben. KEPLER hat bewiesen, wie man anfangen muß, um echte Wissenschaft zu haben und das Werk von KOPERNIKUS hat ihm dabei königliche Hilfestellung geleistet. „Beide Männer waren durchdrungen von dem Glauben an eine *objektive Ordnung* in der äußeren Welt und an die Erkennbarkeit dieser absoluten Ordnung“ (S. 18)... Aber „während EUDOXUS und ARISTOTELES (noch) das Bedürfnis nach einer physikalischen Erklärung der Planetenbewegungen empfanden und zu diesem Zweck ein höchst kompliziertes System von ineinander geschachtelten festen Kristallkugeln mit verschiedenen Rotationsachsen ersonnen hatten, stellt PTOLEMÄUS die physikalische Frage nicht. Sein System verflüchtigt sich zu einem rein mathematischen Formalismus, es ist ihm nur darum zu tun, ein geometrisches Verfahren anzugeben, durch das man die Örter der Wandelsterne für einen beliebigen Zeitpunkt bestimmen kann. Man muß in dieser erkenntnistheoretischen Haltung, die an die Entwicklung der Physik in neuester Zeit gemahnt, ein Kennzeichen der Kultur der Spätantike erblicken...“ (S. 21/22.)

„Jetzt tritt das Genie (des KOPERNIKUS) auf den Plan. Der Klarheit und dem Scharfblick seines geistigen Auges enthüllte sich die große, so weittragende und folgenschwere Erkenntnis: Läßt man die Erde um die Sonne kreisen, so ist in einfacher Weise die gesuchte Lösung gefunden.“ (S. 24.) Und KEPLER war der einzige große Forscher, der KOPERNIKUS eigentlich verstehen und das begonnene Werk weiterführen konnte.

„Es mußte Einer kommen, der diese Einwände (insbesondere der Theologen gegen die kopernikanische Konzeption) auf die Seite zu schieben oder zu widerlegen vermochte, der die Mängel zunächst übersah oder verbesserte, der vor allem das große Positive in der neuen Lehre ins Auge faßte, der merkte, daß es sich hier um eine *neue Zielsetzung der Astronomie*, um eine Neuformung des Weltbildes handelte. Nicht darum sollte es von nun an mehr gehen, wie man für astrologische Zwecke die Planetenörter berechnete; *den großen Bauplan der Welt aufzuzeigen*, das sollte hinfort das hohe Ziel der Himmelskunde sein. Der Mann, der dieses Ziel erfaßte, war JOHANNES KEPLER. Er ist der erste und bedeutendste Kunder der neuen Lehre, der Eigenes dazu beizutragen wußte (S. 29/30)... Das ist seine neue *Idee*, die er mit aller Klarheit ausspricht: *Die Sonne ist der*

Sitz einer Kraft, die die Bewegungen der Planeten bewirkt und die mit zunehmender Entfernung von der Sonne immer schwächer wird. Durch die Verschmelzung dieser Idee mit der des KOPERNIKUS gewann das Weltbild ein vollkommen neues Gesicht. An die Stelle des formalen Schemas setzte KEPLER ein *dynamisches System*, an die Stelle der geometrischen Beschreibung (des KOPERNIKUS) der Bewegungen die kausale Erklärung, an die Stelle der mathematischen Regel das Naturgesetz. Aus diesem physikalischen Denken heraus setzte er die Sonne selber in den Weltmittelpunkt, nicht mehr den Mittelpunkt der Erdbahn, wie es KOPERNIKUS getan hatte.... Die Entdeckung seiner drei Gesetze der Planetenbewegungen hat die astronomische Forschung für alle Zeiten auf eine neue Grundlage gestellt.“ (S. 31/32.) Bei ihm „tritt der Gedanke der allgemeinen Gravitation ganz klar zutage.“ (S. 34.) Aber „das physikalische Prinzip ist nur das eine Thema der Fuge seines astronomischen Lebenswerks, in seinem Sinn *nicht einmal das Hauptthema*. Neben oder vielmehr über diesem Thema geht ein anderes in reichen Modulationen und vollen Akkorden einher, das von der Idee der Harmonie gebildet wird... Diese Aufgabe besteht in nichts Geringerem als in dem kühnen Unternehmen, *den Bau der Welt aus metaphysischen Prinzipien a priori abzuleiten*. Diesem Unternehmen widmete KEPLER seine beste Kraft.... In seinem ersten Werk legte er schon den Grund zu seiner Ausführung und auf der Höhe seines Schaffens gab er ihm Vollendung in dem großen Meisterwerk seiner Weltharmonik. Sein Bestes, Tiefstes und Letztes wollte er damit der Welt verkünden.

Die Welt ist so, wie sie ist, aus Gottes Schöpferhand hervorgegangen und der allgütige und allweise Gott konnte nichts anderes als eine schönste Welt schaffen, ein Werk von vollkommener Schönheit. Ein alter Gedanke griechischer Weisheitslehre, für den sich KEPLER ausdrücklich auf PLATO beruft. Doch was ist schön, was gibt uns einen Maßstab für das Schöne ab? KOPERNIKUS ist mit der Idee einer schönsten Welt ebenfalls vertraut... Wie er zur Erreichung dieses ästhetischen Zieles die Geometrie heranzieht,... haben wir gesehen. Auch für KEPLER bildet die Geometrie die Grundlage, an der er sein Gedankengebäude errichtet. Sie liefert ihm das Mittel zu seiner Beweisführung, jedoch in ganz anderer Weise, als dem KOPERNIKUS... Was sich der Erkenntnis vor allem anderen als klar und sicher darbietet, das sind nach KEPLER die Quantitäten, Zahlen und Größen. Träger der Quantitäten sind die geometrischen Gebilde. *Es ist aber nicht so, daß der Mensch diese Gebilde und ihre Eigenschaften aus der sinnlichen Wahrnehmung kennenlernt. Die Struktur des Raumes wird nicht durch äußere Erfahrung erfaßt.* Nein, für KEPLER sind die geometrischen Gebilde reine Vernunftdinge.... (S. 35/36.)

Die Weisheit des KEPLERtraumes ist vor allem die, daß der Geist über dem Stoffe steht, daß er göttlichen Ursprungs ist. Mit allem Nachdruck hat KEPLER dargetan, *daß der Geist es ist, der die Harmonien erzeugt*. Diese werden nicht aus den Dingen gewonnen. Die Dinge liefern die Bezugsglieder. *Aber der Geist ist es, der die Vergleichung vollzieht und kraft der ihm eingeborenen Ideen die Harmonien schafft. Die Materie ist tot ohne den Geist.* Was ist die Sonne, wenn es kein Auge gibt, das sie betrachtet? Was ist Schönheit, Ordnung und Gesetz, wenn es keine Seele gibt, die die Schönheit empfindet, keine Vernunft, die die Ordnung setzt, keinen Geist, der das Gesetz erkennt? So ist der KEPLER-

traum ein herrliches Bekenntnis zum Geist... Er ist zugleich eine Offenbarung des *deutschen Geistes*, der sich nie damit begnügt, Naturtatsachen festzustellen, der nicht zuerst den praktischen Nutzen sucht, des Geistes, der immer nach dem Unerreichbaren strebt, in Wissenschaft, Kunst und Philosophie, und in diesem Streben seine tiefsten Kräfte entfaltet.“ (S. 41.)

Und an anderer Stelle hat M. CASPAR die Charakteristik KEPLERSchen Wesens und Seins so gegeben⁷⁸⁾: „Der deutsche Pythagoras! So müssen wir ausrufen, wenn wir uns dieses Weltbild vor Augen halten. Es ist aber nicht nur der Gedanke der Sphärenharmonie, der KEPLER mit PYTHAGORAS verbindet. Die Verwandtschaft ist eine tiefere. KEPLER fühlt und weiß sich nicht nur als Astronom und Mathematiker, sondern in erster Linie auch als Philosoph... Die Quelle aus der er schöpfte, war die Gedankenwelt PLATONS und der Neuplatoniker, zumal die des PROKLUS, den er oft erwähnt. Das erklärt sich nicht nur aus der philosophischen Haltung der Renaissance, sondern auch aus seiner eigenen geistigen Veranlagung.... KEPLER war sich freilich der letzten Folgerungen aus seinem Prinzip nicht bewußt, wie schon LEIBNIZ bemerkt hat, der von KEPLER dasselbe Wort gebraucht, das dieser einst mit Bezug auf KOPERNIKUS ausgesprochen hatte: ‘KEPLER weiß nicht, wie reich er ist’.“ (S. 60/61.)

„Seine Auffassung von der Mathematik ist eine ontologische. Für ihn existieren die mathematischen Gestalten als Urbilder im Geiste Gottes von Ewigkeit her... In seiner ontologischen Auffassung der Mathematik folgt KEPLER den Gedanken des NIKOLAUS VON CUSA, den er hoch verehrt — er gibt ihm das Epitheton „*divus*“... Es ist nicht nur die beiden gemeinsame Beziehung zu PROKLUS, die diese Übereinstimmung begründet, sondern die innige geistige Verwandtschaft, welche zwischen den beiden Männern besteht.“ (S. 61—63.)

„Ganz anders ist jedoch KEPLERS Verhältnis zu seinem Zeitgenossen GALILEI... Der tiefere Gegensatz zwischen beiden Männern liegt auf *philosophischem* Gebiet. Während sich KEPLER ganz der *platonischen* Auffassung der Mathematik hingab..., liefert für GALILEI die Mathematik (nur) Ordnungsschemata, die es gestatten, den Ablauf der physikalischen Erscheinungen zu beschreiben. — Auf der gleichen Linie wie GALILEI steht NEWTON (S. 63/64).... Er hat als echter Nominalist den Begriff der Kraft... zu einem *leeren Wort*, einem *Nomen* gemacht. Die spätere Naturforschung ist ihm hierin gefolgt.... so daß dieser *metaphysikscheue Positivismus* schließlich dazu geführt hat, daß man sich unter den mathematischen Formeln und physikalischen Begriffen überhaupt nichts mehr denken kann, ohne sich der Kritik der mathematischen Physiker auszusetzen. Während NEWTON auf der letzten Seite seiner Principia das berühmte Wort ausspricht: ‘*Hypotheses non fingo*’, fängt für KEPLER die *Hauptarbeit erst da an, wo NEWTON aufhört*.... Nie hätte sich KEPLER mit einem rein mathematisch definierten Kraftbegriff begnügt.....“ (S. 65.)

Und der LEIBNIZ-Forscher D. MAHNKE erklärt uns aus reichster Quellenkenntnis heraus⁷⁹⁾: „Alle diese hochbedeutsamen kosmologisch-astronomischen Einzelentdeckungen KEPLERS beruhen nach seiner ausdrücklichen Erklärung auf

⁷⁸⁾ Ibid. in dem bereits früher gedruckten, hier in 2. Auflage erscheinenden Vortrag: „Johannes Keplers wissenschaftliche und philosophische Stellung“.

⁷⁹⁾ In „Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt“, Halle (S.) 1937, S. 138 ff.

der *a priori* vorausgesetzten platonisch-pythagoreischen Grundanschauung, daß die Welt von Gott nach dem Vorbild seines eigenen Wesens geschaffen ist und sich daher in der vollkommensten harmonischen Ordnung befindet, die, wie die göttliche Ideenwelt, streng mathematischen Charakter besitzt.“

„Es ist hiernach ganz unzweifelhaft, daß die *geometrische Mystik* die metaphysisch spekulative Grundlage bildet, auf der nicht nur KEPLERS *philosophische Weltanschauung*, sondern auch seine bedeutsamsten mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen beruhen. Wir können sogar die einzelnen Quellen genau angeben, aus denen KEPLER seine mystisch-geometrische Kosmosophie geschöpft hat. Denn er beruft sich selbst wiederholt auf PLATON, PROKLOS und andere Neuplatoniker für die Lehren von der Vollkommenheit Gottes und seiner Schöpfung, von der Weltseele und von der urbildlichen Bedeutung der Mathematik sowohl für die wahre Wirklichkeit selbst wie für ihre Erkenntnis. Ebenso gern beruft er sich auf die Pythagoreer für die Lehre, daß die Geometrie den „Archetyp der ganzen Welt“ bilde... (S. 140.) Als seine speziellste Quelle aber nennt KEPLER unter den modernen Erneuerern des Pythagoreismus den Kusaner, weil dieser nicht nur den geometrischen Figuren im allgemeinen, sondern auch dem besonderen Unterschied der krumm- und geradlinigen eine grundlegende ... Bedeutung zugeschrieben habe.“ (S. 140.)

„Man würde es kaum glauben, wenn es sich nicht so bestimmt nachweisen ließe, daß selbst die KEPLERSche Vorentdeckung der exakt-mathematischen Formel des NEWTONschen Gravitationsgesetzes (s. oben bei M. CASPAR) im Grunde dem mystisch-theologischen Sphärensymbol in seiner KUSANischen Gestalt zu verdanken ist. Nach meinen Ausführungen aber steht es vollkommen fest, daß die *geometrische Mystik* des Kusaners durch Vermittlung KEPLERS auch auf die exakte Naturwissenschaft des Barock-Zeitalters noch eine außerordentlich bedeutsame Wirkung ausgeübt hat — ebenso wie sie durch Vermittlung VAL. WEIGELS in der religiösen und philosophischen Mystik dieser Zeit, bei BÖHME, SCHEFFLER und LEIBNIZ, lebendig geblieben ist.“ (S. 144.)

* * *

49. Und damit sind wir ganz von selbst auf den modernen Brennpunkt der Mathematik, von dem fortan alles Neue ausging, auf LEIBNIZ verwiesen. „Seine Lehre von der gottbestimmten Harmonie der selbständigen Monaden steht ja ebenfalls ganz unverkennbar hinter allen bisher dargestellten Gedankengängen. Schon in seinen ersten Weltanschauungsentwürfen (1671) und noch in den letzten Zusammenfassungen seiner Philosophie (1714) gibt LEIBNIZ wiederholt eine ‘*geometrische Erklärung der Natur des Geistes*’ durch den Vergleich mit einem mathematischen Punkte... (S. 16/17 bei MAHNKE.) Die Monaden sind demnach zu bezeichnen als lebendige ‘*Quellen ihrer Phänomene, die Beziehungen zu allem enthalten*’, oder als ‘*fruchtbare Einfachheiten*’, d.h. unerschöpfliche Ursprungspunkte, die ‘*trotz ihrer Unteilbarkeit eine zusammengesetzte Tendenz* (nach zahllosen Strebensrichtungen) *in sich schließen, ... kraft ihres wesentlichen Zusammenhanges mit sämtlichen anderen ... substantiellen Zentren*’ in der unendlichen Kugel der Wirklichkeit. — Wie jede individuelle Monade der schöpferische Quellpunkt ihrer ganzen Erlebniswelt ist, so ist Gott als ‘*ursprünglichste Monade*’ die ‘*universelle Quelle von allem*’ überhaupt oder der ‘*Ur-*

mittelpunkt' (*centre primitif*), aus dem sämtliche 'abgeleiteten Monaden... emanieren' oder 'hervorblitzen'... In dieser Hinsicht erweist sich die geometrisch symbolisierte Mystik als weltanschaulicher Untergrund der LEIBNIZschen Metaphysik, und zwar gerade ihres Zentralgedankens: der Eingliederung der individualistischen 'Monadenlehre' in das universalistische 'System der prästabilierten Harmonie'.“ (S. 18/19 bei MAHNKE.)

* * *

50. Und schließlich sei noch die Stellung von KANT in dieser Geistesentwicklung kurz charakterisiert mit den Worten, die H. KNITTERMEYER in seinem neuen Kant-Buch geschrieben hat⁸⁰). Wie sehr dabei KANT auf der vom Griechentum herkommenden deutschen geistesgeschichtlichen Linie bleibt und in direktem Gegensatz zu den modernen Auffassungen des Formalismus und der Logistik steht, möge man aus den folgenden Worten ersehen: „Deshalb vermag ihn (KANT) der Satz des Widerspruchs (auch) nicht wirklich zu fesseln, weil er nicht bis an das Dasein heranreicht und nur das Gesetz des Beweisverfahrens zu verantworten vermag.... Er gewahrt hinter diesem Gesetz 'unseres Geistes', der an diskursive Beweise gewiesen ist, die göttliche Anschauung, der alles unmittelbar in seinen wahren Beziehungen erschlossen ist.“ Auch KANT „nennt seine Philosophie Idealismus, weil seit PLATON die Idee der großartigste Beleg für das philosophische a priori geblieben ist.“ (S. 43/44.) — Auch „für KANT gibt es ein Apriori so gut der Anschauung wie des Denkens... Es soll versucht werden, von GOETHE aus an den Kern der Fragestellung vorzudringen..... GOETHE fühlte sich durch KANT weitgehend in seiner eigensten Art gerechtfertigt. Dabei hat es ihm eine bestimmte Stelle der 'Kritik der Urteilkraft' besonders angetan...: 'Wir können uns einen Verstand denken, der, weil er nicht wie der unsrige diskursiv, sondern intuitiv ist, vom synthetisch Allgemeinen, der Anschauung eines Ganzen als eines solchen, zum Besonderen geht, das ist, von dem Ganzen zu den Teilen'“. (S. 54/55.)

„Die Erkenntnis des Menschen muß sich vielmehr damit abfinden, daß sie den mühsamen Weg der Vermittlung des Denkens mit der Anschauung beschreiten muß, um zu sicheren wissenschaftlichen Ergebnissen zu gelangen. Es bleibt dabei, daß Anschauungen ohne Begriffe blind und Begriffe ohne Anschauungen leer sind“ (S. 59). — „Es ist insbesondere die Mathematik gewesen, die KANT immer wieder von zweiflerischen Anwandlungen befreit und ihn Kurs zu halten ermutigt hat. Denn es ließ sich nicht daran zweifeln, daß in der Mathematik synthetische Erkenntnis a priori wirklich war. Die Mathematik war ein anerkanntes Faktum der Erkenntnis....

Die Mathematik läßt sich nicht gleich der reinen Logik auf bloße Begriffe zurückführen. Die Beteiligung der Anschauung an ihren Erkenntnissen läßt sich nicht bestreiten, weil die Mathemata 'eben nicht aus Begriffen, sondern nur durch deren Konstruktion möglich sind'. Das Beispiel der Mathematik zwingt daher zu einer Revision der philosophischen Grundlagenforschung. Wenn es eine unbezweifelte Erkenntnis a priori, und zwar eine synthetische Erkenntnis a priori gibt, in der Anschauung und Begriff zusammenwirken, dann hat eine kritische

⁸⁰) Immanuel Kant, Bremen 1939.

Philosophie“ — und eine philosophische Kritik der Mathematik — „allen Anlaß, statt sich auf einen göttlichen Verstand oder eine göttliche Anschauung zu berufen, statt sich dem Rationalismus oder dem Empirismus zu verschreiben, *aufs neue die Frage nach der Möglichkeit synthetischer Erkenntnis a priori aufzuwerfen, und dabei dem anschaulichen a priori nicht weniger ernsthaft nachzuspüren, als dem a priori des Denkens.*“ (S. 59/61.)

„Das wirkliche Wunder des Denkens ist dies, daß es in der Mannigfaltigkeit Einheit zu stiften vermag. Woher aber kommt die Mannigfaltigkeit? An dieser Frage wird jede Philosophie scheitern, die aus dem bloßen Denken ihre Welt hervorzaubern will“ — wie dies Formalismus und Logistik in der modernen Mathematik tun — ... „Wir aber verfügen nur über einen menschlichen Verstand. Ihm muß das Mannigfaltige gegeben sein. *Es ist die Aufgabe der Anschauung, dem Verstande das Mannigfaltige bereitzustellen.*“ (S. 61/62.)

„Auf jeden Fall bleibt es eine der unvergänglichen Leistungen der kritischen Philosophie, daß sie die Anschauung in ihre eigentümliche Würde wieder eingesetzt und dem Gegebenen seine apriorischen Rechte in der Erkenntnis zurückerstattet hat. Die Anschauung ist nicht das Niedere, das in die höhere Sphäre des Begriffs erhoben werden soll“ — dies ist in der Mathematik sogar unmöglich —, „sondern sie ist der eine Brennpunkt aller Erkenntnis, der zwar im Unbestimmten verschwebt, wenn er für sich allein gelassen würde, und der jeweils der Bestimmung durch das Denken bedarf, ohne den aber die Erkenntnis ihre Heimat in dem Gegebenen, ihre Zugehörigkeit zu der einzigen, zu dieser wirklich uns umfangenden Welt einbüßen würde. *Der Begriff für sich allein erdichtet eine Vielfalt möglicher Welten. Nur durch seine Hinwendung zur Anschauung grenzt sich aus der Fülle der Möglichkeiten die eine Möglichkeit heraus, die nicht zufällig, sondern notwendig ist, und die dem begrifflichen Ansatz wirkliche Bedeutung verleiht.*“ (S. 65.)

* * *

51. Als Abschluß dieser geistesgeschichtlichen Entwicklungen, die die idealistische mathematische Denkweise im deutschen Geistraum belegen, wollen wir den Kreis mit CUSANUS schließen, von dem wir auch ausgegangen sind und die deutsche Linie in der Mathematik, die mit durch PROKLUS und sein Werk bestimmt worden ist, in kurzen Strichen zeichnen, nachdem wir sie schon ausführlich in unserem „Hauptproblem der Mathematik“⁸¹⁾ belegt und aufgewiesen haben. Wir wollen dies auch abschließend mit den Worten tun, die der CUSANUS-Forscher E. HOFFMANN dafür gefunden und geprägt hat⁸²⁾. „Diese übergegensätzliche, überverstandesmäßige Einheit aber, die das einzig identische ist, was es gibt, ist das Unendliche... Und wo in unserem Denken Koinzidenz der Gegensätze sich als denknötendig erweist, da ist in unserer Vernunft selber ein Zeichen gesetzt, welches wir auf das Unendliche hin deuten müssen.... *Adäquation herrscht nur im Bereich des Verstandes, wo unsere Ratio wirklich*

⁸¹⁾ Berlin 1942; 2. Aufl. 1943.

⁸²⁾ Anführungen aus der Abhandlung: Nikolaus von Cues und die deutsche Philosophie, von E. HOFFMANN. (Neue Heidelberger Jahrbücher, Jhg. 1940, S. 35 ff.)

dem Inhalt der rationalen Begriffe, z. B. der mathematischen, gewachsen ist... Daß die Adäquation zwischen Erkenntnis und ihrem Gegenstand im Über rationalen aufhört, bildet den Kern derjenigen Auffassung vom Wesen der Erkenntnis, die auf PLATON zurückgeht... Der Begriff vom Unendlichen, das nicht im Widerspruch zum Endlichen steht, sondern diesem als Wesentliches vorausliegt und als Aufgabe innewohnt.... Sein (des CUSANUS) neuer Unendlichkeitsbegriff schuf in der Mathematik die Voraussetzungen, um die Mannigfaltigkeit der geometrischen Gebilde als entstehend zu denken... Aber in der mathematischen Infinitesimalmethode des CUSANUS lagen nicht nur neue mathematische Anfänge, sondern auch Anfänge einer neuen philosophischen Systematik auf mathematischer Grundlage: Die Ableitung der mathematischen Figuren aus unendlicher Einheit erfolgt bei ihm so, daß er den stetigen Zusammenhang dieser Entfaltungsreihen als Postulat aufstellt... CUSANUS ist kosmologisch der unmittelbare Vorgänger des KOPERNIKUS, dem er auch nicht unbekannt war.

Der Gesinnung aber, in der CUSANUS das System des Universums erforschte und seine Gesetzmäßigkeit im Zahlensystem geoffenbart sah, war niemand näher verwandt als KEPLER... CUSANUS sah auch, daß aus seiner neuen Logik des Unendlichen unmittelbar eine neue Physik des Endlichen folge... Die Funktion des Zählens, Messens, Wägens stimmt bei CUSANUS... zu dem von ihm für alle Wissenschaft aufgestellten Prinzip der Reihenbildung... Er hält das methodische Ziel der Philosophie, im Gegensatz zu den besonderen Wissenschaften „die Allgemeinwissenschaft“ zu sein, erst dann für erreicht, wenn sie imstande wäre, unseren Erkenntnissen tatsächlich die Gestalt von sich entwickelnden Reihen zu geben, deren Glieder alle stetig auseinander folgen, sämtliche aber aus dem ersten. Klassisch geworden ist dieser Gedanke durch DESCARTES Programm einer Mathesis universalis; er gehört aber bereits dem CUSANUS an, geht über diesen auf noch unkritische Anfänge bei LULLUS zurück und wird systembildend bei LEIBNIZ. — In der Mechanik war CUSANUS der Vorgänger LEONARDOS (s. oben), und zwar der einzige. CUSANUS war stolz, sich für den Gedanken seiner Experimente auf niemanden berufen zu können, und er sah die gewaltige Wirkung seines Gedankens für alle Gebiete der menschlichen Kultur voraus.

Innerhalb dieses hypothetischen Bereichs sind am gewissesten die auf Mathematik gegründeten Erkenntnisse, denn in ihnen erlangt die Abstraktion vom Sinnlichen und das Erfassen einer Veritas incorruptibilis das Höchstmaß. In all diesen methodischen Positionen liegt die platonische Tendenz zutage.... Hier beginnt (auch) der Weg, der von CUSANUS zu PARACELUS führt. Beiden Männern ist gemeinsam die Überzeugung, daß wir im Endlichen das Unendliche zu ergreifen haben, und zwar erkennend und handelnd... Und diese Position folgt für CUSANUS nicht nur aus seinem christlichen Glauben, sondern ebenso aus der erkenntnistheoretischen kritischen Stellung seiner Philosophie, von der auch seine gesamte Naturauffassung und Naturforschung beherrscht ist: Er verharrete grundsätzlich bei dem Dualismus zwischen Grund und Folge, zwischen absoluter und relativer Unendlichkeit, zwischen Maßgebendem und Maßnehmendem.... oder platonisch gesprochen: zwischen Eidos und Eidolon. Dies ist derjenige einzige Gegensatz, den CUSANUS durch seine Systematik nicht auflösen, sondern vielmehr aufs neue erweisen will. In dieser Hinsicht denkt CUSANUS genuin

platonisch... Gerade die Mittelglieder (wie das Naturganze) sind im platonischen Sinne die Symbole dafür, daß das Endliche zum Unendlichen im Verhältnis der Teilhabe, niemals aber im Verhältnis der Identität steht....

Und wie von der Renaissancephilosophie, so ist das cusanische Denken seinem Wesen nach auch geschieden vom Rationalismus und Empirismus des 17. und 18. Jahrhunderts, obwohl er auch diesen beiden den Weg bereitet hat. ... Aber während der englische Empirismus und der cartesianische Rationalismus grundsätzlich getrennt marschierten, weil der eine in bewußter Beschränkung nur von der Sinnesempfindung, der andere ebenso bewußt nur von den innaten Ideen ausging, *hielt CUSANUS diese, schon im Mittelalter angebahnte Scheidung beider Methoden für ganz unvereinbar mit dem Wesen der Erkenntnis und ihres Gegenstandes.* Er bejahte vielmehr gleicherweise den empiristischen Satz, daß der Verstand ohne Inhalt wäre, wenn nicht die Sinne ihn lieferten, und gleicherweise den rationalistischen Satz, daß alle Erkenntnis auf die apriorische Form der innaten Ideen zurückgehe. *Schon er hat mit vollendeter Klarheit die erst durch KANT erneuerte Synthesis vollzogen, daß die Erkenntnis ihren Inhalt aus den Sinnen, ihre Form aus der Vernunft bezieht....* MONTAIGNES Skeptizismus aber bildete bereits (in Frankreich), nach DILTHEYS zutreffendem Ausspruch, den Hintergrund für die Philosophie des DESCARTES und die Vorbereitung für die französische Aufklärung, und mit diesen beiden war das Abbiegen von der cusanischen Linie endgültig vollzogen.

In Deutschland war die philosophische Wirkung des CUSANUS auf Jahrhunderte hin gering, wie sich aus der Zeitlage von selbst versteht.... *Das geistige Vermächtnis des CUSANUS war philosophisch preisgegeben, weil es an solchen fehlte, die es nach Rang und Art hätten betreuen können...* Weiter entwickelt und in fruchtbarer Weise fortgesetzt wurden seine philosophischen Gedanken in Deutschland erst durch LEIBNIZ... LEIBNIZ war geschichtlich zu gut unterrichtet, als daß ihm CUSANUS hätte unbekannt bleiben können, *und im Denken beider war tiefe Verwandtschaft durch die Art der Beziehung ihrer Philosophie zur Mathematik: LEIBNIZ war in seiner Zeit der einzige, dem die mathematische Struktur nicht nur Symbol des Automatischen, sondern Symbol der Spontaneität bedeutete.* Aber er ist sich nicht bewußt gewesen, in wie hohem Grade seine eigene Monadologie und Theodizee cusanische Motive erneuerte...

Aber *„die Geschichte der Wissenschaften ist eine große Fuge, in der die Stimmen der Völker nach und nach zum Vorschein kommen“.* Dies Wort hat GOETHE zu RIEMER gesprochen, und gerade an GOETHE läßt sich zeigen, wie ohne Kenntnis der Schriften des CUSANUS und ohne Nennung seines Namens die deutsche Philosophie an dem entscheidenden Punkte in die *große problemgeschichtliche Linie* einbog, auf der nach den antiken und mittelalterlichen Vorgängern als erster wieder NIKOLAUS VON CUES gestanden hatte.“ An zwei, von E. HOFFMANN nachgewiesenen Stellen „bekennt sich der junge GOETHE prinzipiell zu derjenigen Art des Philosophierens, nach welcher erstens die Gegensätze des Vielen und Einen in der Dimension der Unendlichkeit zusammenfallen, und nach welcher zweitens die Natur logisch aus Gott folgt. *Hiermit bekennt sich GOETHE schlechthin zu dem Motto der cusanischen Philosophie,* aber den Namen des NIKOLAUS VON CUES hat er nicht gekannt (er findet sich an keiner einzigen Stelle der Schriften GOETHEs; auch nirgends, soweit ich feststellen konnte, in seinem

Nachlaß) ... SCHELLING und SCHLEIERMACHER kehrten genau zu jenen beiden Positionen des jungen GOETHE zurück und erneuerten somit beide den cusanischen Grundgedanken, ohne CUSANUS zu kennen ...

Die Philosophie des LEIBNIZ (erst) war (wieder) der grundsätzliche Anfang eines Philosophierens, das von KANT über FICHTE, SCHELLING, SCHLEIERMACHER die *klassische deutsche Philosophie* wurde. Gerade LEIBNIZ hatte die *fundamentale Einsicht zum Eckstein der gesamten Philosophie gemacht, daß alle Einheit, die von der Erkenntnis vorausgesetzt wird als wesentlicher Charakter des Weltganzen, nicht Stoff sondern Form ist, nicht Ding sondern Leben, nicht eine Eigenschaft der Ausdehnung sondern des Geistes*. Unter dieser Voraussetzung muß vor allem das erkennende Subjekt selber als eine geistige Einheit erfaßt werden, die vorstellend und denkend sich selbst entwickelt. — — — Diese Monadologie, engstens verbunden mit LEIBNIZENS *Infinitesimalmathematik* und mit seiner gesamten Erneuerung des *Individual-, Universal- und Harmonieprinzips*, war faktisch der *Eckstein der neuen idealistischen Philosophie*; denn KANTS gesamte Vernunftkritik wurzelt im Begriff der synthetischen Einheit als dem produktiven Element unserer ganzen Erkenntnis. Und diese apriorische Einheit all unserer produktiven Erkenntnis war der Punkt, an dem FICHTE KANTS System zu einer Lehre vom reinen Ich ausbildete

Wenn wir heute die geistesgeschichtliche Linie so verlaufen sehen, so müssen wir zugleich anerkennen, daß sie von niemand anderem ihren Ausgang genommen hat als von NIKOLAUS VON CUES“, ein Grund mehr dafür, daß wir das PROKLEISCHE Werk in diesem großen geistesgeschichtlichen Rahmen sehen lernen, wozu unsere grundsätzliche Einleitung in das Werk die gesamte Handhabe zum Verständnis bieten wollte. „Er war es, der durch seinen Unendlichkeitsbegriff das Problem der Einheit, der Ichheit und der Ganzheit, so reformiert hatte, daß von ihm über LEIBNIZ die große Linie zum deutschen Idealismus führte ... Die Eigenart seines Denkens, in welchem die Eine Wahrheit aufs neue in besonderer Weise erglänzte, war die deutsche Art.“

* * *

52. Möge das Werk des PROKLUS, das wir jetzt erstmalig in einer deutschen textkritischen Ausgabe der wissenschaftlichen Forschung vorlegen, über CUSANUS, der wesentlich von den Standorten des PROKLUS ausging, und über KEPLER, der im Mathematischen die Grundgedanken der PROKLEISCHEN Lehre zur höchsten Synthese brachte, jetzt aus den umfassendsten Blickwinkeln heraus verstanden werden können und uns zeigen, was wir in einer neuen deutschen Renaissance und in einem neuen deutschen Humanismus in der Mathematik und in der Philosophie wieder nötig haben. Aus diesem Grunde wurde die Arbeit unternommen und durchgeführt; möge sie ein Zeugnis sein, daß gerade wir Deutschen immer noch den Schlüssel für die Erschließung des abendländischen Geistes und seiner gesamten Wirkungen in Kultur, Wissenschaft und Kunst, in Händen halten. Wir

müssen ihn allerdings erst wieder zu gebrauchen lernen, nachdem man uns in den eben vergangenen Jahrzehnten systematisch entwöhnt hat, den deutschen Geist schlechthin mit ihm aufzuschließen. Eine Reformation des Geistes ist not! Möge sie erfolgen in dem Geiste, den man mit Recht idealistisch nennt, und der seit Jahrtausenden auch der Geist der Deutschen war. PROKLUS kann uns so nicht nur für die Mathematik, sondern für die Gestaltung einer neuen idealistischen Weltanschauung, die das Erbe der großen deutschen Denker — Mathematiker, Naturforscher und Philosophen immer in einem — in sich birgt und verbindet mit den Ideen, die unsere Zeit und ihre Menschen ihrem Bewußtsein einzuprägen haben, ein Führer sein.

PROKLUS DIADOCHUS

Kommentar zum

1. Buch

von

Euklids „Elementen“

Deutsche Übersetzung mit
textkritischen Anmerkungen

von

P. Leander Schönberger †

Kommentare zur Übersetzung

von

Max Steck

Die Kommentare zur Übersetzung sind durch hoch-
gestellte Bruchziffern im Übersetzungstext angemerkt
und am Schluß dieser Ausgabe gesammelt.

Tafel VI

PROCLI DIADOCHI
IN
PRIMUM EUCLIDIS ELEMENTORUM
LIBRUM
COMMENTARII.

EX RECOGNITIONE

GODOFREDI FRIEDLEIN.



LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
M. DCCC. LXXIII.

Titelblatt der Neuedition des griechischen Originals
des PROKLEISCHEN „Euklid-Kommentars“ von
G. FRIEDLEIN. (Originalgröße)

Vorwort des Übersetzers *)

Vorliegende Übersetzung ist nicht dem eigenen Interessengebiet und den Neigungen des Übersetzers entsprungen. Ein Kirchenvater oder Klassiker wäre ihm viel lieber gewesen. Nachdem aber die Zeitverhältnisse den vorzeitigen Verzicht auf seine berufliche Tätigkeit in der Schule und damit Muse und freie Zeit mit sich brachten, glaubte er sich dem diesbezüglichen Antrag der Vertreter der heutigen mathematischen Wissenschaft nicht versagen zu sollen. Diese haben ein begreifliches Interesse daran, ihren berühmten Zunftgenossen aus dem Altertum, der vor dem Untergang der antiken Kulturwelt mit ihrer wundervollen Leuchtkraft als vorletztes Haupt der Schule PLATONS den gesamten, seit Jahrhunderten angewachsenen Wissensschatz auf den Gebieten der Philosophie und der elementaren Mathematik in glänzender Synthese zusammenfaßte, diesen Zunftgenossen nicht bloß in gelegentlich zerstreuten Fragmenten, sondern in der Substanz seiner mathematischen Leistung bequem in der eigenen Muttersprache ohne die Schwierigkeiten des fremden Idioms kennenzulernen. Aber auch der Geschichtsschreiber der antiken Philosophie wird eine Verdeutschung von PROCLUS' Kommentar zu den „Elementen“ des EUKLID willkommen heißen. Ich verweise nur auf N. HARTMANN, der in seiner Studie: *Des PROKLUS DIADOCHUS philosophische Anfangsgründe der Mathematik* (in *Philosophische Arbeiten*, herausgegeben von H. COHEN und P. NATORP, IV, 1 ff., 1909) u. a. schreibt: „Die Einleitung zu diesem Buch ist der Versuch einer Philosophie der Mathematik, der erste und letzte Versuch dieser Art, den wir von den Alten besitzen. Der Prolog zum EUKLID-Kommentar ist vielleicht das philosophisch Durchdachtste, was er geschrieben

*) Im wissenschaftlichen Nachlaß des Herrn Übersetzers fand sich dieses „Vorwort des Übersetzers“, das leider ein Torso geblieben ist. Der Herr Übersetzer hat es mir kurz vor seinem Tode vorgelesen und dazu die Bemerkung gemacht, daß er am Schluß noch seinen Dank abstaten wolle. An sachlichen Darlegungen enthält dieses Vorwort alles, was der Herr Übersetzer zu seiner Übersetzung zu sagen hatte und sagen wollte.

hat. Hier ist er ganz ersichtlich dabei, eine rein systematische Einführung zu geben.... So ist dieser Prolog ein wahres Kompendium antiker Begründungsmethodik und Fundamentalphilosophie. Denn das Bedeutendste, was die griechische Wissenschaft an theoretischer Methodik sich errungen hatte, stammte ja aus der Fragestellung nach der Begründung mathematischer Denkwerkzeuge“ (S. 4/5).

Mochte somit für die Übersetzung des PROCLUS-Kommentars ein wirkliches Bedürfnis vorliegen, so hätte der Übersetzer doch schwerlich zur Übernahme der Arbeit sich entschlossen, wenn er ihre Schwierigkeiten in vorhinein in vollem Umfange erkannt hätte. Zwar daß die Arbeit nicht leicht sein werde, war ohne weiteres vorauszusehen. Es wäre ein Irrtum, zu meinen, weil der Kommentar sich nur erstreckte auf das 1. Buch von EUKLIDS „Elementen“, könne er keine besonderen Schwierigkeiten bieten. Es galt vor allem die *mathematische Terminologie der alten Griechen**) gründlich kennenzulernen. Für diese *Termini* bot zwar PROCLUS zumeist die nötigen Erklärungen im eigentlichen Kommentar, doch gebrauchte er sie vielfach in den Vorreden als gangbare, allgemein anerkannte Münze ohne weitere Erklärung. Die Lexika versagen in mathematischer, teilweise auch, um dies gleich beizufügen, in philosophischer Beziehung nicht selten. Daß *ὄψοις* z. B. bei PROCLUS dreimal die Bedeutung von „Ellipse“ hat, findet man zwar in HEIBERGS „Geschichte der Mathematik“ (S. 10, Anm. 2), aber in keinem Lexikon verzeichnet. Daß *σύμπτωμα* bei PROCLUS immer die Bedeutung des philosophischen *terminus accidens* hat, ist gleichfalls nirgends zu finden. Ich kann zwar augenblicklich den Beweis dafür nicht erbringen, neige aber stark zu der Ansicht, daß das lateinische „*accidens*“ die direkte, wörtliche Übersetzung nicht des aristotelischen *συμβεβηκός* sondern von *σύμπτωμα* bei PROCLUS ist. Damit wären wir schon bei der Philosophie angelangt, die ja bei PROCLUS eine große Rolle spielt.

PROCLUS ist Neuplatoniker, fordert aber nicht bloß genaue Kenntnis von PLATON und seiner Schule, sondern auch von dem oft zitierten ARISTOTELES. Wenn die neuplatonische Konzeption des Universums als einer streng gegliederten, hierarchisch anmutenden Ordnung der verschiedenen Seinsstufen, von denen die niedrigeren jeweils von den höheren abhängig sind, einer der großartigsten und bezauberndsten philosophischen Gedanken aller Zeiten bleibt, so ist doch nicht

*) Hervorhebung von mir. M. St.

zu verkennen, daß die neuplatonische Ontologie und Psychologie in der näheren Ausgestaltung und Durchführung dieses Gedankens oft reichlich abstruse und ungereimte Ideen entwickelt, zu deren Klarlegung es nicht selten der reinsten Geistesakrobatik bedarf. PROCLUS ist reich an solchen Stellen abstruser Spekulation und theosophischer Allegorese, besonders in den Vorreden und im ersten Teil des Kommentars. Allmählich erschöpft sich Gott sei Dank seine Weisheit in dieser Beziehung und gegen das Ende wird der Fluß der mathematischen Deduktionen kaum mehr unterbrochen.

Mehr Schwierigkeiten als der Text an sich bereitet freilich seine schlechte Überlieferung und die wenig befriedigende Textgestaltung in der von FRIEDLEIN 1873 besorgten Teubnerausgabe. Es ist nun einmal das Schicksal viel benützter Kommentare und Schulbücher, die in zahlreichen Handschriften auf uns gekommen sind, daß Auslassungen, Verschreibungen, Seh- oder Hörfehler und dergleichen sich einschleichen und im Laufe der Jahrhunderte sich summieren. Dabei verändert im Griechischen ein einziger Buchstabe oft den ganzen Sinn. FRIEDLEIN schreibt z. B. 244, 1 *προκείσθω* in Wirklichkeit ist aber *προσκεισθω* zu lesen, was ganz anderen Sinn und Zusammenhang ergibt. Genau ins Gegenteil aber wird der wahre Sinn verkehrt, wenn 371, 20 *ἀδύνατον* steht unter Berufung auf ARISTOTELES, wo es diesem zufolge unzweifelhaft *δυνατόν* heißen muß. Das sind nur einige besonders krasse Fälle. Wer sich die Mühe gibt, meine meist textkritischen Fußnoten zu beachten, mag eine Vorstellung von den Schwierigkeiten bekommen, die der korrupte Text dem Übersetzer allenthalben bereitete. FRIEDLEIN hatte bei seiner Herausgabe eine wenig glückliche Hand. Zwar versichert er in seiner *Praefatio*: *Quidquid igitur temporis a muneris publici negotiis officiisque aliis vacabat, in Procli commentarios impendi laborisque mei fructus typis nunc prodiit redditus* und wir müssen ihm glauben. Aber an der Tatsache einer verfehlten und unzulänglichen Ausgabe kann das nichts ändern. Offenbare und schwerwiegende Fehler wie an den beiden eben zitierten Stellen erkennt er nicht. Dagegen versieht er öfters aus völlig unbegründeten sprachlichen oder sachlichen Bedenken den richtigen Text mit einem Fragezeichen und sucht ihn wohl auch zu verbessern. Es wirkt haarsträubend und niederdrückend zugleich, wenn er zu einem einwandfreien PLATON-Zitat S. 382, 4. 5 im kritischen Apparat bemerkt: *ego sanum hunc locum esse negaverim, etsi idem in Platonis Timaeo (p. 53, C) legitur*. Da möchte man nicht für

die *sanitas huius loci*, sondern eher für eine andere *sanitas* in Sorge sein.

Die erste Ausgabe des PROKLUS-Kommentars gab bekanntlich GRYNÆUS 1533 in Basel heraus. BAROCIUS fällt über sie ein vernichtendes Urteil und FRIEDLEIN macht sich dies in vollem Umfang zu eigen. Infolge der Zeitverhältnisse konnte ich den GRYNÆUS leider nicht einsehen und muß mich daher eines eigenen Urteils über seinen Wert oder Unwert enthalten. Er mag im einzelnen nach den Proben, die FRIEDLEIN im kritischen Apparat von ihm gibt, viele Fehler und Nachlässigkeiten aufweisen; das entband aber den Herausgeber nicht von der Pflicht, in jedem einzelnen Falle die abweichenden Lesearten zu prüfen und dann wäre die Entscheidung öfter zugunsten des GRYNÆUS ausgefallen. Ein mathematischer Autor gewährt hinsichtlich der Textkritik vielfach doch bessere Anhaltspunkte als ein anderer Schriftsteller. Letzten Endes entscheidet hier über den Text die Frage, was ist (mathematisch) *) richtig und was ist (mathematisch) falsch. Auf Grund dieses Kriteriums muß man mehrmals einfach dem GRYNÆUS gegen FRIEDLEIN Recht geben. Die (lateinische) **) Übersetzung des BAROCIUS schätzt FRIEDLEIN in seiner Vorrede mit Recht hoch ein. Es kann ihm dann aber der Vorwurf nicht erspart bleiben, daß er ihm bei der Textgestaltung zu wenig Rechnung trägt und zuweilen dessen Abweichungen und Ergänzungen gar nicht verzeichnet. Das Unglaublichste und Bedenklichste ist aber vollends, was sich FRIEDLEIN an falschen, Sinn und Zusammenhang zerstörenden Interpunktionen leistet. Ich weise auf ein Dutzend Stellen und meine Bemerkungen dazu in den Fußnoten hin: 20, 11; 56, 10; 51, 17; 60, 18; 79, 14; 83, 21—84, 1; 150, 1; 152, 22—26; 183, 10; 197, 14; 243, 10; 293, 4; 306, 9—12. Die Liste ist nicht vollständig, mag aber genügen. An einigen Stellen ist die Wirkung der falschen Interpunktion einfach verheerend und doch bot BAROCIUS zumeist die richtige und hätte FRIEDLEIN zum mindesten stutzig machen müssen. Nach alledem kann das Urteil über FRIEDLEINS Ausgabe nur sehr ungünstig lauten und es wäre eigentlich vordringlicher gewesen, erst eine brauchbare griechische Ausgabe und hernach erst eine deutsche Übersetzung herauszubringen. Doch lassen sich im Kriege die Vorarbeiten zu einer Neuauflage leider nicht erledigen

*) Die zweimalige Einfügung „mathematisch“ von mir. M. St.

**) Die Einfügung „lateinische“ von mir. M. St.

und so muß die Wissenschaft einstweilen mit einer Übersetzung sich begnügen, der ersten deutschen Übertragung (des Ganzen)*). Bisher sind nur kleinere Partien übersetzt worden, so der bekannte Mathematikerkatalog der 2. Vorrede in BRETSCHNEIDER, „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides“ (Leipzig 1870, S. 27—31) und fast gleichlautend in M. CANTOR „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (I², Leipzig 1894, S. 125 ff.; S. 22, 1—24, 14 [mit wenigen Auslassungen]); den Abschnitt über den Nutzen der Mathematik setzte KEPLER, in drei Teile zerlegt, als Motto an die Spitze des 1., 3. und 4. Buches seiner „*Harmonice mundi*“; ferner verleihte er diesem Werke (4. Buch) noch ein größeres Stück aus der 1. Vorrede in lateinischer Übersetzung ein (S. 12, 2—18, 4). In dem Monumentalwerk der neuen, von MAX CASPAR besorgten deutschen Ausgabe von KEPLERS „*Harmonice mundi*“ (Weltharmonik, München-Berlin 1939) liegen diese Partien nun auch in deutscher Übersetzung vor**). Im übrigen gab es bisher nur die lateinische Übersetzung des BAROCIUS, erschienen in Padua 1560. Von ihr und ihrem Wert war schon des öfteren die Rede. Man merkt es wohl besonders in den Vorreden, daß das spröde Latein mit der Wendigkeit und Elastizität des griechischen Idioms bei philosophischen Materien nicht wetteifern kann; man ist nicht befriedigt, wenn z. B. ein so häufiger und vieldeutiger Terminus wie *λόγος* immer mit *ratio* übersetzt wird, aber er ist doch ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Beseitigung mancher textkritischen Schwierigkeiten und Lücken und insbesondere in den mathematischen Deduktionen ist er von absoluter Zuverlässigkeit. Von sonstigen Hilfsmitteln nenne ich neben den schon angeführten heute zum guten Teil überholten Werken von BRETSCHNEIDER und

*) Die Einfügung „des Ganzen“ von mir. M. St.

**) Bei dieser Aufzählung der bereits in deutscher Übersetzung vorliegenden Partien aus dem PROKLEISCHEN Werk sind dem Herrn Übersetzer noch einige Veröffentlichungen entgangen. Ich nenne sie der Vollständigkeit halber hier. In seinem I. Anhang „EUKLID (Ein Fragment)“ zu seiner „Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter“ (Leipzig 1874). S. 381 ff.) hat H. HANKEL die auf EUKLID bezüglichen Stellen aus dem Werk des PROKLUS übersetzt (S. 381 bis 382). Ferner hat L. MAJER in zwei Schulprogrammen: „Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid“ (Tübingen 1875) und „Proklos über die Definitionen bei EUKLID“ (Stuttgart 1881), die Postulate und Axiome bzw. die Definitionen (1.—7. Def.) des EUKLID mit den Kommentaren des PROKLUS nach der Ausgabe von FRIEDLEIN übersetzt und einige erläuternde Anmerkungen beigelegt. Wir kommen darauf in unseren Kommentaren zu sprechen. M. St.

CANTOR (noch) ZELLERS Geschichte der griechischen Philosophie und die einschlägigen Artikel in PAULY-WISSOWAS „Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft“.

Über meine Grundsätze bei der Übersetzung ist nicht viel zu sagen. Es war immer meine Forderung in der Schule: „So wörtlich als möglich, so frei als nötig“, der ich auch bei dieser Arbeit gerecht zu werden mich bemühte. Es handelt sich nicht um ein schöngeistiges, sondern wissenschaftliches Werk, bei dem man auf wissenschaftliche Treue, Klarheit und Korrektheit der Darstellung besonderen Wert legt. Der professorale Ton der λόγοι des PROKLOS ließ sich nicht verwischen. Der wortreichen Breite des Kommentars hätte man öfter im Deutschen eine knappere Fassung gewünscht; zuweilen brachte freilich auch wieder seine straffe Kürze den Übersetzer in Verlegenheit und zwang ihn zu breiterem Ausdruck. Wenn dies die beste Übersetzung ist, die einen Kommentar weitgehend ersetzt, so gestehe ich, daß dies das Ziel meines Ehrgeizes war. Noch ein Wort zu der Manier des PROKLOS, im Satzkontext aufgestellte Behauptungen sofort zu begründen, und zwar nicht durch kausale Nebensätze, sondern durch mit γὰρ eingeleitete Hauptsätze. FRIEDLEIN half sich, indem er diese Begründungssätze als Parenthesen zwischen Gedankenstriche nahm. Das bietet aber kein schönes Satzbild, auch weiß man schließlich bei öfterer Wiederholung nicht mehr, was Parenthese und was Kontext ist. Ich habe die Begründung in der Regel durch einen Doppelpunkt vorher angedeutet.

So möge denn das Werk hinausgehen und die Wissenschaft fördern. Sachliche Kritik und Verbesserungsvorschläge sollen mir willkommen sein. Ich kann nicht annehmen, daß nach Lage der Dinge meine Arbeit sozusagen gleich auf den ersten Hieb vollkommen gelungen sei, wenngleich ich mich redlich bemühte, sie so vollkommen als möglich zu gestalten. Ἀγαθὴ τύχη!*)

* Hier bricht das Manuskript des Vorworts des Herrn Übersetzers, das ich im vorliegenden Text wörtlich wiedergegeben habe, ab. Unterschrift, Ort und Datum des Abschlusses der Arbeit fehlen. Sie ist aber, wie mir bekannt ist, einschließlich dieses Vorworts im Mai 1943 abgeschlossen gewesen. M. St.

**Des Proklus Diadochus 1. Buch des Kommentars
zum 1. Buch von Euklids „Elementen“**

Verzeichnis der Abkürzungen

(Siglen)

Der Herr Übersetzer verwendet in den textkritischen Anmerkungen zum folgenden Übersetzungstext für die einschlägige Literatur die folgenden Abkürzungen, die ich an dieser Stelle nach FRIEDLEIN zusammengestellt habe. — M. St. —

- M* = *codex Monacensis* 427, chartaceus, saeculo X^{mo} ab HARDTIO addictus, XI^{mo} vel XII^{mo} fortasse addicendus. aequali litterarum ductu folia CCXXXVIII sunt exarata eadem manu, paucis iisque raro adhibitis compendiis . . . (Beschreibung des Manuskripts) (s. FRIEDLEIN im „*Notarum Explicatio*“, p. 1).
- C* = corrector quidam ignotus, qui editionis primae exemplar, olim *Petri VICTORII* libris insertum, nunc in *bibliotheca Monacensi* sub signo A. Gr. 1060 asservatum, plurimis locis quantum conici potest ex codice codici *M* simillimo emendavit. non ubique verum eum vidisse aut attulisse non est quod miremur.
- Z* = liber manu scriptus sub signo cod. lat. 6 in *bibliotheca Monacensi* depositus, continens in primis CLIII foliis PROCLI commentariorum libros IIII *Bartholomaeo ZAMBERTO* veneto interprete (anno M. DXXXVIII, anno interpretis VI et LX absoluto).
- B*₁ = *codex Bononiensis bibliothecae S. Salvatoris* 223. (*Kn.* III, p. 5).
- B*₂ = *codex* 101 *bibliothecae Barberinae*, saec. XV., qui primas sedecim paginas editionis Hervagianae continet usque ad verbum *διανοητικὴν* in paginae .XVI. linea .XXI. ab inferiore parte.
- B*₃ = *codex* 145 *bibliothecae Barberinae*, saec. XVI., a duobus librariis conscriptus, quorum prior folia 1—158, alter folia 159—200 exaravit.
- A* = *EYKAEIAOY ΣΤΟΙΧΕΙΑ* edita ab E. F. AUGUST (partis primae pag. 290—293. 307—308), Berolini MDCCXXVI.
- Kn.* I = Ex PROCLI successoris in EUCLIDIS elementa commentariis definitionis quartae expositionem quae de recta est linea et sectionibus spiricis commentati sunt J. H. KNOCHE et F. I. MAERKER, Herfordiae 1856.
- Kn.* II = Untersuchungen über des PROKLUS DIADOCHUS Commentar zu EUKLIDS Elementen von Dr. J. H. KNOCHE, Herford 1862.
- Kn.* III = Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des PROKLUS DIADOCHUS zu EUKLIDS Elementen von Dr. Joachim Heinrich KNOCHE, Oberlehrer und Konrektor, Herford 1865.
- H*₁ = Zu PROKLOS. Dresden. Fr. HULTSCH. (Rheinisches Museum für Philologie. Neue Folge. 19. Jhg. Frankfurt am Main 1864, p. 450—455.)
- H*₂ = HERONIS *Alexandrini* geometricorum et stereometricorum reliquiae editit. Fridericus HULTSCH, Berolini MDCCCLXIV.

„Der Geist denkt aus sich die gerade Linie, er denkt aus sich den gleichen Abstand von einem Punkt und macht sich daraus ein Bild vom Kreis. Wenn dies möglich ist, so kann er noch viel mehr darin eine Konstruktion finden und die Funktion des Auges beim Betrachten einer Figur (wenn er doch einer solchen bedarf) ergänzen. Denn wenn der Geist nie eines Auges teilhaftig gewesen wäre, so würde er sich zum Begreifen der außer ihm gelegenen Dinge das Auge fordern und die ihm selbst entnommenen Gesetze zu dessen Bildung vorschreiben ... Denn das dem Geist eingeborene Erkennen der Quantitäten gibt an, wie das Auge sein muß und daher ist das Auge so beschaffen, weil der Geist so beschaffen ist, nicht umgekehrt.“

JOHANNES KEPLER
in „Harmonice Mundi“, 1619.

Vorrede I. Teil

p. 3, 1 Das mathematische Sein gehört notwendigerweise weder zu den höchsten noch zu den niedrigsten Seinsgattungen, die im Gegensatz zum einfachen Sein der Teilung unterworfen sind, sondern behauptet den mittleren Platz zwischen den ungeteilten, einfachen, unzusammengesetzten und untrennbaren Wesenheiten und den geteilten, durch mannigfache Zusammensetzungen und vielfache Trennungen gekennzeichneten. Denn der Charakter der Unveränderlichkeit, Beständigkeit und Unwiderlegbarkeit der mit ihr sich befassenden Sätze erweist ihren Vorrang vor den materiellen Seinsarten; aber die Ausführlichkeit ihrer Erkenntnismethoden*), der Gebrauch von 10

*) HARTMANN übersetzt τὸ διεξοδικὸν τῶν ἐπιβολῶν mit „die Tendenz zur Durchführung in den Unternehmungen“ (S. 6). Damit ist natürlich nichts anzufangen. Der Ausdruck ἐπιβολή kehrt bei PROCLUS häufig wieder und ist nicht leicht zu fassen. In der Teubner-Ausgabe der *Hypotyposis* S. 3. 4 übersetzt MANITIUS den Satz ποθεῖς καὶ τὰς τούτων ἐπιβολὰς ἀκούσαι mit: Du trägst Verlangen, auch der Geistesrichtung dieser Männer gerecht zu werden. Die Übersetzung scheint mir nicht glücklich und sinngemäß. Wenn man die Stellen mit ἐπιβολή überprüft, kommt man zu dem Ergebnis, daß ἐπιβολή ein Synonym ist von ἐφοδος, μέθοδος im Sinne des lateinischen *aditus ad rem*. Geht man aus von der sinnfälligen Phrase χεῖρας ἐπιβάλλειν τινί, so schließt sich ungezwungen der übertragene Ausdruck an ἐπιβάλλειν τινί τὰς διανοήσεις, sein Augenmerk auf etwas richten, es zu erfassen und zu begreifen. ἐπιβολή involviert also das geistige Erfassen und Begreifen und alle Bemühungen, Versuche, Mittel und Wege dazu.

- dimensionären Forschungsobjekten und das Fortschreiten von immer neuen Voraussetzungen zu immer neuen Folgerungen verleiht ihnen einen minderen Rang als der ungeteilten und in sich selbst vollkommen begründeten Seinswelt. Deshalb glaube ich, verteilte auch PLATON*) die Erkenntnisarten des Seienden an die höchsten, die mittleren und die niedrigsten Wesenheiten, und zwar wies er der Welt des Ungeteilten die intellektuelle Art zu, die mit einem Blick auf einfache Weise das Intelligible unterscheidet und durch ihren immateriellen und reinen Charakter sowie durch die intuitive Erfassung und Aneignung**) der Seinsobjekte die anderen Erkenntnisarten übertrifft; der Welt des Geteilten, die den niedrigsten Seinsgrad hat und insgesamt dem Sinnenbereich angehört, die Überzeugung, die nur einen matten Strahl der Wahrheit erfaßt; der mittleren Welt endlich, also den mathematischen Seinsarten, die des unteilbaren Wesens entbehren und der teilbaren Welt übergeordnet sind, das vermittelnde (diskursive) Denken. Denn dieses beansprucht erst die zweite Stelle nach dem reinen Denken und der höchsten Erkenntnis, ist aber vollkommener, genauer und reiner als die bloße Überzeugung. Es entwickelt nämlich und zergliedert die Unermeßlichkeit des Nus und entfaltet, was im intellektuellen Denkprozeß zusammengefaltet war, verbindet dann aber hinwiederum das Gesonderte und führt es zurück auf den Nus. Wie nun die Erkenntnisarten von einander verschieden sind, so unterscheiden sich auch von Natur aus die Erkenntnisobjekte, und zwar übertrifft die intelligible Welt alle anderen durch die Unwandelbarkeit ihrer Substanzen; die Sinnenwelt aber bleibt in allem hinter dem höchsten Sein zurück. Die mathematischen Objekte endlich und überhaupt die Objekte des vermittelnden Denkens behaupten ihren Platz in der Mitte. Vor dem Intelligiblen haben sie vermöge ihrer Trennung voneinander die größere Menge voraus, vor der Sinnenwelt haben sie den Vorzug der Immaterialität; ersterem stehen sie nach in Hinsicht auf Einfachheit, letztere überragen sie durch ihre Exaktheit und dadurch, daß sie schärfere Bilder des intelligiblen Seins bieten als die Sinnendinge. Aber gleichwohl sind sie nur Bilder und prägen in geteilter Weise das Ungeteilte und in mannigfachen Formen die einförmigen Urbilder des Seienden ab, und, um es zusammenfassend zu sagen: Sie sind im Vorsaal der höchsten Seinsformen aufgestellt und lassen das einheitliche, ungeteilte und zeugende

*) Staat VI, 509d ff.; VII, 522—534.

**) PLATON, *Sophistes* 246a.

Sein jener in Erscheinung treten, sind aber noch nicht hinausgelangt über die Scheidung und Zusammensetzung der Begriffe und über die bloßen Bildern eigene Realität, haben die mannigfachen und weit-schweifigen Denkprozesse der Seele noch nicht überwunden, und die unmittelbare Eingliederung in die einfachen und von allem Stofflichen freien Erkenntnisse noch nicht gefunden.

Die Mittelstellung der mathematischen Gattungs- und Artbegriffe muß also gegenwärtig*) so gedacht werden: Sie füllen den Mittelraum zwischen dem absolut unteilbaren Sein und den teilbaren Dingen im Bereich der Materie. Da wir nun aber die Prinzipien des gesamten Bereichs des mathematischen Seins erforschen, so steigen wir unmittelbar hinauf zu den Prinzipien, die den ganzen Seinsbereich durchwalten und alle Dinge aus sich erzeugen, ich meine aber die Grenze und das Unbegrenzte (*τὸ πέρας καὶ τὸ ἄπειρον*). Denn von diesen, den beiden ersten Prinzipien nach der unergründbaren und allen unfaßbaren Wirkursache des Einen gewann alles andere Bestand und auch das mathematische Sein, indem diese alles zusammen und gesondert hervorbrachten, das Hervorgehende aber in dem entsprechenden Maße und der gebührenden Ordnung seinen Ausgang empfing und teils an erster, teils an mittlerer, teils an letzter Stelle sein Dasein erhielt. Denn die intelligiblen Seinsgattungen haben gemäß ihrer Einfachheit vor allem Anteil an der Grenze und dem Unbegrenzten: Vermöge ihrer Einheit und Identität, ihrem dauernden und ständigen Beharrungsvermögen sind sie erfüllt von der Grenze; vermöge der Verteilung aber auf eine große Menge, der Zeugungskraft, der göttlichen Andersheit und des Prozesses des Hervorgehens unterstehen sie auch der Wirkung des Unbegrenzten. Das mathematische Sein entstammt zwar auch der Grenze und dem Unbegrenzten, aber nicht den ersten Wirkursachen allein, den intelligiblen und verborgenen, sondern auch jenen, die von diesen an zweiter Stelle ausgingen und imstande sind, miteinander die mittleren Seinsordnungen und ihre bunte Mannigfaltigkeit zu erzeugen, weshalb denn auch in ihrem Bereich die Wesenheiten ins Ungemessene hervorströmen, aber beherrscht werden von der begrenzenden Ursache. Denn die Zahl, mit der Einheit beginnend, hat die Möglichkeit, sich ins Ungemessene zu mehren, aber immer ist die genomme begrenzt;

*) Das Komma ist nicht mit FRIEDLEIN vor, sondern nach *πρός γε τὸ παρόν* zu setzen.

und ebenso geht die Teilung der Raumgrößen ins Unendliche; aber die geteilten Größen sind alle begrenzt und in Wirklichkeit sind die Teile jedes Ganzen begrenzt. Gäbe es das Unbegrenzte nicht, dann wären alle Größen kommensurabel und es gäbe keinen unausdrückbaren und irrationalen Wert; Begriffe, die einen Unterschied bedingen in der Geometrie und Arithmetik, und die Zahlen könnten die zeugende Fähigkeit der Einheit nicht zeigen und schlossen nicht alle Verhältnisse des Seienden in sich, wie des Vielfachen oder der Bruchteile. Denn jede Zahl verändert ihr Verhältnis, wenn sie mit
 10 der Einheit und der ihr vorangehenden Zahl verglichen wird*). Würde aber die Grenze aufgehoben, dann würde man in der Mathematik nichts gewahren von Kommensurabilität, Gemeinsamkeit der Verhältnisse, Unwandelbarkeit (Identität) der Seinsformen, von Gleichheit und von dem, was sonst zur besseren Ordnung gehört; auch gäbe es kein Wissen um diese Dinge, noch unveränderliche und exakte Begriffe. Es kann also die Mathematik ebenso wenig wie die anderen Seinsgattungen die beiden Prinzipien entbehren. Von den niedrigsten, den materiellen Gattungen endlich, die ganz und gar das Werk der schaffenden Natur sind, ist ohne weiteres er-
 20 sichtlich, daß sie an beiden Anteil haben, an dem Unbegrenzten durch das Substrat ihrer Seinsformen, an der Grenze aber durch ihr Wesen, ihre Figur und Gestalt. ||
 1,13 Es ist also klar, daß die Mathematik denselben Prinzipien untersteht, wie alles andere Sein. Wie wir aber ihre allgemeinen Prinzipien betrachtet haben, die auf alle ihre Gattungen sich erstrecken, so wollen wir nun auch ihre allgemeinen und einfachen Lehrsätze über-
 27 blicken, die der einen Wissenschaft entstammen, die alle mathe-

*) Die Stelle hat ersichtlich schon BAROCIUS Schwierigkeiten bereitet. HARTMANN befindet sich auf falscher Fährte, wenn er übersetzt: „Jede Zahl verändert ihren Wert, indem sie ihn an der Einheit und der vor ihr erzeugten Zahl ermittelt“ (S. 12). Er faßt *μονάδα* nicht als Zahl 1, sondern als relative Einheit: man könne z. B. mit Metern oder Kilometern als Längeneinheit rechnen. Aber was soll daneben dann der Zusatz *καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ γενόμενον*? Vor allem entscheidet gegen HARTMANN *ἐξεταζόμενος*, das als Passivum und nicht in aktiver Bedeutung zu fassen ist. Ich kann nach gründlicher Überlegung zu keiner anderen Übersetzung als der obigen kommen. Der Satz enthält die unmittelbare Begründung zum vorausgehenden und hat den Sinn: jede ganze Zahl kann als ein Vielfaches von 1 betrachtet werden oder als ein *λόγος ἐπιμόριος* mit der Zahl, die um 1 kleiner ist als sie selbst, also in der Zahlenreihe vor ihr kommt. Die Stelle verliert damit allerdings an Inhalt und Bedeutung. *Ἀλλ' οὐ γὰρ πρὸ γε τῆς ἀληθείας τιμητέος ἀνήρ* (Staat 595c).

matischen Erkenntnisse in einem begreift, und wollen untersuchen, wie sie mit allen übereinstimmen und wie wir ihrer Behandlung sowohl Zahlen- wie Raumgrößen wie auch Bewegungen zugrunde legen können. Hierher gehört die Lehre von den Proportionen, von ihren Umformungen mit Addition und Subtraktion, mit Umkehrung, mit Vertauschung der Glieder*), ferner die Lehre von allen Verhältnissen wie vom Vielfachen, von den Brüchen, mögen nun Zähler und Nenner um 1 oder mehr als 1 differieren**), und von ihren Umkehrungen und endlich schlechthin die Lehre vom Gleichen und Ungleichen in ihren allgemeinen und gemeinsamen Umrissen, nicht 10 insofern es zutrifft auf Figuren oder Zahlen oder Bewegungen, sondern insofern jedes von beiden an und für sich ein gemeinsames Sein hat und eine noch ziemlich primitive Erkenntnis von sich gewährt. Auch Schönheit und Ordnung ist dem ganzen Gebiete der Mathematik gemeinsam ebenso der Weg vom Bekannten zu dem noch zu Erforschenden und der Übergang von letzterem zu ersterem, was beides man das analytische und synthetische Verfahren nennt. Die Begriffe Ähnlichkeit und Unähnlichkeit der Verhältnisse fehlen auch nicht bei einer der mathematischen Gattungen. Denn die Figuren nennen wir teils ähnlich teils unähnlich und ebenso die Zahlen. Erscheinungen 20 aber wie bei den Potenzen sind allen mathematischen Disziplinen eigen, indem die einen Größen Wurzeln, die anderen Quadrate sind. Diese Weisheit legte dann auch SOKRATES im „*Staat*“*** den Musen, die zu feierlichem Tone sich erheben, in den Mund, indem er das allen Verhältnissen Gemeinsame innerhalb fester Grenzen zusammenfaßte und in den angegebenen Zahlen darstellte, aus denen denn auch die Gezeiten des guten Nachwuchses und der diesem entgegengesetzten Unfruchtbarkeit ersichtlich sind.

Es ist aber die Überzeugung unerläßlich, daß diese allgemeinen Wahrheiten weder in den vielen und gesonderten Seinsformen zuerst 30 Bestand haben, noch hinterher von dem Vielen ihren Ursprung gewinnen, sondern man muß annehmen, daß sie vor ihnen bestehen und durch Einfachheit und Genauigkeit sich auszeichnen. Deshalb behauptet denn auch ihre Erkenntnis den Vorrang vor den vielen anderen Erkenntnissen und bietet für diese die Prinzipien, und die 35

*) Was gemeint ist, ist zu ersehen aus PAULY-WISSOWA unter *Arithmetika* Sp. 1103.

**) Eine etwas breite Umschreibung für die griechischen Termini λόγος ἐπιμόριος und λ. ἐπιμερής, die wir im Deutschen nicht haben.

***) VIII, 545 dff.

vielen danken ihr ihren Bestand und werden auf sie zurückgeführt. Es behaupte z. B. der Mathematiker*), daß, wenn vier Raumgrößen einander proportional sind, dies Verhältnis auch im Falle von ihrer Vertauschung gilt, und führe den Beweis auf Grund der eigenen Prinzipien, deren sich der Arithmetiker niemals bedienen würde; und der Arithmetiker hinwiederum behaupte, daß, wenn vier Zahlen einander proportional sind, dies auch im Falle ihrer Vertauschung gilt, und beweise auch dies aus den Prinzipien seiner eigenen Wissenschaft. Wer würde nun von sich aus die Vertauschung kennen, sei
 10 es bei Raumgrößen, sei es bei Zahlen, und die Trennung von zusammengefügtten Flächen oder Zahlen, und ebenso die Zusammenfügung von getrennten? Es ist eben doch nicht so, daß es von dem Geteilten wissenschaftliche Erkenntnis gibt, während wir von dem immateriellen Sein, das dem intellektuellen Schauen näher zugeordnet ist, auch nicht eine Wissenschaft hätten. Nein, viel eher ist die Erkenntnis jenes Seins Wissenschaft, und von dieser Wissenschaft empfangen die vielen anderen ihre allgemeine Begründung; und solange vollzieht sich das Aufsteigen der Erkenntnisse von den beschränkten zu den umfassenden, bis wir unmittelbar zur Wissenschaft
 20 des Seienden als Seiendem hinaufgelangen. Denn diese will nicht die wesentlichen, für alle Zahlen geltenden Gesetze und nicht das, was allen Quantitäten gemeinsam ist, erforschen, sondern sie betrachtet nur das alleinige Wesen und die Existenz von allem Seienden; und deshalb ist sie die umfassendste von allen Wissenschaften, und alle empfangen von ihr ihre Prinzipien. Denn die höheren Disziplinen bieten jeweils immer den ihnen untergeordneten die obersten Voraussetzungen für die Beweise, die vollkommenste Wissenschaft aber reicht allen von sich aus die Prinzipien dar, den einen in beschränkterer, den andern in umfassenderer Weise. Mit Bezug hierauf vergleicht
 30 auch SOKRATES im „*Theaitetos*“**), Ernst mit Scherz verbindend, unsere Wissenschaften mit Tauben. Sie flögen, sagt er, teils in Schwärmen, teils auch abgesondert von den andern. Die allgemeineren und umfassenderen begreifen viele Spezialwissenschaften in sich, diejenigen aber, die sich mit den nach den verschiedenen Arten getrennten Erkenntnisobjekten befassen, sind voneinander getrennt
 36 und ohne Verbindung, und die obersten Prinzipien, von denen sie

*) Das Wort *γεωμέτρης* übersetze ich konstant mit Mathematiker, da Geometer im Deutschen einen anderen Sinn hat.

**) 197d.

ausgehen, sind voneinander verschieden. Eine Wissenschaft also stehe an der Spitze der vielen Disziplinen und Wissensgebiete, die die allgemeinen Voraussetzungen, wie sie in allen Seinsgattungen zur Geltung kommen, erkennt und allen mathematischen Wissenschaften die Prinzipien an die Hand gibt. Damit sei unter uns die Unterweisung über sie abgeschlossen.

10, 16 Hierauf wollen wir die Frage nach dem Erkenntnisvermögen untersuchen und als Führer bei Behandlung derselben PLATON aufstellen, der im „*Staat*“*) gesondert die Erkenntnisobjekte und die Erkenntnisarten unterscheidet und paarweise den Erkenntnisobjekten 10 die Erkenntnisarten zuweist. Er bezeichnet von dem Seienden das eine als intelligibel, das andere als sinnlich wahrnehmbar, und von dem Intelligiblen das eine wieder als intelligibel, das andere als das durch das diskursive Denken Erfasste, und von den Objekten der Sinneswahrnehmung die einen als sinnlich wahrnehmbar, die anderen als Abbilder. Für das Intelligible, die oberste der vier Gattungen, bestimmt er das reine Denken, für die Objekte des diskursiven Denkens das diskursive (vermittelnde) Denken**), für die Sinneswahrnehmungen den Glauben (die Überzeugung), für die Abbilder die bildhafte Erkenntnis. 20

Nach seiner Erklärung verhält sich die bildhafte Erkenntnis zur Sinneswahrnehmung ebenso wie das mittelnde zum reinen Denken. Denn die bildhafte Erkenntnis erkennt die Bilder der Sinnendinge, die im Wasser und in anderen Spiegeln zu sehen sind, den niedrigsten Rang unter den Seinsformen einnehmen und in Wahrheit nur Bilder von Bildern sind. Das mittelnde Denken betrachtet die Bilder des Intelligiblen, die von den obersten, einfachen und unteilbaren Seinsformen in den Bereich des Vielen und der Trennung herabgesunken sind, weshalb auch diese Erkenntnis von anderen, früheren Voraussetzungen abhängt. Das reine Denken aber steigt unmittelbar 30 empor zum voraussetzungslosen Urprinzip. Wenn daher das mathematische Sein weder die unteilbare Substanz hat, die frei ist von aller Trennung und Mannigfaltigkeit, noch jene, die durch Sinneswahrnehmung erkannt wird und vielfachem Wandel und gänzlicher 34

*) VI, 509d, ff.

**) Das schwer wiederzugebende *διάνοια* übersetzt APELT in PLATONS „*Staat*“ mit „mathematische Verstandeserkenntnis“. Damit wird eine Einschränkung auf ein bestimmtes Gebiet ausgesprochen, die im Begriff nicht liegt. Der Ausdruck „vermittelndes Denken“ stammt meines Wissens von ZELLER.

Teilung unterworfen ist, dann ist wohl jedem klar, daß es seinem Wesen nach zur Welt der vermittelten Denkobjekte gehört, und daß als Erkenntnisvermögen das vermittelnde Denken über ihm steht, wie über der Sinnenwelt die Sinneswahrnehmung und die bildhafte Erkenntnis über den Abbildern. Daher bestimmt denn auch SOKRATES die mathematische Erkenntnis als schwächer denn die höchste Erkenntnis, aber als schärfer gegenüber dem Zugang durch den Glauben. Denn die entwickelnde Ausführlichkeit der wissenschaftlichen Theorie hat sie als Vorzug vor dem reinen Denken voraus,
 10 die Unwandelbarkeit aber und Unwiderlegbarkeit ihrer Lehren stellen sie über den bloßen Glauben. Daß sie von Voraussetzungen ausgeht, hat sie vermöge ihres Absinkens von der höchsten Erkenntnis; daß sie aber in immateriellen Seinsformen besteht, eignet ihr vermöge der Erkenntnis, die an Vollkommenheit die Sinnenwelt überragt. Über das Erkenntnisvermögen für den gesamten Bereich der Mathematik bestimmen wir also im Sinne PLATONS so, daß das vermittelnde Denken einen höheren Rang behauptet als der Glaube, aber hinter dem reinen Denken zurücksteht.

b. 12. In der Folge haben wir nun zu untersuchen, welcher Art das
 20 Sein ist, das wir den mathematischen Arten und Gattungen zuerkennen müssen, ob wir zu dem Zugeständnis genötigt sind, daß es seine Existenz herleitet von den Sinnendingen, sei es durch Abstraktion, wie es gewöhnlich heißt, sei es durch Addition von Einzelzügen zu einer allgemeinen Idee, oder ob man ihm schon vor diesen die Existenz zugestehen muß, wie PLATON es fordert und die Emanation des Alls beweist*). Wenn wir nun behaupten, daß die mathematischen Seinsformen ihren Bestand von der Sinnenwelt herleiten, indem die Seele von den materiellen Dreiecken oder Kreisen die Idee des Kreises oder des Dreiecks hinterher in sich
 30 gestaltet, so ist fürs erste die Frage zu erheben, woher denn den (mathematischen) Sätzen ihre Exaktheit und Unwiderlegbarkeit zukommt. Unbedingt entweder von der Sinnenwelt oder der Seele. Aber die Herleitung von der Sinnenwelt ist undenkbar, denn dann müßte
 34 dieser viel mehr Genauigkeit eignen. Also von der Seele, die dem

*) Der ganze folgende Passus steht im Zeichen der Auseinandersetzung des ARISTOTELES, der im 13. Buch seiner „*Metaphysik*“ den mathematischen Begriffen und Wahrheiten nur ein intentionales Sein zuerkennt, mit PLATON, demzufolge sie ein hypostasiertes, reales Sein haben. Der Neuplatoniker entscheidet sich natürlich für PLATON.

Unvollkommenen die Vollendung, dem Ungenauen die Genauigkeit verleiht. Denn wo gäbe es im sinnlichen Bereich das Ungeteilte, das Flächen-, das Raumlose, wo die Gleichheit der Radian, die stets sich gleichbleibenden Proportionen der Seiten, wo die rechten Winkel? Sehen wir nicht, daß alle Sinnendinge miteinander vermischt sind, daß es bei ihnen keine Reinheit und keine Freiheit vom Entgegengesetzten gibt, sondern daß alles geteilt, ausgebreitet und in Bewegung ist? Wie können wir also den unbewegten Ideen eben das beharrende Sein herleiten aus dem, was stets in Bewegung ist und bald so, bald anders sich verhält? Denn daß alles, was von bewegten Wesen das 10 Dasein hat, auch eine veränderliche Seinsweise hat, wird von den Vertretern dieser Ansicht nicht bestritten. Wie werden wir ferner auf die vollkommenen und unabdingbaren Seinsformen von dem Unvollkommenen den Charakter höchster Vollendung übertragen? Denn alles, was Ursache der unveränderlichen Erkenntnis ist, ist selbst in um so höherem Maße von der gleichen Art. Die Seele ist also anzunehmen als die Schöpferin der mathematischen Seinsformen und Begriffe. Wenn aber die Seele die Urbilder ihrem Wesen nach in sich begreift und ihnen das Dasein verleiht und die Erzeugungen Ausstrahlungen der in ihr bereits vorhandenen Seinsformen sind, 20 so befinden wir uns mit solcher Einstellung in der Gefolgschaft PLATONS und möchten das wirkliche Sein der mathematischen Wissenschaft gefunden haben. Wenn sie aber ohne den Besitz und die vorherige Aneignung der Begriffe ein so ungeheuer kunstvolles und immaterielles Gewebe erzeugt und eine so bedeutende Wissenschaft ins Dasein ruft, wie kann sie dann erkennen, ob das Erzeugte wieder zeugungskräftig ist oder ein Windei und leerer Schatten statt Wirklichkeit; nach welchen Normen bemißt sie die in ihnen liegende Wahrheit? Und ferner, wenn sie deren Sein nicht in sich hat, wie kann sie dann eine solch bunte Mannigfaltigkeit von Be- 30 griffen erzeugen? Auf diese Weise werden wir ihre Existenz dem Zufall überantworten, ohne sie auf irgendeinen Ausgangspunkt zurückzuführen. Wenn also die mathematischen Seinsformen der Seele entstammen und diese nicht von den Sinnendingen die Ideen ihrer Schöpfungen hat, so läßt sie diese auch aus den Ideen hervorgehen, und ihre schöpferischen Geburtswehen sind Ausstrahlungen bleibender und unvergänglicher Seinsformen¹⁾.

13, 27 Fürs zweite sodann ergibt sich für den Fall, daß wir von unten aus dem Bereich der Sinnenwelt die mathematischen Begriffe zu- 39

- sammensuchen, die Frage, ob wir nicht genötigt sind, die Beweise für besser zu erklären, die auf die Sinnendinge, und nicht die, die auf die jeweils umfassenderen und einfacheren Seinsformen sich gründen? Denn wir behaupten doch, daß die Prinzipien in jedem Falle dem Beweisverfahren bei der Fahndung nach der gesuchten Wahrheit entsprechen müssen. Wenn nun das Partikuläre Prinzip ist vom Universalen, und die Sinnendinge von den Objekten des vermittelnden Denkens, wie ist es dann möglich, die Schlußfolgerung des Beweises mehr aus dem Allgemeinen herzuleiten als aus dem Partikulären
- 10 und das Sein der mittleren Denkobjekte vor dem der Sinnendinge als entsprechender für Beweise zu erklären? Denn auch wenn jemand den Satz*) beweisen würde, daß die Winkel des gleichschenkeligen Dreiecks zwei Rechte betragen, wie auch die des gleichseitigen, so weiß er deshalb noch nicht rechten Bescheid bezüglich²⁾ des ungleichseitigen, sondern nur wer den Beweis für jedes Dreieck schlechthin liefert, hat die Erkenntnis von seinem Wesen, und wer hinwiederum weiß, daß allgemeine Sätze sich besser eignen für einen Beweis als partikuläre und daß demzufolge die Beweise sich mehr auf allgemeine Sätze gründen. Die Grundlagen der Beweise aber beanspruchen die
- 20 Priorität und den wesentlichen Vorrang vor den partikulären Sätzen und sind die Prinzipien der Beweisergebnisse. Die beweisenden Wissenschaften sind also weit davon entfernt, über das sekundäre und dunklere Wesen der Sinnenwelt zu spekulieren und nicht vielmehr die Objekte des vermittelnden Denkens, die vollkommener sind als die Erkenntnisse durch Sinneswahrnehmung und Glauben, zu betrachten³⁾.
- β. 14, 24 Fürs dritte endlich sagen wir, daß man mit solcher Behauptung den Geist geringer einschätzt als die Materie. Denn wenn die Materie das Wesenhafte, dem der Charakter des Seins und der Bestimmtheit
- 30 vorzugsweise eignet, von der Natur empfängt, und der Geist nach jenem sekundäre Nachformungen und spätere Abbilder in sich ausprägt, die ihrem Wesen nach weniger wertvoll sind, indem er von der Materie abstrahiert, was seiner Natur nach von ihr untrennbar ist, macht
- 34 man dann nicht den Geist schwächer und unvollkommener als die

*) Der griechische Text S. 14, 11—18 und besonders die Interpunktion, wie sie FRIEDLEIN bietet, liegen hier sehr im Argen. Statt *φασιν*, das als Verbum keinen Sinn hat, ist *φάσιν* zu lesen, das Objekt zu *ἀποδείξειεν* ist. Nach *ισόπλευρον* (S. 14, 13) muß ein Komma stehen. Ganz falsch ist der Punkt 14, 15 nach *καθ' αὐτό*, der durch ein Komma zu ersetzen ist. Hingegen beginnt 14, 18 mit *ἐξ ὧν δὲ* ein neuer Satz.

Materie? Denn dann ist sowohl die Materie der Ort der verstofflichten Ideen wie der Geist der Ort der Begriffe; aber diese ist es von den ursprünglichen Ideen, jener von den abgeleiteten Begriffen, diese von dem vorzugsweise Seienden, jener von dem, was von dort her das Sein erhält, diese von dem wesenhaften, jener von dem gedachten Sein. Aber wie ist dann der Geist, der am Nus und am intellektuellen Sein an erster Stelle teilhat, und dessen Erkenntnis aus dieser Quelle und aus dem gesamten Lebensbereich gespeist wird, der Aufnahmeort von Seinsformen, die schwächer sind als das, was den letzten Platz einnimmt im Seinsbereich und in bezug auf 10 das Sein das Allerunvollkommenste ist? Doch es erscheint überflüssig, gegen diesen Wahn, der schon von vielen und oftmals kritisch untersucht worden ist, Stellung zu nehmen. Wenn aber die mathematischen Begriffe nicht zu fassen sind als Abstraktionen von den materiellen Dingen, noch als Kollektivbegriffe des den Einzeldingen Gemeinsamen, und wenn sie überhaupt nicht sekundärer Art sind, noch von den Sinnendingen stammen, dann muß doch unbedingt die Seele sie entweder von sich oder vom Nus erhalten oder sowohl von sich wie vom Nus. Empfängt sie sie aber von sich allein, wie sind sie dann Abbilder der intellektuellen Seinsformen? Wie ist es denkbar, 20 daß sie vom höchsten Sein keine Seinserfüllung empfangen, nachdem sie doch eine Mittelstellung einnehmen zwischen der ungeteilten und der geteilten Welt? Und wie kann die im Nus beschlossene Seinswelt mit den Urbildern des Universums ihre Präexistenz behaupten? Empfängt sie sie aber vom Nus allein, wie kann dann der Charakter der Eigentätigkeit und Eigenbewegung der Seele gewahrt bleiben, wenn die Begriffe in ihr gemäß der fremden Antrieben gehorchenden Seinsweise von außen in sie einströmen? Und wie unterscheidet sie sich dann noch von der Materie, die bloß der Möglichkeit nach alles ist, aber keine der verstofflichten Seinsformen hervorgebracht 30 hat? Es bleibt also nur die Annahme, daß sie von sich und vom Nus diese Begriffe erhalte, und daß sie der Inbegriff der Seinsformen ist, die ihr Wesen von den intellektuellen Vorbildern erhalten, den Eintritt in das Sein aber nach eigenem Antrieb vollziehen. Die Seele war also nicht eine von Begriffen leere Schreibtafel, sondern eine stets vollbeschriebene, die sich selber vollschreibt und zugleich vom Nus beschrieben wird*). Denn auch die Seele ist Nus, der sich nach 37

*) s. PLATON, *Theaitetos*.

dem vor ihm existierenden Nus entfaltet und sein Bild und seine Form nach außen hin geworden ist. Wie nun jener alles ist in intellektueller Weise, so diese in psychischer Weise, wie jener urbildlich, so diese abbildlich, wie jener alles zusammen, so diese alles gesondert. In dieser Erkenntnis setzt denn auch schon PLATON die Seele aus allen mathematischen Formen zusammen, zerlegt sie nach Zahlen und verbindet (die Teile) nach den Analogien und den harmonischen Verhältnissen und legt in ihr die erstursächlichen Prinzipien der Figuren nieder, das Gerade und das Runde, und bewegt die Kreise
 10 in ihr in intellektueller Weise. Die ganze Mathematik ist also zuerst im Geiste vorhanden, und vor den sichtbaren Zahlen sind die eigenbewegten, und vor den sichtbaren Figuren die lebendigen Figuren, und vor den harmonisch gestalteten die harmonisch gestaltenden Verhältnisse, und vor den im Kreis sich bewegenden Körpern die unsichtbaren Kreise geschaffen, und der Inbegriff von allem ist der Geist; und das ist eine zweite Weltordnung, die sich selbst erzeugt und von dem zuständigen Prinzip erzeugt wird, mit Leben sich erfüllt und vom Weltenschöpfer erfüllt wird in körperloser und unausgedehnter Weise, und wenn sie ihre Ideen hervorgehen läßt, dann ist
 20 das auch die Geburtsstunde aller Wissenschaften und Tugenden. In diesen Ideen west also die Seele und weder ist die Zahl in ihr als eine Menge von Einheiten zu fassen, noch ist der Begriff vom Ausgedehnten körperlich zu verstehen, sondern alle Urbilder der in Erscheinung tretenden Zahlen, Figuren, Verhältnisse und Bewegungen sind in lebender und intellektueller Weise zu fassen mit „*Timaios*“, der ihren ganzen Werden- und Schöpfungsprozeß von der mathematischen Begriffswelt her sich vollenden läßt und die Ursachen von allem in sie hineinverlegt⁴). Denn die sieben Zahlenglieder be-
 30 greifen in sich die Prinzipien aller Zahlen, der linearen, der Flächen- und der Körperzahlen*), und vor allen anderen Verhältnissen be-

*) Mit diesen 7 Zahlengliedern kann nur die im *Tim.* 35 b. c. von PLATON bei Schöpfung der Weltseele entwickelte Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 gemeint sein, die neben den einfachen (linearen) Zahlen 1, 2, 3 auch deren zweite und dritte Potenzen, also im antiken Sinne deren Flächen- und Körperzahlen, enthält und demgemäß auch folgendermaßen dargestellt werden kann: 1, 2, 3; 1^2 , 2^2 , 3^2 ; 1^3 , 2^3 , 3^3 . Was die anschließend genannten Grundverhältnisse anlangt, so können nur die bei PLATON in gleichem Zusammenhang 35 u. 36 angeführten Verhältnisse gemeint sein: 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, 3 : 2, 4 : 3, 9 : 8, 256 : 243, die aus der antiken Akustik bekannt sind. Es sind die Verhältnisse der Oktav, der Oktav + Quint, der Doppeloktav, der Quint,

stehen ursächlich in ihr die sieben (Grund-)Verhältnisse, die Prinzipien der Figuren hinwiederum wurden schöpferisch in sie hineingelegt, und von den Bewegungen ist die erste, die alle anderen in sich begreift und auslöst, zugleich mit ihr ins Dasein getreten. Denn alle Bewegung geht vom Kreis und der Kreisbewegung aus. Wesenhaft also und selbsttätig sind die mathematischen Ideen, die die Seele erfüllen. Indem das vermittelnde Denken sie hervorströmen läßt und zur Entfaltung bringt, legt sie den Grund zum Bau der mathematischen Wissenschaften in seiner ganzen Mannigfaltigkeit und sie wird nie aufhören in stets sich erneuernder Fruchtbarkeit von Ent- 10 deckung zu Entdeckung zu schreiten und ihre in sich unteilbaren Ideen zu entwickeln. Denn alles hat sie prinzipienhaft vorweggenommen und vermöge ihrer unbegrenzten Fähigkeit läßt sie aus den von ihr antezipierten Prinzipien die ganze Fülle und Mannigfaltigkeit der Lehrsätze hervorgehen⁵⁾.

18, 5 Doch nach der Behandlung des Wesens der mathematischen Seinsformen wollen wir uns nunmehr aufschwingen zu der einen Wissenschaft von ihnen, deren Präexistenz vor den vielen wir bewiesen haben. Untersuchen wir also ihre Aufgabe, ihre Erkenntnis- 20 methoden und ihre wirksame Tragweite.

8, 10 Die Aufgabe der gesamten Mathematik ist also, wie oben schon dargelegt worden, dem vermittelnden Denken zuzuweisen und weder von der Art wie die des reinen Intellekts, der unveränderlich in sich ruht und vollkommen selbständig nur von sich aus bestimmt ist und sich in sich selbst verschließt, noch wie die der Überzeugung und Sinneswahrnehmung. Denn deren Erkenntnisse zielen auf die Außenwelt ab, und befassen sich damit, erfassen aber nicht die innere Begründung des Erkannten. Die Mathematik hingegen setzt mit der Erinnerung den Hebel von außen an, wendet sich aber schließlich den inneren Ideen zu; sie empfängt zwar Anregung vom sekundären 30 Sein, ihr Ziel und Ende aber ist das bevorzugte Sein der ideellen Seinsformen. Zwar ist ihre Tätigkeit nicht unbewegt, wie die intellektuelle, aber durch ihre Bewegung, der nichts Örtliches und 33

der Quart und der Diese. Sie basieren freilich auf unvollkommener Erkenntnis und sind demnach von problematischem Wert. Schon ARCHYTAS kannte das zweite Ganztonverhältnis 10:9 und hätte dieses wahrscheinlich in die Reihe hineingenommen und dafür wohl 4:1, die bloße Verdoppelung des ersten Grundverhältnisses, ausgelassen. Damit wäre er dann auch mit seiner Diese 28:27 näher an unser Halbtonverhältnis 16:15 herangekommen.

nichts Veränderliches anhaftet wie den Sinneswahrnehmungen, sondern der Charakter des Lebenzeugenden, entwickelt und entfaltet sie die körperlose Welt der Ideen, indem sie bald von den Prinzipien zu den Folgerungen schreitet, bald den umgekehrten Weg einschlägt und bald von dem vorher Erkannten den vorliegenden Problemen sich zuwendet, bald von den Problemen den vorangehenden Erkenntnissen. Noch also ist sie nicht, erfüllt von sich selbst, allem Forschen überhoben wie der Nus, empfängt aber auch nicht von fremder Seite wie die Sinneswahrnehmung ihre Vollendung, sondern
 10 durch Suchen gelangt sie zum Finden und von unvollkommener Stufe erhebt sie sich zur Vollendung.

p. 19, 6 Sie hat aber zwei Methoden: die eine läßt den ganzen Reichtum der Prinzipien sich entfalten und führt so zu den mannigfachen Wegen der wissenschaftlichen Theorie, die andere führt die vielen Ableitungen wieder zurück auf die eigenen Voraussetzungen. Da sie nämlich das Eine und das Viele, die Grenze und das Unbegrenzte als Prinzipien für sich aufstellte und ihr Erkenntnisgegenstand den
 p. 19, 12 mittleren Platz erhielt zwischen den unteilbaren Seinsformen und den vollständig geteilten, so ergeben sich auch ganz entsprechend,
 20 glaube ich, zwei Erkenntnismethoden der gesamten Wissenschaft: die eine strebt nach Einheit und faßt das Viele zusammen, die andere scheidet das Einfache in das Mannigfache, das Allgemeine in das Spezielle und die Ideen, die den Rang von Prinzipien haben, in die von den Prinzipien abgeleiteten und vervielfachten Erscheinungen. Denn von oben ausgehend schreitet sie (durch den ganzen Seinsbereich) hinab bis zu der sichtbaren Schöpfung, verbindet sich mit der Natur und liefert im Verein mit der Naturwissenschaft eine Fülle von Beweisen, wie sie hinwiederum von unten emporsteigend sich sozusagen der intellektuellen Erkenntnis nähert und mit der Be-
 30 trachtung der obersten Prinzipien sich befaßt. Deshalb hat sie denn auch unter ihren Schöpfungen*) die ganze Mechanik hervorgebracht, die Optik und Katoptrik⁶⁾ und viele andere Wissenschaften, die mit der Sinnenwelt verflochten sind und sich dieser bei ihrer Tätigkeit bedienen. Bei ihrem Aufstieg hinwieder gewinnt sie ungeteilte und
 35 immaterielle Denkkräfte und mit deren Hilfe vervollkommnet sie

*) Es ist völlig abwegig *ἐν ταῖς ἀποπερατώσεσιν* „in den Grenzgebieten“ zu interpretieren, wie HARTMANN tut. Das Wort ist offenbar synonym zu fassen mit dem wenige Zeilen weiter oben stehenden *ἀποτελεσμάτων*.

ihre nur Stückwerk darstellenden Begriffe und die auf diskursivem Weg gewonnenen Kenntnisse, gleicht ihre Gattungs- und Artbegriffe jenen Wesenheiten an und offenbart die Wahrheit über die Götter und die Wissenschaft vom (wahrhaft) Seienden in den ihr eigenen Gedankengängen. Soviel hierüber.

20, 8 Nunmehr wollen wir uns dem Einfluß dieser Wissenschaft zuwenden, der unmittelbar von den obersten bis zu den niedrigsten Erkenntnissen sich erstreckt. „*Timaios*“ nennt die mathematische Erkenntnis den Weg zur Bildung, weil*) sie im gleichen Verhältnis steht zur Wissenschaft vom All und zur ersten Philosophie, in dem die 10 Erziehung zur Tugend steht. Denn die Erziehung gibt der Seele im vorhinein durch gesunde Grundsätze die rechte Richtung auf das vollkommene Leben; die Mathematik aber bereitet unser Denken und das Auge der Seele auf die Abkehr von dieser Welt vor. Deshalb bemerkt auch SOKRATES mit Recht im „*Staat*“**), das Auge der Seele, von den anderen Beschäftigungen geblendet und zerrüttet, werde einzig von den mathematischen Wissenschaften wieder neu belebt und angeregt zur Schau des Seienden, von den Schattenbildern zur Wahrheit und vom Dunkel hingelenkt zum intellektuellen Licht und werde überhaupt von der Höhle und den das Werden in 20 ihr wirkenden Banden und den Fesseln der Materie zum immateriellen und unteilbaren Sein hinangezogen⁷⁾. Denn die Schönheit und Ordnung der mathematischen Ideen und der unveränderliche Bestand dieser Wissenschaft verbindet uns unmittelbar mit der intelligiblen Welt und macht uns vollkommen in ihr heimisch, die immer festen Bestand hat, immer durch göttliche Schönheit sich auszeichnet und immer in derselben gegenseitigen Ordnung verharret. Im „*Phaidros*“ bietet uns SOKRATES drei Personen, die emporgeführt werden, die auch seiner ersten Lebensperiode Inhalt waren, den Philosophen, den Liebenden und den Musiker. Für den Liebenden beginnt die Empor- 30 führung und die Wanderung von hier bei der sichtbaren Schönheit und er bedient sich als Stufen der mittleren Arten des Schönen; der Musiker ferner, der den dritten Platz einnimmt, wendet sich von den sinnlich wahrnehmbaren Harmonien den unwahrnehmbaren Harmonien und ihren Verhältnissen zu; dem einen ist das Auge, 35

*) 20, 11: Vor *διότι* darf natürlich kein Punkt stehen, da dieser Satz die Begründung zum vorausgehenden enthält.

**) 527e.

dem anderen das Ohr Mittel der Erinnerung. Woher und durch welche Vermittlung kommt hingegen dem echten Philosophen die Anregung zur intellektuellen Erkenntnis und die Erweckung zum wirklichen Sein und zur Wahrheit? Denn diese ist auch für ihn notwendig wegen der Unvollkommenheit der eigenen Ausgangsbasis. Denn die rein natürliche Anlage verfügt nur über eine unvollkommene Seh- und Willenskraft. Wer nun von Natur aus so veranlagt ist, ist schon von sich aus aufgeschlossen und im Bann des wahren Seins, doch muß man ihm, sagt PLOTINOS, auch noch die Kenntnis der
 10 Mathematik vermitteln zur Gewöhnung an das immaterielle Sein, und indem er sich dieser wie Figuren bedient, soll er sich führen lassen zur dialektischen Weisheit und überhaupt zur Betrachtung der Welt des Seienden.

p. 21, 22 Daß nun die Mathematik für die Philosophie vor allem Nutzen gewährt, ist hieraus klar. Wir müssen aber auch noch ins Einzelne gehen und darauf hinweisen, daß sie das intellektuelle Denken am besten vorbereitet auf die Theologie. Denn Wahrheiten in bezug auf die Götter, die von den Uneingeweihten nur schwer und mühsam zu erkennen sind, werden durch die mathematische Wissenschaft mit
 20 Hilfe von Bildern als glaubwürdig, einleuchtend und unwiderlegbar erwiesen. Denn sie zeigen in den Zahlen die Bilder ihrer das natürliche Sein überragenden Eigenschaften und lassen die Kräfte der intellektuellen Figuren in denen des vermittelnden Denkens erkennen. Deshalb lehrt uns PLATON viele wunderbare Lehrsätze über die Götter mit Hilfe von mathematischen Figuren, und die Philosophie der Pythagoreer verbirgt hinter solchen Schleiern die geheimnisvolle Lehre von den göttlichen Wahrheiten. Den gleichen Charakter zeigen die ganze „*heilige Lehre*“, PHILOLAOS in den „*Bakchen*“⁸⁾ und überhaupt die ganze Art der Einführung des PYTHAGORAS in die Götter-
 30 lehre.

Weiter ist sie für die Naturwissenschaft von größtem Nutzen: Sie erhellt die schöne Ordnung der Verhältnisse, die dem geschaffenen All zugrunde liegt, und die Analogie, die wie irgendwo TIMAIOS sagt, alles in der Welt miteinander verbindet, die streitenden Elemente befreundet und die entzweiten aussöhnt und zusammenbindet; sie weist die einfachen und erstursächlichen Elemente nach, die ganz und gar durch die Prinzipien der Symmetrie und Gleichheit zusammengehalten werden, durch die auch der ganze Himmel seine
 39 Vollendung erhielt, indem er in seinen einzelnen Teilen die entspre-

chenden Formen annahm⁹⁾; sie erforschte endlich auch die Zahlen, die jedem der entstehenden Körper, seinen Umläufen und seiner Rückkehr zum Ausgangspunkt eigen sind und die uns in Stand setzen, die Zeiten gesunder Nachkommenschaft alles Lebens und der entgegengesetzten (ungesunden) zu erforschen. Das glaube ich will auch TIMAIOS besagen, wenn er allenthalben mit Hilfe von mathematischen Namen die Wissenschaft von der Natur des Alls darlegt und das Entstehen der Elemente nach Zahlen und Figuren ordnet und ihre Kräfte, ihr leidendes und ihr tätiges Verhalten darauf zurückführt, und in den spitzen und den stumpfen Winkeln die Gleichheit*) 10 der Seiten oder der entgegengesetzten Eigenschaften, und in der großen und geringen Zahl der Elemente die Ursache der mannigfachen Veränderlichkeit sieht.

Wie könnten wir dann weiter bestreiten, daß die Mathematik von erheblichem und staunenswertem Vorteil sei für die sogenannte Staatswissenschaft? Sie bestimmt den rechten Zeitpunkt für die verschiedenen Unternehmungen, die wechselnden Umläufe des Alls und die den Erzeugungen entsprechenden Zahlen, die Ursache sind von Ähnlichkeit und Unähnlichkeit, die zeugungskräftigen und vollkommenen und die ihnen entgegengesetzten, diejenigen, die zu einem 20 geregelten Leben führen und die Zuchtlosigkeit im Gefolge haben und überhaupt diejenigen, die Fruchtbarkeit und Unfruchtbarkeit mit sich bringen. Das alles entwickelt ja im „Staate“ die Rede der Musen, die der gesamten geometrischen Zahl den bestimmenden Einfluß zuweist auf die besseren und schlechteren Zeugungen, auf die unwandelbare Dauer guter Sitten und auf den Übergang von der besten Staatsverfassung zu den unvernünftigen, in denen die Leidenenschaften regieren. Denn daß es der generellen Mathematik zusteht und nicht irgend einer einzigen Disziplin wie der Arithmetik oder Geometrie, die Kenntnis dieser besagten geometrischen Zahl zu 30 übermitteln, ist doch wohl jedem klar. Denn durch den ganzen Bereich der Mathematik ziehen sich die Untersuchungen über gesunden Nachwuchs und Unfruchtbarkeit hindurch.

Auch für die ethische Wissenschaft macht uns die Mathematik reif, indem sie unserem sittlichen Leben Ordnung und Harmonie einpflanzt und ein der Tugend entsprechendes Gebahren, sowie Lieder 36

*) Man wolle beachten, daß FRIEDLEIN selbst in den *Addenda* S. 436 statt *λείότητας* die naheliegende Konjekture *ισότηας* vorschlägt.

und Tänze an die Hand gibt, von denen der athenische Gastfreund*) eine vollendete Bildung für diejenigen sich verspricht, die der sittlichen Ertüchtigung von Kindheit an sich befeißigen wollen, indem sie die Lehren der Tugend vorträgt, anders in Zahlen, anders in Figuren, anders in den musikalischen Harmonien, die Exzesse und Defekte der Laster aufzeigt, wodurch unser Charakter Maß und Zucht gewinnt^{9a}). Deshalb sagt SOKRATES im „*Gorgias*“**), wo er dem KALLIKLES sein zuchtloses und ungezügelter Leben vorwirft: Du gibst eben nichts auf die Geometrie und die in ihr waltende Gleich-
 10 heit. Im „*Staate*“***) aber findet er den Abstand des Vergnügens des Tyrannen von dem des Königs ebenso groß wie den des flächenhaften Seins vom Körperlichen.

Die Größe des Nutzens aber, der den anderen Künsten und Wissenschaften aus der Mathematik erwächst, wird uns klar, wenn wir bedenken, daß sie den theoretischen Wissenschaften wie der Rhetorik und allen denen, die in Wort und Rede sich auswirken, vollkommene Ordnung verleiht und den Charakter eines sinnerfüllten Ganzen mit Anfang, Mitte und Ende in Angleichung an sie selbst, daß sie ferner den verschiedenen Dichtungsarten als Vorbild voran-
 20 leuchtet und die Worte zu den Handlungen und die Versmaße vorweg bei sich feststellt, daß sie endlich den praktischen Künsten Wirksamkeit und Bewegung umgrenzt mit Hilfe ihrer feststehenden und unveränderlichen Formen. Überhaupt bedürfen ja alle Künste, wie SOKRATES im „*Philebos*“†) sagt, der Kunst zu zählen, zu messen und zu wägen, entweder aller zusammen oder der einen und anderen. Diese alle aber sind inbegriffen im mathematischen Lehrsystem und erhalten von daher ihren abgegrenzten Bereich. Denn sie ist es, die die Einteilung der Zahlen, die Mannigfaltigkeit der Maße, den Unterschied der Gewichte feststellt und erkennt¹⁰).

30 151² Der Nutzen der generellen mathematischen Wissenschaft für die Philosophie unmittelbar und die übrigen Künste und Wissenschaften dürfte damit den Studierenden klar sein. Nun aber unterfangen sich einige Widerspruchsgeister, das Ansehen dieser Wissenschaft in den Staub zu ziehen, die einen, indem sie ihr den Nimbus des Schönen und Guten absprechen und behaupten, nicht diesem
 36 Zwecke gelten ihre Darlegungen; die anderen aber erklären, die auf

*) PLATON Leg. II, 672. 673.

**) IX, 587d.

**) 508a.

†) 55e.

die Sinnenwelt gerichteten Erfahrungswissenschaften seien nützlicher als ihre generellen Theoreme. So z. B. sei die Erdmessung (Geodäsie) nützlicher als die Geometrie, die Arithmetik des gemeinen Volkes nützlicher als die auf (abstrakte) Lehrsätze gegründete, und die seemännische Sternkunde (Nautik) sei nützlicher als die allgemeine (Astronomie). Denn nicht die Erkenntnis des Reichtums macht reich, sondern sein Gebrauch, und das Glück liegt nicht in seiner Erkenntnis, sondern in einem glücklichen Leben, so daß wir zugeben müssen, daß für das praktische Handeln im Menschenleben nicht die erkennenden, sondern die auf praktischer Erfahrung beruhenden 10 mathematischen Disziplinen von Vorteil sind. Denn diejenigen, die von der Gelehrsamkeit nichts verstehen, aber praktisch geschult sind für die Anforderungen der Einzelberufe, überragen in Hinsicht auf den Nutzen im Menschenleben ganz wesentlich diejenigen, die nur mit der Theorie allein sich abgegeben haben.

p. 26, 10 Solchen Behauptungen werden wir entgegentreten mit dem Nachweis der Schönheit der Mathematik, ausgehend von Gesichtspunkten, von denen auch ARISTOTELES*) ausgeht bei seinen Bemühungen, ihr unsere Sympathie zu gewinnen. Folgende drei Vorzüge nämlich bewirkten vorzugsweise sowohl beim Körper wie bei 20 der Seele die Schönheit: Die Ordnung, die Symmetrie, die klare Bestimmtheit. Denn das körperlich Häßliche leitet sich her von dem durch die Materie bedingten Mangel an Ordnung, Gestaltung, Symmetrie und Bestimmtheit, der in allem Zusammengesetzten sich auswirkt; die seelische Häßlichkeit aber beruht auf der Unvernunft, die in ihren Bewegungen nicht Regel noch Ordnung kennt, den Forderungen der Vernunft sich nicht fügt und von daher eine feste Umgrenzung nicht annehmen will. So möchte denn auch die Schönheit ihr Sein auf die entgegengesetzten Vorzüge gründen, eben auf 30 Ordnung, Symmetrie und Bestimmtheit. Diese gewahren wir aber vor allem in der mathematischen Wissenschaft: Die Ordnung in dem Ausgang des Sekundären und Mannigfachen vom Ursprünglichen und Einfachen: Denn stets hängt das Folgende mit dem Vorausgehenden zusammen und das eine hat den Wert eines Prinzips, das andere von Konsequenzen aus den obersten Voraussetzungen; die Symmetrie in der wechselseitigen Übereinstimmung der Beweise und in der Zurückführung aller auf den Nus: Denn das allgemeine Maß der 37

*) Metaph. 13, 1058b 3, 1078a 31-1078b 6

gesamten Wissenschaft ist der Nus, von dem sie auch die Prinzipien erhält und auf den sie die Studierenden hinlenkt; die Bestimmtheit endlich in den immerwährenden und unveränderlichen Ideen: Denn mit ihren Erkenntnissen steht es nicht bald so und bald anders, wie mit den bloßen Meinungen und Sinneswahrnehmungen*), sondern sie legt stets dieselben Sätze vor und ist bestimmt durch die intellektuellen Seinsformen. Wenn also die Schönheit vorzugsweise auf diesen Punkten beruht, und die Mathematik durch ebendiese ihr Gepräge erhält, so ist klar, daß auch ihr das Schöne zukommt. Und wie sollte es auch nicht, da der Nus von oben sein Licht einströmen läßt auf die Wissenschaft, diese aber hinstrebt zum Nus und sich bemüht, uns von der sinnlichen Wahrnehmung zu ihm hinzulenken?

27, 17 Ihren Nutzen werden wir freilich nicht beurteilen wollen im Hinblick auf die rein praktischen Zwecke im Menschenleben oder unter dem Gesichtspunkt der Notwendigkeit. Denn dann müssen wir auch zugeben, daß der spekulative Genius selbst unnütz ist, da er sich fernhält vom menschlichen Verkehr und für dessen Bestrebungen sich überhaupt nicht interessiert. Deshalb macht auch SOKRATES im „*Theaitetos*“(**), wo er von den Koryphäen der Wahrsagekunst***) spricht, diese frei von allen Bindungen an das alltägliche Leben und führt ihr Denken, befreit von allem Zwang und allen praktischen Rücksichten, empor zur Schau des Seienden. So muß man also auch annehmen, daß die mathematische Wissenschaft und Spekulation in sich selbst erstrebenswert ist und nicht wegen des Nutzens für das menschliche Leben. Wenn man aber wirklich ihren Nutzen auf etwas anderes zurückführen soll, dann ist der aus ihr sich ergebende Gewinn auf die intellektuelle Erkenntnis zurückzuführen. Denn zu ihr führt sie uns und bereitet uns darauf vor, indem sie das Auge der Seele reinigt und sie frei macht von den von den Sinneswahrnehmungen herrührenden Hindernissen für die Erkenntnis des Alls¹¹). Wie wir nun die reinigende Kraft insgesamt wertvoll oder unnütz nennen nicht im Hinblick auf den Nutzen des Alltags, sondern auf ein der wissenschaftlichen Forschung geweihtes Leben, so muß man auch den Zweck der Mathematik auf den Nus und die gesamte Philosophie beziehen. Deshalb ist auch die Beschäftigung mit ihr an sich der Mühe wert und um des intellektuellen Lebens

*) 27, 9 streiche ich αὐτῆς sinngemäß mit GRYNÆUS.

**) 173c.

***) 27, 23 ist das sinnlose ὄντως doch wohl mit GRYNÆUS in ὄντων zu ändern.

p. 28, 13
 wollen. Daß sie für ihre Jünger um ihrer selbst willen erstrebenswert ist, ergibt sich auch aus dem, was ARISTOTELES irgendwo sagt, daß die mathematische Wissenschaft in kurzer Frist einen mächtigen Aufschwung genommen habe, obwohl den Forschern keinerlei Lohn in Aussicht stand, und daß alle gern bei ihr zusprechen und nach Abstreifung aller anderen Bande bei ihr sich Muße gönnen wollen, soweit sie auch nur einigermaßen den von ihr ausgehenden Nutzen sich aneignen konnten, so daß die Verächter der mathematischen Erkenntnis auch ihre Freuden nicht zu kosten bekommen.

28, 23 Nimmermehr ist also die Mathematik deshalb gering zu schätzen, 10
 weil sie uns nicht nützt für die Bedürfnisse des menschlichen Lebens — denn in ihren letzten Verzweigungen und in ihrer materiellen Betätigung geht sie in der Tat auf solchen Nutzen aus —, vielmehr ist sie ihres immateriellen Charakters wegen und deshalb, weil sie in sich allein ihren Gewinn trägt, zu bewundern. Denn es gab schon welche, die sich gänzlich abwandten von der Sorge für das Lebensnotwendige und sich der mathematischen Forschung zuwandten, und das mit Recht. Denn zuerst bemüht sich der Mensch um die Dinge der Umwelt, mit denen er durch seine Geburt verwachsen ist, später erst um jene, die seine Seele lösen von den Banden des Werdens 20
 und an das Seiende erinnern. So erstreben wir denn auch das Lebensnotwendige vor dem in sich Wertvollen und das der Sinneswahrnehmung Verwandte vor dem durch den Nus Erkannten. Denn für jedes geschaffene Wesen und das in sich selbst kreisende Leben der Seele ist es natürlich, vom Unvollkommenen zur Vollendung zu schreiten. Soviel sei gegen diese Verächter der mathematischen Wissenschaft gesagt. // p. 29, 13

p. 29, 14 Vielleicht möchten aber einige unserer eigenen Zeitgenossen unter Berufung auf die Bezeugung ihrer Aussagen durch PLATON sich unterfangen, oberflächlichere Naturen zur Geringschätzung des 30
 mathematischen Unterrichts zu veranlassen. Denn der Philosoph verweise doch selbst im „Staat“ diese mathematische Erkenntnis aus dem Reigen der Wissenschaften und führe den Nachweis, daß sie ihre eigenen Prinzipien nicht kenne, und dem werden sie das Zitat*): „Wem Prinzip ist, was es nicht kennt, Ende und Mitte aber aus dem, 35

*) Das hier vorliegende Zitat findet sich im 7. Buch 533c und hat folgenden Wortlaut: ϕ ἀγὴ μὲν, δ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μετὰξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπλέκται, wonach FRIEDLEINS εἶδε 29, 21, das schon nach dem Sinn zu beanstanden, in οἶδε zu ändern ist.

was es nicht kennt, zusammengeflochten ist“ hinzufügen und was sonst an jener Stelle an geringschätzigen Bemerkungen des **SOKRATES** gegen diese Wissenschaft abfällt. Da wir uns mit befreundeten Männern auseinandersetzen, wollen wir sie daran erinnern, daß **PLATON** selbst bestimmt erklärt, die Mathematik reinige die Seele und führe sie empor, indem sie wie die **HOMERISCHE** Athene*) den Nebelschleier hinwegziehe vom intellektuellen Licht des Geistes, das mehr verdient erhalten zu bleiben als tausend körperliche Augen**), und so gleichsam teilhabe nicht nur an den Gaben des **Hermes**, sondern
 10 auch der Athene. Auch bezeichnet er sie allenthalben als Wissenschaft und als die Ursache des größten Segens für ihre Jünger.

Aber was beabsichtigt er, indem er ihr durch seine Ausführungen im „*Staat*“ den Namen der Wissenschaft entzieht? Ich will es kurz darlegen, denn an Wissende soll sich mein gegenwärtiger Vortrag richten. Als Wissenschaft bezeichnet **PLATON** an vielen Stellen sozusagen jede auf die Universalien ausgerichtete Erkenntnis, die er von der Sinneswahrnehmung scheidet und ihr gegenüberstellt, welch letztere die Einzeldinge erkennt, mag nun die Art dieser Erkenntnis durch systematische Schulung oder durch rein praktische
 20 Routine bedingt sein. In diesem Sinne aber, meine ich, gebraucht er offenbar im „*Staatsmann*“ und „*Sophistes*“ den Namen Wissenschaft und bezeichnet eben die echte Sophistik als solche, die **SOKRATES** im „*Gorgias*“ als bloße Erfahrung bezeichnete, wie auch die Schmeicherkunst und viele andere, die nur Erfahrungen und keine wirklichen Wissenschaften seien. Eben diese Universalienkenntnis teilt er ein in diejenige, die die Ursachen erkennt, und jene, die mit ihrer Erkenntnis nicht bis zu den Ursachen vordringt; und für die erstere fordert er den Namen Wissenschaft, für die andere den Namen Erfahrung. Und so gönnt er denn den praktischen Künsten einmal den Namen
 30 Wissenschaft, den Erfahrungen aber nie. Denn etwas in sich Unbegründetes, sagt er im „*Symposion*“***), wie könnte das Wissenschaft sein?¹²) Jede Erkenntnis also, die Grund und Ursache des Erkannten erfaßt, ist irgendwie Wissenschaft. Diese Wissenschaft, die von der Wurzel her ihren Gegenstand begreift, teilt er nun wieder ein; und die eine nennt er eine partikuläre Geschicklichkeit, die andere
 36 die Erkenntnis des für sich und immer in der gleichen Weise Seienden

*) Reminiszenz an *Odyssee* 13, 352.

***) 202a.

) **PLATON, *Staat* VII, 527e.

und zufolge dieser Einteilung sondert er die Heilkunst und jede Beschäftigung mit dem Stofflichen von der Wissenschaft; die Mathematik aber und überhaupt die Erforschung der Welt des Ewigen nennt er Wissenschaft. Diese Wissenschaft, die wir von den Künsten scheiden, teilt er wiederum in zwei Arten, von denen er die eine voraussetzungslos sein läßt, während die andere von Voraussetzungen ausgehe. Die voraussetzungslose befaßt sich mit der Erkenntnis des Alls, steige empor bis zum Guten und dem höchsten Urprinzip von allem und beende erst da den Aufstieg; die andere aber, die begrenzte Prinzipien aufstelle, zeige, von diesen ausgehend, die aus ihnen sich 10 ergebenden Folgerungen und strebe so nicht nach dem Ursprung, sondern nach dem Ende. Und so behauptet er denn also, die Mathematik, die Voraussetzungen gebrauche, stehe zurück hinter der voraussetzungslosen und vollkommenen Wissenschaft. Denn nur eine ist die wahre Wissenschaft, durch die wir befähigt sind, alles Seiende zu erkennen und von der alle Prinzipien für die anderen sich herleiten, mögen sie ihr nun näher oder ferner stehen. Wir wollen also nicht sagen, daß PLATON die Mathematik aus der Reihe der Wissenschaften verweist, sondern daß er ihr die zweite Stelle nach der einen und höchsten Wissenschaft zuweist, und nicht, daß er behauptet, sie 20 kenne ihre eigenen Prinzipien nicht, sondern sie empfangen sie von jener und besitze sie ohne Beweis und beweise aus ihnen ihre Folgerungen. Auch die Seele, die nach mathematischen Verhältnissen geschaffen wurde, ist nach seiner Ansicht bald Prinzip der Bewegung, bald empfängt sie diese von den intelligiblen Seinsgattungen. Und das ist kein Widerspruch. Denn dem von außen Bewegten ist sie Prinzip der Bewegung, aber sie ist nicht Prinzip der Bewegung schlechthin. Ebenso verhält es sich mit der Mathematik: Sie steht der obersten Wissenschaft nach und ist im Vergleich mit ihr unvollkommen, aber gleichwohl Wissenschaft, nicht als ob sie voraus- 30 setzungslos wäre, sondern insofern sie die eigenen Ideen in der Seele erkennt, die Gründe angibt für die Schlußfolgerungen und so im Besitz der Gründe für die Objekte ihrer Erkenntnis ist. Soviel sei bemerkt zu PLATONS Meinung über die Mathematik.

32, 21 Nunmehr wollen wir die Frage behandeln, welche Anforderungen an den Mathematiker zu stellen sind und wie man ihn eigentlich erkennen kann. Da sagt nun ARISTOTELES*), der schlechthin Ge- 37

*) de part. anim. I. 639a.

Bl. inicom A 1, 1094 b

bildete kann alles, der in der Mathematik Gebildete aber kann die auf ihrem Gebiete vorgetragenen Lehren hinsichtlich ihrer Richtigkeit prüfen. Man muß also Richtlinien gewinnen für die Prüfung und fürs erste die Fälle erkennen, bei welchen eine gemeinsame Beweisführung am Platze ist, und jene, wo man die besonderen Erscheinungen jedes Einzelfalles berücksichtigen muß. Denn vieles gilt in gleicher Weise für das, was der Art nach verschieden ist, wie z. B. die¹³⁾ zwei Rechten für alle Dreiecke. Vieles hingegen trägt denselben Namen; das Gemeinsame aber unterscheidet sich in jedem
 10 einzelnen Fall hinsichtlich der Art, wie z. B. die Ähnlichkeit bei Figuren und Zahlen. In solchen Fällen darf man also nicht einen einzigen Beweis vom Mathematiker fordern: Denn Figuren und Zahlen haben nicht dieselben, sondern verschiedene Prinzipien, entsprechend der zugrunde liegenden Gattung. Wenn aber das wesentliche Akzidens eines ist, dann genügt auch ein einziger Beweis. Das Gesetz der zwei rechten Winkel z. B. ist das gleiche bei allen Dreiecken und Träger des gleichen Akzidens in allen Fällen ist das Dreieck*) und seine Idee. Ebenso verhält es sich mit dem Satz von den vier rechten Außenwinkeln. Er gilt nicht nur für Dreiecke¹⁴⁾, sondern
 20 für alle geradlinigen Figuren und so paßt auch derselbe Beweis für alle, soweit sie geradlinig sind. Denn jeder Begriff bringt eine ganz besondere Beschaffenheit mit sich, an der alles teilhat, was unter diesen Begriff fällt, wie unter den des Dreiecks, oder der geradlinigen Figur, oder der Figur überhaupt.

b. 133 21 Zweitens ist festzustellen, ob seine Beweisführung der zugrundeliegenden Materie entspricht, also z. B., ob seine Ausführungen zwingender und unwiderlegbarer Art sind und nicht bloß überreden und voll von Wahrscheinlichkeitsgründen sind. Es ist nämlich derselbe Fehler, sagt ARISTOTELES**), von einem Redner Beweise zu
 30 fordern und einen Mathematiker sich gefallen zu lassen, der nur in Wahrscheinlichkeiten sich ergeht. Denn jeder Vertreter von Wissenschaft und Kunst muß seine Darlegungen so gestalten, daß sie dem Gegenstand seiner Beschäftigung entsprechen. So fordert PLATON im „*Timaios*“ vom Naturforscher nur Wahrscheinlichkeitsgründe, da er sich eben mit solchen Gegenständen befasse, von dem aber,
 36 der über die intelligible Welt und das beständige Sein vorträgt,

*) Nach *τρίγωνον* hat sich in FRIEDLEINS Text ein irreführendes Komma eingeschlichen.

**) *Nic. Ethik* I. 1094b.

fordert er unwiderlegbare und exakte Beweise. Denn die Gegenstände der Wissenschaften und Künste bedingen sofort einen Unterschied, wie z. B. wenn der eine unbewegter, der andere bewegter Art, der eine von einfacherer, der andere von zusammengesetzter Struktur ist, der eine der intelligiblen, der andere der Sinnenwelt angehört. Wir werden also wieder von der gesamten Mathematik denselben streng exakten Charakter fordern: Denn gesetzt den Fall, ein Zweig befaßte sich mit der Sinnenwelt, ein anderer wäre Erkenntnis intelligibler Objekte, dann wären beide nicht im gleichen Maße exakt, sondern der zweite in höherem Grade; deshalb sprechen wir der Arithmetik größere Exaktheit zu als der Harmonik; noch werden wir schlechthin die Behauptung vertreten, die Mathematik und die übrigen Wissenschaften müßten sich derselben Beweise bedienen. Denn der zugrundeliegende Gegenstand bedingt keinen geringen Unterschied. Fürs dritte sagen wir, daß auch über Identität und Verschiedenheit sich klar sein muß, wer mathematische Vorträge in der rechten Weise beurteilen will, ferner über das Wesentliche und Akzidentelle, über die Proportion und alles dgl. Denn fast alle Irrtümer gehen darauf zurück, daß man glaubt, mathematisch streng zu beweisen, ohne in Wirklichkeit es zu tun, wenn man das Identische als verschieden bei jeder Unterart beweisen will, oder das Verschiedene als identisch, oder wenn man das Akzidentelle im Sinne des Wesentlichen faßt, oder das Wesentliche im Sinne des Akzidentiellen, wie z. B. bei der Behauptung, daß die Kreislinie schöner sei als die Gerade, oder das gleichseitige Dreieck schöner als das gleichschenkelige. Denn solches zu entscheiden ist nicht Sache des Mathematikers.

35, 7 Und noch ein vierter Punkt! Da die Mathematik den mittleren Rang einnimmt zwischen der intelligiblen und der Sinnenwelt und viele Bilder vom Göttlichen in sich aufweist, aber auch viele Beispiele naturwissenschaftlicher Wahrheiten, so muß man auch die dreifachen Beweisarten bei ihr beachten: Die mehr intellektuelle, die mehr ins Einzelne gehende, endlich diejenige, die nur an den Glauben sich anlehnt. Denn je nach den Aufgaben müssen auch die Beweise verschieden sein und entsprechend den Gattungen des Seins auseinandergehalten werden, da sie mit diesen allen zusammen am Webstuhl sitzt und allen das Gewebe ihrer Sätze harmonisch anpaßt.

35, 17 Doch genug hiervon. Es ist nunmehr betreffs der Unterarten der Mathematik festzustellen, welche und wieviele sie sind. Denn nachdem wir sie als Ganzes und als universale Gattung uns vorgeführt

haben, müssen wir nun auch die Artunterschiede der Teildisziplinen berücksichtigen. Bei den Pythagoreern war es nun herkömmlich, die generelle Mathematik in vier Teile zu zerlegen: Einem weisen sie den Zahlbegriff, einem anderen den Größenbegriff zu und jeder dieser Teile umfaßt nach ihnen wieder eine Zweierheit: Der Zahlbegriff existiere nämlich entweder absolut für sich oder werde in seiner Beziehung zu einem Anderen betrachtet, und die Größe sei entweder ruhend oder bewegt. Nun untersuche die Arithmetik die Zahl an sich, die Musik in bezug auf etwas Anderes, die Geometrie die unbewegte
10 Größe, die Sphärik das an sich Bewegte; sie betrachteten aber Größe und Zahl weder als Größe noch als Zahl schlechthin, sondern die bei beiden bestimmte Größe. Denn diese trennten die Wissenschaften vom Unbegrenzten ab und unterzogen sie der Betrachtung, da es unmöglich sei, die Unendlichkeit auf beiden Gebieten erkennend zu umfassen. Wenn dies aber Männer behaupten, die in aller Weisheit bewandert sind, so werden wir dabei weder an die Quantität in den Sinnendungen denken wollen, noch an die Größe, wie sie in der Körperwelt in Erscheinung tritt. Denn deren Erforschung, meine ich, ist Aufgabe der Naturwissenschaft, nicht der Mathematik selbst. Aber
20 nachdem der Weltschöpfer die Vereinigung und Scheidung des Alls und die Identität zugleich mit der Verschiedenheit zur Vollendung der Seele verwendete und dazu noch Ruhe und Bewegung, und aus diesen Seinsgattungen sie bildete, wie TIMAIOS es uns lehrte, so ist zu sagen, daß durch das Prinzip ihrer Differenzierung und der Scheidung und Vervielfältigung der Begriffe der Geist in Ruhe verharrend und sich als Einheit und Vielheit denkend die Zahlen und ihre Erkenntnis, die Arithmetik, von sich ausgehen läßt, durch das Prinzip der Einigung des Vielen hingegen und seiner Gemeinschaft und Verbindung die Musik. Deshalb ist auch die Arithmetik älter als die
30 Musik, da die Seele zuerst im Schöpfungsprozeß geteilt und hernach in solchen Verhältnissen verbunden wird, wie PLATON es lehrt. Und wiederum, indem er seine Tätigkeit gründete auf das ruhige Verharren in sich selbst, brachte er aus sich die Geometrie hervor sowie die eine wesenhafte Figur und die schöpferischen Prinzipien aller Figuren; indem er diese aber auf Bewegung festlegte, erzeugte er die Sphärik. Denn auch er selbst bewegt sich in Kreisen, verharret aber immer in derselben Ruhe vermöge der Ursachen der Kreise, des Geraden und des Runden. Und deshalb besteht auch hier die Geometrie vor der
39 Sphärik wie die Ruhe vor der Bewegung.

Da er aber bei der Erzeugung dieser Wissenschaften sich nicht bestimmen ließ von den unbegrenzten Entfaltungsmöglichkeiten seiner Ideen, sondern von dem je nach den Gattungen begrenzten Umfang, deshalb sagt man, sie hätten von Zahl und Größe die Funktion des Unbegrenzten losgelöst und befaßten sich fortan nur mehr mit dem Begrenzten. Denn der Nus legte in ihn die Prinzipien von allem, von der Zahl und von der Größe¹⁵⁾. Denn da er ganz gleichförmig in sich ist, eine Einheit und unteilbar, und auch wieder getrennt und die Welt der Begriffe erzeugend, hat er Teil sowohl an endlicher Begrenzung wie auch an wesenhafter Unendlichkeit, die ihm vom Intelligiblen zukommt. Aber er denkt diese (Unendlichkeit) nur in Begrenzung, zeugt hingegen die Mannigfaltigkeit des Lebens und der Begriffe in unendlichem Prozesse. Daher begründeten seine Denkprozesse diese Wissenschaften nach dem Prinzip der in ihnen liegenden Begrenzung und nicht nach dem der Unermeßlichkeit des Lebens. Denn sie geben ein Abbild vom Nus, aber nicht vom Leben. 10

Das also ist die Lehre der Pythagoreer und ihre Einteilung der vier Wissenschaften¹⁶⁾. Manche wollen indes die Mathematik auf andere Weise gliedern wie GEMINOS: Sie weisen dem einen Teil als Gegenstand, womit er sich befasse, nur das Intelligible zu, dem anderen die Sinnendinge; dabei bezeichnen sie als intelligibel offenbar alles, was die Seele an Schauungen in sich hervorruft, sich absondernd von den verstofflichten Seinsformen. Der mit dem Intelligiblen sich befassenden Wissenschaft weisen sie zwei, und zwar die ersten und hauptsächlichsten Teildisziplinen zu, die Arithmetik und Geometrie; der anderen hingegen, die mit den Sinnendingen sich beschäftigt, sechs: Die Mechanik, die Astronomie, die Optik, die Vermessungskunde, die Kanonik¹⁷⁾ und die Rechenkunst (Logistik). Die (militärische) Taktik sprechen sie nicht als eine Teildisziplin der Mathematik an, wie einige andere; sie bediene sich nur zuweilen der Rechenkunst, wie bei den Aufzählungen der Heeresabteilungen*), und zuweilen der Vermessungskunst, wie z. B. bei der Einteilung und Vermessung von Örtlichkeiten. Noch viel mehr sprechen sie diesen Charakter der Geschichtsschreibung und der ärztlichen Kunst ab, wenn auch die Geschichtsschreiber häufig die mathematischen Lehrsätze ver- 30 35

*) Mit τῶν λόγων 38,16 ist nichts anzufangen. BAROCIUS übersetzt *ut in enumerandis legionibus*. Dies brachte mich auf die jedenfalls sehr plausible Konjektur τῶν λόγων für τῶν λόγων.

wenden, indem sie die geographische Lage oder Größe von Städten angeben und ihren Durchmesser und ihren Umfang*) berechnen, und die Ärzte über vieles in ihrer Kunst durch solche Hilfsmittel Licht verbreiten. Den Nutzen der Astronomie z. B. für die Heilkunde macht HIPPOKRATES klar und alle, die über Jahreszeiten und Örtlichkeiten etwas zu sagen wußten. Ebenso wird denn auch der Taktiker der Lehrsätze der Mathematiker sich bedienen ohne selbst Mathematiker zu sein, wenn er auch einmal in dem Bestreben, die Anzahl der Kämpfer möglichst gering erscheinen zu lassen, das Heer in
 10 Kreisform aufstellt und dann wieder, um den entgegengesetzten Eindruck zu erzielen, in der Form des Quadrats oder Fünfecks oder eines anderen Vielecks.

Das also sind die Unterarten der generellen Mathematik. Die Geometrie teilt man nun wieder ein in die Planimetrie und Stereometrie. Denn von den Punkten und Linien gibt es keine eigene Wissenschaft, insofern durch diese auch nicht eine einzige Figur zustandekäme**) ohne Zuhilfenahme von Flächen oder Körpern. In allen Fällen ist es jedenfalls Aufgabe der Geometrie, mag es sich nun um Flächen oder Körper handeln, zusammenzusetzen oder zu vergleichen
 20 oder das Zusammengesetzte wieder zu trennen. Ebenso wird die Arithmetik eingeteilt in den Traktat von den einfachen (linearen), von den Flächen- und den Körperzahlen¹⁸⁾. Denn sie untersucht die Arten der Zahl an sich, wie sie von der Einheit ausgehen, die Entstehung der Flächenzahlen, der gleichen (Quadrat) und der ungleichen (Rechteck) und ihre Entfaltung bis zur dritten Potenz. Die Erdvermessung und Rechenkunst verhalten sich zu diesen in ähnlicher Weise, nur daß sie nicht intelligible Zahlen oder Figuren, sondern sinnlich wahrnehmbare behandeln. Denn es ist nicht Aufgabe der Erdmessung, den Zylinder oder Würfel zu messen, sondern Massen in Würfel-
 30 und Brunnen in Zylinderform, und nicht mit intelligiblen Geraden, sondern mit sichtbaren, bald mit feineren wie mit den Sonnenstrahlen, 32 bald mit gröberen wie mit Seilen und der Richtschnur. Auch der

*) Die tautologische Wiederholung von *διαμέτρους ἢ περιβόλους* durch καὶ *διαμέτρους ἢ περιμέτρους* halte ich selbst für einen so wortreichen Autor wie PROKLUS nicht tragbar und habe mich darum in der Übersetzung mit einem Gliede begnügt.

**) Zu dem etwas problematischen Text 39, 11 schlage ich folgende kleine Änderung vor, die einen glatten Sinn ergibt: καθόσον οὐ δὲ σχῆμα γένοιτο ἂν ἐν τοῦτοις.

Rechenmeister betrachtet die Vorgänge mit den Zahlen nicht an und für sich, sondern an den Sinnendingen, weshalb er ihnen auch den Namen nach dem gezählten Gegenstand gibt, indem er einige Apfel- und Schalenzahlen benennt*). Und daß es keine kleinste Größe gibt, gesteht er zu wie der Arithmetiker, aber in bezug auf irgendeine Gattung nimmt er die kleinste Größe an. Denn ein Mensch wird ihm zum Einheitsmaß für die vielen. Die Optik und Kanonik¹⁹⁾ hinwiederum sind Ableger von der Geometrie und der Arithmetik. Erstere bedient sich der Sehlinien und der aus ihnen gebildeten Winkel. Sie zerfällt in die eigentliche Optik, die den Grund 10 angibt für die Täuschungen des Gesichtssinns nach Maßgabe der Entfernung der Sehobjekte, wie für das Zusammentreffen der Parallelen oder für das Phänomen, daß Vierecke wie Kreise erscheinen²⁰⁾; dann in die Katoptrik²¹⁾ insgesamt, die sich mit den mannigfachen Möglichkeiten der Lichtreflexion befaßt und mit der bildhaften Erkenntnis zusammenhängt, und endlich in die Kunst der sog. Theatermalerei, die zeigt, wie es zu erreichen ist, daß die in den Bildern dargestellten Dinge nicht als verworrene und verzerrte Gebilde erscheinen, sondern der Entfernung und Größe der dargestellten Objekte entsprechen. Die Kanonik²²⁾ hinwiederum untersucht die 20 wahrnehmbaren Verhältnisse der Harmonien, indem sie unter steter Heranziehung des Gehörs die Einteilungen der Monochorde ausfindig macht, so daß PLATON ihr vorwirft, sie stelle die Ohren über den Nus**).

Zu diesen kommt noch die sog. Mechanik hinzu, eine Abteilung der mit den materiellen Sinnendingen sich befassenden Wissenschaft, und als Unterart von ihr die Kunst der Herstellung von Kriegsmaschinen, wie denn ARCHIMEDES Maschinen zur Abwehr der Belagerer von Syrakus hergestellt haben soll, ferner die Zauberkunst. Sie operiert teilweise mit Gebläsen wie KTESIBIOS und HERON, teils 30 mit Gewichten, deren Ungleichheit als Ursache der Bewegung, deren Gleichheit als Ursache der Ruhe anzusprechen ist, wie schon TIMAIOS festgestellt hat, teils erweckt sie mit Hilfe von Sehnen und Seilen den Eindruck lebendiger Kraft und Bewegung. Zur Mechanik gehören noch die Wissenschaft zur Ermittlung des Gleichgewichts 35

*) Zum Verständnis der Stelle sei verwiesen auf PLATON, *Nomoi* VII, 819b. c. und PAULY-WISSOWA unter *Arithmetika*, Spalte 1109.

**) *Staat* VII, 531a.

überhaupt und des Schwerpunktes, ferner die Herstellung der Himmelsplanetarien, wie wir ein solches dem ARCHIMEDES verdanken, und überhaupt jede Wissenschaft der kinetischen Energie²³). Schließlich bleibt noch die Astronomie, die sich verbreitet über die Himmelsbewegungen, über die Größe und Gestalt der Himmelskörper, über ihr Licht und ihre Abstände von der Erde und alles andere dergleichen. Sie ist vielfach angewiesen auf die Sinneswahrnehmung; häufig geht sie auch gemeinsame Wege mit der Naturwissenschaft. Ein Teil von dieser ist auch die Gnomonik, die sich mit Hilfe der Anlage
 10 von Stiften um die Stundenmessung bemüht, die Meteorologie, die die Unterschiede der Standhöhe der Sterne und ihre Abstände erforscht und eine große Menge anderer astronomischer Lehrsätze verschiedener Art vorträgt, und endlich die Dioptrik, die die fünf Abstände der Sonne und des Mondes sowie der übrigen Sterne (Planeten) mit Hilfe von derartigen Instrumenten feststellt. Solcher Art ist, was wir an Aufzeichnungen über die Teildisziplinen der Mathematik seitens der Alten überkommen haben. Genug denn hiervon.

p. 42, 9 Nun wollen wir uns hinwiederum der Frage zuwenden, in welchem Sinne PLATON im „Staat“*) die Dialektik als krönenden Abschluß
 20 der mathematischen Wissenschaften bezeichnete und welches ihr einigendes Band ist, das er bei Abfassung der *Epinomis* behandelt. Da sagen wir nun: Wie der Nus thront über dem diskursiven Denken und ihm von oben die Prinzipien zuleitet und von sich aus das diskursive Denken vollendet, ebenso entfaltet sich die Dialektik, die die Philosophie in Reinkultur darstellt, unmittelbar über den mathematischen Disziplinen, begreift den ganzen Komplex derselben in sich und verleiht von sich aus den Wissenschaften die mannigfachen Methoden, die wirksamen, scheidenden und erkennenden, ich meine die analytische, die trennende, die bestimmende und die beweisende.
 30 Von diesen geleitet und zur Vollendung geführt, findet die Mathematik ihre Resultate teils auf dem Weg der Analyse, teils der Synthese, teils geht sie nach der trennenden, teils nach der bestimmenden Methode voran und dann wieder legt sie das Gesuchte durch Beweise fest. So paßt sie ihre Methoden ihren jeweiligen Gegenständen an, bedient sich aber jeder einzelnen bei der Behandlung ihrer mittleren Wahrheiten, weshalb denn auch ihr die Analysen, die Definitionen,
 37 die Trennungen und die Beweise eigentümlich sind und nach Art

*) Staat VII, 534e.

und Weise der mathematischen Erkenntnis gehandhabt werden. Die Dialektik ist also in der Tat der krönende Abschluß der mathematischen Disziplinen: Sie bringt alle ihre intellektuellen Kräfte zur vollen Entfaltung, sie verleiht dem Exakten an ihr in noch höherem Maße den Charakter des Unwiderlegbaren, sie bewahrt das Unbewegte in unveränderlicher Ruhe, sie führt das Immaterielle und Unvermischte auf die Einfachheit und Immaterialität des Nus zurück, sie bestimmt durch ihre Untersuchungen ihre ersten Prinzipien, sie offenbart die Unterschiede der ihnen unterstellten Gattungs- und Artbegriffe, sie lehrt die Synthesen, die aus den Prinzipien die Folgerungen hieraus ableiten, und die Analysen, die wieder zurückkehren zum Ursprung und zu den Prinzipien. 10

Als das einigende Band der mathematischen Disziplinen dürfen wir aber nicht, wie ERATOSTHENES meint, die Analogie annehmen. Denn die Analogie ist etwas, was ihnen allen als etwas Gemeinsames zugesprochen wird und in der Tat zukommt. Auch vieles andere noch erstreckt sich in seinem geltenden Einfluß sozusagen auf alle Disziplinen und gehört zu den wesentlichen Erscheinungen des allgemeinen mathematischen Seins. Nach unserer Ansicht ist vielmehr das letzte einigende Band für sie die eine und allgemeine Mathematik, 20 die die Prinzipien aller Teildisziplinen in einfacher Weise in sich begreift, die gründlich untersucht hat, was ihnen gemeinsam ist und worin sie sich unterscheiden, und angibt, was bei allen in gleicher Weise gilt, was bei der Mehrzahl und was bei der Minderzahl. Zu dieser erheben sich von den vielen Teildisziplinen immer wieder diejenigen, die in der rechten Weise ihr Studium betreiben. Auf noch höherer Stufe wäre die Dialektik, das einigende Band der mathematischen Disziplinen. Denn sie ist es, die die generelle Mathematik zur vollen Auswirkung bringt, durch ihre Methoden zum Nus emporgeleitet, sie zur wahren Wissenschaft stempelt und ihr den Charakter 30 der Unveränderlichkeit und Unwiderlegbarkeit verleiht. An dritter Stelle wäre als einigendes Band der Nus selbst zu nennen, der alle dialektischen Methoden einheitlich in sich begreift und ihre Mannigfaltigkeit durch seine Einfachheit, ihr Gespaltensein durch seine ungeteilte Erkenntnis und ihre Vielfalt durch seine Einfalt verbindet. Er selbst faßt also die Entwicklungsprozesse der dialektischen Methoden zusammen, stellt bei jeder mathematischen Erörterung die Verbindung nach oben her und ist der beste Abschluß des Aufstieges nach oben und der Tätigkeit des Erkennens. Soviel hiervon. 39

Was nun den Namen der Mathematik selbst und der mathematischen Studien betrifft, den die Alten diesen Wissenschaften gegeben haben, wo ist er nach unserer Ansicht wohl herzuleiten? Und welchen treffenden Sinn birgt er in sich? Nach meiner Ansicht scheint mir diese Bezeichnung der Wissenschaft mit dem Gedankengut mittlerer Ordnung nicht von den Nächstbesten zu stammen, wie die meisten anderen Namen, sondern wie man denn auch hören kann, von den Pythagoreern, die wohl wußten, daß alles sogenannte Lernen eine Wiedererinnerung ist, nicht von außen in die Seele hineingelegt, wie die von den Sinnendingen stammenden Bilder der Phantasie sich einprägen, und nicht von fremden Einflüssen herrührend wie die Erkenntnis durch Überzeugung, sondern geweckt von den Sinneswahrnehmungen, unmittelbar aber erzeugt im Schoße des in sich gekehrten Denkens. Sie waren sich auch bewußt, daß man die Fälle der Wiedererinnerung zwar an vielen Beispielen nachweisen kann, vorzugsweise aber doch, wie auch PLATON sagt, an der Mathematik. Denn wenn jemand (seine Zuhörer) vor Figuren führt, sagt dieser*), dann zeigt er am augenscheinlichsten, daß das Lernen eine Wiedererinnerung ist. Darum zeigte denn auch SOKRATES im „Menon“**) durch dieses Beweisverfahren, daß das Lernen nichts anderes ist als ein Sichwiedererinnern der Seele an ihre eigenen Ideen. Der Grund hierfür liegt darin, daß das Prinzip der Erinnerung zugleich auch das Denkprinzip der Seele ist. Dieses west in den mathematischen Begriffen und hat diese Wissenschaften in sich antizipiert, auch wenn es damit nicht in Tätigkeit tritt. Es trägt aber im Verborgenen alle wesenhaft in sich, und läßt die einzelnen ans Licht treten, wenn es befreit wird von den Hemmnissen der Sinneswahrnehmung. Denn die Sinneswahrnehmungen verknüpfen sie mit den geteilten Dingen, die Phantasievorstellungen füllen sie an mit gestaltenden Bewegungen, und die Triebe verstricken sie in ein leidenschaftliches Leben. Alle Teilung aber ist uns ein Hindernis der Rückkehr zu uns selbst und alle (materielle) Gestaltung trübt die gestaltenlose Erkenntnis, und alle Leidenschaft ist ein Hindernis der leidenschaftslosen Tätigkeit. Wenn wir nun unseren Geist davon freimachen, dann können wir die Ideen in ihm nach seiner Weise erkennen, in Wirklichkeit Wissende sein und die wesenhafte Erkenntnis erzeugen. Aber als Gefesselte und mit geschlossenem Auge der

*) Phaid. 73 b.

**) 80—86.

Seele²⁴) möchten wir niemals die uns zukommende Vollkommenheit erlangen. Das also ist das Lernen, die Erinnerung an die unsichtbaren Ideen in der Seele, und demzufolge wird die Wissenschaft, die zur Erinnerung an diese Ideen uns vorzugsweise verhilft, Mathematik genannt. Auch die Art der Aufgabe dieser Wissenschaft wird auf Grund des Namens klar: Sie bringt die uns angeborene Wissenschaft ans Licht, weckt das reine, reinigt das vermittelnde Denken, offenbart die wesenhaft in uns vorhandenen Ideen, hebt Vergessen und Unwissenheit auf, die uns von Geburt aus anhaften, und macht uns frei von den Banden der Unvernunft nach dem Willen des Gottes, der 10 in Wahrheit Patron dieser Wissenschaft ist, der die intellektuellen Gaben ans Licht bringt, alles mit göttlicher Weisheit erfüllt, die Seelen hinbewegt zum Nus und wie aus tiefem Schläfe weckt, durch Forschung sie auf sich selbst zurücklenkt, durch die Hebammenkunst (Mäeutik) sie fördert und durch die Entdeckung des reinen Nus zum glückseligen Leben führt. Ihm wollen denn auch wir dieses Werk weihen, in dem wir die Theorie der mathematischen Wissenschaft niederlegen.

18

**Des Proklus Diadochus 2. Buch des Kommentars
zum 1. Buch von Euklids „Elementen“**

Vorrede II. Teil

Die allgemeinen Grundlagen, die auf die mathematische Wissenschaft insgesamt sich erstrecken, haben wir in den bisherigen Ausführungen kennengelernt, wobei wir PLATON zum Weggenossen nahmen und von den übrigen Autoren die Gedanken auswählten, die für das vorliegende Werk uns förderlich erschienen. Es erübrigt noch, uns über die Geometrie selbst zu verbreiten und über die vorliegende Elementarlehre, der unsere ganze Darlegung gilt.

Daß nun die Geometrie ein Teil der gesamten Mathematik ist, und daß sie die zweite Stelle einnimmt nach der Arithmetik, von der sie ihre Seinserfüllung und ihren exakten Charakter erhält — denn 10 alle feststellbaren Erkenntnisinhalte in ihrem Bereich werden durch Zahlenverhältnisse bestimmt —, ist schon von den Alten dargelegt worden und bedarf gegenwärtig keiner breiten Ausführung. Sinngemäß möchte die Einführung in sie sich gestalten, wenn wir die Stellung, die die ihr zugrundeliegende Materie in der Welt des Seins innehat, untersuchen und sodann ihr Wesen. Denn aus seiner richtigen Erfassung werden auch die Bedeutung der sie erkennenden Wissenschaft und der daraus entspringende Nutzen sowie die Vorteile erhellen, die für die Studierenden sich ergeben. Denn es ist schon so: Die Frage nach der Seinsgattung, in die man die geometrische Materie 20 einreihen soll, um die Wahrheit in bezug auf sie nicht zu verfehlen, dürfte manchen in Verlegenheit bringen. Denn wenn die Figuren, mit denen der Mathematiker sich befaßt, dem Sinnesbereich angehören und untrennbar sind von der Materie, wie können wir da noch behaupten, die Geometrie befreie uns von der Sinneswelt und wende uns hin zu dem körperlosen Sein, gewöhne uns an die Schau der intelligiblen Welt und sei die beste Vorbereitung zur Tätigkeit des reinen Denkens? Wo hätten wir auch im Sinnesbereich einen unteilbaren Punkt gesehen, oder eine flächenlose Linie, oder eine Oberfläche ohne Tiefendimension, oder die Gleichheit der vom 30 Zentrum ausgehenden Radien, oder überhaupt all die vieleckigen und vielfächigen Figuren, über die die Geometrie unterrichtet? 32

Und ferner: Wie bleiben die Lehren dieser Wissenschaft unwiderleglich, wenn doch die sichtbaren Körper und Figuren ein mehr und weniger zulassen, in allseitiger Bewegung und Veränderung sich befinden, ganz und gar der Unbestimmtheit der Materie anheimgegeben sind, wenn Gleichheit zugleich mit der entgegengesetzten Ungleichheit besteht und das Unteilbare im Zustand der Teilung und des räumlichen Abstandes zum Vorschein kommt?²⁵⁾ Fällt aber der Gegenstand der Geometrie außerhalb des Bereiches der Materie und sind dies die Ideen, rein und getrennt von der Sinnen-

10 welt, so werden sie auch alle ungeteilt und ohne Körper und Ausdehnung sein. Denn Ausdehnung und Gewicht und überhaupt die Raumfunktion kommt den Ideen nur durch die Annahme der Materie zu, die das Ungeteilte in der Form der Teilung, das Dimensionslose in der Form der Dimension, das Unbewegte in der Form der Bewegung aufnimmt. Aber wie können wir nun noch die Gerade schneiden und das Dreieck und den Kreis? Wie können wir von Unterschieden der Winkel sprechen und ihren Vergrößerungen, sowie von Verkleinerungen der Figuren, wie der Dreiecke oder Vierecke? Wie von den Berührungen der Kreise oder der Geraden?

20 Denn all das beweist, daß Teilung die Seinsform der geometrischen Materie ist, und daß sie nicht in ungeteilten Begriffen west. Zu diesen Schwierigkeiten kommt noch hinzu, daß PLATON die Seinsformen der Geometrie nur dem vermittelnden Denken zuweist, aber zugibt, daß sie uns von der Sinnenwelt loslösen und von der Sinneswahrnehmung zum reinen Denken erwecken; nun sind aber doch, wie gesagt, die Begriffe des vermittelnden Denkens ungeteilt und haben gemäß der seelischen Beschaffenheit ein ausdehnungsloses Sein.

Wenn wir indes unsere Stellungnahme in Einklang bringen sollen mit den Dingen selbst und mit PLATONS Darlegung, so werden

30 wir folgendermaßen scheiden und sagen: Jedes Allgemeine und Universale wird entweder in den Einzeldingen sichtbar*) und hat sein Dasein in diesen, ungetrennt von diesen existierend und unter sie verteilt und mit ihnen entweder bewegt oder unverändert verharrend und unbewegt; oder es existiert vor den vielen Einzeldingen und erzeugt deren Menge, indem es Abbilder von sich den vielen Dingen vermittelt, ungeteilt ihnen, die daran teilhaben, übergeordnet

37 und mannigfache Teilhaben den untergeordneten Dingen gewährend,

*) Das überflüssige und störende *πέφυκεν ἢ φαίνεται* scheide ich mit H₂ aus.

oder es erhält im intentionalen Denken von dem Vielen her Gestalt, hat ein nachgewordenes Sein und verschmilzt erst hinterher (sekundär) zu einer Einheit mit dem Vielen. Gemäß diesen dreifachen Seinsweisen werden wir finden, daß die einen Universalien vor dem Vielen, die anderen in dem Vielen existieren, die der dritten Art gemäß ihrem kategorialen Verhältnis zu ihm. Nachdem also, um es kurz zu sagen, drei umfassende Seinsformen vorhanden sind, von dem das teilgehabt wird, im Vielen existiert und die der Teilung verhaftete Welt erfüllt, so wollen wir die Unterschiede bezüglich des Substrats der Materie ins Auge fassen. Und indem wir ein Zwei- 10 faches annehmen, das daran*) Anteil hat: Die Sinnendinge und jene, die ihr Sein lediglich in der Phantasie haben, — denn die Materie ist zweifach, die eine, die den der Sinneswahrnehmung verhafteten Dingen, die andere, die den Vorstellungen eignet, wie irgendwo auch ARISTOTELES sagt**) — werden wir zugeben, daß auch das verteilte Allgemeine zweifacher Art ist:

Das eine ist wahrnehmbar und an ihm haben die Sinnendinge Anteil, das andere ist Vorstellung und besteht in der Fülle der Phantasiebilder. Denn da die Phantasie mit ihrer gestaltenden Tätigkeit nur mit und im Körper existiert, bringt sie immer nur geteilte, ge- 20 trennte und gestaltete Allgemeinbilder hervor und alles, was sie erkennt, hat einen derartigen Charakter. Daher hat denn auch jemand***) kein Bedenken getragen, sie den leidend sich verhaltenden Nus zu nennen. Wenn sie aber Nus ist, muß sie dann nicht leidlos und immateriell sein? Wenn aber ihre Tätigkeit mit einem Erleiden verbunden ist, wie könnte sie dann mit Recht noch Nus genannt werden? Denn Leidensunfähigkeit kommt dem Nus zu und der denkenden Seinssphäre, alles Leiden ist fern von dieser Wesenheit. Darum glaube ich, in dem Bestreben, ihre Mittelstellung zwischen den höchsten und niedrigsten Erkenntnissen zum Ausdruck zu 30 bringen, nannte er sie zugleich Nus als ähnlich den höchsten und leidend mit Rücksicht auf die enge Beziehung zu den niedrigsten. Denn die bild- und gestaltlosen Erkenntnisakte haben das Intelli- 33

*) 51, 13: Es ist wohl mit M. und GRYNAEUS μετέχοντα αὐτοῦ statt αὐτὰ zu lesen.

**) Hier schließt die Parenthese. FRIEDLEIN zerstört Sinn und Zusammenhang, indem er διπλὸν εἶναι τὸ καθόλου von φησι abhängen läßt, statt mit τὸ κατατεταγμένον von συγχωρήσομεν. Der Irrtum ist um so auffälliger, als BAROCIUS richtig interpunktiert und übersetzt.

***) ARISTOTELES, *de anima* III, 430a, 24.

gible in sich; ihre Tätigkeit ist in ihnen selbst beschlossen und sie sind mit ihren Erkenntnisinhalten zur Einheit verbunden, frei von jedem von außen dazukommenden Bild und Eindruck. Die niedrigsten Erkenntnisakte aber vollziehen sich vermittels der Sinnesorgane und sind mehr Eindrücke. Sie empfangen die Erkenntnisse von außen und teilen die Bewegung mit ihren Gegenständen. Denn der Art sind die Sinneswahrnehmungen, die von erzwungenen Eindrücken herrühren, sagt PLATON*). Die Phantasie hingegen, die von den Erkenntnissen den mittleren Platz behauptet, schreitet von sich
10 aus zur Tätigkeit und bringt das Erkannte hervor; da sie aber nicht außerhalb des Körpers ist, so zieht sie ihre Erkenntnisse aus dem ungeteilten Bereich des Lebens hervor in den Bereich der Teilung, des räumlichen Abstandes und der Gestalt und deshalb ist alles, was sie denkt, Umriß und Gestalt des Gedachten und denkt sie den Kreis dimensionär, zwar frei von der äußeren Materie, aber behaftet mit der intelligiblen Materie, die in ihr selbst ist und darum ist in ihr nicht bloß ein Kreis, wie auch in den Sinnendingen. Denn es treten zugleich in Erscheinung Ausdehnung und Mehr und Weniger
20 und die Menge der Kreise und Dreiecke. Wenn nun also in den sichtbaren Kreisen das Allgemeine verteilt ist, was jeden von ihnen zum wirklichen Kreis und alle untereinander ähnlich macht, so zwar, daß sie nur unter einer Seinsform existieren, sich aber durch Größe oder das Material unterscheiden, so ist auch in den vorgestellten Kreisen etwas Gemeinsames, an dem sie Anteil haben, und dementsprechend haben alle dieselbe Gestalt und sie unterscheiden sich da nur in einem einzigen Punkte, in der Größe der Phantasievorstellung. Denn wenn man sich viele vorstellt mit demselben Mittelpunkt, so haben sie alle ihr Sein in einem einzigen zugrundeliegenden immateriellen Wesen und im Leben, das vom einfachen Körper nicht
30 zu trennen ist, der nur durch die Ausdehnung das Sein der ungeteilten Substanz überschreitet; sie unterscheiden sich aber durch ihre Größe, ihr Umfaßtsein und ihr Umfassen. Denke dir also das Allgemeine in dem Vielen als ein Zweifaches, einmal in den wahrgenommenen Dingen und dann in den vorgestellten. Auch der Begriff des Kreises ist zweifach, ebenso der des Dreieckes und überhaupt der Gestalt; der eine bezieht sich auf die intelligible, der andere auf die sichtbare
37 Materie. Vor diesen war schon die Idee im denkenden Geist einer-

*) *Tim.* 69c.

seits, in der Natur andererseits; die eine ist Schöpferin der vorgestellten Kreise und der einen Form in ihnen, die andere der sichtbaren, worunter die Kreisbogen am Himmel fallen und überhaupt die von der Natur erzeugten. Und wie die Idee ungeteilt ist im denkenden Geist, so auch in der Natur. Es existieren nämlich das Ausgedehnte unausgedehnt und das Geteilte ungeteilt und die Größen größenlos in den immateriellen Prinzipien, wie umgekehrt das Ungeteilte geteilt und das Größenlose größenhaft in den materiellen. Deshalb ist der Kreis im Geist einer und einfach und ohne Ausdehnung, und die Größe selbst entbehrt dort der Größe und die Gestalt der 10 Gestalt*) — denn das sind Ideen (geistige Seinsinhalte), die mit Materie nichts zu tun haben —; der vorgestellte Kreis aber ist geteilt, gestaltet, ausgedehnt, nicht bloß einer, sondern einer und viele, und nicht einzige Form, sondern verteilte Form; dem Kreis in den sichtbaren Dingen aber eignet ein Mangel an Genauigkeit, eine Durchsetzung mit der Geraden, und er läßt die Reinheit der immateriellen Substanz vermissen.

Wenn also die Geometrie vom Kreise, dem Durchmesser, den Vorgängen am Kreise etwas aussagt, wie z. B. von Berührungen, Teilungen usw., so wollen wir weder behaupten, sie unterrichte über 20 die sichtbaren Kreise; denn sie ist bedacht auf Scheidung von diesen, noch über die Seinsform im Geist. Denn einer ist der Kreis; sie aber handelt von den vielen, jeden einzelnen darstellend und bei allen das gleiche feststellend. Und während jener unteilbar ist, ist der Kreis in der Geometrie teilbar. Aber wir wollen ihm einräumen, daß er das Allgemeine untersuche, eben jenes in den vorgestellten Kreisen Verteilte, und daß er im Kreis des vermittelnden Denkens einen anderen sehe, und an einem anderen forsche, daß aber einem anderen seine Beweise gelten. Denn da das vermittelnde Denken die Ideen zwar hat, aber zu schwach ist, sie in ihrer Zusammen- 30 fassung zu schauen, so entfaltet es sie, legt sie auseinander und entläßt sie in die im Vorsaal weilende Phantasie²⁶), und in ihr oder mit ihr läßt es ihre Erkenntnis sich abspielen, indem es sich begnügt mit der Scheidung von der Sinnenwelt und findet, daß die Materie der Phantasievorstellung sich sehr wohl eigne zur Aufnahme ihrer Formen. Daher bedarf der mathematische Denkprozeß auch der 30

*) καὶ τὸ σχῆμα ἀσχημάτιστον ist auf keinen Fall mit FRIEDLEIN in die Parenthese zu setzen; ich stelle das Glied mit BAROCIUS vorher.

Phantasie und die Zusammensetzungen und Teilungen der Figuren vollziehen sich in ihr, und sein Erkennen ist zwar ein Weg zur Welt des intelligiblen Seins, ist aber noch nicht emporgestiegen in diese transzendente Welt, da das vermittelnde Denken auf die Außenwelt schaut und diese nach ihrem inneren Gehalt betrachtet, dabei wohl der Ausgänge der Ideen sich bedient, aber seine Bewegung von sich aus auf die Außenwelt richtet. Wenn es aber einmal imstande wäre, alle Ausdehnung und alle Bilder und die Vielheit zusammenzuhalten, bildlos und einfach zu schauen und so zu sich zurück-
 10 zukehren, dann würde es erst so recht die geometrischen Ideen schauen, die ungeteilten, die unausgedehnten, die wesenhaften, deren Inbegriff es ist. Und diese seine Tätigkeit wäre das schönste Ziel des Studiums der Geometrie und wahrhaftig die Verwirklichung des Geschenkes des HERMES, das ihn von einer KALYPSO emporführt zu einer vollkommeneren und geistigeren Erkenntnis und ihn freimacht von den an die Phantasie gebundenen Annäherungsversuchen, die es nur zu räumlichen Gebilden bringen. Und das ist es, wonach der wahrhafte Mathematiker streben muß und worin er zum Zweck der Erweckung und Umstellung von der
 20 Phantasie zum reinen Denken an und für sich sein höchstes Ideal sehen soll, daß er sich emporreißt von der Welt der Ausdehnung und des Eindrücke empfangenden Nus zur reinen Tätigkeit des Geistes, derzufolge er alles unausgedehnt und ungeteilt schauen wird, den Kreis, den Durchmesser, die Vielecke im Kreis, alles in allem und jedes einzelne für sich. Deshalb zeigen wir auch, wie in der Phantasie in die Vielecke die Kreise einbeschrieben werden und in die Kreise die Vielecke in Nachahmung der ungeteilten Ideen, die sich in wechselseitiger Verbundenheit zeigen. Und eben deshalb zeichnen wir Darstellungen, Entwürfe und Teilungen von Figuren, sowie Lagen
 30 und Flächenanlagen*) 27), weil wir die Phantasie zu Hilfe nehmen und die damit sich ergebenden Abstände, da die Idee an sich unbewegt, ungeworden, ungeteilt und rein ist von jedem (materiellen) Substrat. Aber alles, was verborgen in ihr enthalten ist, wird aus-
 34 gebreitet und geteilt in die Phantasie projiziert und zwar ist die

*) Ich entnehme den Ausdruck für *παράβολαι* HEIBERGS Geschichte der Mathematik im Altertum S. 3. Die Erklärung gibt PROCLUS (S. 419 FRIEDLEIN). FRIEDLEIN zerreißt den Zusammenhang, wenn er nach *παράβολάς* einen Punkt setzt. offenbar gehört der mit *διότι* eingeleitete Kausalsatz zum vorhergehenden Hauptsatz.

treibende Kraft der Geist, der Ausgangspunkt der Projektion die intelligible Idee, der Aufnahmeort aber ist der sogenannte leidende Nus, dessen Entwicklung kreist um die Unterteiltheit des wahren Nus. Er setzt sich ab von dem Unausgedehnten des reinen Denkens, gestaltet sich nach all den umgestalteten Ideen und wird alles, was das reine Denken und der unteilbare Begriff in uns ist. Soviel haben wir über die geometrische Materie zu sagen. Es ist uns nicht unbekannt, was der Philosoph PORPHYRIUS in den „*Vermischten Schriften*“ geschrieben und die Mehrzahl der Platoniker darlegen; wir glauben aber, unsere Auffassung entspreche mehr den geometrischen Methoden 10 und PLATONS Standpunkt, der das Objekt der Geometrie dem vermittelnden Denken zuweist. Beides steht in bestem Einklang miteinander, weil die Prinzipien der geometrischen Formen, durch die der Geist die Beweise erzeugt, in diesem ihre Präexistenz haben, während die einzelnen geteilten und zusammengesetzten Figuren selbst im Bereich der Phantasie zum Vorschein kommen.

Über die Wissenschaft selbst, die sich mit diesen befaßt, wollen wir nunmehr sprechen. Die Geometrie hat es zu tun mit der Erkenntnis der Figuren und Körper und ihrer Grenzen, ferner ihrer Verhältnisse, der Vorgänge mit ihnen und der mannigfachen Lagen und Bewegungen. 20 Sie geht aus von dem unteilbaren Punkt und endigt bei den Körpern, deren mannigfache Unterschiede sie erkundet, und kehrt hinwiederum von dem Komplizierteren zu dem Einfacheren und dessen Prinzipien zurück. Dabei bedient sie sich ebenso der Synthesen wie der Analysen, geht immer von Voraussetzungen aus und nimmt ihre Prinzipien von der ihr übergeordneten Wissenschaft²⁸); sie stellt ferner sämtliche dialektische Methoden in ihren Dienst, bei den Prinzipien die Scheidung von Art und Gattung, und die Definitionen; bei den Folgerungen aus den Prinzipien die Beweise und Lösungen (von Problemen), damit sie zeige, wie das Kompliziertere vom Ein- 30 facheren ausgehe und wieder dahin zurückkehre. Getrennt behandelt sie ihre Gegenstände, getrennt ihre Axiome, von denen sie bei ihren Beweisen ausgeht, und ihre Forderungen; getrennt die wesentlichen Akzidentien, von denen sie nachweist, daß sie ihren Trägern wirklich zukommen. Denn jede Wissenschaft hat einen anderen Gegenstand, mit dem sie sich befaßt und dessen Möglichkeiten zu ergründen sie sich zur Aufgabe stellt; jede hat andere Prinzipien, die sie für die Beweise verwendet, und andere wesentliche Akzidentien. Die Axiome sind allen gemeinsam, wenn auch jede, entsprechend dem jeweiligen 39

Stoff, sich ihrer in eigener Weise bedient; das Wesen aber und das wesentliche Akzidens sind verschieden.

Gegenstand der Geometrie sind nun also die Dreiecke, die Vierecke, die Kreise und überhaupt die Figuren und Raumgrößen und deren Grenzen; deren wesentliche Akzidentien aber sind die Teilungen, die Verhältnisse, die Berührungen, die Gleichheiten, die „Parabeln“, die „Hyperbeln“, die „Ellipsen“ (die Flächenanlagen²⁹) mit den Fällen der Verlängerung und Verkürzung*) und dergleichen; Forderungen schließlich und Axiome, durch die sie die einzelnen
 10 Behauptungen beweist, sind z. B.: Von jedem Punkt zu jedem Punkt eine Gerade zu ziehen³⁰), oder der Satz: Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, so sind auch die Reste gleich³¹) und dgl. Daher ist auch nicht jede Aufgabe und jede Frage geometrischer Art, sondern nur, was aus den Prinzipien der Geometrie sich herleitet; und nur wer hierin die Prüfung besteht, erweist sich als Mathematiker. Was aber nicht von ihnen sich herleitet, hat mit Geometrie nichts zu tun. Es ist aber auch dies zweifacher Art: Entweder nämlich geht es von ganz anderen Prinzipien aus, und so bezeichnen wir z. B. den musikalischen Fragenkomplex als nichtgeometrisch, weil er von ganz
 20 anderen Voraussetzungen ausgeht und nicht von den geometrischen Prinzipien; oder es bedient sich der geometrischen Prinzipien, aber in verkehrter Weise, wie wenn jemand behaupten würde, daß parallele Linien sich schneiden. Deshalb gibt uns auch die Geometrie Kennzeichen an die Hand, mit deren Hilfe wir unterscheiden können, was ihren Prinzipien gemäß ist und was gegen deren Wahrheit verstößt. Die verschiedenen Methoden nämlich, durch die man die Fehlschlüsse der Sophismen nachweisen kann, bieten uns die Möglichkeit dazu. Denn andere Folgerungen ergeben sich aus den geometrischen Prinzipien und andere aus den arithmetischen. Was
 30 soll man auch sprechen von anderen Wissenschaften, die den genannten weit nachstehen? Denn eine Wissenschaft ist sicherer in ihren Ergebnissen als eine andere, wie ARISTOTELES sagt (*An. post.* 33 I, 24): Diejenige, die sich auf einfachere**) Prinzipien stützt ist

*) PROKLUS erklärt die Ausdrücke im Kommentar zur XLVIII Prop. (FRIEDLEIN S. 419).

**) Wenn man nicht annehmen will, daß der Autor im selben Zusammenhang wenige Zeilen später sich selbst widerspricht, indem er der Arithmetik wegen der Einfachheit ihrer Prinzipien den Vorrang vor der Geometrie zuweist, kann FRIEDLEINS Text hier unmöglich stimmen, die beiden Ausdrücke *ποικιλωτέρας* und *ἀπλουστέρας*

sicherer als diejenige, die von komplizierteren Voraussetzungen ausgeht, und diejenige, die das „Warum“ namhaft macht, ist vollkommener als die, die nur das „Daß“ erkennt, und diejenige, die das Intelligible behandelt, übertrifft diejenige, die nur mit der Sinnenwelt sich befaßt.

Nach diesen Zuweisungen des Sicherheitscharakters ist die Arithmetik sicherer als die Geometrie; ihre Prinzipien haben den Vorzug der Einfachheit. Denn die Einheit ist ohne Lage, der Punkt aber hat eine Lage und die Geometrie geht vom Punkte aus und noch dazu von seiner Lage, die Arithmetik aber von der Einheit. 10 Die Geometrie aber hat den Vorrang vor der Sphärik (Himmelsmechanik) und die Arithmetik vor der Musik; denn beide geben die Prinzipien in umfassender Weise für die in das Gebiet jener einschlägigen Lehrsätze; die Geometrie weiterhin aber auch über die Mechanik und Optik, weil diese mit Sinneswahrnehmungen sich befassen. Die Prinzipien der Arithmetik und Geometrie unterscheiden sich nun also von denen der anderen Wissenschaften; die Voraussetzungen eben dieser Wissenschaften sind zwar voneinander verschieden nach dem oben bezeichneten Unterschied, stehen aber auch wieder in enger Beziehung zueinander, weshalb auch die bewiesenen 20 Lehrsätze ihnen teils gemeinsam sind, teils der einen oder anderen besonders eigen. Denn der Satz, daß jedes Verhältnis ausdrückbar ist, ist der Arithmetik allein eigen, keineswegs auch der Geometrie; denn in ihr gibt es auch irrationale Werte³²). Und daß die Differenzen von Quadraten an eine untere Grenze gebunden sind, ist der Arithmetik eigen; denn in der Geometrie gibt es eine kleinste Größe überhaupt nicht³³). Hingegen ist der Geometrie vorbehalten die Lehre von den Lagen, denn die Zahlen haben keine Lage, von den Berührungen, denn nur bei kontinuierlichen Größen gibt es Berührung, von den irrationalen Teilungen — denn wo die Teilung bis ins Unbegrenzte geht, da hat auch das Irrationale seinen Platz³⁴). Beiden gemeinsam ist die Lehre von den Teilungen, wie sie EUKLID im 2. Buche³⁵) entwickelt*) mit Ausnahme der Teilung der Geraden 33

müssen miteinander vertauscht werden und es ist zu lesen, wie ich oben übersetze: *ἢ τε ἀπλουστέραις ἀρχαῖς χρωμένη τῆς ἐξ ποικιλωτέρων ὑποθέσεων ὀρμημένης*. Auch BAROCIUS hat so gelesen und dieser Text allein entspricht der sonstigen Auffassung des PROCLUS, wie sie sich schon aus Seite 1 u. 2 des Kommentars ergibt.

*) Das Komma nach *παράδιδωσι* in FRIEDLEINS Text ist überflüssig und irreführend, da mit *πλὴν* eine Einschränkung zum Relativsatz folgt. Der Autor will

nach dem goldenen Schnitt³⁶). Von diesen gemeinsamen Lehrsätzen werden die einen von der Geometrie auf die Arithmetik übertragen, andere umgekehrt von der Arithmetik auf die Geometrie, andere endlich kommen beiden in gleicher Weise zu und leiten sich her von der gesamten mathematischen Wissenschaft. Denn die Vertauschung und Umkehrung der Proportionen und deren Additions- und Subtraktionsfälle*) sind auf diese Weise beiden gemeinsam. Die Lehre von der Kommensurabilität behandelt zunächst die Arithmetik, an zweiter Stelle erst die Geometrie, dem Beispiel jener folgend³⁷).

- 10 Deshalb wird auch bei beiden Disziplinen**) das Kommensurable als das bestimmt, was ein Verhältnis zueinander hat wie Zahl zu Zahl, da eben die Kommensurabilität vorzugsweise in Zahlen besteht. Denn wo eine Zahl, da ist auch das Kommensurable und wo das Kommensurable, da ist auch die Zahl. Die Dreiecke sodann behandelt zuerst die Geometrie, ebenso die Vierecke, in analoger Weise hierauf die Arithmetik, die sie von ihr empfängt. Denn in den Zahlen sind die Figuren als in ihrem Prinzip beschlossen. Von den Wirkungen also ausgehend, kommen wir zu ihren Ursachen, die in den Zahlen liegen. Und zuweilen sehen wir unverändert dieselben
- 20 Akzidentien, wie z. B. daß jedes Vieleck sich in Dreiecke zerlegen läßt, zuweilen aber geben wir uns mit Annäherungswerten zufrieden. Z. B. können wir in der Geometrie ein Quadrat doppelt so groß als ein anderes finden, in der Arithmetik aber nicht. Wenn nun die Differenz bloß 1 beträgt, so bezeichnen wir die eine Quadratzahl als doppelt so groß wie die andere; so ist das Quadrat von 7 doppelt so groß wie von 5, vermindert um die Einheit³⁸).

- Wir haben diesen Punkt bei der Darstellung der inneren Verwandtschaft der Prinzipien der beiden Wissenschaften und ihrer Verschiedenheit weiter ausgeführt. Es ist nun eben die Aufgabe
- 30 des Mathematikers, zu erkennen, aus welchen gemeinsamen Prinzipien sich die gemeinsamen und aus welchen sich die besonderen
- 32 Lehrsätze herleiten, und so das, was zur Geometrie gehört und nicht

sagen, daß EUKLID die Definition vom goldenen Schnitt erst später, im 6. Buch gibt, die anderen Teilungen aber im 2. Buch der „*Elemente*“ behandelt.

*) Es handelt sich um verschiedene Abwandlungsmöglichkeiten einer bestimmten Proportion, worüber PAULY-WISSOWA unter *Arithmetika* § 23 zu Rate zu ziehen wäre.

**) Mit dem Dativ *τούτω* im gr. Text ist nichts zu machen. Ich lese mit GRYNÆUS *τόντων* und fasse dies wie *τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν* Zeile 19 derselben Seite oder *τῶν κοινῶν θεωρημάτων* 60, 19.

dazu gehört, zu scheiden und das eine dieser und das andere jener Wissenschaft zuzuweisen. Nun aber wollen wir wieder von vorne beginnen und Ausgangspunkt und Ziel der gesamten Geometrie ins Auge fassen. Denn so werden wir die Ordnung ihres Lehrsystems erkennen*). Da werden wir denn inne werden, daß sie sich erstrecke auf die ganze Welt des Seins und auf alles ihr Augenmerk richte und alle Seinsformen in sich umfasse. In ihrem höchsten und geistigsten Bezirk betrachtet sie das wahrhafte Sein und belehrt in Bildern über die Eigenschaften der göttlichen Ordnungen und die Kräfte der intellektuellen Formen; denn sie hat die Begriffe davon in ihren 10 eigenen Schauungen und zeigt, welche Figuren den Göttern, welche den höchsten Wesen, und welche den seelischen Substanzen zukommen. Auf der mittleren Erkenntnisstufe entwickelt sie den Sinngehalt des vermittelnden Denkens, entfaltet und betrachtet seine Mannigfaltigkeit und läßt seine Gegenstände und Befunde erkennen, wie auch die inneren Beziehungen und Verschiedenheiten. Von ihm ausgehend umschließt sie auch die Phantasiegebilde der Figuren mit festen Grenzen und führt sie zurück auf das wesenhafte Sein der Ideen. Auf dem dritten Erkenntnisweg aber untersucht sie die Natur und lehrt, wie die Seinsformen der sichtbaren Elemente und der 20 Kräfte in ihnen ursächlich in ihren Begriffen antizipiert sind. Denn sie schließt in sich die Abbilder aller intelligibeln Seinsgattungen und die Urbilder der Sinnenwelt; ihr wesentliches Sein aber beruht auf den Formen des vermittelnden Denkens; und durch den in der Mitte liegenden Bereich steigt sie auf und nieder zur Sphäre des gesamten Seins und Werdens. Indem sie über die Welt des Seins immer vom Standpunkt der Geometrie aus philosophiert, faßt sie bei der gesamten Behandlung der Tugenden die Abbilder der intellektuellen, der seelischen und der physischen Tugenden zusammen und stellt der Reihe nach alle staatlichen Ordnungen dar und zeigt, 30 in sich beschlossen, ihre mannigfachen Umwandlungen; und hierbei entfaltet sie eine immaterielle Erkenntnistätigkeit. Indem sie sich aber mit der Materie befaßt, begründet sie von sich aus eine Menge von Wissenschaften wie die Vermessungskunde, die Mechanik, die Optik und nützt damit auch dem menschlichen Leben. Denn sie schuf Kriegsmaschinen und feste Städteburgen mit deren Hilfe, vermittelte die Erkenntnis des Kreislaufs der Jahreszeiten und der 37

*) 61, 27 ist natürlich *θεασόμεθα* zu lesen, nicht *θεασόμεθα*.

- geographischen Lage, sie lehrte die Messung der Wegstrecken zu Lande und zu Wasser, konstruierte die mancherlei Wagen, durch die sie für die Gemeinden die zahlenmäßige Gleichheit genau bestimmte, sie machte die Ordnung des Weltalls durch Bilder ersichtlich und über vieles, was vordem den Menschen unglaublich erschien, klärte sie diese auf und lieferte zuverlässige Beweise dafür³⁹). So wird von HIERON aus Syrakus bezüglich des ARCHIMEDES eine Anekdote überliefert, damals als er den Dreimaster erbaute und Anstalten traf, ihn dem PTOLEMAIOS, dem König von Ägypten, zu schicken.
- 10 Nachdem nämlich alle Syrakusaner zusammen das Schiff nicht ins Meer ziehen konnten, bewirkte ARCHIMEDES, daß HIERON allein es fertig brachte. Da sprach HIERON verblüfft: Von diesem Tage an muß man den Worten des ARCHIMEDES in allem glauben. Dasselbe soll auch GELON gesagt haben, als ARCHIMEDES ohne vorherige Auflösung der Krone, die jener hatte verfertigen lassen, das Gewicht eines jeden der veramalgamierten Stoffe einzeln ermittelte⁴⁰). Solches findet sich bei vielen älteren Autoren verzeichnet, die es sich zur Aufgabe setzten, die Geometrie zu preisen, und deshalb haben wir aus einer Menge von Einzelheiten nur einiges wenige herausgegriffen
- 20 und hierhergesetzt, um den unbedingten Nutzen der Kenntnis der Geometrie nachzuweisen; von ihrer Entwicklung in dieser Weltperiode ist nunmehr zu sprechen.

Es sagte*) nun freilich der gefeierte ARISTOTELES, dieselben Anschauungen kehrten häufig wieder bei den Menschen in bestimmten Weltperioden; und nicht in unserer Zeit oder der Zeit derer, die wir kannten, hätten die Wissenschaften zum ersten Male ihren Ursprung genommen, sondern auch in anderen Perioden (unmöglich zu sagen, wie viele ihrer schon waren und noch sein werden**), seien sie aufgeblüht und wieder verschwunden. Da wir aber den Ursprung der Künste

30 und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu erforschen haben, so sagen wir, die meisten berichten, daß bei den Ägyptern die Geometrie zuerst ausgebildet wurde und ihren Ursprung mit den Landvermessungen nahm⁴¹). Sie waren ihnen notwendig wegen

34 des Steigens des Nils, der die den einzelnen zustehenden Grenzen

*) Im Griechischen ist jedenfalls statt *εἰπών* mit GRYNÆUS *εἶπε* zu setzen.

**) Der Sinn ist klar, doch will der griechische Text in einer klaren und glatten Konstruktion nicht aufgehen. Ein Vergleich mit ARISTOTELES führt zu keinem Ergebnis, da nur frei zitiert wird; gedacht ist hier an *περὶ οὐρ.* A, 3. 270 b 19. 20 und *Meteor.* I, Kap. 3.

unkenntlich machte. Und es ist nicht zu verwundern, daß das praktische Bedürfnis zur Schaffung dieser und der anderen Wissenschaften führte, da alles im Bereich des Werdens vom Unvollkommenen zum Vollkommenen sich entwickelt. Von der Sinneswahrnehmung möchte also füglich der Übergang zum logischen Denken und von diesem zur reinen Geistesschau erfolgen. Wie nun bei den Phönikern aus Handel und Verkehr die Anfänge der genauen Kenntnis der Zahlen sich ergaben, so wurde auch bei den Ägyptern aus dem bezeichneten Grunde die Geometrie geschaffen⁴²⁾. THALES aber verpflanzte zuerst, nachdem er nach Ägypten gekommen, diese Wissenschaft nach 10 Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen; zu vielen anderen legte er für die Späteren den Grund. Sein Verfahren war dabei teilweise mehr allgemeiner Art, teilweise mehr auf die Sinnen- dinge ausgerichtet. Nach ihm war es MAMERTIOS*), der Bruder des Dichters STESICHOROS, der nach der Überlieferung sich mit dem Studium der Geometrie befaßte, und HIPPIAS von Elis berichtete, daß er wegen der Geometrie zu Ruhm gelangte; ihnen folgte PYTHAGORAS, der ihren wissenschaftlichen Betrieb in das System der höheren Bildung einbezog^{**)}. Seine Untersuchungen galten ihren obersten Prinzipien, und seine theoretischen Forschungen bewegten sich frei 20 von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens. Er war es auch, der die Lehre von den Proportionen^{***)} (den irrationalen Werten?) und die Darstellung von den fünf Weltkörpern schuf. Nach diesen befaßte sich ANAXAGORAS von Klazomenä mit vielen 24

*) So hieß der Mann, wie wir jetzt aus den Auszügen aus EUDEMOS in den *Variae collectiones*, Anhang, HERO ALEXANDRINUS, geom. 253, 2 HULTSCH wissen (PAULY-WISSOWA unter Geometrie § 2).

**) Die Übersetzung BRETSCHNEIDERS (S. 28) und CANTORS I, 137: Nach diesen verwandelte PYTHAGORAS die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft... ist sehr ungenau. Bekanntlich haben die Pythagoreer die Grundlagen der höheren Bildung in der Antike und im Mittelalter geschaffen. PROCLUS will dann besagen, PYTHAGORAS habe das Studium der Geometrie neben Arithmetik, Astronomie und Musik in das Quadrivium einbezogen.

***) Ich ziehe aus allgemeinen Erwägungen die Lesart vor, für die auch DIELS, Fr. d. Vors³. I, S. 28 in seinem PROCLUSZitat sich entscheidet. Beide Lesarten ἀλόγων und ἀναλόγων geben einen vernünftigen, für PYTHAGORAS zutreffenden Sinn. Die weitgehende Skepsis PYTHAGORAS gegenüber, wie sie besonders auf ZELLER zurückzuführen ist und noch in HEIBERGS 1925 erschienener Gesch. d. Math. im Altertum zutage tritt (S. 2. 3), ist erfreulicherweise fallengelassen in dem von HULTSCH geschriebenen Artikel *Arithmetika* in PAULY-WISSOWA (s. § 23 u. 30).

Problemen der Geometrie und dann, wenig jünger als ANAXAGORAS, OINOPIDES von Chios. Von beiden bemerkt PLATON in den „*Rivalen*“, sie seien wegen ihrer mathematischen Kenntnisse berühmt geworden. Nach diesen waren HIPPOKRATES von Chios, der Erfinder der Mönchchenquadratur, und THEODOR VON KYRENE, namhafte Fachvertreter. Denn HIPPOKRATES begegnet uns in der Geschichte als erster Verfasser eines Elementarbuches. Auf sie folgte PLATON, dessen eifrigem Studium es zu verdanken ist, daß die anderen mathematischen Wissenszweige*) und besonders die Geometrie den größten Aufschwung nahmen. Er**) hat ersichtlich seine Schriften mit mathematischem Gedankengut ganz und gar durchsetzt und geht allenthalben darauf aus, in den Philosophiebeflissenen das Staunen über diese Dinge hervorzurufen. In dieser Zeit lebten auch der Thasier LEODAMAS, ARCHYTAS von Tarent und THEAITETOS von Athen, von denen die Lehrsätze vermehrt und in ein den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechenderes System gebracht wurden. Jünger als LEODAMAS ist NEOKLEIDES und dessen Schüler LEON, die den Wissensstand ihrer Vorgänger beträchtlich erweiterten, so daß LEON ein in Hinsicht auf Reichtum und Brauchbarkeit der Beweise gediegenes Elementarbuch verfassen und auch genaue Bestimmungen dafür geben konnte, wann die Lösung einer gestellten Aufgabe möglich ist und wann nicht. EUDOXOS von Knides sodann, wenig jünger als LEON und ein Freund von PLATONS Schülern, hat als erster die Zahl der sogenannten allgemeinen Lehrsätze vermehrt, zu den drei Proportionen drei weitere hinzugefügt und die Lehre von der Teilung der Geraden, die PLATON grundgelegt hatte, in mehreren Sätzen weitergeführt, wobei er sich auch der analytischen Methode bediente⁴³⁾.

*) BRETSCHNEIDER (S. 29) faßt $\tau\acute{\alpha}\ \tau\epsilon\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha\ \mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ im weiteren Sinne = die anderen Wissenschaften und CANTOR (S. 204) behauptet gar, erst bei den Peripatetikern habe das allgemeine Wort die besondere Bedeutung bekommen, welche wir ihm gegenwärtig noch beilegen, und habe fortan Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik umfaßt. Das ist ein Irrtum, der allein schon durch den alten Namen der Pythagoreer $\text{o}\acute{\iota}\ \acute{\alpha}\nu\theta\ \tau\acute{\omega}\nu\ \mu\alpha\theta\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$ oder $\text{o}\acute{\iota}\ \mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\iota$ widerlegt wird. Ich verweise nur auf das umfangreiche Fragment aus ARCHYTAS, das bei DIELS I, 330, 34 ff. nachzulesen ist. Gerade auf die Pythagoreer geht ja nach diesem Fragment die Einrichtung des eben von CANTOR genannten Quadriviums zurück und es ist ohne weiteres klar, daß in diesem Kreise mit seinem formalen Forschungsobjekt der Zahl als dem Wesen der Dinge der ursprünglich weite Begriff $\tau\acute{\alpha}\ \mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ die engere Bedeutung Mathematik annehmen mußte.

**) Das sinnlose $\delta\epsilon\sigma\pi\omicron\nu$ ändere ich mit A. in $\delta\sigma\pi\epsilon\rho$.

AMYNTAS*) von Heraklea, ein Freund PLATONS, MENAICHMOS, Schüler des EUDOXOS, der auch mit PLATON gleichzeitig war, und dessen Bruder DEINOSTRATOS bauten das ganze System der Geometrie noch vollkommener aus. THEUDIOS ferner aus Magnesia war hervorragend auf dem Gebiete der Mathematik und der anderen Wissenschaften. Denn er brachte die Elementarlehre in ein geordnetes System und gab vielen definitionsartigen Bestimmungen eine allgemeinere Fassung**) (a. La: vielen speziellen Sätzen). Auch der Kyzikener ATHENAIOS***), der derselben Zeit angehört, machte sich durch seine Leistungen auf dem Gebiete der anderen mathematischen Disziplinen und besonders der Geometrie einen Namen. 10
 All diese lebten miteinander in der Akademie und betrieben gemeinsam ihre Forschungen. HERMOTIMOS aber von Kolophon entwickelte die Ergebnisse des EUDOXOS und THEAITETOS weiter⁴⁴⁾, leistete einen beträchtlichen Beitrag zu den „Elementen“ und schrieb einiges über (geometrische) Örter. PHILIPPOS von Medma†) ferner, PLATONS Schüler und von diesem zum Studium der Mathematik angeregt, betrieb seine Forschungen nach Anleitung PLATONS und stellte sich nur solche Aufgaben, von denen er sich eine Förderung der platonischen Philosophie versprach. Bis auf diesen herab führen die 20
 Geschichtsschreiber die Entwicklung dieser Wissenschaft zurück. Nicht viel jünger als diese ist EUKLID, der die „Elemente“ zusammenstellte, viele Ergebnisse des EUDOXOS zusammenfaßte, viele des THEAITETOS zum Abschluß, und die weniger stringenten Beweise seiner Vorgänger in eine unwiderlegbare Form brachte. Er lebte zur Zeit des ersten PTOLEMAIOS. Denn ARCHIMEDES, der nach dem ersten PTOLEMAIOS lebte ††), erwähnt EUKLID^{44a)} und erzählt auch in der Tat, PTOLEMAIOS habe ihn einmal gefragt, ob es nicht für die Geometrie 28

*) Diese richtigere Namensform entnehme ich dem Artikel THEUDIOS in PAULY-WISSOWA. Vgl. in HERC. ed. BÜCHELER col. 6).

**) Zu den beiden Lesearten, deren Unterschied wohl nicht groß ist, siehe die Ausführungen unter THEUDIOS in PAULY-WISSOWA.

***) BRETSCHNEIDER (S. 30) übersetzt: KYZIKINOS aus Athen, CANTOR läßt es dahingestellt sein, ob der Mann KYZIKENOS oder ATHENAIOS hieß. Beachtet man, daß gerade in diesem Katalog der Ortsname immer den Artikel bei sich hat, so kann es nicht zweifelhaft sein, daß der Mann ATHENAIOS hieß.

†) Nicht *Μενδαῖος*, sondern *Μεδμαῖος* ist zu lesen, s. PAULY-WISSOWA unter PHILIPPOS 42, Sp. 2352.

††) Die richtige Übersetzung dieser lange umstrittenen Stelle hat HEIBERG gegeben, Literargeschichtliche Studien über EUKLID, S. 26.

einen kürzeren Weg gebe als die Lehre der „*Elemente*“. Er aber antwortete, es führe kein königlicher Weg zur Geometrie. Er ist jünger als PLATONS Schüler, aber älter als ERATOSTHENES und ARCHIMEDES; denn diese sind Zeitgenossen, wie ERATOSTHENES irgendwo sagt. Er gehörte zur platonischen Schule und war mit dieser Philosophie vertraut, weshalb er auch als Ziel der gesamten Elementarlehre die Darstellung der sogenannten platonischen Körper⁴⁵⁾ aufstellte. Von ihm stammt auch noch eine große Menge anderer mathematischer Schriften, alle ausgezeichnet durch bewundernswerte Exaktheit
 10 und wissenschaftliche Spekulation, so z. B. seine „*Optik*“ und „*Katoptrik*“ (Lehre von der Lichtreflexion), seine „*Elementarlehre der Musik*“, ferner sein Buch „*Über die Teilung der Figuren*“⁴⁶⁾. Besondere Bewunderung verdient bei seinem Elementarbuch der Geometrie der systematische Aufbau, und die Auswahl der für die „*Elemente*“ geschaffenen Lehrsätze und Konstruktionsaufgaben. Denn nicht, was man überhaupt anführen konnte, sondern was zur grundlegenden Einführung diente, nahm er auf; ferner die verschiedenen Arten der Schlußfolgerungen, die teils von den Prinzipien ihre Gültigkeit gewinnen, teils auf Beweisen basieren, alle aber unwiderlegbar,
 20 exakt und für die Wissenschaft geeignet sind. Dazu kommen noch alle dialektischen Methoden: Die trennende beim Auffinden der Figuren, die definierende bei den Wesensbestimmungen, die beweisende bei dem Fortschreiten von den Prinzipien zu den in Frage stehenden Sätzen, die analytische bei der Rückkehr von diesen zu den Prinzipien⁴⁷⁾. Auch die genaue Darlegung der verschiedenen Arten der Umkehrungen, der einfacheren und komplizierteren, kann man in diesem Werke zur Genüge kennen lernen⁴⁸⁾, ferner auch, welche Umkehrungen vollständig möglich sind, welche als Ganzes von Teilen und umgekehrt, und welche als Teile von Teilen*).
 30 Weiterhin betonen wir den Zusammenhang der gefundenen, die systematische Ordnung der leitenden und der folgenden Sätze, die Eindringlichkeit, mit der er alles im einzelnen darlegt. Oder merkst du nicht, daß du abirrst vom Pfade der Wissenschaft und in den entgegengesetzten Irrtum und in Unklarheit dich verstrickst, wenn du irgend etwas Beliebiges hinzufügst oder hinwegnimmst? Da aber
 36 vieles den Anschein der Wahrheitsliebe und wissenschaftlichen

*) Die Lehre von den Umkehrungen (*ἀντιστροφαι*) entwickelt PROCLUS in der 6. Proposition (S. 252).

Konsequenz erweckt, aber weg von den Prinzipien auf Abwege führt und oberflächlichere Naturen täuscht, so gab er auch Methoden zur scharfen Erkenntnis solcher Irrwege an die Hand⁴⁹⁾. Im Besitze dieser werden wir imstande sein, die Anfänger in dieser Wissenschaft in der Auffindung der Fehlschlüsse zu schulen und selbst vor Täuschungen bewahrt bleiben. Die Schrift, in der er uns die Befähigung hierzu vermittelt, betitelte er „*Fehlschlüsse*“⁵⁰⁾. Er zählt uns darin der Reihe nach ihre verschiedenen Arten auf und schult bei jeder durch mannigfache Untersuchungen unseren Geist, indem er dem Falschen das Wahre gegenüberstellt und dem Täuschungsmanöver 10 die Widerlegung anpaßt. Diesem Werke eignet also eine reinigende und geistschulende Wirkung; das Elementarbuch aber bietet eine exakte und vollkommene Anleitung zur wissenschaftlichen Behandlung der geometrischen Probleme.

Welches ist nun Zweck und Ziel dieses Werkes, wird vielleicht mancher fragen? Dem würde ich antworten, daß man einen doppelten Zweck zu unterscheiden habe: In Hinsicht auf den Gegenstand der Untersuchung und auf den Studierenden. Hinsichtlich des Gegenstandes selbst sagen wir: Die ganze Wissenschaft des Mathematikers hat es mit den Weltkörpern⁵¹⁾ zu tun. Sie geht aus von den einfachen 20 Figuren und endet mit den komplizierten Verbindungen derselben, behandelt sie einzeln und getrennt voneinander und belehrt über ihr „Einbeschriebensein“ in eine Kugel und über ihre wechselseitigen Verhältnisse zueinander. Deshalb wollten auch manche den Zweck der einzelnen Bücher auf das Weltall beziehen und schilderten den Nutzen, den sie für die Betrachtung des Alls gewähren. Wenn wir aber das Ziel für den Studierenden feststellen, so werden wir sagen, daß eben das, was der Titel besagt, also eine grundlegende Einführung, ihm geboten sei und eine vollendete Ausbildung des Geistes der Studierenden für den gesamten Betrieb der Geometrie. Denn davon 30 ausgehend werden wir auch die übrigen Teile dieser Wissenschaft uns aneignen können; ohne sie aber ist es uns unmöglich, die in ihr beschlossene Mannigfaltigkeit der Probleme in vollem Umfang zu erfassen, und es entzieht sich uns die Erkenntnis der anderen Wahrheiten. Denn die grundlegendsten und einfachsten Lehrsätze, die aufs engste verwandt sind mit den ersten Voraussetzungen, sind hier zu einem vollkommenen System zusammengeschlossen, und die Beweise der anderen Sätze stützen sich auf diese als auf die einleuchtendsten und gehen von ihnen aus. So ist es denn auch klar 39

ersichtlich, daß ARCHIMEDES in seinen Werken über die Kugel und den Zylinder^{51a}), ferner APOLLONIOS und alle übrigen, der Beweise dieses Werkes als allgemein anerkannter Prinzipien sich bedienen.

Das also ist sein Zweck und Ziel, die Studierenden einzuführen in den gesamten Bereich unserer Wissenschaft und die gesonderte Darstellung der Weltkörper zu lehren. Damit wir aber unsere Untersuchung auch auf den Titel des Werkes ausdehnen, so sei die Frage gestellt nach dem Sinn eben dieses Wortes „*Stoicheiosis*“ und des Wortes „*Stoicheion*“, von dem *Stoicheiosis* sich herleitet. Man ist
 10 nun gewöhnt, die einen von den Lehrsätzen Elemente zu nennen, die anderen elementarhaft; eine dritte Gruppe scheidet man aus dem Geltungsbereich dieser aus. *Elemente* nennt man jene Sätze, deren Betrachtung sich auswirkt auf die Erkenntnis der anderen, und von denen aus die Lösung der bei diesen vorhandenen Schwierigkeiten gewonnen wird. Denn wie die geschriebene Sprache grundlegende, einfachste und unteilbare Elemente kennt, die wir Buchstaben nennen, und wie jedes Wort und jeder Satz aus diesen besteht, so gibt es auch in dem Gesamtbereich der Geometrie gewisse Sätze von
 20 überragender Bedeutung, die den Rang von Prinzipien beanspruchen gegenüber den daraus sich ergebenden Folgerungen, einen umfassenden Geltungsbereich haben und die Beweise für viele Akzidentien ermöglichen; und diese nennt man eben Elemente. *Elementarhaft* aber sind jene Sätze, deren Bedeutung sich auf mehrere andere erstreckt, die einfach sind und interessant, aber nicht den Rang von Elementen beanspruchen können, weil ihre Erkenntnis keinen inneren Bezug hat auf das gesamte Gebiet der Wissenschaft, wie z. B. der Satz, daß in Dreiecken die von den Winkeln (Ecken) auf die Seiten gefällten Lote in *einem* Punkte zusammenfallen (Höhensatz). Was
 30 aber für eine umfassendere Erkenntnis belanglos ist und nicht den Charakter eines gescheiten und interessanten Gedankens aufweist, das fällt außer den Geltungsbereich auch der elementarhaften Sätze.

Wiederum spricht man von Element in doppeltem Sinne, wie MENAICHMOS sagt. Denn das Grundlegende ist Element für das Grundgelegte, wie z. B. das 1. Buch bei EUKLID die Grundlage ist für das zweite und für das fünfte das vierte. So wird man vieles als wechselseitige Grundlage voneinander bezeichnen können; denn die grundlegenden Beziehungen sind wechselseitig. So wird aus der Tatsache, daß die Außenwinkel der geradlinigen Figuren 4 Rechte
 39 betragen⁵²), die Zahl der Rechten für die Innenwinkel erwiesen und

umgekehrt. In diesem Sinne ist das Element eine Art Hilfssatz. In anderem Sinne bezeichnet man als Element das Einfachere, in das das Zusammengesetzte aufgelöst wird. In diesem Sinne wird man nicht alles als Element von allem bezeichnen können, sondern das Ursprünglichere als Element dessen, was als Folgerung zu bewerten ist. So sind die Postulate die Elemente der Lehrsätze. In diesem Sinne wurden auch die „*Elemente*“ bei EUKLID zusammengestellt, die der Planimetrie und die der Stereometrie. So haben auch auf dem Gebiet der Zahlenkunde und der Astronomie viele Elementarbücher geschrieben.

10

Es besteht da nun aber in jeder Wissenschaft eine Schwierigkeit in der rechten Auswahl und Ordnung der Elemente, von denen alles andere abgeleitet, und auf die es wieder zurückgeführt wird. Die sich damit befaßten, konnten teils mehr, teils weniger Stoff zusammentragen. Die einen faßten die Beweise kürzer, die anderen zogen das Verfahren endlos in die Länge; die einen gingen dem Absurditätsverfahren⁵³⁾, die anderen dem Analogieschluß aus dem Wege; wieder andere ersannen Sicherungen gegen diejenigen, die die Prinzipien zu entkräften suchten, kurzum, es wurden von den einzelnen Autoren viele Methoden des Elementarunterrichtes entwickelt. Es muß aber ein solches Werk frei sein von allem überflüssigen Ballast: Denn das ist hinderlich beim Studium; es muß alles in Hinsicht auf den geschlossenen Zusammenhang des Gegenstandes auswählen: Denn das fördert am meisten die Erkenntnis; auf Klarheit zugleich und Kürze muß es sorgfältig bedacht sein: Denn das Gegenteil davon verdunkelt unser Denken; es muß großes Gewicht legen auf die zusammenfassende Formulierung der Lehrsätze innerhalb weitumschriebener Grenzen: Denn alles, was den Unterricht auflöst in Kleinigkeiten und Schnitzel, erschwert die Erkenntnis. In jeder dieser Beziehungen möchte man finden, daß das Elementarbuch des EUKLID den Vorzug verdient vor den übrigen. Denn seine Brauchbarkeit fördert die Wissenschaft von den grundlegenden Figuren; die klare Gliederung aber ist bedingt durch das Fortschreiten vom Einfacheren zum Komplizierteren und den Ausgang der Untersuchung von den Axiomen^{*)}⁵⁴⁾, der umfassende Charakter des Beweis-

20

30

35

*) *κοινὰ ἔννοια* wird gewöhnlich mit „allgemeine Begriffe“ oder „Gemeinbegriffe“ übersetzt; da es sich aber eigentlich nicht um Begriffe, sondern um Urteile und Sätze handelt, vermeide ich hier diesen Ausdruck und ersetze ihn durch die Sache, die gemeint ist.

verfahrens endlich durch das Fortschreiten von den ersten und grundlegenden Sätzen zu den in Frage stehenden Problemen. Denn was er anscheinend übergeht, wird entweder auf die selbe Weise geklärt*), wie z. B. die Darstellung des ungleichseitigen und des gleichschenkeligen Dreiecks, oder hat mit der Auswahl der Elemente nichts zu tun, da es nur ein nicht zu bewältigendes und unübersehbares buntes Allerlei mit sich brächte, wie die Untersuchung der unregelmäßigen irrationalen Größen, denen APOLLONTIOS eine ausführlichere Arbeit widmete, oder es hat seinen Bestand in den dargelegten Gründen, wie bei den mannigfachen Arten der Winkel und Linien. Solches wurde übergangen und fand bei anderen ausführlichere Behandlung; seine Erkenntnis ist abzuleiten aus einfachen Prinzipien. Soviel hatten wir über die gesamte Elementarlehre darzulegen.

Die Übersicht über die gesamte Anlage des Inhalts des Werkes wollen wir in folgender Weise geben. Da wir behaupten, daß diese Wissenschaft, die Geometrie, auf Voraussetzungen beruhe und von bestimmten Prinzipien aus die abgeleiteten Folgerungen beweise — denn nur eine ist voraussetzungslos, die anderen aber empfangen ihre Prinzipien von dieser⁵⁵⁾ —, so muß unbedingt der Verfasser eines geometrischen Elementarbuches gesondert die Prinzipien der Wissenschaft lehren und gesondert die Folgerungen aus den Prinzipien; von den Prinzipien braucht er nicht Rechenschaft zu geben, wohl aber von den Folgerungen hieraus. Denn keine Wissenschaft beweist ihre eigenen Prinzipien und stellt sie zur Diskussion, sondern hält sie für an sich gewiß; sie sind ihr klarer als die Ableitungen; erstere erkennt sie in deren eigenem Licht, die Ableitungen aber durch die Prinzipien. So entwickelt z. B. auch der Naturforscher von einem bestimmten Prinzip ausgehend sein System, indem er die Existenz der Bewegung voraussetzt, ebenso der Arzt und jeder Vertreter der anderen Künste und Wissenschaften**). Wenn aber jemand die Prinzipien und die Ableitungen hiervon in denselben Topf wirft, so richtet er nur Verwirrung an im ganzen Wissensbereich und vermengt, was miteinander nichts zu tun hat. Denn das Prinzip und das davon Abgeleitete sind von Hause aus voneinander gesondert.

*) Der Zusatz FRIEDLEINS τοῖς εἰρημένους ist unnötig, da der Sinn auch so klar ist.

**) Das Fragezeichen FRIEDLEINS nach ἐπιστημῶν ist belanglos. Die kleine Inkonzinnität des Ausdrucks, die hier vorliegt, kann man PROCLUS wohl zutrauen.

Vor allem also galt es, wie gesagt, die Prinzipien zu sondern von den Ableitungen hieraus. Das tut denn auch EUKLID, indem er sozusagen bei jedem Buch und vor jedem Traktat die allgemeinen Prinzipien dieser Wissenschaft voransetzt. Sodann teilt er auch noch die allgemeinen Prinzipien selbst in die Definitionen (*ὁποθέσεις*), die Postulate und die Axiome. Das alles ist nämlich voneinander verschieden, und Axiom, Postulat und Definition sind nicht dasselbe, wie irgendwo der gefeierte ARISTOTELES sagt; wenn vielmehr das, was als Prinzip angenommen wird, auch dem Lernenden einleuchtet und an sich evident ist, so handelt es sich um ein Axiom, wie z. B. 10 bei dem Satz: Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich⁵⁶). Wenn aber der Hörer das Verständnis einer Behauptung als von sich aus einleuchtend nicht schon in sich hat, die Behauptung aber gleichwohl aufgestellt wird und er die Annahme zugibt, dann handelt es sich um eine Definition. Daß z. B. der Kreis eine Figur ist von der und der Beschaffenheit⁵⁷), das tragen wir nicht im vorhinein (*a priori*) und ohne Belehrung als Gemeinbegriff in uns; wenn wir es aber hören, so geben wir es ohne Beweis zu. Wenn aber die Behauptung noch unbekannt ist und die Annahme gleichwohl erfolgt, obwohl der Lernende sie nicht zugibt, dann, sagt 20 er, sprechen wir von einem Postulat, wie z. B. bei dem Satz, daß alle rechten Winkel einander gleich sind⁵⁸). Den Beweis liefern alle diejenigen, die sich viel Mühe gaben mit der Erledigung eines Postulates, da sie überzeugt waren, daß niemand ohne weiteres es zugeben könne. Auf diese Weise sind also nach der Lehre des ARISTOTELES*) Axiom, Postulat und Voraussetzung (Definition) voneinander verschieden. Häufig aber benennen sie all das Voraussetzungen, wie die Stoiker jedes einfache Urteil als Axiom bezeichnen, so daß nach diesen auch die Voraussetzungen Axiome, nach den anderen aber auch die Axiome Voraussetzungen sind. 30

Die Ableitungen aus den Prinzipien hinwiederum zerfallen in Aufgaben (*προβλήματα*) und Lehrsätze (*θεωρήματα*). Erstere begreifen in sich die Konstruktion der Figuren, die Teilungen, das Hinwegnehmen oder Hinzufügen und überhaupt alles, was man mit ihnen vornehmen kann; die letzteren weisen die wesentlichen Akzidentien (Eigenschaften) auf. Wie nämlich die praktischen Wissenschaften nicht ohne Theorie auskommen, ebenso haben die Geistesdisziplinen 37

*) *Anal. post.* I, 76b, 27—34.

die Probleme sich angegliedert in einer der tätigen Erzeugung analogen Weise. Nun forderten schon von den Alten einige für die Gesamtheit den Namen Theoreme, wie die Zunft des SPEUSIPP und AMPHINOMOS. Sie waren der Ansicht, den Geisteswissenschaften gebühre eher der Name Theoreme als Probleme, zumal sie sich mit einem unvergänglichen Gegenstand befaßten. Denn es gibt kein Werden im Bereich des Unvergänglichen, so daß es bei ihnen auch keinen Platz für ein Problem gebe, das das Werden und Schaffen von etwas in Aussicht stelle, das vorher nicht war, wie z. B. die Konstruktion eines gleich-
10 seitigen Dreiecks⁵⁹), oder die Zeichnung eines Quadrates mit gegebener Seite⁶⁰), oder die Lage einer Geraden zu einem gegebenen Punkte⁶¹). Ihnen zufolge ist es also richtiger zu sagen, daß alles ein und dasselbe ist, und daß wir sein Werden nicht in tätiger, sondern in erkennender Weise betrachten, indem wir das ewig Seiende wie ein Wardendes nehmen, so daß wir sagen werden, daß alles im Sinne von Theorem und nicht von Problem zu nehmen sei. Andere wieder wollten den gesamten Komplex als Probleme bezeichnen wie die Mathematikerschule des MENAICHMOS. Die Aufgabe sei aber zweifach:
20 Bald gelte es, etwas Gesuchtes ausfindig zu machen, bald ein bestimmtes Objekt herzunehmen und zu untersuchen, was*) es ist, oder von welcher Beschaffenheit, oder was mit ihm vorgeht, oder in welchem Verhältnis es steht zu einem anderen. Beide haben recht. Die Schule des SPEUSIPP: Denn die Probleme der Geometrie sind von anderer Art wie die der Mechanik; diese nämlich sind sichtbar, haben ein Werden und mannigfache Veränderungen, ebenso aber auch die des MENAICHMOS; denn ohne Eingehen in die Materie gibt es kein Finden von Lehrsätzen, ich meine aber die intelligible Materie. Indem also die Ideen in sie eingehen und sie gestalten, sagt man füglich mit Recht, sie glichen dem Wardenden. Denn die Tätigkeit unseres
30 Geistes und die Emanation seiner Ideen bezeichnen wir als den Ursprung der Figuren in unserer Phantasie und der Vorgänge mit ihnen. Denn hier ist der Ort für die Konstruktionen und die Teilungen, die Lagen, die Flächenanlagen, die Hinzufügungen und Wegnahmen; im Geiste aber besteht alles ohne Werden und ohne alle Veränderung.

Es gibt nun aber in der Geometrie sowohl Probleme wie Theo-
36 reme; weil aber die Theorie das Überwiegende in ihr ist, wie in der

*) Es ist offenbar $\tau\acute{\iota}$ statt $\tau\acute{\iota}\varsigma$ im Griechischen zu lesen. Vgl. FRIEDLEIN, S. 80, Z. 23.

Mechanik das praktische Tun, so haben alle Probleme auch Anteil an der Theorie, aber nicht umgekehrt; denn die Beweise insgesamt sind das Werk der Theorie. Alle Sätze in der Geometrie aber, die auf die Prinzipien folgen, werden auf Grund von Beweisen angenommen, so daß das Theorem allgemeinerer Art ist. Aber nicht alle Theoreme bedürfen der Probleme, sondern es gibt deren, die in sich den Beweis für die gestellte Frage enthalten. Diejenigen aber, die Theorem und Problem scheiden, sagen, jedes Problem lasse von den Prädikaten über die betreffende Materie*) jedes einzelne zu und das Gegenteil; jedes Theorem aber lasse nur das Prädikat an sich zu, nicht aber auch 10 das Gegenteil. Unter ihrer Materie verstehe ich dabei die Gattung, die zur Untersuchung steht, wie z. B. das Dreieck oder Viereck oder den Kreis; unter dem ausgesagten Akzidens aber das wesentliche Akzidens, wie z. B. die Gleichheit oder die Teilung oder die Lage oder etwas anderes derartiges. Wenn nun jemand die Aufgabe so formuliert: In einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck einzuzeichnen⁶²⁾, so spricht er von einem Problem; denn es ist möglich, auch ein nichtgleichseitiges in ihn zu zeichnen. Und wiederum: Über einer gegebenen, genau bestimmten Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren⁶³⁾, ist gleichfalls ein Problem; denn es ist möglich, auch 20 ein nichtgleichseitiges zu konstruieren. Wenn aber jemand den Satz vorlegt, daß die Basiswinkel von gleichschenkeligen Dreiecken gleich sind⁶⁴⁾, dann ist zu sagen, daß er ein Theorem vorlegt; denn es ist unmöglich, daß die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks nicht gleich seien. Wenn daher jemand in der Formulierung, als handle es sich um ein Problem, sagen wollte, es sei in einen Halbkreis ein rechter Winkel einzuzeichnen, so würde er sich den Ruf eines Laien in der Geometrie zuziehen; denn jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter⁶⁵⁾. Wo es sich also um ein allgemeines Akzidens handelt, das der gesamten Materie eigen ist, da ist von Theoremen zu sprechen. 30 Wo aber kein allgemeines Gesetz vorliegt, das für den ganzen Bereich der betreffenden Materie gilt, da ist ein Problem anzunehmen. Eine gegebene Gerade von bestimmter Länge (Strecke) zu halbieren⁶⁶⁾: Denn es ist auch eine ungleiche Teilung möglich; jeden geradlinigen Winkel zu halbieren⁶⁷⁾: Denn es gibt auch eine ungleiche Teilung; mit einer gegebenen Strecke (als Seite) ein Quadrat zu zeichnen⁶⁸⁾: 36

*) FRIEDLEIN setzt nach $\epsilon\lambda\eta\varsigma$ ein Komma, das aber sinnlos ist und den Zusammenhang zerreißt, da die vorausgehenden Genitive unmittelbar zu $\alpha\upsilon\tau\acute{o}\ \tau\epsilon\ \epsilon\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$ zu beziehen sind.

Denn es ist auch eine Figur, die kein Quadrat ist, möglich, und alles, was von dieser Art ist, hat den Charakter eines Problems. Die Anhänger des ZENODOT aber, der zur Schule des OINOPIDES gehört und ein Schüler ANDRONS ist, schieden das Theorem vom Problem, insofern das Theorem nach dem Akzidens fragt, das ausgesagt wird von dem ihm zugrundeliegenden Gegenstande, das Problem aber nach der Voraussetzung, durch die etwas bedingt ist. Deshalb definierte auch die Schule des POSEIDONTOS das erstere als die Aufgabe, der zufolge untersucht wird, ob etwas
 10 zutrifft oder nicht, das Problem aber als die Aufgabe, bei der untersucht wird, was oder von welcher Beschaffenheit etwas; ist und sie behaupteten, die theoretische Aufgabe müsse man als Aussage formulieren, wie z. B.: In jedem Dreieck sind zwei Winkel größer als der dritte⁶⁹), und: In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich⁷⁰); die problematische hingegen als Frage, z. B. ob man über dieser Strecke ein Dreieck konstruieren kann. Denn es bedinge einen Unterschied, einfach die allgemeine Frage zu stellen, ob es von diesem Punkte zu dieser Geraden eine Senkrechte gibt⁷¹), oder zu untersuchen, welches diese Senkrechte ist.

20 Doch daß ein Unterschied ist zwischen Problem und Theorem, ist aus dem Gesagten klar; daß aber auch die Elementarlehre des EUKLID teils Probleme, teils Theoreme enthält, wird daraus klar werden, daß der Meister selbst im einzelnen am Ende der Beweise bald hinzufügt, „was auszuführen war“, bald „was zu beweisen war“ als Charakteristikum der Lehrsätze*). Freilich findet, wie gesagt, auch in den Problemen ein Beweisverfahren statt; aber bald lohnt der Beweis um der Konstruktion willen: Damit wir nämlich zeigen, daß die vorher gestellte Aufgabe ausgeführt ist, nehmen wir den Beweis zu Hilfe, bald an und für sich die aufgewandte Mühe, da er
 30 imstande ist, die Eigenart des untersuchten Problems vor Augen zu stellen. Bei EUKLID kann man die Beobachtung machen, daß er bald die Theoreme und Probleme miteinander vermengt und sie partienweise verwendet wie im 1. Buche, bald vorzugsweise die einen oder anderen bringt. So enthält das 4. Buch nur Probleme⁷²), das 5. nur
 35 Theoreme⁷³). Soviel sei auch hierüber von uns gesagt.

*) BAROCIUS hat hier einen vollständigeren Text, der eigentlich bei der Breite des PROCLUS zu erwarten wäre. Er übersetzt: *ut haec quidem particula (quod faciendum erat) Problematum, illa vero (quod ostendendum erat) Theorematum sit designatrix.* FRIEDLEIN nimmt dazu im kritischen Apparat nicht Stellung.

Hierauf wollen wir den Zweck des ersten Buches bestimmen und seine Einteilung darlegen, um uns dann der Behandlung der Definitionen zuzuwenden. Die Aufgabe in diesem Buche besteht nun also darin, die Grundlagen der Behandlung der geradlinigen Figuren zu vermitteln. Denn wenn auch der Kreis und seine Behandlung seinem Wesen nach den Vorzug verdient vor dem Wesen und der Erkenntnis der geradlinigen Figuren, so entspricht doch uns, den Unvollkommenen, die sich bemühen, den Geist vom Sinnenbereiche zum Intelligibeln hinzulenken, mehr die Einführung in die geradlinigen Figuren. Denn diese sind dem Sinnenbereich verwandt, 10 der Kreis aber dem Intelligibeln, weil nun einmal das Einfache und Einförmige und Bestimmte der Welt des Seienden zukommt, das Mannigfache aber und das durch die Zahl der umschließenden Seiten unbegrenzt sich Mehrende das unterscheidende Merkmal der Sinnenwelt ist. In diesem Buche also werden die ersten und grundlegendsten geradlinigen Figuren behandelt, das Dreieck und das Parallelogramm; denn in diesen sind als in der Gattung auch die Ursachen der Elemente mit einbegriffen, das gleichschenkelige und das ungleichseitige Dreieck und die aus ihnen zusammengesetzten Figuren, das gleichseitige Dreieck und das Quadrat, aus denen die Figuren der vier 20 Elemente gebildet sind*). Wir werden also die Entstehung des gleichseitigen Dreiecks und des Quadrats finden, des ersteren über, des letzteren mit einer gegebenen Strecke. Das gleichseitige Dreieck ist die unmittelbare Ursache der drei Elemente Feuer, Luft und Wasser, das Quadrat aber von der Erde. Es hängt also der Zweck des ersten Buches mit dem ganzen Werk zusammen und trägt bei zur gesamten Wissenschaft von den Weltelementen. Zugleich führt er aber auch die Studierenden zur Erkenntnis der geradlinigen Figuren, indem er ihre ersten Prinzipien ausfindig macht und in sorgfältiger Untersuchung festlegt. 30

Das Buch zerfällt in drei Hauptteile, und zwar erläutert der erste die Entstehung und die Eigenschaften der Dreiecke in Hinsicht auf Winkel und Seiten, vergleicht sie untereinander und betrachtet sie im einzelnen für sich. Er nimmt z. B. ein Dreieck und untersucht zuweilen von den Seiten her die Winkel, zuweilen von den Winkeln her die Seiten hinsichtlich der Gleichheit und Ungleichheit; dann wieder legt er zwei zugrunde und gelangt auf verschiedenen 37

*) Vgl. dazu PLATON, *Tim.* 53c—56c.

Wegen zu denselben Ergebnissen. Der zweite entwickelt die Lehre von den Parallelogrammen, indem er die Eigenschaften der Parallelen und die Entstehung der Parallelogramme darlegt und auch ihre Akzidentien nachweist. Der dritte endlich erläutert die Verwandtschaft zwischen den Dreiecken und Parallelogrammen in ihren Akzidentien und in beiderseitigen Vergleichen. Denn Dreiecke oder Parallelogramme über den nämlichen und gleichgroßen Basen, wobei sie auch ineinander verflochten sein und nur eine Basis haben <können>, zeigen dieselben Gesetzmäßigkeiten. Ferner werden die
 10 Fragen geklärt, wie zu einem Dreieck ein gleichgroßes Parallelogramm entsteht; und schließlich bezüglich der Quadrate über den Seiten der rechtwinkligen Dreiecke, in welchem Verhältnis das Quadrat über der Hypotenuse steht zu den beiden Quadraten über den Katheten*). Von der Art etwa sei der Zweck des ersten Buches der Elementarlehre und seine Einteilung.

Indem wir nun mit den Einzeluntersuchungen beginnen, schicken wir an die Leser die Mahnung voraus, nicht die abgedroschenen Mätzchen unserer Vorgänger wie Hilfssätze und Konstruktionsfälle**) und anderes derartiges von uns zu fordern. Denn daran
 20 haben wir übergenuß und werden uns daher nur selten damit befassen. Was aber inhaltlich bedeutsam ist und die gesamte Wissenschaft fördert, das wollen wir vorzugsweise berücksichtigen und dabei den Pythagoreern nacheifern, denen die Parole geläufig war: „Mit jeder Zeichnung zeuch voran und scheuch den Krämergeist hintan!“ Sie wollten damit zum Ausdruck bringen, daß man jene Geometrie betreiben muß, die bei jedem Lehrsatz einen Schritt nach oben tut, die Seele emporhebt und ihr nicht gestattet, in die Tiefen der Sinnenwelt herabzusteigen, die gemeine Notdurft des menschlichen Lebens zu befriedigen und im Streben darnach auf die Abkehr von dieser
 30 Welt zu vergessen.

*) Schon BAROCIUS und auch FRIEDLEIN geben in diesem Passus eine den Zusammenhang zerreißende Interpunktion. Es ist klar, daß die beiden mit *καὶ πῶς ἂν γένοιτο* und *καὶ τέλος* eingeleiteten Fragesätze noch unmittelbar abhängen von dem Verbum *ἀναφαίνει*, S. 83, 21, wie schon das *καὶ τέλος* zeigt. Denn mit der Darlegung des pythagoreischen Lehrsatzes schließt in der Tat das erste Buch. Der Satz *καὶ γὰρ ... ὅτι τῶν βάσεων* ist als eine der bei PROCLUS beliebten Parenthesen aufzufassen, die mit den folgenden Fragesätzen nichts zu tun hat.

**) So gebe ich die Ausdrücke *λημμάτια* und *πώσεις* wieder, deren Bedeutung PROCLUS (FRIEDLEIN S. 211. 212) erläutert.

Definitionen

1. Definition: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat*⁷⁴).

Daß der Mathematiker auf dem Wege vom Zusammengesetzten zum Einfachen emporsteigt: Vom dreifach Ausgedehnten zu der dieses begrenzenden Fläche, von der Fläche zu deren Begrenzung, der Linie, von der Linie zu dem aller Ausdehnung baren Punkt, ist schon häufig gesagt worden und jedermann klar. Da aber diese Begrenzungen vielfach wegen ihrer Einfachheit höher zu stehen scheinen als das zusammengesetzte Sein, vielfach aber auch Akzidentien gleichen, die in dem von ihnen Begrenzten ihre Existenz haben, so ist festzustellen, in welchen Seinsgattungen man beide 10 Dinge zu suchen habe. Ich behaupte nun also, daß die immaterielle Welt, die in gesonderten Ideen und Formen west, die den Grund ihres Seins nur in sich selbst tragen, das Sein des Einfacheren als ursprünglicher stets über das zusammengesetzte Sein stellte; und deshalb stehen dem Wesen nach im Nus, in den mittleren und psychischen Ordnungen und auch in den die Körper unmittelbar belebenden Naturen über den begrenzten Wesen die begrenzenden, die ungeteilter, einförmiger und ursprünglicher sind. Denn das Eine in den immateriellen Seinsformen übertrifft an Vollkommenheit das Viele, und das Ungeteilte das, was allenthalben nach außen hervorgeht, und das 20 Begrenzende das, was die Begrenzung von einem Andern empfängt. Was hinwiederum der Materie bedarf, anderen Trägern anhaftet, aus seinem eigenen Wesen heraustritt, auf seine verschiedenen Träger sich verteilt und nur eine äußerliche Einheit bildet, zeigt mehr zusammengesetzte als einfache Wesensformen. Demzufolge behaupten in den Erscheinungen der Phantasie und der Materie der vorgestellten Figuren, sowie in den wahrnehmbaren Schöpfungen der Natur die Ideen des Begrenzten den Vorrang, während die Ideen des Begrenzenden, die sozusagen noch hinzukommen, ihnen nachstehen. Denn damit das Dreidimensionale sich nicht zu einer unbegrenzten Größe 30 ausdehne, sei es im Denken oder in der Sinneswahrnehmung, wurde es auf allen Seiten durch Flächen begrenzt; und damit die Fläche nicht unversehens bis ins Grenzenlose sich verliere, umfaßte und umschloß sie die an ihr entstandene Linie und ebenso die Linie der Punkt, da das Zusammengesetzte dem Einfachen das Sein verdankt. Denn auch das wiederum ist klar, daß bei den (von der Materie) gesonderten Seinsformen die Ideen der Grenzen in diesen selbst 37

liegen und nicht in dem Begrenzten und daß sie, bleibend, was sie sind, die zweitrangigen Grenzen ins Dasein rufen, daß sie aber in den von der Materie nicht getrennten Seinsformen sich dem Begrenzten hingegen und darin festgesetzt haben. So wurden sie gleichsam ein Teil davon und fielen völlig dem Schlechteren anheim, weshalb denn auch in diesem Falle das Ungeteilte mit dem geteilten Sein, und das Flächenlose mit dem Flächenhaften sich verband, und das Begrenzende seine Einfachheit und Unvermischtheit nicht mehr aufrechterhalten konnte. Denn einem anderen zu eigen geworden, 10 unterliegen sie den gleichen Veränderungen wie ihre Träger. Denn die Materie schwächte ihre Vollkommenheit, und die Idee der Fläche höhlt das Fläche aus, und die Idee der Linie schwächt die Ausdehnung in einer Richtung und wird so allenthalben teilbar; die Idee des Punktes aber wird körperhaft und zugleich mit dem von ihm Begrenzten auseinander gezerrt. Denn alle ergossen sich in die Materie, die einen infolge des Denkens in die intelligible, die anderen infolge des Naturprozesses in die sichtbare, ließen sich von ihren Trägern erfüllen und gingen von ihrer eigenen Einfachheit in fremde Zusammensetzungen und Ausdehnungen über.

- 20 Aber wenn im Nus und in der Seele alles ungeteilt und unausgedehnt existiert, wie kam es, daß im Bereich der Materie die einen Wesen im vorhinein, die anderen wegen deren Natur der Teilung anheimfielen? Kennen etwa auch die immateriellen Seinsformen die Reihenfolge von Anfang, Mitte und Ende, und sind die einen Seinsformen einheitlicher, indes die anderen mehr zur Vervielfältigung neigen; halten die einen ihre Kräfte mehr zusammen, indes die anderen zur Trennung drängen; sind die einen der Grenze, die anderen dem Unbegrenzten zugeordnet? In der Tat, wenn auch alles an diesen Prinzipien teilhat, so stammen die Wesen doch teils von dem einen 30 und haben mehr davon abbekommen, teils von dem anderen. Der Punkt also, der im Bereich der Idee völlig unteilbar ist, hat gleichwohl, wenn er auch von der Grenze sein Sein hat, verborgenerweise die unbegrenzte Kraft in sich, der zufolge er alle Ausdehnung erzeugt, und der Ausgang aller Ausdehnungen erschöpft nicht seine unbegrenzte 35 Fähigkeit*); aber der Körper und die Idee des Körpers haben an

*) Es ist klar, daß τὸ μὲν οὖν σημεῖον (88, 3) seinen Gegensatz findet in τὸ δὲ σῶμα (Z. 7). FRIEDLEINS unsinnige Interpunktion zerstört diesen gegebenen Zusammenhang. Der Satz καὶ ἡ πρόοδος (Z. 6) ist keineswegs mit dem folgenden, sondern

dem unbegrenzten Sein in höherem Maße Anteil; deshalb gehört er auch zu den von außen Begrenzten und zu dem, was in seiner ganzen Ausdehnung bis ins Unendliche teilbar ist. Was aber zwischen diesen (dem Punkt und dem Körper) liegt, gehört je nach dem Abstand von den Extremen entweder in den Bereich dessen, was überwiegend an der Grenze Anteil hat, oder an der Unbegrenztheit partizipiert. Deshalb begrenzt es und wird begrenzt: Soweit es sein Sein empfängt von der Grenze, kann es wieder anderes begrenzen; soweit es aber an dem Unbegrenzten teilhat, bedarf es der Begrenzung von fremder Seite. Da nun auch der Punkt eine Grenze ist, wahrt er in der Teilhabe 10 seine eigene Kraft; da er aber verdeckt die Unbegrenztheit besitzt und allenthalben notwendigerweise bei dem von ihm Begrenzten sich findet, so ist er auf zahllose Art in ihm, und da das Unbegrenzte dort die Fähigkeit hatte, das Ausgedehnte hervorzubringen, so war er der Potenz nach in dem Teilhabenden. Denn die Unbegrenztheit war bei jenen Wesenheiten, den intelligiblen meine ich, das erstursächliche Prinzip und die Fähigkeit, das All hervorzubringen; im Bereich der Materie hingegen ist sie unvollkommen und alles bloß in der Potenz. Um es zusammenfassend zu sagen: Was von den Ideen 20 im Bereich der Prinzipien vermöge seiner Einfachheit und Unteilbarkeit übergeordneten Rang hat, wahrt zwar in den Fällen der Teilhabe die seiner Natur eigene Beschaffenheit, steht aber an Vollkommenheit den zusammengesetzten Ideen nach. Denn die Materie kann an diesen bestimmteren Anteil gewinnen und ist dafür mehr vorbereitet als für die einfachsten Prinzipien des Seins. Deshalb gehen nur die Spuren der <sinn-> entleerten Prinzipien in sie ein; das Sich-mitteilen der zweiten und dritten Ideen aber tritt klarer in Erscheinung. Mehr also bekam sie ab von der Wirkursache des Körpers, als von der der Fläche und von dieser <wieder> mehr als von der Idee der Linie, und von dieser mehr als vom Punkt, der all das begrenzt und 30 zusammenhält. Denn die Idee des Punktes ist führend für diese ganze Reihe und vereint alles Geteilte, verbindet und scheidet seine Ausgänge, erzeugt und umschließt alles auf allen Seiten. Deshalb hat auch in den Abbildern alles wieder andere Grenzen; die letzte von allen aber ist der Punkt. 35

mit dem vorausgehenden zu verbinden. In FRIEDLEINS Text wäre also jedenfalls nach *δόναν* (Z. 7) ein Punkt zu setzen, wenn man nicht vorzieht, den Punkt vor *καὶ ἡ πρόοδος* durch ein Komma zu ersetzen und das Sinnganze Z. 3—10 in einer Periode zusammenzufassen.

Daß man aber nicht wie die Stoiker annehmen darf, derartige Begrenzungen, von Körpern meine ich, fristeten nur ein hauchdünnes Dasein im Denken, sondern glauben muß, es gebe derartige Wesen im Seinsbereich und vor ihnen schon ihre schöpferischen Ideen, möchte uns zum Bewußtsein kommen, wenn wir auf das ganze Universum mit seinen Umläufen, den Mittelpunkten der Umläufe und den durch das Ganze hindurchgehenden Achsen hinblicken. Die Mittelpunkte existieren nämlich tatsächlich, da sie die Sphären zusammenhalten, ihre Abstände vereinen, die in ihnen vorhandenen

10 Kräfte binden und an sich ketten; und die Achsen setzen sie (die Sphären) in kreisende Bewegung, drehen sie herum, indes sie <selbst> ruhig an ihrem Platze verharren, und lassen sie um sich kreisen. Und dann die Pole der Sphären, die die Achsen selbst begrenzen und alle Umläufe an sich binden, lassen sie nicht deutlich erkennen, daß die Punkte Träger von schöpferischen und einigenden Kräften sind, die allem Ausgedehnten die Seinsvollendung geben und Ursachen der Einheit und der unaufhörlichen Bewegung sind⁷⁵⁾? Deshalb schreibt ihnen auch PLATON einen ehernen Bestand zu*), womit er das Unwandelbare, Immerwährende, Beharrende und stets sich Gleich-

20 bleibende ihres Wesens andeutet, und sagt, die ganze Weltenspinde drehe sich um sie und umkreise den Einigungspunkt. Andere geheimnisvoller klingende Aussprüche besagen auch, der Weltenschöpfer betreue, auf den Polen sitzend, das Weltall und ziehe mit göttlicher Liebe das All an sich. Die Pythagoreer aber setzten für den Pol den Namen „Siegel der Rhea“ fest, da diese durch ihn die geheimnisvolle und wirksame Kraft der lebenspendenden Gottheit in das Weltall einströmen lasse, für den Mittelpunkt den Namen „Wache des Zeus“, weil ZEUS, der eine Weltenwache im Innern des Alls anlegen wollte, ihr in der Mitte eine feste Stätte anwies. Denn bleibt der Mittel-

30 punkt in Ruhe, so bewahrt auch das All seine unerschütterliche Ordnung und unaufhörliche Umdrehung und es verbleibt alles in Ruhe und wahrt unveränderlich seine Ordnung und die Götter, die den Himmelspol beherrschen, besitzen die Kraft, das Getrennte zu verbinden und das Vielfache zu einen, und diejenigen, denen die Achsen zufielen, bewerkstelligen die Umschwünge in ewigen Kreisen. Und wenn ich meine Meinung sagen soll, so sind die Mittelpunkte

37 aller Sphären und die Pole Sinnbilder der Zaubergötter, die deren

*) *Staat* 616c.

geheimnisvolles und einigendes Symbol darstellen; die Achsen aber sind ein Abbild der Bande aller Seinsordnungen und sie haben selbst die Fähigkeit, alle innerweltlichen Ganzheiten und Umläufe zusammenzuhalten, wie jene (die Zentren) die intellektuellen (Ganzheiten und Umläufe) zusammenhalten; die Sphären selbst aber sind Bilder der schöpferischen Götter, die Anfang und Ende miteinander verknüpfen und von allen anderen Figuren durch Einfachheit, Gleichförmigkeit und Vollkommenheit sich unterscheiden.

Wir haben diesen Punkt weiter ausgeführt, um die Bedeutung der ungeteilten und überhaupt der in der Welt vorhandenen Grenzen 10 zu zeigen, ferner die Wahrheit, daß diese, insoweit sie Bilder der ersten und ursprünglichsten Prinzipien sind, den höchsten Rang im All einnehmen. Denn die Mittelpunkte und Pole sind nicht derartige Grenzen wie die des Begrenzten, sondern sie haben tatsächlich ihre festgegründete Existenz und ihre vollkommen selbständige Wirksamkeit, die sich über den ganzen Bereich des geteilten Seins erstreckt. Die große Mehrzahl aber, die nur dem Beachtung schenkt, was unvollkommen in dem Begrenzten selbst existiert, gesteht ihnen nur ein schwaches Sein zu, und die einen behaupten, nur im Denken erfolge ihre Scheidung von den Sinnendingen, die anderen, sie hätten 20 sonst nirgends außer in unserem Denken ihre Existenz. Da aber die Seinsformen von allen diesen ebenso im intellektuellen Seinsbereich sich finden, wie in den seelischen Begriffsordnungen, wie in der Natur und zuletzt in den Körpern, so müssen wir annehmen, daß sie je nach ihrer Einstufung auch ihre Existenz in den Seinsgattungen haben. Alle existieren *a priori* im Nus, aber in ungeteilter und einförmiger Weise, so daß alle in einer einzigen Seinsform bestehen gemäß der Idee des Punktes, die sie in verborgener und ungeteilter Weise in sich schließt; alle existieren in der Seele, doch in der Seinsweise der Linie, weshalb denn auch TIMAIOS aus den Geraden und 30 Kreislinien die Seele konstruierte: Denn jeder Kreis ist nur eine Linie; ferner in den Naturdingen, aber nach Weise der Fläche, weshalb auch PLATON die physischen Wesenheiten, die die Körper konstituieren, mit Hilfe von Flächen klarlegen wollte und die Auflösung der Körper in Flächen uns unmittelbar zur Ursache der Erscheinungen führte; alle endlich auch in den Körpern, aber körperhaft gemäß dem geteilten Sein der Körper, indem alle Wesensformen in ihnen existieren. Alle insgesamt und jede einzelne kommen also nach ihrer eigenen Stufenfolge zum Vorschein, und der Unterschied kommt von der über- 39

wiegenden Kraft; und in jedem Falle ist der Punkt ohne Teile und unterscheidet sich vom Geteilten durch seine Einfachheit, aber entsprechend dem Absinken des Seienden bekam auch er die entwertete Seinsweise des Geteilten, und zuweilen erhebt er sich völlig darüber vermöge seines Vorrangs als Prinzip, zuweilen ist er ihm gleichgeordnet, zuweilen auch gewann er in ihm ein beiläufiges Sein und hebt seine eigene Unteilbarkeit auf, wie verschlungen von der Teilung der niedrigsten Wesen. Wie also die Einheit in einem Falle die Zahlen erzeugt, in einem anderen sozusagen materielles Substrat der Zahlen
 10 ist, in beiden Fällen aber Prinzip und nicht das, was die Zahl, aber Prinzip auf verschiedene Weise, ebenso ist auch der Punkt einmal konstituierendes Prinzip der <Raum-> Größen, dann wieder in anderer Weise Prinzip und nichts als schöpferische Ursache.

Ist nun der Punkt allein ohne Teile*), oder gilt das gleiche auch vom gegenwärtigen Augenblicke bei der Zeit und von der Einheit bei den Zahlen? Es steht doch wohl dem Philosophen zu, der sich in seinen Darlegungen über den ganzen Seinsbereich ausläßt, alle irgendwie geteilten Dinge und alle ungeteilten Wesen, die Ursachen von ersteren, zu erforschen, während es dem Spezialisten, der seine
 20 Wissenschaft von gewissen bestimmten Prinzipien herleitet und auf diese zurückführt, hingegen um die Ausgänge des Seienden sich nicht bemüht, zukommt, dieses ungeteilte Sein allein, das**) seinen ersten Prinzipien vorzugsweise eignet, zu erforschen und darüber vorzutragen und diese Einfachheit zu betrachten, die allen Erkenntnisobjekten, mit denen er sich befaßt, vorangeht? Einzig der Punkt ist also ungeteilt auf dem Gebiet der Geometrie und die Einheit auf dem der Arithmetik, und die Idee des Punktes, mag sie auch im Vergleich zu einer anderen unvollkommen sein, ist in Hinsicht auf die vorliegende Wissenschaft vollkommen⁷⁶). Bezeichnet ja auch der Arzt als Ele-
 30 mente der Körper Feuer und Wasser und was diesen ähnlich ist und

*) Das Fragezeichen nach ἀμερές ist überflüssig, da es sich offenbar um eine disjunktive Frage handelt. Das ἢ am Ende von Zeile 7 möchte ich in die Fragepartikel ἢ ändern und habe dementsprechend übersetzt.

**) Wenn der nicht eben leicht zu analysierende Satz einen vernünftigen Sinn ergeben soll, dann ist 93, 15 der Fragesatz ἢ ταῖς αὐτοῦ διαφέρει πρωτίστως ἀρχαῖς in einen Relativsatz zu verwandeln, der sich mit ἢ unmittelbar an das vorausgehende φύσιν anschließt. Weiterhin ist es dann naheliegender, statt ὁρᾷ mit GRYNAEUS ὁρᾷν zu lesen (93, 16). Oben 93, 12 möchte man eher statt προσάγουσι προσάγουσι erwarten, doch kann hier nur nochmalige Überprüfung des handschriftlichen Befundes entscheiden.

damit endet seine Analyse von ihnen (der Körper). Aber der Naturforscher geht auf andere Elemente aus, die einfacher sind als diese, und wenn der Arzt das Element definiert als das für die Wahrnehmung Einfache, so letzterer als das für das Denken Einfache; und beide haben für ihre eigene Wissenschaft recht. Wollen wir also auch nicht glauben, die Definition des Punktes sei verfehlt, und nicht behaupten, sie sei ungenügend. Denn für die geometrische Materie und ihre Prinzipien genügt sie vollkommen; nur das allein besagt sie nicht ausdrücklich, daß der Punkt das für mich Ungeteilte ist und mein Prinzip, und daß das Einfachste nichts anderes ist als dieser; und so muß man 10 die Sprache des Mathematikers verstehen.

EUKLID hat uns durch die Verneinung von Teilen das Prinzip der ganzen, seiner wissenschaftlichen Betrachtung unterliegenden Seinswelt kenntlich gemacht. Die verneinenden Sätze kommen nämlich den Prinzipien zu, wie PARMENIDES uns belehrt, der die erste und letzte Ursache durch bloße Verneinungen kennzeichnet. Denn jedes Prinzip ist in seinem Sein verschieden von den von ihm sich herleitenden Wesen, und die Ausschließung dieser macht uns sein Eigenwesen klar. Denn was Ursache dieser ist, aber nichts von denen, deren Ursache es ist, wird durch diese Weise des Unterrichts 20 der Erkenntnis einigermaßen nähergebracht.

Nun könnte aber jemand bei der Frage in Verlegenheit kommen, wie der Mathematiker einen ungeteilten Punkt in der Phantasie erfassen kann, wenn diese doch alles in Gestalten und Teilen empfängt. Denn nicht nur die Begriffe im denkenden Geist, sondern auch die Erscheinungsformen der intellektuellen und göttlichen Ideen empfängt die Phantasie gemäß ihrer eigenen Art, indem sie von dem Gestaltlosen Gestalten und von dem Figurlosen Figuren erzeugt. Zu dieser Schwierigkeit ist zu sagen, daß die Art der Phantasietätigkeit weder einseitig geteilt noch ungeteilt ist, sondern vom Ungeteilten 30 sich entwickelt zum Geteilten und vom Gestaltlosen zum Gestalteten. Denn wäre sie nur geteilt, dann könnte sie nicht die vielen Bilder der Ideen in sich bewahren, da die neu hinzukommenden die ursprünglichen verdunkeln, weil kein Körper gleichzeitig und auf dieselbe Weise von vielen Gestalten eingenommen wird, sondern die ursprünglichen durch die nachfolgenden verdrängt werden. Wäre sie nur ungeteilt, dann wäre sie nicht unvollkommener als das Denken, und die Seele, die alles im ungeteilten Seinsbereich schaut, und würde sich nicht in gestaltender Weise betätigen. Es ist also notwendig, daß 39

sie bei ihrer Bewegung ausgeht vom Ungeteilten und von daher die in sich geschlossene*) Idee eines jeden in sie eingehenden Erkenntnisobjektes hervortreten läßt, daß sie aber schließlich endet bei Gestalt, Figur und Ausdehnung. Wenn sie also von solcher Art ist, eignet ihr irgendwie auch das Ungeteilte, und es ist zu sagen, daß eben darnach das Wesen des Punktes sich hauptsächlich bestimme. Auch die Idee der Linie ist durch jenes (Ungeteilte) zusammengefaltet in ihr. Eine doppelte Fähigkeit also in sich schließend, eine ungeteilte und eine geteilte, enthält die Phantasie 10 sowohl den Punkt in ungeteilter und die Ausdehnung in geteilter Weise.

Da nun aber die Pythagoreer den Punkt auch definieren als Einheit mit einer bestimmten Lage, so ist zu klären, was sie damit eigentlich sagen wollen. Daß nun die Zahlen von der Materie freier und reiner sind als die Raumgrößen, und das Prinzip der Zahlen einfacher als das der Größen, ist jedem klar. Wenn sie aber von der Einheit sprechen, die eine bestimmte Lage hat, so scheinen sie mir damit anzudeuten, daß Einheit und Zahl nur in der Vorstellung ein Sein haben; ich meine aber die Zahl 1⁷⁷). Deshalb ist auch jede 20 Zahl eine einzige, z. B. 5 oder 7, und nicht viele in jeder Seele, und sie sind frei von dem Beiwerk von Figur und Gestalt. Der Punkt aber erscheint in der Phantasie, ist gewissermaßen lokalisiert und etwas Materielles im Sinne der intelligiblen Materie. Die 1 ist also, weil immateriell, ohne Lage und hat absolut nichts zu tun mit Dimension und Örtlichkeit. Der Punkt aber hat eine Lage, weil er im Innern der Phantasie in Erscheinung tritt und materieller Art ist. Wegen ihrer engeren Verbindung mit den Prinzipien ist also die 1 einfacher als der Punkt. Denn durch seine Lage überschreitet der Punkt die Grenze der Einheit. Zusätze aber bewirken 30 bei immateriellen Dingen eine Minderung der Dinge, die den Zusatz erhalten.

2. Definition: *Die Linie ist eine Länge ohne Fläche*⁷⁸).

Den zweiten Platz nimmt die Linie ein, insofern sie die erste und einfachste Ausdehnung ist, die der Meister Länge mit dem 35 Zusatz: „ohne Fläche“ benannt hat, da die Linie für die Fläche die

*) Nach dem Sinn und dem Sprachgebrauch des PROCLUS ist hier nur die Leseart τὸ ἀνεσπαράμενον (nicht ἀνεσπαρέμενον) εἶδος am Platze.

Bedeutung eines Prinzips hat. Über den Punkt als das Prinzip aller <Raum-> Größen unterrichtete er nämlich einzig auf dem Wege der Negation; über die Linie aber teils affirmativ, teils negativ. Sie ist nämlich eine Länge und damit geht sie über die Unteilbarkeit des Punktes hinaus; aber eine Länge ohne Fläche, da sie frei ist von den anderen Ausdehnungen. Denn alles Flächenlose entbehrt auch der Tiefe, aber nicht umgekehrt. Indem er ihr die Fläche absprach, hat er ihr auch die Tiefe abgesprochen, weshalb er gar nicht beifügte, daß sie ohne Tiefe ist, da dies ohne weiteres aus dem Begriff des Flächenlosen folgt.

10

Man definiert sie aber auch auf andere Weise, die einen, indem sie sie einen fließenden <sich bewegendenden> Punkt nennen, die anderen eine Größe nach einer Richtung ausgedehnt. Aber unsere Definition ist vollkommen zutreffend, da sie das Wesen der Linie ausdrückt; wer sie aber einen fließenden Punkt nannte, möchte vom zeugenden Prinzip her Licht über sie verbreiten und er beschreibt nicht jede Linie, sondern nur die immaterielle. Denn diese erzeugt der Punkt, der selbst keine Teile hat, aber Ursache des Bestandes des Geteilten ist. Das Fließen aber zeigt den Ausgang an und die zeugende Kraft, die unvermindert auf alle Ausdehnung sich erstreckt, selbst unver- 20 änderlich verharret, aber allem Geteilten das Sein verleiht.

Das sind indes allbekannte Dinge; wir wollen uns aber an die für die Pythagoreer bezeichnendere Lehre erinnern, derzufolge der Punkt der Zahl 1, die Linie der Zahl 2, die Fläche der Zahl 3 und der Körper der Zahl 4 entspricht. Wenn wir sie nun aber als ausgedehnte Größen nehmen, so ergeben sich uns für die Linie, die Fläche und den Körper die Zahlen 1, 2, 3, weshalb auch ARISTOTELES sagt*), die Seinserfüllung des Körpers beruhe auf der Dreizahl. Nun kann es nicht befremden, wenn der Punkt wegen seiner Unteilbarkeit in erster Linie der 1 verwandt ist, die Raumgrößen aber nach dem 30 Punkt den Zahlen nach 1 entsprechen und das gleiche**) Verhältnis zum Punkte wahren, wie jene zur Einzahl, und wenn jede einzelne teilhat an der unmittelbar höheren***) und den Rang innehat gegenüber der nächstfolgenden, den jene innehat gegenüber ihr selbst, 34

*) *de caelo* I, 268 a.

**) 98, I ist natürlich nicht *τούτων* sondern mit GRYNÆUS *τούτων* zu lesen.

***) Auch hier hat GRYNÆUS die rechte Leseart mit *ὑπὲρ αὐτοῦ* statt *ὑπὲρ αὐτόν*. Dem Sinn nach wären Akk. u. Gen. gleich zulässig, aber wir brauchen eine neutrale Form, die *αὐτόν* nicht ist; denn es handelt sich um *μεγέθη*, nicht um *ἀριθμοί*.

(ich meine es aber so, daß z. B. die Linie dem Punkte gegenüber die Stelle der Zahl 2 einnehme, hingegen der Zahl 1 der Fläche gegenüber und diese hinwiederum der Zahl 3 dem Punkte, der Zahl 2 aber der Linie gegenüber)*), und deshalb komme dem Körper im Verhältnis zum Punkt die Zahl 4, im Verhältnis zur Linie die Zahl 3 zu. Es haben nun zwar beide Ordnungen ihren Sinn; ursprünglicher ist aber die der Pythagoreer, da sie von oben anhebt und der Natur des Seienden entspricht. Der Punkt ist nämlich zweifacher Art: Entweder für sich oder in der Linie und da er als Grenze einzig und
 10 allein ist, ohne ein Ganzes oder Teile zu haben, kommt er dem höchsten Seienden gleich und ist der Einzahl gleichgeordnet. Denn die Einzahl ist dort zuerst, wo die väterliche Einzahl ist, sagt der bekannte Spruch. Die Linie aber, die als erste Teile und ein Ganzes hat, die zugleich einfach ist wegen der Ausdehnung in einer Richtung und zweifach wegen ihres Ausgangs: Ist sie nämlich unbegrenzt, so hat sie Anteil an der unbegrenzten Zweiheit; ist sie aber begrenzt, so bedarf sie zweier Grenzen, und die Frage nach dem woher und wohin drängt sich bei ihr zuerst auf**) — deshalb also trägt sie den Ganzheitscharakter in sich und erzeugt jene Ordnung, die ausgedehnte Einheit
 20 ist und zugleich Zweiheit***). Denn sie war es, die den Ausgang†) 21 in die Länge hervorbrachte, die gestreckte Ausdehnung nach einer

*) Der aufmerksame Leser sieht leicht, daß FRIEDLEINS Text nicht stimmen kann. Die Schwierigkeiten liegen am Schlusse. Da werden Punkt und Linie zusammengenommen, denen gegenüber der Fläche die Zahl 3 zugewiesen wird. Das ist ein Nonsens. Denn Punkt, Linie und Fläche verhalten sich wie 1 : 2 : 3. FRIEDLEIN vermerkt im Apparat, GRYNÆUS lasse die Zeilen 5—7 *δνάδος μὲν ... καὶ τὴν γραμμὴν*, ebenso Z. 8 das *δὲ* aus. Aber auch damit ist noch nicht geholfen. Denn daß die Linie den Wert 2 beanspruche im Verhältnis zum Körper, widerspricht dem richtigen Satze Z. 5 *τὴν γραμμὴν δνάδος ἔχειν τάξιν πρὸς τὸ σημεῖον*. Linie und Körper stehen sich wie 1 : 3 gegenüber, wie es gleich weiter heißt: *τὸ σῶμα πρὸς τὴν γραμμὴν τριδικόν*. Wir müssen Z. 7 K. I *γραμμὴν* streichen und Z. 8 statt *πρὸς τὸ στερεός* lesen *πρὸς τὴν γραμμὴν*.

**) Die von FRIEDLEIN vorgeschlagene Textverbesserung bleibt fraglich; ich kann aber nichts Besseres an ihre Stelle setzen.

***) FRIEDLEIN und auch BAROCIUS ziehen *γεννᾷ* in den Relativsatz; mir scheint es dem ganzen Zusammenhang besser zu entsprechen, wenn man es als 2. Hauptverbum neben *μυεῖται* auffaßt und *τὴν τάξιν ἐκείνην* als Objekt dazu zieht.

†) 99, 2 lese ich mit GRYNÆUS *ἐκτασιν* statt *ἐκτασιν*. Es gibt bei einem Neuplatoniker einen guten Sinn und verdient nach altbewährter Praxis schon als weniger naheliegendes Wort den Vorzug. Auch wäre *εἰς μῆκος ἐκτασιν* völlig identisch mit *τὸ ταναὸν διαστατῶς*.

Richtung mit der Teilhabe an der Zweiheit. Die Fläche aber, die Dreiheit und Zweiheit ist und Aufnahmeort der ersten Figuren, und die zuerst Figur und Gestalt annahm, gleicht in erster Linie der dreifach ausgedehnten Natur, die alles Sein umschließt, irgendwie aber auch der diese trennenden Zweiheit. Der dreidimensionäre Körper aber, der durch die alle Verhältnisse in sich begreifende Vierzahl bestimmt ist, wird auf jene Seinsordnung bezogen, von der die Verschiedenheit der körperlichen Ordnungen und die Teilung des Alls in drei Bestandteile ausstrahlen, zugleich mit der besonderen Eigenart der Vierzahl, die in der Kraft zu zeugen und im weiblichen 10 Prinzip liegt.

Das alles könnte man noch weiter ausführen. Die Linie z. B., die die zweite Stelle einnimmt, und ihre Existenz der ersten von dem Ungeteilten ausgehenden Bewegung verdankt, nannte auch die Lehre der Pythagoreer dyadisch. Daß aber der Punkt der Einheit, die Linie der Zweiheit, die Fläche der Dreiheit nachsteht, zeigt irgendwo PARMENIDES, der der 1 zuerst das Viele und dann das Ganze abspricht. Geht aber das Viele dem Ganzen vor, dann auch die Zahl dem Zusammenhängenden, die Zweiheit der Linie und die Einheit dem Punkt. Denn der das Viele negierende Begriff kommt der Einheit 20 zu, die das Viele erzeugt; der Begriff aber, der das Viele und das Ganze negiert, dem Punkte, durch den alles Ausgedehnte existiert. Denn von diesem sagt man, es habe Teile.

Soviel sei über die Linie gesagt vom Standpunkt strenger Wissenschaft aus. Wir wollen aber auch die Behauptung der Schule des APOLLONIOS gelten lassen, derzufolge wir eine Vorstellung von der Linie haben, wenn wir den Auftrag erteilen, nur die Länge, sei es von Wegen oder Wänden, zu messen. Denn in diesem Falle nehmen wir die Breite nicht hinzu, sondern berechnen nur die Ausdehnung in einer Richtung, wie wir auch beim Vermessen von Örtlichkeiten auf die 30 Oberfläche schauen, beim Messen von Brunnen aber auf den Raum <-Inhalt>. Denn indem wir alle Ausdehnungen zusammenfassen, erklären wir, das Ausmaß des Brunnens nach Länge, Breite und Tiefe betrage so und soviel. Wahrnehmen aber können wir die Linie, indem wir auf die Abstände der belichteten Orte von den im Dunkeln liegenden hinschauen, sei es auf dem Mond, sei es auf der Erde. Denn dieser Zwischenraum ist der Breite nach ohne Ausdehnung; seine Länge aber geht parallel mit dem Lichtstrahl und dem Schatten.

3. Definition: *Die Grenzen der Linie sind Punkte*⁷⁹⁾.

Alles Zusammengesetzte empfängt vom Einfachen, und alles Geteilte vom Ungeteilten seine Begrenzung, und deren Abbilder werden in den mathematischen Prinzipien vorgelegt. Wenn EUKLID nämlich sagt, die Linie werde von Punkten begrenzt, so ist klar, daß er sie an sich unbegrenzt sein läßt, da sie vermöge des eigenen Ausgangs keine Grenzen hat. Wie nun die Zweiheit von der Einheit begrenzt wird und von dieser beherrscht ihrem unbändigen Drang ein Ziel setzt, so wird auch die Linie durch die Punkte begrenzt. Denn in
 10 der Form der Zweiheit seiend, hat sie gleichwohl auch am Punkte, der die Idee der Einheit in sich trägt, in der Form der Zweiheit Anteil. Aber in der Phantasie und der Sinneswahrnehmung begrenzen die in der Linie selbst liegenden Punkte die Linie; in den immateriellen Seinsformen hingegen existiert *a priori* die ungeteilte Idee des Punktes; tritt sie aber aus diesem Bereich heraus, sie, die sich selbst zuerst ausdehnt, so gerät sie in Bewegung, strömt ins Unbegrenzte dahin und wird zum Ebenbild der unbegrenzten Zweiheit. So wird sie vom eigenen Prinzip gebändigt, von diesem geeinigt und auf allen Seiten umfaßt. Sie ist also zugleich unendlich und begrenzt: Unendlich
 20 vermöge ihres eigenen Ausgangs, begrenzt vermöge der Teilhabe an dem begrenzenden Prinzip. Denn nachdem sie für sich hervorgegangen, wird sie durch dessen Umfassung beherrscht und vermöge seiner einigenden Kraft begrenzt. Deshalb sagt man auch, daß in den Abbildern die Punkte, die Ende und Anfang der Linie einnehmen, sie begrenzen. Dort also ist die Grenze vom Begrenzten gesondert, hier aber ist sie zweifach: Denn sie existiert in dem Begrenzten selbst. Und das erbringt wohl einen vortrefflichen Beweis dafür, daß die Ideen, solange sie in sich bleiben, vermöge ihrer Ursächlichkeit den Vorrang haben vor den teilhabenden Dingen, wenn sie sich aber
 30 jenen hingeben, eine Seinsweise annehmen, die deren Beschaffenheit entspricht, erfüllt von ihnen, in deren Teilung mit hineingezogen und teilhaftig der Trennung ihrer Träger.

Es ist aber auch das bezüglich der Linie vorwegzunehmen, daß der Meister der Geometrie auf dreifache Weise sich ihrer bedient: Insofern sie nach beiden Richtungen begrenzt ist, wie z. B. um über einer gegebenen begrenzten Geraden (Strecke) ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren⁸⁰⁾, dann insofern sie in der einen Richtung unbegrenzt, in der anderen begrenzt ist, wie z. B. in der Aufgabe,
 39 „aus drei Strecken, die gleich lang sind, wie drei gegebene Strecken,

ein Dreieck zu konstruieren“. Bei der Konstruktion sagt er nämlich: „Es sei eine Gerade gegeben, nach einer Richtung begrenzt, nach der anderen unbegrenzt“⁸¹⁾ (endlich insofern sie nach beiden Richtungen unbegrenzt ist, wie bei der Aufgabe⁸²⁾, auf eine gegebene unbegrenzte Gerade von einem gegebenen Punkte aus, der nicht auf ihr liegt, eine senkrechte Gerade (Lot) zu ziehen)*). Auf dreifache Weise also wird die Linie von ihm genommen.

Außerdem wollen wir auch folgende Frage, die der Überlegung wert ist, nicht übergehen. Inwiefern werden die Punkte als Grenzen der Linie bezeichnet und welcher Linie? Denn die unbegrenzte kommt 10 nicht in Frage, noch auch jede begrenzte. Denn es gibt eine Linie, die begrenzt ist, und als Grenzen doch keine Punkte hat. Solcher Art ist die Kreislinie, die in sich selbst zurückkehrt und nicht der Punkte als Grenzen sich bedient wie die Gerade. Solcher Art ist auch die Ellipse**). Nun, möchte die Lösung nicht darin liegen, daß man die Linie als Linie betrachten muß***)? Wir könnten ja (ebenso gut) einen Bogen der Kreislinie nehmen, der von Punkten begrenzt ist, und ein Stück der Ellipse, das in gleicher Weise Punkte als Grenzen hat. Die ganze Kreis- und Ellipsenlinie hat aber noch eine weitere Eigenschaft hinzugewonnen, vermöge deren sie nicht 20 bloß Linie ist, sondern auch eine Figur bildet. Insoweit sie nun Linien sind, haben beide (Gerade und Kreislinie) Punkte als Grenzen; insoweit sie aber derartige Figuren bilden, schließen sie sich in sich zusammen†). Denkt man sie sich im Stadium des Entstehens der Zeichnung, so kann man finden, wie sie von Punkten begrenzt werden; nimmt man aber die fertige Zeichnung nach Verknüpfung von Anfang und Ende, so kann man ihre Enden nicht mehr erkennen. 27

*) Für die im Text vorhandene Lücke bietet nur BAROCIUS die zutreffende Ergänzung, die ich darum in der Klammer herübergenommen habe. Was FRIEDLEIN im Apparat aus M & Z beibringt von der Halbierung einer beiderseits unbegrenzten Linie, ist ein Nonsens, den man natürlich bei EUKLID vergebens sucht.

**) Die griechischen Lexika, auch die größten, lassen einen nicht selten bei den mathematischen Termini im Stich. Für *ὄψος* wird nirgends die Bedeutung *Ellipse* angegeben. Es bezeichnet im eigentlichen Sinn den langen Schild im Gegensatz zum Rundschild und ist hier wegen seiner länglichen Form auf die Ellipse übertragen im Gegensatz zum Kreisrund. Aus der Stelle weiter unten 126, 19—23 ist diese Bedeutung mit Sicherheit zu erschließen.

***) FRIEDLEIN setzt nach diesem Satz einen Punkt; aber es liegt eine Frage vor, wie auch BAROCIUS richtig gesehen hat. Vgl. die Frage 105, 11. 12.

†) Die Leseart von C und die spätere Verbesserung von M $\eta \delta \nu \dots \eta \delta \epsilon$ verdient doch wohl den Vorzug vor $\alpha \iota \mu \epsilon \nu \dots \alpha \iota \delta \epsilon$. 103. 14 ist natürlich mit GRYNAEUS $\pi \omicron \iota \eta \tau \iota \kappa \alpha \iota$ statt $\pi \omicron \iota \eta \tau \iota \kappa \acute{\alpha}$ zu lesen.

4. Definition: Eine Linie ist gerade, wenn sie gleich ist dem Abstand ihrer Endpunkte (wenn sie auf gleicher Strecke liegt wie ihre Endpunkte*) — wenn sie zusammenfällt mit der Entfernung zwischen ihren Endpunkten) ⁸³).

- PLATON**) stellt zwei Arten der Linie als die einfachsten und ursprünglichsten auf: Die Gerade und die Kreislinie, und leitet alle anderen durch Mischung aus diesen ab: Die sog. spiralförmigen, die teils in einer Fläche (Ebene) liegen, teils an Körpern existieren⁸⁴), und die Arten von Kurven, die bei den Körperschnitten entstehen.
- 10 Und nach PLATONS Meinung scheint der Punkt sozusagen das Abbild der Einheit in sich zu tragen; denn er ist ohne Teile, wie er im „*Parmenides*“ (***) zeigt⁸⁵). Da aber nach dem Einen drei Wesenheiten existieren: Die Grenze, das Unbegrenzte, das Gemischte, so verdanken diesen Prinzipien die Arten der Linien, der Winkel und der Figuren ihr Sein. Der Grenze entspricht die Kreislinie, der mit einer Kreislinie umschriebene Winkel, der Kreis auf Flächen und die Kugel in Körpern; der Unbegrenztheit die Gerade in all diesen Gebilden: Denn sie findet sich in allen, in jedem Falle auf eigene Weise in Erscheinung tretend; dem dort Gemischten das in all diesen Gebilden
- 20 Gemischte: Denn es gibt gemischte Linien wie die Spiralen, gemischte Winkel wie den des Halbkreises und den hornförmigen †), gemischte Flächen wie die Schnitte und Bögen, gemischte Körper wie Kegel, Zylinder usw. Die Grenze, das Unbegrenzte und das
- 24 Gemischte ist also in allen diesen. Auch ARISTOTELES††) hegt dieselbe

*) Man wird nicht behaupten können, daß diese Definition EUKLIDS besonders klar und glücklich formuliert ist, mag sie auch im griechischen Original noch leichter verständlich sein als in wörtlicher Übertragung in fremde Sprachen. Daß es hier fehlt, dafür ist der beste Beweis, daß PROCLUS es für notwendig erachtet, den Sinn der Definition ganz klar zu stellen. Er kann nach seiner Erläuterung nicht zweifelhaft sein. Die herkömmliche Auffassung ist darnach zu revidieren. Die Quelle des Mißverständnisses liegt in dem Ausdruck *τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις*, was gewöhnlich übersetzt wird mit: die Punkte auf ihr. So übersetzt HEIBERG in der Teubner-Ausgabe von EUKLIDS Elementen: *recta linea est, quaecumque ex aequo punctis in ea sitis jacet*. Gemeint sind aber die Punkte an ihr, also die beiden Endpunkte. Die Sache wäre wesentlich klarer geworden, wenn EUKLID statt *τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις* geschrieben hätte *τοῖς ἑαυτῆς πέραςι*.

**) *Philebos* 51 c.

***) 137 c. d.

†) Mit dem Halbkreiswinkel und dem hornartigen Winkel sind die beiden Komplementärwinkel verstanden, deren einen der Radius mit der Kreislinie und deren anderen diese mit der Tangente bildet. Siehe PAULY-WISSOWA unter EUKLEIDES Sp. 1019/20.

††) *de caelo* I, 2.

Meinung wie PLATON. Denn jede Art von Linie, sagt er, ist entweder gerade oder kreisrund oder aus diesen gemischt. Deshalb gibt es auch drei Bewegungsarten, eine in gerader Richtung, eine im Kreise und eine gemischte.

Gegen diese Einteilung erheben einige Einspruch und behaupten, es gebe nicht bloß zwei einfache Linien, sondern noch eine dritte, die um den Zylinder beschriebene Schraubenlinie, wenn nämlich bei der Bewegung einer Geraden um die Oberfläche des Zylinders ein Punkt mit gleicher Geschwindigkeit auf ihr (der Geraden) sich bewegt. Denn so entsteht eine <zylindrische> Schraubenlinie, deren 10 sämtliche Teile sämtlichen entsprechen, wie APOLLONIOS in der Schrift „Über die Schraubenlinie“ zeigt. Und diese Beschaffenheit zeigt von allen Schraubenlinien lediglich diese. Denn die Teile der ebenen Spirale sind einander ungleich, ebenso die der um den Kegel und die Kugel beschriebenen⁸⁶). Gleichförmig in ihren Teilen ist allein die zylindrische Schraubenlinie, wie die Gerade und die Kreisl Linie. Sind also nicht doch drei einfache Linien und nicht bloß zwei?

Dieser Schwierigkeit wollen wir begegnen mit der Feststellung, diese Schraubenlinie sei zwar gleichförmig, wie APOLLONIOS gezeigt 20 hat, aber keineswegs einfach. Das Einfache und das Gleichförmige seien eben nicht identisch, da auch von den Naturdingen Gold und Silber gleichförmig, aber nicht mehr einfach seien. Es zeige aber die Mischung der Zylinderschraubenlinie aus den einfachen Linien ihre Entstehung selbst. Sie entsteht nämlich, wenn man die Gerade im Kreise um die Achse des Zylinders <mit gleicher Winkelgeschwindigkeit> bewegt, während der Punkt sich auf der Geraden <mit gleicher Lineargeschwindigkeit> voran bewegt. Zwei einfache Bewegungen also verleihen ihr das Sein, so daß sie zu den gemischten und nicht zu den einfachen Linien gehört. Denn was aus verschiedenen Prin- 30 zipien hervorgeht, ist nicht einfach, sondern gemischt, und mit Recht bestreitet GEMINOS, indem er zugibt, auch von den einfachen Linien entstehe manche aus mehreren Bewegungen, daß jede derartige Linie gemischt sei, sondern nur eine aus verschiedenen Bewegungen hervorgehende. Denn wenn man sich ein Quadrat vorstellt und zwei Bewegungen, die eine in Richtung der Länge, die andere in Richtung der Breite, beide gleich schnell, so wird die Diagonale herauskommen, also eine Gerade⁸⁷). Und diese ist deshalb nicht gemischt. Denn es geht ihr nicht eine andere Linie voran, durch eine einfache 39

Bewegung erzeugt, wie wir von der zylindrischen Schraubenlinie behauptet haben. Ja selbst wenn jemand sich dächte, es würde in einem rechten Winkel diesem gegenüber eine Gerade gezogen, die halbiert einen Kreis beschreibt, so entsteht trotzdem die Kreislinie nicht als gemischte⁸⁸). Denn die Enden der so bewegten Linie beschreiben bei gleichförmiger Bewegung eine Gerade, während die Halbierung bei ungleichartiger Bewegung einen Kreis, und die übrigen Punkte eine Ellipse beschreiben⁸⁹). So ist die Entstehung der Kreislinie die Folge der Ungleichförmigkeit der mit der Hal-

10 bierung verbundenen Bewegung, weil mit dem rechten Winkel die gegenüberliegende Gerade gegeben war, aber nicht ihrer Eigenart gemäß sich bewegte. So viel hiervon.

Sind nun beide, die Gerade und die Kreislinie, einfache Linien, so möchte als die einfachere die Gerade erscheinen. Denn in dieser findet sich nicht einmal eine <auch> nur gedachte Ungleichförmigkeit; bei der Kreislinie hingegen zeigt das Runde und Geschweifte eine Veränderung an. Und die Gerade schließt den Begriff der Kreislinie nicht in sich, wohl aber schließt die Kreislinie die Gerade in sich, wenn auch nicht hinsichtlich ihres Ursprungs, so doch hinsichtlich ihrer Beziehung zum Mittelpunkt. Was wäre nun aber zu der

20 Behauptung zu sagen, die Kreislinie bedürfe auch der Geraden zu ihrem Werden? Denn wenn von einer begrenzten Geraden <Strecke> das eine Ende bleibt, das andere bewegt wird, so wird sie einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt das in Ruhe verharrende Ende der Strecke ist⁹⁰). Oder ist es der Punkt, der den Kreis beschreibt, indem er um den ruhig verharrenden Punkt kreist und nicht die Gerade? Denn diese bestimmt einzig und allein den Abstand; die Kreislinie aber empfängt ihr Sein vom Punkt, der sich in der Kreisrunde bewegt. Doch genug hiervon.

30 Es scheint aber die Kreislinie der Grenze zugeordnet zu sein und zu den anderen Linien in demselben Verhältnis zu stehen, wie die Grenze zu allem Seienden. Denn sie ist begrenzt und bewirkt allein von den einfachen Linien eine Figur. Die Gerade aber fällt unter die Unbegrenztheit: Denn wenn sie auch ins Unendliche verlängert wird, hört sie doch nicht auf. Und wie von der Grenze und dem Unbegrenzten alles andere ausgeht, so von der Kreislinie und der Geraden jede Mischgattung der Linien, der Flächen- und der Körperlinien. Deshalb hat auch die Seele das Gerade und das Runde *a priori* ihrem Wesen

39 nach in sich, damit sie alles, was in der Welt zur Ordnung des

Unbegrenzten gehört, und alles dem Begrenzten*) untergeordnete Sein lenke und leite, durch das Gerade seinen Ausgang bewirke und durch das Runde die Rückkehr, durch das erstere es zur Vervielfältigung führe, und durch letzteres alles zur Einheit zusammenfasse. Und nicht bloß die Seele, sondern auch der Schöpfer der Seele, der ihr diese Kräfte verliehen, hat diese erstursächlichen Prinzipien in sich. Denn alles Seienden Anfang, Mitte und Ende vorweg besitzend, schafft er die Geraden, im Weltbereich umherwandelnd, wie PLATON sagt. Denn an alles geht er heran mit seiner planvollen Wirksamkeit und bleibt dabei doch in sich gekehrt, verharrend in seiner gewohnten 10 Weise, sagt TIMAIOS. Es ist aber die Gerade Sinnbild der unveränderlichen, unerschütterlichen, reinen, unablässigen, allmächtigen und allgegenwärtigen Vorsehung; die Kreislinie hingegen und das Umherwandeln ist Sinnbild der zu sich selbst zurückkehrenden, sich in sich selbst verschließenden und in einer einzigen intellektuellen Grenze das All beherrschenden Tätigkeit. Diese zwei Prinzipien also, das Runde und Gerade, stellte der Schöpfergeist in sich auf, und ließ dann zwei Einheiten von sich ausgehen: Die eine wirkte nach Weise des Runden und schuf die intellektuellen Wesen; die andere nach 20 Weise des Geraden und verlieh den Sinnendingen das Werden. Da aber die Seele ein Mittleres ist zwischen dem Intellektuellen und der Sinnenwelt, ist sie nach Weise des Kreises tätig, insofern sie zusammenhängt mit der intellektuellen Welt; insoweit sie aber die Sinnenwelt leitet, betätigt sie die Voraussicht nach Weise der Geraden. So viel über die Ähnlichkeit dieser Begriffe mit dem Seienden⁹¹).

Die Definition der Geraden hat aber EUKLID so gegeben, wie wir sie hierher gesetzt haben, und er will damit zum Ausdruck bringen, daß allein die Gerade denselben Abstand hat wie die Strecke zwischen den sie begrenzenden Punkten. Denn der Größe der Entfernung des 30 einen Punktes vom anderen entspricht die Größe der von ihnen begrenzten Geraden. Das will der Ausdruck besagen: Auf gleicher Strecke liegen wie ihre Endpunkte. Wenn man aber bei der Kreis- oder einer anderen Linie zwei Punkte nimmt, so ist der zwischen diesen abgeschnittene Bogen der Linie größer als der Abstand 35

*) Ohne Zweifel hat GRYNÆUS mit *περατοειδῇ* die richtige Leseart, die durch den Sinn geradezu gefordert wird. *περιτοειδῇ* liegt ja in derselben Linie wie das vorausgehende *τοῦ ἀπείρου οὐστοιχίαν*. Entsprechend dem *εὐθύ* und dem *περιφερές* müssen aber beide Begriffe *τὸ ἀπείρου* und *τὸ πέρας* hier anklingen.

- der Punkte. Und so steht es ersichtlich um jede Linie außer der Geraden. Deshalb sagt man auch allenthalben nach einer gemeinen Redensart, diejenigen, die den geraden Weg gingen, täten keinen Schritt zuviel, die aber nicht, gingen weiter als notwendig. PLATON*) definiert die Gerade als eine Linie, deren Mitte den Enden (symmetrisch) gegenüberliegt. Denn das ist notwendig der Fall bei dem, was miteinander auf der Geraden liegt, nicht aber bei dem, was auf einer kreisrunden oder einer anderen Linie liegt. Deshalb sagen denn auch die Astronomen, eine Sonnenfinsternis trete dann ein,
- 10 wenn die Sonne selbst, der Mond und unser Auge in einer Geraden zusammentreffen. Denn dann werde sie vom Monde verdunkelt, indem er zwischen sie und uns trete. Und diese Beschaffenheit der Geraden dürfte wohl auch den Beweis dafür liefern, daß auch in der Welt des reinen Seins bei den Ausgängen von den Prinzipien die mittleren Ordnungen die Funktion der Scheidung haben zwischen der Trennung**) der extremen Glieder und der wechselseitigen Verbindung zwischen ihnen***), wie sie auch beim rückläufigen Prozeß das von ihnen Ausgeschiedene wieder hineinnehmen in den Kreis der höheren Wirkursachen†). ARCHIMEDES hinwiederum
- 20 definierte die Gerade als kürzeste Linie von allen, die dieselben Endpunkte haben. Weil sie nämlich, wie EUKLIDS Satz besagt, auf derselben Strecke liegt wie ihre Endpunkte, deshalb ist sie die kürzeste von allen Linien, die dieselben Endpunkte haben. Denn gäbe es eine kürzere, so läge sie nicht auf derselben Strecke wie ihre Endpunkte. Auch alle anderen Definitionen der Geraden laufen auf denselben Sinn hinaus: Wie z. B. daß sie eine vollkommen ausgedehnte Linie
- 27 ist, daß nicht ein Teil von ihr in der unteren, ein anderer in der höheren

*) *Parmenides* 137c.

**) Der Sinn fordert einen Gegensatz zu dem folgenden *κοινωνίας*. Es ist also nicht *ὑποστάσεως*, sondern mit GRYNAEUS *ἀποστάσεως* zu lesen.

***) FRIEDLEIN setzt hier unsinnigerweise einen Punkt, obwohl der folgende Satz mit dem gleichen Subjekt *τὰ μέσα* durch die Vergleichspartikel *ὥσπερ* *ὁ* unmittelbar angeschlossen ist.

†) *διεστώτα* hat FRIEDLEIN in seinen Text aufgenommen, obwohl die von ihm am höchsten gewerteten Textzeugen M & C es auslassen. In seiner jetzigen Stellung bereitet es große Schwierigkeiten, da es *πρὸς τὰς ἀρχικὰς αἰτίας* an sich zieht. Dieser Präpositionalausdruck ist aber im Sinne des PROCLUS zweifelsohne zu *συνελίττει* zu beziehen, wie auch BAROCIUS es tut. Man müßte also, um der Schwierigkeit abzuweichen, *διεστώτα* unmittelbar nach *τὰ ἀφ' ἐαυτῶν* stellen, wenn man es nicht überhaupt weglassen will.

Ebene liegt, daß alle ihre Teile allen in der gleichen Weise entsprechen, daß sie selbst so lange bleibt, so lange die Endpunkte bestehen, und daß sie mit einer einzigen ihr gleichförmigen Linie keine Figur bildet. Denn all das bezeichnet die Eigenschaft der Geraden, die sie hat, weil sie einfach ist und nur einen Weg hat, den kürzesten von allen, die von einem Ende zum anderen führen. So viel über die Definition der geraden Linie.

Es teilt aber GEMINOS diese Linie fürs erste ein in die unzusammengesetzte und in die zusammengesetzte (zusammengesetzt nennt er die gebrochene, die einen Winkel bildet), dann*) in diejenige, die eine 10 Figur bildet, und in jene, die ins Unendliche verläuft. Eine Figur aber bilden nach ihm die Kreislinie, die Ellipse, die Cissoide**), hingegen nicht der Schnitt des rechtwinkligen (Parabel) und stumpfwinkligen Kegels (Hyperbel)⁹²), die Muschellinie, die Gerade, alle von dieser Art. In anderem Sinne hinwiederum sei von der unzusammengesetzten Linie die eine einfach, die andere gemischt; und von der einfachen bilde die eine Figuren wie der Kreis, die andere sei unbegrenzt wie die Gerade; von der gemischten liege die eine in Flächen, die andere in Körpern; und von den Flächenlinien laufe die eine in sich zusammen wie die Cissoide, die andere erstrecke sich 20

*) Ich weiche hier von dem griechischen Texte ab. Dieser hat: *ἔπειτα τὴν σύνθετον* (sc. *διακεῖ Γεμῖνος*). Aber dieser Text bringt einen unlöslichen Wirrwarr in die Einteilung des GEMINOS. Denn im folgenden erscheinen nun die Kreislinie und Gerade in den beiden ihrer Natur nach entgegengesetzten Untergliedern der zusammengesetzten und nicht zusammengesetzten Linien. Kreislinie und Gerade kann man aber unmöglich zu den zusammengesetzten rechnen; einen derartigen Unsinn darf man PROCLUS und auch GEMINOS nicht zutrauen. Der Schwierigkeit läßt sich nur dadurch abhelfen, daß man *τὴν σύνθετον* nach *ἔπειτα* kurzer Hand streicht. Das wird schon nahegelegt durch die Stellung von *πρῶτον μὲν* Z. 1 nach Prädikat und Subjekt. Der Sinn ist dann: GEMINOS gibt von verschiedenen Gesichtspunkten aus zwei voneinander unabhängige Einteilungen der Linie. Er teilt sie ein 1. in zusammengesetzte und nicht zusammengesetzte Linien und 2. in solche, die Figuren bilden und sie nicht bilden. Hätte PROCLUS Z. 4 *τὴν σύνθετον* geschrieben, dann würde man bei den sprachlich so feinfühligem Griechen oben (Z. 1) die Stellung erwarten: *διακεῖ δ' αὖ πρῶτον μὲν* usw. Ein verständnisloser oder nachtsamer Leser des viel benützten Kommentars mag dann, nachdem unten die Gliederung der unzusammengesetzten Linie gegeben ist, an unserer Stelle die Nennung der zusammengesetzten vermißt und ohne genauere Prüfung in seinem Text *τὴν σύνθετον* eingefügt haben.

**) Die Cissoide des DIOKLES wird hier zum ersten Male genannt; sie wird uns noch öfter begegnen.

ins Unendliche; von den Körperlinien werde man die einen gewahr bei den Körperschnitten, die anderen aber bestehen als Umriß der Körper. Denn die Schraubenlinie, die um Kugel oder Kegel sich legt⁹³), existiere am Umfang der Körper; die Kegel- oder Spiralschnitte aber entstünden aus solchen Körperschnitten. Von diesen Schnitten habe einen Teil, nämlich die konischen, MENAICHMOS*) gefunden, was auch ERATOSTHENES mit den Worten bekundet: „Und (suche) nicht die drei Kegelschnitte des MENAICHMOS zu bilden“, einen anderen Teil PERSEUS, der auch folgendes Epigramm zur Verherrlichung seiner Erfindung dichtete.

„Gewundener Linien drei fand Perseus nach fünffachem Schnitte,
Opfer zum Danke dafür, brachte den Göttern er dar“⁹⁴).

Nun sind die drei Kegelschnitte Parabel, Hyperbel und Ellipse; von den spirischen Schnitten ist der eine ineinander verflochten und gleicht der Pferdefessel⁹⁵), der andere geht in der Mitte in die Breite und verliert sich auf beiden Seiten, der dritte, ziemlich lange, ist in der Mitte schmaler und wird gegen beide Enden zu breiter. Die Menge der anderen Mischungen ist unübersehbar. Ist ja auch die Zahl der Körperfiguren unbegrenzt, und es gibt Schnitte der mannig-
20 fachsten Art von ihnen. Denn es ist nicht so, daß zwar die Gerade, im Kreise herumbewegt, eine Fläche bildet, nicht aber die konischen Linien, die Muschellinien und die Kreise selbst. Auf alle mögliche Weise ergeben also diese Körperschnitte mannigfache Arten von Linien.

Von den Linien, die sich um die Körper herumlegen, sind die einen gleichförmig, wie die Schraubenlinien um den Zylinder, die anderen ungleichförmig wie alle übrigen. Aus diesen Einteilungen ergibt sich nun, daß die einzigen drei gleichförmigen Linien die Gerade, der Kreis und die zylindrische Schraubenlinie sind; zwei
30 liegen in Flächen und sind einfach, eine ist gemischt und legt sich um Körper. Das beweist klar GEMINOS, nachdem er vorher den
32 Beweis geführt, daß zwei Gerade gleich sind, wenn sie von irgend einem

*) Zur Sache s. die einschlägigen Artikel im PAULY-WISSOWA unter MENAICHMOS und EUDOXOS 8 § 10/11. Das abrupte Zitat des ERATOSTHENES ist in seinem Zusammenhang erhalten und nachzulesen im Kommentar des EUTOKIOS zu ARCHIMEDES, s. HEIBERG, *Archimedes* III, 112, 20 Teubn. Dort entpuppt es sich als folgender Pentameter: *μηδὲ Μενεχμήους κωνοτομῆν τριάδας [δίλιναι]*. Siehe dazu PAULY-WISSOWA VI, 362.

Punkte aus zu einer gleichförmigen Linie gezogen werden und mit ihr gleiche Winkel bilden. Die Beweise müssen die Wißbegierigen seinen Schriften entnehmen, da er auch das Entstehen der spirischen Linien, der Spiralen und der Cissoiden lehrt. Wir aber haben nur ihre Namen und Einteilungen gegeben*), um die Strebsamen zum Forschen hierüber anzuregen, halten aber genauere Darlegungen zur Erforschung im einzelnen im vorliegenden Werk für überflüssig, da der Meister der Geometrie uns hier nur über die einfachen und prinzipienhaften Linien belehrt, über die Gerade in der vorliegenden Definition, über die Kreislinie bei der Darlegung des Kreises. Dort 10 wird er nämlich sagen, die Linie, die den Kreis begrenzt, sei die runde Kreislinie. Einer gemischten Linie aber tut er nirgends Erwähnung. Er kennt indes gemischte Winkel, wie den Halbkreis- und den hornförmigen Winkel⁹⁶⁾, gemischte Flächenfiguren, wie die Segmente und Sektoren, und gemischte Körper, wie die Kegel und Zylinder. Von jedem der anderen Gebilde gibt er die drei Arten an; von den Linien aber nur die zwei Arten der Geraden und Runden, von der Überzeugung geleitet, man dürfe bei den Untersuchungen über das Einfache nur die einfachen Arten hernehmen. Denn alles weitere ist komplizierter als die Linien. So wollen auch wir uns dem Meister 20 der Geometrie anschließen und mit den einfachen Linien bei ihrer Gliederung Schluß machen.

5. Definition: *Fläche ist, was nur Länge und Breite hat*⁹⁷⁾.

Auf den Punkt und die Linie folgt die Fläche mit zweifacher Ausdehnung in die Länge und Breite, aber ohne Tiefe, was ihr ein einfacheres Sein verleiht als dem dreifach Ausgedehnten. Deshalb hat auch unser Meister zu den zwei Ausdehnungen ein „nur“ hinzugefügt, da es eine dritte Ausdehnung bei der Fläche nicht gibt; und dieses Wörtchen hat dieselbe Bedeutung wie die Verneinung der Tiefe, damit er auch hier durch die Verneinung oder den der Ver- 30 neinung gleichwertigen Zusatz den Vorrang der Fläche gegenüber dem Körper in Hinsicht auf Einfachheit, durch die positiven Bestimmungen hingegen ihre untergeordnete Stellung gegenüber den ihr vorangehenden Gebilden bezeichne. Andere definierten sie, indem sie ungefähr dasselbe sagten, als Begrenzung des Körpers: 35

*) *ιστορήσομεν* ist wohl nur ein Druckfehler; es muß natürlich *ιστορήσαμεν* heißen.

Denn das Begrenzende bleibt hinter dem Begrenzten nur um eine Ausdehnung <Dimension> zurück; wieder andere als eine Größe mit zwei Ausdehnungen, und andere wieder, indem sie irgendwie die Ausführungen variierten, ohne den Sinn zu ändern.

Man sagt aber, daß wir den Begriff der Fläche haben, wenn wir die Örtlichkeiten vermessen und ihre Grenzen nach Länge und Breite bestimmen, daß wir sie aber sozusagen wahrnehmen, wenn wir auf den Schatten sehen. Denn dieser hat keine Tiefe, da er nicht unter die Erde dringen kann, sondern nur Breite und Länge.

- 10 Die Pythagoreer behaupteten, sie unterstehe der Dreizahl, weil eben die Flächenfiguren alle als erstes Prinzip die Dreizahl haben. Denn der Kreis, das Prinzip alles Runden, schließt verdeckt die Dreizahl in sich durch den Mittelpunkt, den Radius und die Kreislinie. Vom Dreieck aber, der führenden aller geradlinigen Figuren, ist es jedem klar, daß es von der Dreizahl bestimmt und nach ihr geformt ist.

6. Definition: *Die Grenzen der Fläche sind Linien*⁹⁸).

- Auch von diesen ist wie aus Bildern zu entnehmen, daß alles, was einfacher ist als das ihm jeweils unmittelbar folgende Seiende, 20 diesem immer Begrenzung und Ende verleiht. So begrenzt und vollendet die Seele die Tätigkeit der Natur, und diese die Bewegung der Körper; und vor diesen mißt der Nus die Umschwünge der Seele und das Eine, das Leben des Nus. Denn dieses (das Eine) ist das Maß aller Dinge. So wird denn auch hier der Körper von der Fläche, die Fläche von der Linie, und diese vom Punkte begrenzt; denn dieser ist die Grenze von allem. Bei den immateriellen Seinsformen und ungeteilten Ideen nun umgrenzt und umschließt die Linie in ihrem einförmigen Sein die mannigfache Bewegung der Fläche bei deren Ausgang und bindet ihre Unbegrenztheit unmittel- 30 bar zur Einheit zusammen; existiert aber das Begrenzende in den Abbildern des Begrenzten selbst, so setzt es ihm auf diese Weise seine Grenze.

- Wenn man aber auch hier fragen wollte, wie es möglich sei, daß jede Fläche durch Linien begrenzt sei, aber nicht jede begrenzte Fläche: Denn die Fläche der Kugel ist zwar begrenzt, aber nicht von Linien, so werden wir sagen: Nehmen wir die Fläche, insofern sie zweifach ausgedehnt ist, so werden wir finden, daß sie nach Länge 38 und Breite durch Linien begrenzt ist; betrachten wir aber die Kugel-

fläche*), so nehmen wir sie als vollendete Figur, die noch eine weitere Eigenschaft hinzugewonnen hat, daß sie nämlich das Ende mit dem Anfang verbindet und aus den beiden Enden ein Einziges macht, das nur der Potenz nach und nicht in Wirklichkeit als Eines vorhanden ist.

7. Definition: *Eine Fläche ist eben, wenn sie dieselbe Ausdehnung hat wie die sie begrenzenden Geraden⁹⁹⁾.*

Die älteren Philosophen wollten die Ebene nicht als eine Art der Fläche anerkennen, sondern beide als identisch verwenden zur Darstellung der zweifach ausgedehnten Größe. So sagte z. B. der göttliche PLATON, die Geometrie untersuche die Flächen, und stellte sie damit der Stereometrie gegenüber in der Überzeugung, daß Fläche und Ebene identisch seien; das gleiche ist vom gefeierten ARISTOTELES zu sagen. EUKLID aber und alle nach ihm machen die Fläche zum Gattungs- und die Ebene zum Artbegriff, wie die Gerade eine Art der Linien (Kurven) ist. Deshalb wird auch die Ebene gesondert von der Fläche definiert in analoger Weise wie die Gerade. Denn der Meister sagte, die (gerade) Linie sei gleich dem Zwischenabstand der Punkte und ebenso nehme die Ebene, wenn zwei Gerade gezogen würden, denselben Raum ein, wie der Zwischenraum zwischen den Geraden. Denn das bedeute der Ausdruck: „Welche dieselbe Ausdehnung hat wie die sie begrenzenden Geraden“, den andere ohne Sinnesänderung wiedergeben mit den Worten: Eine Fläche vollkommen ausgedehnt, wieder andere so: Mit deren sämtlichen Teilen die Gerade übereinstimmt. Man könnte auch sagen, sie sei die kürzeste aller Flächen, die dieselben Grenzen haben und deren Mitte den Enden gerade gegenüberliegt. Und man wird alle Bestimmungen der Geraden auf die ebene Fläche übertragen können, indem man lediglich die Gattung ändert. Denn das Gerade, Runde und Gemischte erstreckt sich, wie gesagt, von den Linien angefangen bis zu den Körpern. Es kommt auf analoge Weise auch den Ebenen und Körpern zu. Deshalb behauptet auch PARMENIDES, jede Figur sei entweder gerade, oder rund, oder gemischt. Willst du also das Wesen des Ge-

*) FRIEDLEIN hat wieder falsch interpunktiert. 116, 12 ist das Komma nach ποιότητα zu streichen und nach θεωρούμεν Z. 11 zu setzen. Das ergibt sich klar aus dem Zusammenhang und insbesondere würde bei FRIEDLEINS Interpunktion das αὐτῇν Z. 11 sinnlos. BAROCIUS hat bereits richtig interpunktiert.

- raden in ebenen Flächen untersuchen, so nimm die Ebene, mit der die Gerade vollkommen übereinstimmt; wenn aber das Wesen des Runden, so nimm die sphärische Fläche (Kugel); und wenn das Wesen des Gemischten, so nimm die Fläche des Zylinders oder Kegels oder eine ähnliche. Es sagt aber GEMINOS, nachdem man von einer gemischten Linie, aber auch von einer gemischten Fläche spreche, müsse man wissen, daß die Art und Weise der Mischung verschieden sei. Denn bei den Linien erfolgt die Mischung weder durch Zusammensetzung*) noch durch Verschmelzung. Die Schraubenlinie z. B. ist gemischt; 10 aber es ist nicht ein Teil von ihr gerade, ein Teil rund, wie bei dem der Zusammensetzung nach Gemischten, und sie bietet nicht, in irgend einer Weise geschnitten, das Bild der einfachen Bestandteile, wie das bei dem durch Verschmelzung Gemischten der Fall ist, sondern bei ihr sind die Gegensätze ineinander verwischt und vermengt, so daß dies der Mathematiker THEODOROS zu Unrecht als Verschmelzung bei den Linien nimmt. Bei der Fläche erfolgt aber die Mischung nicht durch Zusammensetzung und nicht in wirrem Chaos, sondern eher durch eine gewisse Verschmelzung. Denken wir uns nämlich einen Kreis in der Grundfläche und darüber einen Punkt, und ziehen 20 wir von dem Punkte eine Gerade an die Kreislinie und führen wir sie im Kreise herum, so bilden wir eine Kegelfläche; und wenn wir sie hinwiederum schneiden, lösen wir sie auf in einfache Gebilde. Führen wir nämlich den Schnitt von der Spitze zur Basis, so entsteht ein Dreieck; führen wir aber den Schnitt parallel zur Basis, so erhalten wir als Schnittfläche einen Kreis¹⁰⁰). Die Idee der Linie aber zeigt, daß die Art ihrer Mischung nicht der Verschmelzung entspricht: Denn sie führt uns nicht zurück zu dem einfachen Sein der Elemente. Die geschnittenen Flächen hingegen zeigen uns sofort, durch welche Linien sie entstanden sind.
- 30 Die Art der Mischung ist also, wie gesagt, verschieden bei den Linien und bei den Flächen. Wie sich uns nun bei den Linien gewisse einfache Arten ergaben, die gerade und die runde, von denen auch die ungebildete Menge ohne Belehrung eine Vorstellung hat, während die gemischten Arten eine mehr methodische Betrachtung erforderten, 35 so haben wir auch von den einfachsten Flächen, der ebenen und der

*) Mit Recht lehnt FRIEDLEIN im Apparat zu σύνθεσιν 117, 25 den Zusatz μόνον ab, den auch BAROCIUS in seiner Übersetzung herübergenommen. Er widerspricht der folgenden klaren Erläuterung der Begriffe σύνθεσις und ἡμίσις durch PROCLUS.

sphärischen, ohne weiteres eine Vorstellung; die Mannigfaltigkeit der durch Mischung entstandenen aber kann nur die wissenschaftliche Untersuchung ausfindig machen. Bemerkenswert ist bei diesen, daß häufig auch von der Kreislinie aus eine Flächenmischung stattfindet, je nach ihrer Entstehungsweise; das, sagen wir, ist der Fall bei der spirischen Fläche¹⁰¹). Man denkt sie sich nämlich durch Drehung des Kreises, der in senkrechter Lage verbleibt und sich um dieselbe Achse dreht, die aber nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, <entstanden>. Deshalb entsteht auch die „Spira“*) auf dreifache Weise: Entweder liegt nämlich der Mittelpunkt auf der Peripherie 10 oder innerhalb oder außerhalb derselben. Liegt der Mittelpunkt auf der Peripherie, so entsteht die zusammenhängende, wenn innerhalb, die ineinander verflochtene, wenn außerhalb, die getrennte Spira. Auf diese drei Unterschiede gehen die drei spirischen Schnitte zurück¹⁰²). Wiewohl nun die Bewegung nur eine einzige, und zwar eine kreisförmige ist, ist gleichwohl jede Spira gemischt. Es entstehen aber gemischte Flächen ebensowohl, wie gesagt, aus den einfachen Linien, wenn sie auf solche Weise bewegt werden, wie aus den gemischten. Die konischen**) Linien nun, deren drei sind, bilden vier gemischte Flächen, die man kegelförmig („Konoiden“) nennt. Dreht 20 man nämlich die Parabel um ihre Achse, so entsteht das rechtwinklige Konoid <Paraboloid>; bei der Drehung der Ellipse entstehen die sog. Sphäroide <Ellipsoide>, und zwar das längliche, wenn die Drehung um die größere Achse, und das breite, wenn sie um die kürzere erfolgt; bei der Drehung der Hyperbel endlich entsteht ein anderes Konoid <einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid>¹⁰³).

Man muß aber wissen, daß wir bald von den Linien zur Kenntnis der Flächen kommen, bald wieder den umgekehrten Weg gehen. Von den konischen und spirischen Flächen z. B. drangen wir vor zur Erkenntnis der konischen und spirischen Linien. Auch das müssen 30

*) Die heutige Bezeichnung hierfür ist *Wulst* oder *Kreisring* oder *Torus*.

**) FRIEDLEIN hat auffälligerweise im Text *κωνικαὶ γραμμαὶ*, während BAROCIUS in seiner Übersetzung das sinngemäß zu erwartende *conicae lineae* bietet. Da FRIEDLEIN im Apparat sich ausschweigt, steht man vor einem Rätsel. Die einmalige Begriffsverbindung *κωνικαὶ γραμμαὶ* ist zwar an sich nicht zu beanstanden, denn schließlich kann jede *γραμμὴ* als *κωνικὴ* betrachtet werden. Aber dann ist die Einschränkung auf die drei konischen Linien absurd. Es muß sich also um einen Irrtum oder ein Versehen FRIEDLEINS handeln, und ich lese mit BAROCIUS *κωνικαὶ* statt *κωνικαί*.

wir vorwegnehmen bezüglich der Unterschiede der Linien und Flächen, daß es drei ebenmäßige Linien gibt, wie wir oben schon dargelegt haben, Flächen dieser Art aber nur zwei, die ebene und die sphärische, aber nicht auch die zylindrische. Denn nicht alle Teile der zylindrischen Fläche können sich allen angleichen¹⁰⁴).

So viel sei unsererseits gesagt von den Unterschieden der Flächen, von denen der Meister der Geometrie die eine Ebene auswählte und definierte, um auf dieser Grundlage die Untersuchung der Figuren und der bei ihnen obwaltenden Gesetze durchzuführen. Denn so
 10 wird ihm die wissenschaftliche Darlegung leichter als mit einer anderen Fläche. Denn diese bietet die Möglichkeit, Gerade, Kreis- und Schraubenlinien zu erfassen, sowie Schnitte von Kreisen und Geraden, Berührungen, Flächenanlagen und alle möglichen Winkelkonstruktionen. An den anderen Flächen kann das nicht alles untersucht werden. Denn wie könnte man bei der sphärischen Fläche
 <Kugel> eine Gerade oder einen geradlinigen Winkel erhalten, und wie bei der konischen oder zylindrischen Schnitte von Kreislinien oder Geraden untersuchen? Mit gutem Grund also definierte er diese Fläche und baut auf ihrem Grunde sein ganzes wissenschaftliches
 20 System auf. Daher gab er auch seinem Werke den Beinamen <Untertitel> „ebene Geometrie“; und so muß man sich vorstellen, wie die Ebene vor ihm sozusagen ausgebreitet und vor seinen Augen liegt, und wie sein Geist gewissermaßen alles darauf schreibt, indem die Phantasie sich sozusagen in einen Planspiegel verwandelt, auf den die im Geiste vorhandenen Ideen ihre Bilder projizieren.

8. Definition: *Ein Planwinkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die in einer Ebene sich schneiden und nicht in einer Geraden zusammenfallen*¹⁰⁵).

Den Winkel weisen einige der alten Autoren der Kategorie der
 30 Relation zu und bezeichnen ihn als die Neigung von Linien oder Flächen gegeneinander; andere beziehen auch ihn mit ein in die Qualität, wie das Gerade und Krumme*) und nennen ihn etwas derartiges an der Fläche oder dem Körper; wieder andere führen
 34 ihn auf die Quantität zurück und gestehen zu, er sei eine Fläche oder

*) Das Komma Z. 15 nach *περιλαμβάνοντες* ist falsch; hingegen ist ein solches Z. 16 nach *καμπύλον* zu setzen. Das beweist schon das *καὶ ταύτην* Z. 15, das den Winkel, das Gerade und Krumme unter die Qualität subsummiert.

ein Körper. Denn der Planwinkel wird von einer Linie, der Körperwinkel von einer Fläche geteilt. Was aber von diesen geteilt wird, behaupten sie, ist nichts anderes als eine Größe, und zwar keine Linie, denn die Linie wird vom Punkte geteilt; es bleibt also nur übrig, daß er entweder eine Fläche oder ein Körper sei. Aber wenn er eine Größe ist und alle „homogenen Größen“¹⁰⁶), soweit sie begrenzt sind, in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, so werden auch alle homogenen, oder wenigstens alle Planwinkel, in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, also auch der hornförmige¹⁰⁷) zu dem geradlinigen. Was aber in bestimmtem Verhältnis zueinander steht, 10 kann vervielfacht einander an Größe übertreffen¹⁰⁸). Es müßte also einmal auch der hornförmige Winkel den geradlinigen übertreffen, was aber unmöglich ist. Denn es kann gezeigt werden, daß er kleiner ist als jeder geradlinige. Wenn er ferner nur eine Qualität ist wie Wärme und Kälte, wie kann er dann in gleiche Teile zerlegt werden? Denn den Winkeln ist das Gleiche und das Ungleiche nicht in minderem Maße eigen als den Größen, und überhaupt ist die Möglichkeit der Teilung für beide in gleicher Weise ein wesentliches Akzidens. Wenn aber das, dem diese Möglichkeit wesentlich zukommt, irgendwelche Quanten sind und nicht Qualitäten, so wäre es klar, daß die 20 Winkel auch keine Qualitäten sind. Denn der Qualität kommt das Mehr und Weniger zu und nicht das Gleiche und Ungleiche. Man dürfte also nicht von ungleichen Winkeln sprechen und von einem größeren und kleineren, sondern nur von unähnlichen und davon, daß der eine mehr, der andere weniger Winkel ist. Daß diese Sätze aber mit dem mathematischen Sein nicht übereinstimmen, ist wohl jedem klar. Denn jeder Winkel ist Träger desselben Begriffs, und der eine ist nicht mehr Winkel, der andere weniger. Fürs dritte, wenn der Winkel eine Neigung ist und nur als Relation zu fassen ist, dann wäre die Konsequenz, daß, da es nur eine Neigung gibt, es auch 30 nur einen Winkel gibt und nicht mehrere. Denn wenn er nichts anderes ist als die Beziehung der Linien oder Ebenen, welche Möglichkeit besteht dann, daß nur eine Beziehung, aber mehrere Winkel sind? Wenn du dir z. B. einen Kegel vorstellen willst, der durch ein von der Spitze zur Basis verlaufendes Dreieck geschnitten ist, so wirst du in dem Halbkegel an der Spitze eine einzige Neigung der Linien des Dreiecks sehen, aber zwei verschiedene Winkel, nämlich den einen Planwinkel, eben den des Dreiecks, und den an der gemischten Fläche des Kegels: Beide aber sind umschrieben von den vorher 39

genannten zwei Linien. Also bildete nicht deren Beziehung den Winkel. Und doch ist es unerläßlich, ihn entweder eine Qualität oder eine Quantität oder eine Relation zu nennen. Denn die Figuren sind Qualitäten, die Verhältnisse dieser aber zueinander Relationen. Es muß also auch der Winkel einer dieser drei Seinsgattungen (Kategorien) untergeordnet werden.

Angesichts dieser vorhandenen Schwierigkeiten und der Tatsache, daß EUKLID den Winkel eine Neigung nennt, APOLLONIOS aber die Zusammenziehung einer Fläche oder eines Körpers in einem
 10 Punkte, in den Bereich einer gebrochenen Linie oder Fläche (dieser gibt anscheinend eine generelle Definition eines jeden Winkels), müssen wir im Anschluß an unseren Meister die Behauptung vertreten, der Winkel sei nichts von dem Genannten an und für sich; er verdanke vielmehr sein Sein der Vereinigung all dieser Kategorien, und dadurch gerade habe er denen Schwierigkeiten bereitet, die sich für eine hiervon entschieden hätten. Es ist aber nicht bloß mit dem Winkel so, sondern auch mit dem Dreieck. Es kommt ihm nämlich die Quantität zu, und es wird gleich und ungleich genannt, indem es
 20 sozusagen die Bedeutung der Materie im Verhältnis zu diesem Begriff hat; es eignet ihm aber auch in Hinsicht auf die Figur die Qualität, weswegen man von ähnlichen, wie von gleichen Dreiecken spricht, indem sie die eine Eigenschaft von der einen Kategorie, die andere von der anderen besitzen. So bedarf denn auch der Winkel unbedingt der mit der Größe gegebenen Quantität, bedarf aber auch der Qualität, vermöge deren er gewissermaßen eine eigene Form und Seinsgestalt hat, und bedarf endlich auch der Beziehung der ihn begrenzenden Linien oder der ihn einschließenden Ebenen. Erst die Summe von allen ist der Winkel und nicht ein einziger von diesen Faktoren. Er ist teilbar und läßt Gleichheit und Ungleichheit zu, vermöge seiner
 30 Quantität, kann aber nicht gezwungen werden, den Begriff der homogenen Größen in sich aufzunehmen, weil er auch eine eigene Qualität besitzt, vermöge deren häufig die einen Winkel mit anderen nicht zu vergleichen sind, noch auch nur einen einzigen Winkel zu bilden, wenn die Neigung auch nur eine ist, da auch das zwischen den sich zuneigenden Linien liegende Quantum sein Wesen ausmacht. Wenn wir also auf diese Unterscheidungen unser Augenmerk richten, werden wir die bestehenden Schwierigkeiten lösen und finden, daß das eigentliche Wesen des Winkels nicht, wie APOLLO-
 39 NIOS sagt, in der Zusammenziehung, sei es einer Fläche, sei es eines

Körpers, bestehe, mögen immerhin diese Momente sein Wesen mitbestimmen, sondern in der auf einen Punkt zusammengezogenen Fläche selbst, die umschlossen ist von den (gegeneinander) geneigten Linien, oder der einen gegen sich selbst geneigten Linien, und in den von gegeneinander geneigten Ebenen zusammengezogenen Körper selbst, damit das gebildete Quantum, das durch solche Beziehung entstanden, ihn bestimme, und weder die Quantität für sich, noch die Qualität, noch die Beziehung allein.

Soviel sei über das Wesen des Winkels gesagt*), um die allgemeine Theorie jeden Winkels vor der Einteilung in seine Arten 10 vorwegzunehmen. Es bestehen aber drei Ansichten bezüglich des Winkels. Der Peripatetiker EUDEMOS schrieb ein Buch über die Winkel, worin er ihn als Qualität bezeichnete. Denn die Entstehung der Winkel erwägend, sagt er, sie erfolge nur durch Brechung der Linien (ob aber die Geradheit und die Brechung Qualitäten sind?). Da nun also seine Entstehung in die Kategorie der Qualität falle, so sei er ganz und gar eine Qualität. EUKLID aber und alle, die ihn eine Neigung genannt haben, reihen ihn ein unter die Relationen. Als Quantität bezeichnen ihn alle diejenigen, die behaupten, das erste Ausgedehnte nach dem Punkte sei der Winkel; unter ihnen ist 20 PLUTARCH, der auch APOLLONIOS zu derselben Auffassung bestimmte. Denn es muß ein erstes Ausgedehntes geben, sagt er, unter der Neigung**) der einschließenden Linien oder Flächen***). — Aber da das unter dem Punkt liegende Ausgedehnte ein Zusammenhängendes ist, so ist es unmöglich, das erste Ausgedehnte zu erhalten. Denn jedes Ausgedehnte ist ins Unendliche teilbar. Dazu kommt noch: Wenn wir irgendwie das Erste umgrenzen und eine Linie hindurch- 27

*) Dieser Satz mit seiner Abschlußformel muß hier befremden, nachdem in der Tat kein Abschluß folgt, sondern die Entwicklung der Winkeltheorie noch weiter geht. Er würde erst am Schluß des folgenden Abschnitts passen, 126, 6, woran sich dann *ἀλλὰ τοῦτον μὲν ἄδη* Z. 7 anschließen würde. Will man nicht annehmen, daß er an eine falsche Stelle geraten, so wäre er ein Beweis für das Unfertige und Unabgeschlossene des Kommentars, dem PROCLUS die letzte Vollendung nicht geben konnte.

**) BAROCIUS übersetzt: *oportet enim esse aliquod intervallum primum sub ... inclinatione*. Er las offenbar nicht *κλάσιν*, sondern *κλίσιν*. Ich folge ihm.

***) FRIEDLEIN setzt hier ein Komma, aber es gehört ein Punkt hierher, wie auch BAROCIUS richtig gesehen. Denn im folgenden widerlegt PROCLUS die Ansicht des PLUTARCH und APOLLONIOS; man kann aber unmöglich Begründung und Widerlegung in einem Satze zusammenfassen.

ziehen, so entsteht ein Dreieck und nicht ein einziger Winkel. KARPOS aber von Antiochien bezeichnet den Winkel als ein Quantum und als den Zwischenraum der ihn einschließenden Linien und Flächen. Dieser sei nur nach einer Richtung ausgedehnt; doch sei deswegen der Winkel nicht etwa eine Linie. Denn nicht alles nach einer Richtung Ausgedehnte sei eine Linie. Das aber ist das Widersinnigste von allem, wenn es außer der Linie noch eine Größe mit nur einer Ausdehnung geben soll. Doch genug davon.

Es sind aber von den Winkeln die einen als Flächen-, die anderen
 10 als Körperwinkel zu bezeichnen; und von den Flächenwinkeln liegen die einen in einfachen, die anderen in gemischten Flächen. Denn es kann in der Fläche des Zylinders, des Kegels, der Kugel, und in der Ebene Winkel geben. Von den in den einfachen Ebenen, existieren die einen in den sphärischen, die anderen in den ebenen Flächen. Winkel bildet nämlich auch der Tierkreis, der den Äquator an den zwei Scheitelpunkten der schneidenden Kreislinie (Knoten) schneidet. Das sind die Winkel auf der sphärischen Fläche. Von den Planwinkeln werden aber die einen von einfachen, die anderen von gemischten Linien, wieder andere von beiden umschlossen. In der Ellipse näm-
 20 lich wird ein Winkel umschlossen von der Achse und der Linie der Ellipse. Von diesen ist aber die eine gemischt, die andere einfach*). Und wenn ein Kreis die Ellipse schneidet, so entsteht der von der Kreislinie und der Ellipse umschlossene Winkel. Wenn aber die Cissoiden in einem Punkte zusammenlaufen wie die Blätter des Epheus, woher sie auch den Namen erhielten¹⁰⁹), und so einen Winkel bilden, so wird ein solcher natürlich von gemischten Linien umschlossen. Und wenn die Hippopede¹¹⁰), eine von den spirischen Linien, mit einer andern einen Winkel bildet, umschließen auch diesen gemischte Linien. Die Winkel aber, die von einer Geraden und einer
 30 Kreislinie gebildet werden, werden von einfachen Linien umschlossen. Von diesen wiederum werden die einen von gleichförmigen umfaßt. Denn zwei Kreislinien, die einander schneiden oder berühren, bilden Winkel, und zwar dreifacher Art: Entweder die beiderseits konvexen, wenn die Kurven der Kreislinien außen liegen, oder die beiderseits konkaven, wenn beide konkaven Linien außen liegen, die man dann striegelförmig nennt, oder aus Konvex- und Konkavlinien gemischte,
 37 wie die Winkel der Mönchen¹¹¹). Auch von einer Geraden und einer

*) Der Punkt 126, 21 ist mit dem Semikolon Z. 22 sinngemäß zu vertauschen.

Kreislinie werden Winkel in zweifacher Weise umschlossen: Entweder von einer Geraden und einer konvexen Linie, wie der Halbkreiswinkel, oder von einer Geraden und konkaven, wie der hornförmige. Diejenigen aber, die von zwei Geraden umschlossen werden, sollen alle geradlinig heißen; auch sie sind dreifacher Art.

Für alle diese in ebenen Flächen vorhandenen Winkel gibt der Meister der Geometrie diese Bestimmungen: Er legt ihnen den gemeinsamen Namen Planwinkel bei, bezeichnet als ihren Gattungsbegriff die Neigung, als ihren Ort die Ebene; denn auch die Winkel haben ihre Lage, und läßt sie so entstehen, daß zum mindesten zwei 10 Linien sein müssen und nicht drei, wie bei den Körperwinkeln, und daß diese zusammenlaufen müssen, aber gleichwohl nicht in einer Geraden zusammenfallen dürfen, damit der Winkel eine Neigung*) und Umfassung der Linien sei, und nicht bloß eine Ausdehnung in einer einzigen Richtung. Dieser Standpunkt scheint fürs erste nicht zuzulassen, daß ein Winkel von einer einzigen Linie gebildet werde. Und doch bildet die Cissoide allein, und auch die Hippopede einen solchen. Wir meinen aber die ganze Cissoide, nicht ihre Teile, damit**) nicht jemand sage, daß diese in ihrer Vereinigung den Winkel bilden und die ganze spirische Linie, nicht ihre Teile. So 20 bildet also jede von ihnen allein einen Winkel, jede mit sich selbst, nicht mit einer anderen. Sodann scheint die Definition des Winkels als Neigung daneben zu gehen. Denn wie können bei einer Neigung zwei Winkel bestehen? Wie können wir noch von gleichen und ungleichen Winkeln sprechen und was man sonst noch von andren Einwänden gegen diese Auffassung gewöhnlich vorbringt? Drittens scheint bei einigen Winkeln der Zusatz, daß die Linien nicht in einer Geraden zusammenfallen, überflüssig, wie bei den von Kreislinien beschriebenen. Denn auch ohne ihn ist die Definition vollständig. Denn die Neigung dieser Linien gegeneinander bildet den 30 Winkel. Es ist ja von vornherein unmöglich, daß die Kreislinien auf einer Geraden liegen. Soviel hatten wir zur Darlegung EUKLIDS zu sagen, die wir teils erläuterten, und der wir teils mit kritischen Bedenken gegenüberstehen.

34

*) Aus dem Zusammenhang geht klar hervor, daß auch hier mit BAROCIUS nicht *κλάσις* sondern *κλίσις* zu lesen ist.

**) 128, 7 ist nach *iva* wohl ein durch den Sinn gefordertes *μη* ausgefallen. Auch BAROCIUS übersetzt: *ne aliquis dicat*.

9. Definition: *Wenn die den Winkel begrenzenden Linien gerade sind, wird der Winkel geradlinig genannt¹¹²⁾.*

Vom Winkel behaupten wir, er sei Kennzeichen und Sinnbild des Zusammenhalts in den göttlichen Seinsordnungen, und der verbindenden Ordnung des Getrennten zur Einheit, und des Geteilten zum Unterteilten, und des Vielen zur zusammenschließenden Gemeinschaft. Denn auch er wird zum einigendem Band der vielen Linien und Ebenen und zieht die Größe zusammen zum unteilbaren Sein der Punkte und hält jede Figur, die durch ihn existiert, zusammen. Deshalb nennen auch die „*Sprüche*“ die Sinnbilder der Winkel die Klammern der Figuren, insofern sie das Bild der verbindenden Einigungen und des Zusammenhanges des Göttlichen bieten, wodurch sie das Getrennte miteinander vereinen. Die Flächenwinkel versinnbildeten nun die immaterielleren, einfacheren und vollkommeneren Einheitsprinzipien; die Körperwinkel hingegen diejenigen, die bis in die letzten Tiefen herabsteigen, dem Zerstreuten Zusammenschluß, und dem ganz und gar Geteilten die seiner Natur gehörige Zusammensetzung verleihen. Von den Planwinkeln veranschaulichen die einen die höchsten und ungemischten Einheitsprinzipien, die anderen diejenigen, die die Unbegrenztheit der in ihnen stattfindenden Ausgänge zusammenfassen; und zwar schließen die einen die Ausgänge der intellektuellen Seinsformen, die anderen die der Ideen der Sinnendinge zur Einheit zusammen; wieder andere verbinden die Ausgänge des Zwischenreiches*).

Die aus Kreislinien bestehenden Winkel verkörpern die Ursachen, die die intellektuelle Mannigfaltigkeit zur Einheit zusammenschließen; denn die Kreislinien, die die Tendenz haben, in sich zusammenzulaufen, sind Bilder des Nus und der intellektuellen Seinsformen; die geradlinigen aber verkörpern die Prinzipien, die über die Sinnenwelt gesetzt sind und den Zusammenhang der in diesem Bereich vorhandenen Ideen gewährleisten; die gemischten Winkel endlich jene Prinzipien, die die Verbindung der sinnlichen und in-

*) Ein vernünftiger Sinn dieses letzten Satzes ist nur zu erzielen, wenn man entweder *συνδευτικός* streicht und dann als Verbum auch hierher noch *ἐνοποιούσαν* herunterzieht, oder Z. 20 *τάς* streicht und *συνδευτικός* in *συνδευτικάι* ändert. So scheint BAROCIUS gelesen zu haben, der übersetzt: *alii (anguli) vero earum, quae interhasce medium obtinent locum, copulatrices*. Bei diesen abstrusen Spekulationen des Verfassers in luftleerem Raum konnte leicht eine Verwirrung im Texte Platz greifen.

tellectuellen Seinsformen in einer einzigen unwandelbaren Einheit aufrecht erhalten.

Indem wir auf diese Urbilder hinblicken, müssen wir nunmehr auch die Prinzipien für die Einzelwesen feststellen. Bei den Pythagoreern finden wir z. B., daß die einen Winkel diesen, die anderen anderen Göttern geweiht sind, wie PHILOLAOS den einen den Dreiecks- den anderen den quadratischen Winkel weihte und andre anderen, denselben Winkel mehreren Göttern und demselben Gotte mehrere Winkel, je nach den verschiedenen Kräften in ihm. Mit Beziehung darauf scheint mir auch der athenische Philosoph <PLATON> beim schöpferischen Dreieck, dem erstursächlichen Prinzip der gesamten Ordnung der Elemente, andere Götter bei den Seiten und wieder andere bei den Winkeln aufgestellt zu haben, die einen bestimmend für Ausgang und Kraft, die anderen für den Zusammenhang des Alls und die Rückkehr der Ausgänge zur Einheit^{112a}).

Solche Erwägungen führen uns zur Betrachtung des reinen Seins. Wenn es aber heißt, die Linien begrenzen hier den Winkel, so ist das nicht zu verwundern. Denn was in dieser Welt eins ist und ungeteilt, stammt von außen. Im Reiche der Götter aber und des wahren Seins hat das ganze und ungeteilte Gut den Vorrang vor dem Vielen und Geteilten.

10.—12. Definition: *Wenn eine Gerade auf einer Geraden errichtet zwei gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter, und die senkrecht stehende Linie wird Lot (Kathete) genannt zu der, auf der sie senkrecht steht; stumpf ist ein Winkel, wenn er größer, spitz, wenn er kleiner ist als ein Rechter¹¹³.*

Das sind nach grundsätzlicher Annahme seitens der Fachvertreter die drei Arten der Winkel, von denen auch SOKRATES im „Staat“ spricht: Der geradlinige bildet durch Teilung in seine Arten folgende Winkel: Den rechten, den stumpfen, den spitzen. Der erste ist bestimmt durch das Gleiche, Dasselbige und Ähnliche; die beiden anderen weisen ein unbestimmtes Sein auf in Hinsicht auf Größer und Kleiner und überhaupt auf das Ungleiche und das Anderssein und das Mehr und Minder. Die meisten Fachvertreter können nun keinen Grund für diese Einteilung angeben; sie machen wohl von der Voraussetzung von den drei Winkeln Gebrauch, wenn wir sie aber nach deren Begründung fragen, so sagen sie, man dürfe hierüber von ihnen keine Rechenschaft fordern. Die Pythagoreer hingegen

- führen die Lösung der Frage bezüglich der dreifachen Einteilung auf die Prinzipien zurück und wissen so ohne Schwierigkeit Gründe anzuführen für diesen Unterschied der geradlinigen Winkel. Denn da von den Prinzipien das eine die Grenze zum Wesen hat und seinen Schöpfungen Ursache ist der Begrenzung, der Identität, der Gleichheit und überhaupt all dessen, was zum besseren Komplex gehört, das andere aber unbegrenzt ist und dem von ihm Erzeugten den Ausgang ins Unendliche verleiht und Mehrung und Minderung und Ungleichheit und jegliche Art von Andersheit und überhaupt die
- 10 Reihe des Unvollkommenen eröffnet, und da nun auch die geradlinigen Winkel diesen Prinzipien ihr Sein verdanken, so hat deshalb ganz natürlich die von der Grenze herrührende Idee den rechten Winkel gebildet, der allein der Gleichheit und Ähnlichkeit mit jedem rechten Winkel unterworfen und immer fest begrenzt ist, immer derselbe bleibt und weder Vergrößerung noch Verkleinerung zuläßt. Die Idee aber, die von der Unbegrenztheit herkommt, die zweite Stelle einnimmt und die Zweizahl in sich hat, ließ auch zwei Winkel ausgehen rechts und links vom Rechten, durch Ungleichheit getrennt, die in Hinsicht auf Größer und Kleiner und Mehr und Minder un-
- 20 begrenzte Bewegungsfreiheit haben, da der eine mehr und weniger stumpf, der andere mehr und weniger spitz sein kann. Wegen dieser Eigenschaften der göttlichen Hierarchien sowohl, wie der mehr partikularen Mächte, verweisen sie die rechten Winkel nach oben in die Reihe der makellosen Götter als zu den Urhebern der beständigen Vor-sehung für die tiefer stehenden Ordnungen: Denn das Gerade und zu dem Schlechteren nicht Hinneigende, und das Unwandelbare kommt jenen Götterordnungen zu; von den stumpfen und spitzen Winkeln aber sagt man, sie seien den die Ausgänge und die Bewegung und die Mannigfaltigkeit der Kräfte bestimmenden Mächten geweiht: Denn
- 30 das Stumpfe ist ein Bild des zu allem sich entfaltenden Ausgangs*) der Ideen, und das Spitze hat Ähnlichkeit mit dem Prinzip der Trennung und Bewegung im All. Auch in dem eigentlichen Seinsbereich gleicht der rechte Winkel, der dieselbe Begrenztheit des Seins enthält, dem Wesen; den Akzidentien aber der stumpfe und der spitze Winkel. Denn diese lassen ein Mehr und Minder zu und hören nimmer
- 36 auf, in unbegrenztem Maße sich zu verändern. Mit Recht also er-

*) Ich entscheide mich gegen H₂ mit M und GRYNÆUS nicht für ἐκτάσεως, sondern für ἐκστάσεως. Auch BAROCIUS übersetzt mit *progressus*.

mahnen sie die Seele, den Abstieg in den Bereich des Werdens zu vollziehen entsprechend dieser unwandelbaren Art des rechten Winkels, ohne dem mehr zuzuneigen als jenem und ohne mehr oder minder leidenschaftlich an anderen Siegen zu hängen. Denn die durch leidenschaftliche Teilnahme verursachte Zersplitterung läßt sie hinabgleiten in den Zustand der materiellen Unordnung und Wankelmütigkeit. Auch die Senkrechte <das Lot> ist demzufolge Sinnbild der Beständigkeit, der Reinheit, unbefleckter und unbeugsamer Kraft und alles derartigen. Sie ist aber auch Sinnbild des göttlichen und intellektuellen Maßes. Denn mit Hilfe der Senkrechten messen wir 10 die Höhe der Figuren und durch Beziehung auf den rechten Winkel definieren wir die anderen geradlinigen Winkel, die von sich selbst aus unbestimmt sind. Denn dadurch, daß sie über das Maß (des rechten Winkels) hinausgehen oder darunter bleiben, wird ihr Wesen festgestellt, während jeder von ihnen an sich unbestimmt ist. Deshalb sagt man, auch die Tugend stehe aufrecht entsprechend dem geraden Prinzip, das Laster aber habe sein Sein gemäß der Unbestimmtheit des stumpfen und spitzen Winkels und teile sich mit ihm in das Zuwenig und Zuviel und zeige durch das Mehr und Minder seinen Mangel an Maß. Wir stellen also von den geradlinigen Winkeln den Rechten 20 hin als Bild der Vollkommenheit, der unbeirraren Tätigkeit, der intellektuellen Bestimmtheit und Grenze und von allem, was diesem ähnlich ist; den stumpfen und spitzen Winkel aber als Bild der unbegrenzten Bewegung, des hemmungslosen Ausgangs, der Trennung und der Teilung, kurzum der Unbegrenztheit.

Soviel hiervon. Es ist aber bei den Definitionen des stumpfen und spitzen Winkels noch die Gattung zu ergänzen. Es ist nämlich jeder geradlinig, der größer, und der kleiner ist als ein Rechter. Aber nicht einfach der, der kleiner ist als ein Rechter, ist ein spitzer. Denn der hornförmige ist kleiner als ein Rechter, ja sogar als jeder spitze 30 und doch ist er kein spitzer Winkel; und der Halbkreiswinkel ist gleichfalls kleiner als jeder Rechte, aber er ist kein spitzer. Der Grund ist der, daß sie gemischt sind und nicht geradlinig¹¹⁴). Auch von den durch Kreislinien gebildeten Winkeln erweisen sich viele als größer als ein Rechter und sind deswegen doch nicht stumpf. Es muß eben der stumpfe Winkel geradlinig sein. Das also wollte ich noch vermerken und ferner, daß EUKLID, als er sich die Definition des rechten Winkels zum Ziele setzte, eine Gerade nahm, die senkrecht auf einer andern Geraden stand und zwei gleiche Nebenwinkel 39

- bildete¹¹⁵). Daß er aber den spitzen und stumpfen Winkel nicht mehr definierte, indem er eine Gerade nahm, die nach der einen oder anderen Seite sich neigte, sondern mit Bezugnahme auf den rechten Winkel. Denn dieser ist das Maß auch für diejenigen, die keine rechten Winkel sind, wie die Gleichheit das Maß ist auch für das Ungleiche. Denn der nach rechts und links geneigten Linien sind ungezählte und nicht bloß eine wie die Senkrechte. Weiterhin bemerke ich noch, wenn er die Winkel als einander gleich bezeichnet, so entspricht das mathematischer Genauigkeit. Denn es wäre denkbar, daß sie anderen
- 10 Winkeln gleich und doch keine Rechten wären*). Deshalb müssen sie unbedingt, wenn sie gleich sind, zwei Rechte bilden. Auch der Zusatz: „Neben einander“ scheint mir nicht überflüssig zu sein, wie einige unzutreffend meinten, sondern die Idee des rechten Winkels auszudrücken. Deshalb nämlich sind beide rechte Winkel, weil sie nebeneinander befindlich gleich sind, indem die senkrechte Gerade, weil sie sich nach keiner Seite neigt, für beide Ursache der Gleichheit und für jeden Ursache des rechten Winkels wird. Nicht einfach also die beiderseitige Gleichheit, sondern die Lage nebeneinander zusammen mit der Gleichheit ist Ursache, daß beide Winkel Rechte sind.
- 20 Nach alledem muß ich nun noch die Forderung einschränken, auch hier der Aufgabe unseres Autors eingedenk zu bleiben, daß er von den in einer Ebene liegenden Gebilden handelt, so daß damit nicht einmal die Definition einer jeden Senkrechten gegeben ist, sondern nur einer in derselben Ebene liegenden. Die sog. stereometrische Senkrechte <das Raumlot> zu definieren war hier nicht die rechte Gelegenheit. Wie er also nur den Planwinkel definierte, so auch nur die entsprechende Senkrechte; denn die stereometrische Senkrechte muß nicht bloß mit einer Geraden allein rechte Winkel bilden, sondern mit allen, die sie schneiden und in der zugrunde liegenden
- 30 Ebene sich befinden. Denn diese Eigenschaft kommt ihr zu¹¹⁶).

13. Definition: Grenze ist, was das Ende von etwas ist¹¹⁷).

Grenze darf man nicht auf alle Größen beziehen: Denn auch die Linie hat eine Grenze und ein Ende, sondern nur auf die Orte in Flächen und auf die Körper. Hier nennt er <EUKLID> nämlich Grenze

35 den jeden Ort begrenzenden Umfang, und Ende definiert er auf diese

*) Den harten und dabei überflüssigen Dativ *ἀλλήλων* lasse ich mit GRYNÆUS aus. Auch BAROCIUS übersetzt ihn nicht.

Weise, nicht so, wie der Punkt Grenze der Linie genannt wird, sondern als das Umschließende und das von dem Umliegenden Trennende. Der Name ist von Hause aus der ursprünglichen Geometrie eigen, nach deren Normen sie <die Aegypter> die Vermessung der Örtlichkeiten vornahmen und ihre Grenzen unvermischt bewahrten, von der aus sie auch dieser unserer Wissenschaft auf die Spur kamen. Indem also der Verfasser der „Elemente“ den äußeren Umfang als Grenze bezeichnete, hat er ihn mit Recht auch als Ende der Orte definiert. Denn durch diesen wird jedes Umschlossene begrenzt. Ich bezeichne aber z. B. beim Kreis die Kreislinie als 10 Ende und Grenze, die <Kreis-> Ebene selbst aber als einen Ort, und ebenso verhält es sich bei den anderen Figuren.

14. Definition: *Eine Figur ist, was von einer oder einigen Grenzen umschlossen ist*¹¹⁸).

Da Figur in vielfachem Sinne gebraucht und in verschiedene Arten eingeteilt wird, muß man zuerst die Begriffsunterschiede untersuchen und sich dann in vorliegendem Falle in die Erörterung der Definition einlassen. Da gibt es eine Figur, die durch Veränderung entsteht und aus einem Erleiden hervorgeht, indem das zur Figur Geformte geschlagen oder geteilt oder verkleinert wird, oder einen 20 Zusatz oder eine Veränderung erfährt, oder mannigfache andere Leiden erduldet. Sie kann auch ein Erzeugnis der Kunst sein, wie der Plastik oder Bildhauerkunst, hergestellt auf die in der Kunst vorgegebene Art und Weise, wobei die Kunst die Form hervorbringt, die Materie aber Gestalt und Schönheit und Anmut von dort empfängt. Es gibt aber noch herrlichere und prächtigere Figuren als diese, die Schöpfungen der Natur, die einen in den Elementen unter dem Mond, die die in diesen verkörperten Ideen in sich tragen, die anderen am Himmel, die ihre*) Kräfte und Bewegungen bestimmen. Denn für sich sowohl wie miteinander zeigen die Himmelskörper 30 eine bunte und bewundernswerte Mannigfaltigkeit von Figuren und lassen bald diese, bald jene Figuren in Erscheinung treten als Bilder der intellektuellen Seinsformen und versinnbilden durch ihre rhyth- 33

*) FRIEDLEIN schreibt $\alpha\upsilon\tau\acute{\omega}\nu$, GRYNAEUS $\alpha\upsilon\tau\acute{\omega}\nu$, dem BAROCIUS und ZAMBERTO in ihren Übersetzungen folgen. Ein vernünftiger Sinn ergibt sich wohl nur mit $\alpha\upsilon\tau\acute{\omega}\nu$, das auf $\tau\acute{\alpha} \mu\acute{\epsilon}\nu \epsilon\nu \tau\omicron\iota\varsigma \epsilon\upsilon\pi\omicron \sigma\epsilon\lambda\acute{\eta}\gamma\eta\eta \sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\iota\omicron\iota\varsigma$ zu beziehen wäre. PROCLUS macht die bekannte Scheidung zwischen der unvollkommenen sublunarisches und der vollkommenen solarischen Welt; letztere ist bestimmend und leitend für erstere.

mischen Reigen¹¹⁹) die körperlosen und immateriellen Kräfte der Figuren. Über diesen hinwiederum stehen in reinsten und vollendetster Schönheit die Formen der Seelen, die voll des Lebens sind und vermöge ihrer Eigenbewegung vor den durch fremde Kraft bewegten, und vermöge ihrer Immaterialität und Ausdehnungslosigkeit vor den ausgedehnten und materiellen Wesen existieren. Über sie belehrte uns auch TIMAIOS, indem er die schöpferische und wesenhafte Form der Seelen darstellte. Von den Seelenformen sind nun aber die intellektuellen viel göttlicher, ganz und gar die geteilten Wesen über-

10 ragend, ganz und gar verklärt durch das unteilbare intellektuelle Licht, das All zeugend, schaffend und vollendend, in allem in gleicher Weise gegenwärtig und doch unverändert in sich verharrend, den seelischen Formen die Einheit verleihend, die Wandelbarkeit der sinnlichen Formen in die ihnen gebührende Schranke verweisend. Hinausgehoben über alle diese sind endlich die vollkommenen, einförmigen, unerkennbaren und unausdrückbaren Formen der Götter, die auf intellektuellen Wagen fahren, die Gesamtheit der Figuren und Formen in einer Einheit begrenzen, das All zusammenhaltend durch ihre einigenden Grenzen. Ihre Eigentümlichkeiten bildet die Theurgie

20 nach und umkleidet so die Götterbilder mit den verschiedensten Gestalten. Einige stellt sie in geheimnisvollen Formen dar, die die unerkennbaren Kräfte der Götter zum Ausdruck bringen sollen; andere sucht sie in verschiedenen Umrissen und Gestaltungen abzubilden, indem sie die einen stehend, die anderen sitzend darstellt, die einen herzförmig, die anderen kugelförmig, wieder andere auf andere Weise formt. Einige bildet sie einfach, andere setzt sie aus mehreren Gestalten zusammen; einige formt sie streng, andere mild und das gnädige Wesen der Götter betonend, andere furchtbar. Dazu verleiht sie noch den einen diese, den anderen andere bezeich-

30 nende Attribute, je nach der Ähnlichkeit, die diese mit den Göttern haben. So setzt also die Figur oben bei den Göttern selbst ein und erstreckt sich bis auf die letzten Wesen und wird auch in ihnen von den ersten Ursachen her sichtbar. Denn vor dem Unvollkommenen muß das Vollkommene bestehen, vor dem, was in anderen existiert, das, was seinen Grund in sich selbst hat, vor dem, was voll ist von Mängeln seiner selbst, das, was das eigene Sein unverfälscht bewahrt.

Die materiellen Formen haben nun teil an der materiellen Formlosigkeit und besitzen nicht die ihnen zukommende Reinheit; die

39 himmlischen sind geteilt und haben in anderen ihr Sein; die seelischen

Formen haben Trennung und Mannigfaltigkeit und jede Art Entwicklung angenommen; die intellektuellen verbinden mit der Einheit den Ausgang zur Vielheit; nur die der Götter selbst sind losgelöst, einförmig, einfach und schöpferisch und existieren vor dem All; sie haben in sich jede Vollkommenheit und gewähren von sich aus allen die Vollendung der Ideen. Wir können also die Behauptung der großen Menge nicht dulden, daß Hinzufügungen, Wegnahmen, Veränderungen irgendwelcher Art die sinnlich wahrnehmbaren Figuren bewirkten. Denn solche unvollkommene Bewegungen könnten nicht die grundlegende und erste Ursache der Wirkungen 10 in sich tragen, und es entstünden nicht oft genug aus Entgegengesetztem dieselben Figuren; denn ein und dieselbe Gestalt kann durch Hinzufügen oder Wegnehmen entstehen. Nein, wir werden behaupten, dem komme für das Werden nur eine untergeordnete Bedeutung zu, und sagen, ihre Verwirklichung sei ihnen durch andere, vorzüglichere Ursachen bestimmt. Weder sind also die immateriellen Formen existenzlos und nur die materiellen allein existieren, wie einige behaupten, noch auch existieren sie, zwar wie andere meinen, außer dem Bereich der Materie, haben aber nur ein gedachtes Sein durch Abstraktion. Denn wie kann die Vollendung, die Schönheit 20 und Ordnung der Figuren bei der Annahme einer bloßen Abstraktion aufrechterhalten werden? Denn von der gleichen Beschaffenheit wie die Sinnendinge muß ihnen vielfach die unabdingbare und reine Vollendung fehlen. Nehmen sie aber die Eigenschaften der Genauigkeit, Ordnung und Vollendung an, woher gewinnen sie dann diese? Doch nur entweder von den Sinnendingen: Aber in ihnen finden sie sich nicht, oder von den intelligiblen Wesen*): Aber in diesen sind sie vollkommener. Denn sie aus dem Nichts abzuleiten, ist schon das Udenkbarste von allem¹²⁰). Denn die Natur hat doch wohl nicht das Unvollkommene verwirklicht, dem Vollkommenen 30 hingegen das Dasein versagt, und es kann nicht sein, daß unsere Seele Genaueres, Vollendeteres und Geordneteres schaffe als der Nus und die Götter. Es existieren also vor den Sinnesfiguren die eigenbewegten intellektuellen und göttlichen Ideen der Figuren und wir empfangen zwar die Anregung von den Sinnendingen, erzeugen aber die Begriffe in uns, die Bilder von anderen Dingen, und mit deren Hilfe erkennen 36

*) 140, 7 ist es ganz überflüssig in der Parenthese mit FRIEDLEIN ein ἐστὶν zu ergänzen, da aus dem Vorhergehenden προσλήψεται sehr leicht sich ergänzt.

wir die Sinnenwelt in ihren Urbildern, das Intellektuelle und Göttliche aber in seinen Abbildern¹²¹⁾. Indem nämlich die Begriffe in uns sich entwickeln, zeigen sie uns die Göttergestalten und zugleich die einförmigen Grenzen des Alls, mittels deren sie alles auf sich zurückbeziehen und in sich schließen. Den Göttern wohnt also eine übernatürliche Kenntnis sämtlicher Formen inne sowie die Kraft, alle untergeordneten Wesen zu erzeugen und ins Dasein zu rufen; im Bereich der schöpferischen Naturen haben zwar die Formen die Kraft, die Welt der Erscheinungen zu erzeugen; die Erkenntnis aber
 10 und das intellektuelle Wissen sind ihnen vorenthalten; den Teilseelen aber ist das immaterielle Denken eigen und die selbständige Erkenntnis, nicht aber die zeugungsfähige und wirksame Ursächlichkeit. Wie nun die Natur nach der schöpferischen Seite den Sinnesfiguren vorangeht, so projiziert die Seele durch die Tätigkeit ihrer Erkenntniskraft in die Phantasie wie in einen Spiegel die Ideen der Figuren; diese aber nimmt sie in Bildern auf, und da sie nun Vorstellungen der inneren Formen hat, so verleiht sie mit deren Hilfe der Seele die Wendung nach innen und die von den Bildern zu sich selbst zurückkehrende Tätigkeit, ganz so, wie wenn einer sich in einem
 20 Spiegel sähe und, nachdem er die Fähigkeit der Natur und seine eigene Gestalt hinlänglich bewundert, nun sich unmittelbar zu sehen wünschte und eine solche Kraft bekäme, daß er ganz und gar zugleich Subjekt und Objekt des Sehens würde¹²²⁾. Denn auch der Seele geht es ganz ebenso: Sie blickt außer sich in die Phantasie und schaut hier die Schattenumrisse der Figuren; und voll Erstaunen über deren Schönheit und Ordnung, bewundert sie ihre eigenen Ideen, die Ursache von alledem, einmal aber von Bewunderung ergriffen, wendet sie sich ab von der Schönheit der Schattenumrisse, die in Bildern sich bewegt, und sucht sich selbst, will in ihr Inneres eindringen und
 30 da den Kreis und das Dreieck sehen, alles ungeteilt und alles in einander, und will eins*) werden mit dem Geschauten und das Viele zusammenfassen¹²³⁾ und die dunklen und geheimnisvollen Figuren
 33 in den ewigen**) und unbetretbaren Götterwohnungen schauen, und

*) Der Sinn und die Parallelität mit dem obigen Vergleich (13: *ὅλος ὁρῶν καὶ ὁρατὸν ἀποτελεσθῆναι*) legt mit FRIEDLEIN die Entscheidung für *ἐν γενέσθαι*, nicht *ἐργενέσθαι* nahe.

**) Die Lesart von C *ἀγγελίαις* ist doch reichlich *naïv*. Man ändere einen Buchstaben in dem *ἀντίαις* von GRYNÆUS und erhält *ἀνδρίαις*, das sich mit *ἀδύτοις* ganz harmonisch verbindet.

daß die ungeschminkte Schönheit der Götter sich ihr offenbare, daß sie den Kreis sehe, ungeteilter als jeden Mittelpunkt, das unausgedehnte Dreieck und jedes andere Erkenntnisobjekt, das zur Einheit zurückkehrt. Es existiert also die eigenbewegte Figur vor der mit fremdem Antrieb, die mit dem Einen identische Figur vor der ungeteilten. Denn alles kehrt zuletzt zu den Henaden zurück, denn von dort eröffnet sich allem der Zugang zum Sein^{123a}).

Doch wir haben diese Ausführungen im Sinne der Pythagoreer sehr in die Länge gezogen. Unser Meister aber, der zuerst die Figur in der Phantasie untersucht und diese definiert und an zweiter Stelle 10 die Frage behandelt, ob die Definition auch auf die Sinnendinge paßt, erklärt, die Figur sei etwas von einer oder einigen Grenzen Umschlossenes. Da er sie nämlich bereits materiell und ausgedehnt in der Vorstellung nimmt, nennt er sie mit Recht begrenzt und beschränkt. Denn alles, was Materie in sich hat, sei es intelligible, sei es sichtbare, erhält seine Grenze von anderswoher und ist nicht selbst Grenze, sondern begrenzt; aber es ist nicht Grenze seiner selbst, sondern ein anderes ist in ihm das Begrenzende, ein anderes das Begrenzte, und es ist nicht in der Grenze, sondern wird von ihr umschlossen. Es vereinigt sich nämlich mit der Quantität und besteht 20 mit dieser, und die Quantität wird ihm zum Substrat; seine Idee und Form aber bilden Figur und Gestalt. Denn diese begrenzen es und verleihen ihm den so oder so beschaffenen Charakter und die Grenze, sei sie nun einfach oder zusammengesetzt. Denn da die Figur selbst den zweifachen Ausgang der Grenze und des Unbegrenzten in den eigenen Seinsformen zeigt, wie z. B. den Begriff des Winkels, verleiht sie die eine Begrenzung und die einfache Form dem von ihr durch die Grenze Umschlossenen, die vielen Begrenzungen aber durch das Unbegrenzte. Und deshalb hat jedes Gestaltete entweder eine oder mehrere Grenzen erhalten¹²⁴). EUKLID nun, der das Gestaltete, 30 Materielle und mit der Quantität zugleich Existierende eine Figur nennt, bezeichnet sie mit Recht als umschlossen. POSEIDONIOS aber schließt das Moment der Begrenzung mit ein und definiert die Figur, indem er ihre Idee scheidet von ihrer Quantität und erstere zur Ursache der Beschränkung, Begrenzung und des Umfangs macht. Denn das Abschließende ist etwas anderes als das Eingeschlossene, und die Grenze etwas anderes als das Begrenzte, und es scheint der eine sozusagen auf die von außen herumgelegte Grenze zu blicken, der andere aber auf das ganze Objekt, so daß der eine sagen wird, 39

der Kreis sei in seiner ganzen Flächenausdehnung mit der äußeren Umfassung eine Figur, der andere aber, er sei es mit der Kreislinie. Es zeigt aber der eine, daß er das Gestaltete, das mit seinem Substrat betrachtet wird, definiert, der andere die Idee der Figur selbst, die das Quantum begrenzende und umschließende offenbaren will. Wenn aber ein spitzfindiger Logiker dem Satz EUKLIDS zur Last legen wollte, daß er mit Hilfe der Arten die Gattung definieren wolle: Denn die Ausdrücke: Das von einer Grenze und das von mehreren Umschlossene enthielten die Arten der Figur, dann wäre ihm zu 10 erwidern, daß auch die Gattungen*) das Wesen der Arten in sich vorwegnehmen¹²⁵). Und wenn die Alten mit Hilfe der in den Gattungen gegebenen Potenzen die Gattungen klären wollen**), so scheinen sie zwar von den Arten auszugehen, in Wahrheit aber erläutern sie sie von den Gattungen aus und den in ihnen gegebenen Potenzen. Die Idee der Figur ist also nur eine und umfaßt die Unterschiede der vielen Figuren, die je nach der Grenze in ihnen und dem Unbegrenzten gegeben sind, und der sie Definierende wäre wohl nicht der Torheit zu zeihen, wenn er durch seine Definition die Unterschiede der Potenzen in ihnen zusammenfaßt***).

- 20 Aber woher nimmt die Idee der Figur ihren Ausgang und durch welche Ursachen erhält sie ihre Seinsvollendung? Ich behaupte, daß sie fürs erste ihr Sein empfängt von der Grenze und dem Unbegrenzten und dem aus beiden Gemischten, weshalb sie auch selbst die einen Formen mit der Grenze, die anderen mit dem Unbegrenzten und eine dritte Gruppe endlich mit dem Gemischten erzeugt, den kreisrunden Formen die Idee der Grenze, den geradlinigen die des Unbegrenzten, den Arten aus beiden aber die des Gemischten verleiht. Zweitens wird sie konstituiert von der Ganzheit, die in verschiedene Teile gegliedert wird, weshalb sie auch jeder Art den 30 Ganzheitscharakter verleiht und jede Figur in ihre verschiedenen Arten aufteilt. Denn der Kreis sowohl wie jede geradlinige Figur 32 ist zerlegbar in der ursprünglichen Idee unähnliche Figuren, worüber

*) Ich lese nicht mit FRIEDLEIN *κατὰ γένη*, sondern mit GRYNÆUS, dem BAROCIUS in seiner Übersetzung folgt, *καὶ τὰ γένη*, das allein schon in Rücksicht auf das *ἐν ἑαυτοῖς* am Schlusse des Satzes einen vernünftigen Sinn gibt.

**) Das Komma im Griechischen ist richtiger nicht vor, sondern nach *οἱ παλαιοί* zu setzen.

***) Dieser Satz ist abschließend, ich habe ihn daher entgegen FRIEDLEIN noch zum vorausgehenden Abschnitt gezogen.

auch der Verfasser der „Elemente“ selbst in den „Teilungen“¹²⁶⁾ handelt, indem er das eine Mal die gegebenen Figuren in ähnliche zerlegt, das andere Mal in unähnliche. Drittens verleiht ihr Kraft die allwirksame Vielheit und durch diese entläßt sie alle möglichen Formen und erzeugt die mannigfachen Ideen der Figuren, und hört nicht auf, sich zu entfalten, bis sie zur letzten Möglichkeit gekommen ist und die ganze Mannigfaltigkeit der Arten zum Vorschein gebracht hat. Und wie im transzendentalen Bereich das Eine mit dem Seienden und das Seiende in dem Einen mitexistierend sich erweist¹²⁷⁾, so zeigt auch die Idee der Figur selbst, daß in den geradlinigen Figuren 10 die kreisrunden und hinwiederum die geradlinigen in den kreisrunden miteingeschlossen sind, und sie enthüllt ihr ganzes Wesen in jeder Art in eigentümlicher Weise, und es ist all das (ihr ganzes Wesen) in allem und jedem*), und das Ganze in allem zusammen und in jedem einzelnen gesondert. Diese Potenz hat sie also von diesem Faktor. Viertens empfängt sie von der ersten der Zahlen die Maße des Ausgangs der Arten, weshalb sie auch alle nach Zahlen geordnet zum Dasein bringt, die einen nach den einfacheren, die anderen nach den mehr zusammengesetzten. Denn die Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und alle Vielecke gehen zusammen hervor mit den ins Unend- 20 liche wechselnden Zahlen. Aus welchem Grunde das geschieht, ist der großen Menge unfäßbar; für die aber, die wissen um die Bedeutung der Zahl und der Figur, ist die Darlegung des Grundes leicht einzusehen. Fünftens erhält die Idee durch eine andere zweite Ganzheit, die in gleichgeartete Glieder eingeteilt wird, ihre Durchdringung mit der Einteilung der Arten in gleiche Einzelwesen, vermöge deren die Idee des Dreiecks in Dreiecke und die des Vierecks in Vierecke zerfällt. Und das ist es, was wir, wie gesagt, mit den Abbildern zur Übung tun; es hat aber viel früher seinen vorgängigen Bestand in den Prinzipien**) ¹²⁸⁾. 30

Im Hinblick auf die obigen Darlegungen könnten wir die Erörterung über die Ursachen der Figuren noch viel weiter ausdehnen, indem wir emporführen zu den ihnen übergeordneten Prinzipien. Jedenfalls hat die eine gemeine Figur die dargelegte Stellung und 34

*) Die Konstruktion im Griechischen wäre unerträglich hart, wenn man nicht mit $C \delta\tau\alpha\nu$ in $\delta\tau\alpha$ ändern würde, was natürlich zunächst zu $\pi\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$ zu beziehen ist, dann aber auch zum Folgenden.

**) Wie der Satz lautet, hat er wohl eine für das Griechische unmögliche Form. Wir müssen Z. 24 $\tau\omicron\upsilon\tau\omicron$ $\tau\omicron$ in $\tau\omicron\upsilon\tau\omicron$ δ umändern.

empfängt ihre Seinsvollendung von all den genannten Prinzipien. Von hier aber schreitet sie empor zu den Geschlechtern der Götter und verbindet sich in diesen Formen diesen Göttern, in anderen wieder anderen und wendet ihre Tätigkeit diesen und jenen zu, den einen die einfacheren, den anderen die aus ihnen zusammengesetzten Figuren zuzuteilen, den einen die erstursprünglichen Flächenprodukte zuzuweisen, den anderen, die ihren Fuß auf die schweren Körpermassen setzen, die ihnen zukommenden Körperfiguren. Dabei sind alle in allen; denn die Gestalten der Götter sind allursächlich und voll von
 10 sämtlichen Kräften und Fähigkeiten; allein der eigene Charakter zeigt bei jedem eine andere Ausprägung. Denn der eine hat alles in sich nach Weise des Kreises, ein anderer nach Weise des Dreiecks, ein dritter nach Weise des Vierecks, und ebenso liegen die Dinge bei den Körpern.

15. und 16. Definition: *Der Kreis ist eine Planfigur, von einer einzigen Linie umschlossen. Die Geraden, die von einem bestimmten Punkte innerhalb der Figur zu dieser Linie gezogen werden, sind alle einander gleich. Es wird aber der Punkt Mittelpunkt des Kreises genannt¹²⁹).*

- 20 Die erste, einfachste und vollkommenste Figur ist der Kreis. Er übertrifft alle Körper durch die einfachere Ordnung, der sein Sein angehört, und hat den Vorrang vor allen Planfiguren durch seine Ebenmäßigkeit und Ausgeglichenheit. Er steht in naher Beziehung zur Grenze, zur Einheit und überhaupt zum besseren Komplex. Mag man darum die Einteilung der irdischen oder überirdischen Welten vornehmen; immer wird man die Zugehörigkeit des Kreises zu dem göttlicheren Wesen finden. Teilt man z. B. das All ein in den Himmel und den Bereich des Werdens, so wird man dem Himmel die Kreisform zuweisen, der geschaffenen Welt hingegen die Gerade.
- 30 Denn was in den geschaffenen Dingen an Rundem in den Veränderungen und den Figuren vorhanden ist, stammt vom Himmel oben. Denn vermöge seiner Kreisbewegung findet auch die geschaffene Welt durch die Kreisbewegung zu sich zurück und zwingt die unstete Veränderlichkeit in festbestimmte Kreisbahnen. Teilt man die immaterielle Welt in die Seele und den Nus, dann wird man sagen, der Kreis bedeute das Intellektuelle, das Gerade hingegen das Psychische. Deshalb heißt es auch, die Seele drehe sich bei der Rückkehr zum Nus
 38 im Kreise herum, und wie die geschaffene Welt zum Himmel sich

verhält, so verhält die Seele sich zum Nus. Denn sie bewegt sich im Kreise, sagt SOKRATES*), weil sie den Nus nachahmt. Das Werden der Seele aber folgt der Geraden**): Denn es ist der Seele eigen, bald in diesen, bald in jenen Formen zu entstehen. Will man aber in Leib und Seele einteilen, so wird man alles Leibliche auf die Seite des Geraden stellen, allem Seelischen aber einen Anteil zuerkennen an der Ausgeglichenheit und Ebenmäßigkeit des Kreises. Denn ersteres ist zusammengesetzt und sehr verschieden an Kräften wie die geradlinigen Figuren; das letztere aber ist einfach und denkend, selbständig in seinen Bewegungen und Handlungen, in sich selbst gekehrt und 10 mit sich selbst beschäftigt, weshalb auch TIMAIOS zuerst mit Hilfe der geradlinigen Figuren die Elemente des Alls entstehen und ihnen dann von der Weltseele die kreisförmige Bewegung und Durchformung zukommen läßt.

Aus den bisherigen Darlegungen ist klar, daß der Kreis im Verhältnis zu den anderen Figuren in jeder Beziehung den Vorrang einnimmt; es ist aber erforderlich, die ganze Kette seiner Wirkungen ins Auge zu fassen, die oben beginnt und in der tiefsten Tiefe endet und alles vollendet nach Maßgabe der Verbundenheit derer, die eine Gemeinschaft mit ihm eingehen. Den Göttern verleiht er die Hin- 20 kehr zu und die Einheit mit ihren eigenen Ursachen, das Beharren in sich und sicheren Genuß der eigenen Seligkeit. Ihre obersten Verbände stellt er hin als erstrebenswerte Mittelpunkte für die zweitrangigen Götter. Die Menge der in diesen vorhandenen Kräfte hat er in fester Ordnung um sie herumgelegt und hält sie durch ihre Einfachheit zusammen. Den intellektuellen Wesen verleiht er die Fähigkeit, sich ewig mit sich selbst zu beschäftigen und von sich aus mit Erkenntnis zu erfüllen, in sich das Intelligible zusammenzufassen und aus eigener Kraft die Denkakte zu setzen. Denn jeder Nus gibt sich selbst das Denkobjekt, und dieses ist sozusagen der 30 Mittelpunkt für ihn; der Nus aber umschließt es mit Liebe und eint sich mit ihm mit dem gesamten Aufgebot all seiner intellektuellen 32

*) Aus der Textverlegenheit FRIEDLEINS Z. 20 hilft BAROCIUS, der als Subjekt zu *ᾠρῶν* SOKRATES angibt. Wenn er aber den „Timaios“ zitiert, so sucht man hier das Zitat vergebens, da ja SOKRATES in diesem PLATONISCHEN Dialog nur in den einleitenden Partien das Wort ergreift.

**) FRIEDLEINS Text Z. 21 ist sinnlos. Auch hier hilft BAROCIUS mit seiner lateinischen Übersetzung weiter. Da heißt es: *Animae autem generatio et progressus secundum rectam fit lineam.*

Kräfte. In den Seelen aber läßt er das selbsteigene Leben auf-
 flammen, die Kraft zu eigener Bewegung, die Hinkehr zum Nus und
 das Herumkreisen um ihn, die Wiedererneuerung in den eigenen
 Zeitperioden, die die Unteilbarkeit des Nus zur Entfaltung bringen.
 Denn die intellektuellen Hierarchien haben wieder den Vorrang
 gleichsam als Mittelpunkte gegenüber den Seelen; die Seelen aber
 betätigen sich um sie im Kreise herum. Denn jede Seele besitzt in
 ihrem intellektuellen Teil und dem einen Höchsten selbst einen
 Mittelpunkt; sie schweift aber im Kreise bei dem Vielen herum voll
 10 Verlangen, ihren eigenen Nus zu umfassen. Den Himmelskörpern
 aber verleiht er Verähnlichung mit dem Nus, die Gleichförmigkeit,
 die Ebenmäßigkeit, das Umfaßtsein von den Grenzen des Alls, die
 Umschwünge in bestimmten Maßen, den ewigwährenden Bestand,
 das Sein ohne Anfang und Ende, all dies; den sublunaren Ele-
 menten endlich die periodische Wiederkehr der Veränderungen, die
 Verähnlichung mit dem Himmel, das Ewige in den Geburten, die Ruhe
 in der Bewegung, die feste Bestimmtheit bei aller Teilung. Denn alles
 ist immer vermöge des Kreislaufs des Werdens, und alles ist im Gleich-
 gewicht wegen des beiderseitigen Wechsels des Vergehens. Würde
 20 nämlich das Werden sich nicht wiederholen, so würde bald die Ord-
 nung der Dinge und die ganze Welt der Auflösung verfallen. Den
 Tieren und Pflanzen sodann verleiht er die Ähnlichkeit in den Er-
 zeugungen. Denn sie gehen aus dem Samen hervor, und der Same
 wieder aus ihnen; so vollzieht sich ein wechselseitiges Werden und ein
 Kreislauf vom Unvollkommenen zum Vollkommenen und umgekehrt,
 damit neben dem Werden auch das Vergehen sei. Sogar den natur-
 feindlichen Gewalten legt er den Zwang der Ordnung auf, beschränkt
 ihre Unberechenbarkeit und beherrscht so auch sie in gebührender
 Weise mit den letzten Resten seiner eigenen Kräfte*). Darum wieder-
 30 holen sie sich in bestimmten Zeitabständen, und nicht bloß fruchtbare,
 sondern auch unfruchtbare Jahrgänge treten ein, entsprechend den
 Kreisumschwüngen, wie die Musen sagen, und alles Unheil, wenn
 es auch aus dem Götterbereich vertrieben ist zur Wohnstätte der
 Sterblichen, treibt sich doch herum, sagt SOKRATES; aber auch dieses
 35 hat Anteil an der periodischen Wiederkehr und Ordnung, damit kein

*) 50, 1 begegnet wieder einer der für FRIEDLEIN typischen Interpunktions-
 fehler. Das Komma nach *διακομει* ist sinnlos, da dieses *καὶ ταῦτα* als Objekt zu
 sich nimmt und mit dem folgenden einen geschlossenen Satz bildet.

Unheil maßlos und ohne göttliche Hilfe sei, sondern die allwaltende Vorsehung die unbegrenzte Mannigfaltigkeit der Übel in Grenzen und in die ihnen gebührende Ordnung eindämme.

Alles also durchwaltet uns der Kreis bis zu den letzten Zuteilungen, und nichts ließ er ohne seine Zuteilung, Schönheit, Ähnlichkeit, Gestalt und Vollkommenheit gewährend. Deshalb behauptet er auch bei den Zahlen die beiden mittleren Punkte der ganzen von eins bis zehn ausgehenden Zahlenreihe. Denn die Zahlen 5 und 6 zeigen allein von allen die Kraft des Kreises, indem sie bei ihren Ausgängen wieder zu sich zurückkehren. Vervielfacht man sie nämlich, so endigen sie 10 in sich selbst. Die Vervielfachung ist also Bild des Ausgangs, die zur Menge sich entfaltet; Bild der Rückkehr aber ist das Aufhören bei derselben Zahl. Beides zusammen verleiht die Kraft des Kreises, die von dem Bleibenden aus wie aus einem Mittelpunkt den Ursachen, die die Menge erzeugen, den Anstoß dazu gibt und nach der Erzeugung die Menge zu ihrem Ausgangspunkt zurückführt. Zwei Zahlen also, in der Mitte von allen, tragen die Eigenschaft des Kreises in sich: Die eine ist bestimmend für die ganze, zur inneren Einkehr fähige Gattung der Männer und dessen, was in der Schöpfung ungerade ist; die andere ruft alles Weibliche und Gerade und was zur 20 fruchtbaren Reihe gehört, durch die Kraft des Kreises zu den ursprünglichen Prinzipien. Doch diese Ausführungen seien hiermit abgeschlossen.

Nun wollen wir aber die mathematische Darstellung vom Kreise, die bis zum äußersten Grade der Feinheit entwickelt ist, betrachten. EUKLID bezeichnete ihn als Figur, weil er begrenzt und auf allen Seiten von einer Grenze umschlossen ist und nicht zur Welt des Unbegrenzten gehört, sondern der Grenze zugeteilt ist; sodann als ebene Fläche, weil von allen Figuren, die in Flächen oder an Körpern wahrgenommen werden, der Kreis die erste von den Flächen ist. 30 An Einfachheit übertrifft er die Körper; im Verhältnis zu den Ebenen hat er den Wert der Einheit; er wird von einer einzigen Linie umschlossen, da er der Einheit zugehört und durch die Einheit begrenzt ist, und die Mannigfaltigkeit der von außen um ihn herumgelegten Grenzen nicht annimmt. In ihm sind alle Geraden gleich, die zu dieser Linie von einem einzigen der innerhalb seiner gelegenen Punkte führen, weil von den von einer einzigen Linie begrenzten Figuren die einen von der Mitte aus alle Geraden gleich haben, die anderen aber nicht alle. Denn auch die Ellipse wird von einer Linie umschlossen; 39

- aber nicht alle Geraden vom Mittelpunkt zu dieser sind gleich, sondern nur je zwei. Auch die von der Cissoide beanspruchte Fläche hat eine sie umschließende Linie; aber es fehlt bei ihr der Mittelpunkt und damit die Gleichheit aller von ihm ausgehenden Geraden¹³⁰). Da nun aber einmal Mittelpunkt im Kreise unbedingt nur ein einziger Punkt ist: Denn bei mehreren handelt es sich nicht um Mittelpunkte, deshalb machte EUKLID den Zusatz, die von einem Punkte an die Kreisgrenze gezogenen Linien seien gleich. Denn innerhalb seiner ist die Zahl der Punkte unbegrenzt; von den ungezählten aber hat nur einer die
- 10 Bedeutung des Mittelpunktes. Und da dieser eine Punkt, von dem aus alle zur Kreisperipherie laufenden Geraden gleich sind, entweder innerhalb oder über dem Kreise liegt: Denn jeder Kreis hat einen Scheitelpunkt (*πόλον*) <im Raum>, von dem aus die an die Peripherie gezogenen Linien gleich sind, deshalb machte er den Zusatz: Von den innerhalb der Figur liegenden Punkten. Und*) selbst das ist nicht ohne Grund, daß er den Mittelpunkt allein nahm und nicht den Scheitelpunkt, da er seine Betrachtungen auf die Ebene allein beschränkt, der Scheitelpunkt aber über der zugrunde liegenden Ebene sich befindet¹³¹). Notwendig also fügte er am Ende hinzu,
- 20 daß dieser Punkt, der innerhalb der Kreisfläche liegt, und von dem aus lauter gleiche Linien an die Peripherie gezogen werden, der Mittelpunkt des Kreises ist. Denn es gibt nur zwei solche Punkte, den Scheitelpunkt und den Mittelpunkt; aber ersterer liegt „außerhalb“, letzterer innerhalb. Wenn man sich z. B. einen Stab denkt, der im Mittelpunkt des Kreises senkrecht steht, so ist seine obere Spitze der Scheitelpunkt. Denn alle von diesem an die Kreisperipherie gezogenen Linien erweisen sich als einander gleich. Auf dieselbe Weise ist beim Kegel die Spitze des ganzen Kegels der Scheitelpunkt zu dem Kreise an der Basis.
- 30 Es ist also hier definiert, was der Kreis ist, der Mittelpunkt, die Kreislinie, die ganze Figur. Wollen wir uns nun wieder von diesen Begriffen zur Schau der Urbilder erheben und unter ihnen den Mittelpunkt vollständig erfassen in seiner einfachen, unteilbaren und unveränderlichen Vorrangstellung, die vom Mittelpunkt
- 35 ausgehenden Radien als die Ausgänge von dem einen zu der der

*) Hier ist wieder ein typischer Fall für die unglückliche Hand, die FRIEDLEIN bei der Interpunktion hat. Es beginnt ein neuer Gedanke und ein neuer Satz, der bis *ἔστιν* Z. 26 reicht. Mit *ἀναγκαίως ἄρα* beginnt, wie schon das *ἄρα* zeigt, ein neuer Satz mit einer Folgerung aus dem Vorhergehenden.

Potenz nach unbegrenzten Vielheit, die Kreislinie aber als Rückkehr der ausgegangenen Radien zum Mittelpunkt, durch die die Menge der Kräfte zu ihrer Einheit sich zurückwendet und alles dieser zustrebt und um diese voll tätigen Eifers sich drängt; und wie im Kreise alles zusammen gegeben ist, der Mittelpunkt, die Radien, die äußere Peripherie, so ist auch in jenen Urbildern nicht das eine der Zeit nach früher, das andere später, sondern alles ist zugleich, das Beharren in sich, der Ausgang und die Rückkehr. Es besteht aber der Unterschied zwischen dem einen und dem anderen, daß das eine eine ungeteilte und unausgedehnte Seinsweise hat, das andere eine 10 geteilte, daß hier anderswo der Mittelpunkt ist, anderswo die Radien, anderswo die den Kreis begrenzende Peripherie, während dort alles in einem ist; und nimmt man das, was dem Mittelpunkt entspricht*), so findet man in diesem alles; wenn aber den von diesem sich scheidenden Ausgang, so faßt auch dieser alles in sich, und bei der Rückkehr ist es das gleiche^{131a}). Hast du nun alles in einander betrachtet, die von der Ausdehnung herrührende Abwertung ausgeschlossen und die konkrete Lage, die Gegenstand der Teilung ist, beseitigt, dann wirst du den wahren Kreis in sich selbst finden, der ausgeht, sich selbst begrenzt, sich in sich selbst betätigt, der eines ist und vieles, in sich 20 bleibt, ausgeht und zu sich zurückkehrt, der das Unteilbarste und Einheitlichste von sich fest begründet, nach allen Seiten aber von diesem aus nach dem Prinzip des Geraden sich bewegt und nach der diesem eigenen Unbegrenztheit, sich aber von sich aus zu dem Einen zusammenzieht und durch seine Ähnlichkeit und Identität geweckt wird zur Erkenntnis der Unteilbarkeit seines Wesens und der in ihm verborgenen Einheit, die er in sein Inneres aufgenommen hat und umkreist, und der er sich gleichförmig macht mitsamt seiner eigenen Vielheit. Denn was zu sich zurückkehrt, ahmt das Verharrende nach, und das Kreisrund ist wie ein ausgedehnter Mittelpunkt, und 30 wendet sich zu sich zurück, voll Verlangen, in den Mittelpunkt zu gelangen und eins mit ihm zu werden und in das, womit der Ausgang begann, die Rückkehr ausmünden zu lassen^{131b}). Denn von solcher Beschaffenheit ist der Mittelpunkt in jeder Beziehung als etwas 34

*) Der Verbindung $\tau\acute{o} \sigma\lambda\omicron\nu \kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\omicron\nu$ steht FRIEDLEIN skeptisch gegenüber. Er will in den Addenda 437 entweder $\epsilon\nu$ ergänzen oder $\tau\acute{o}$ in $\alpha\upsilon\tau\acute{o}$ ändern. Für den Gräzisten hat diese Verbindung nichts Anstößiges oder Befremdendes; sie ist gut griechisch, wie man sich bei KRÜGER, Gr. Gr. I, 2 Par. 51, 10 Anm. 6 überzeugen kann.

Erstrebenswertes dem, was um ihn sein Dasein erhielt, übergeordnet und Prinzip all der zahlreichen Ausgänge. Das bringt auch der mathematische Punkt zum Ausdruck, der alle von ihm zur Peripherie laufenden Linien beendet und ihnen die Gleichheit verleiht als Abbild seiner eigenen Einheit. So definieren auch „*Die Sprüche*“ den Mittelpunkt, als „den Mittelpunkt, dessen Linien an den Kreisrand alle einander gleich sind“. Daß er aber das Prinzip der Ausdehnung der Linien ist, wird ausgedrückt durch die Präposition: „von welchem“, und daß er die Mitte der Peripherie ist, durch die Präposition: „zu
 10 welchem“. Denn zum Mittelpunkt wird diese in ihrer ganzen Ausdehnung zusammengezogen. Soll man nun aber auch die erste Ursache anführen, durch die die Kreisfigur in Erscheinung trat und ihre Seinsvollendung erhielt, so möchte ich die höchste Ordnung des Intelligiblen namhaft machen. Denn der Mittelpunkt gleicht dem Prinzip der Grenze, die von diesem ausgehenden Linien aber, die soweit es auf sie ankommt, der Zahl und der Größe nach unbegrenzt sind, geben ein Bild der Unbegrenztheit; die Linie aber, die deren unbegrenzte Ausdehnung begrenzt und sie wieder zu dem Mittelpunkt zurückführt, gleicht*) der aus dem Intelligiblen gebildeten
 20 geheimnisvollen Welt¹³²), die nach ORPHEUS sich im Kreise bewegt: „Das Unbewegte aber bewegte sich unermüdlich im Kreise“. Denn um das Intelligible in intelligibler Weise sich bewegend und dieses als Mittelpunkt seiner Bewegung habend, heißt es mit Recht von ihm, es betätige sich in kreisförmiger Weise. Deshalb geht auch von ihm der triadische Gott aus, der das oberste Prinzip des Ausgangs der geradlinigen Figuren in sich begreift. Dementsprechend gaben ihm auch die Weisen und die geheimnisvollsten von den Theologen den Namen. Die erste von den geradlinigen Figuren ist aber das Dreieck. Es erscheinen also die Figuren zuerst in den abgestuften
 30 Götterhierarchien; ihr reales Sein erlangen sie aber durch die im
 31 Intelligiblen präexistierenden verborgenen Ursachen.

*) Man mag geteilter Meinung sein, ob die von FRIEDLEIN zu 155, 17 vorgeschlagene Ergänzung notwendig ist. Die Herunterziehung von *προσέεικεν* aus Z. 12/13 ist gewiß hart, scheint aber doch nicht unmöglich. Am Sinn ändert sich auf keinen Fall etwas.

17. Definition: *Der Durchmesser des Kreises ist eine beliebige, durch den Mittelpunkt gezogene Gerade, die beiderseits von der Peripherie begrenzt wird und den Kreis halbiert¹³³).*

Der Verfasser der „Elemente“ gab selbst klar zu erkennen, daß er nicht jeden Durchmesser definiert, sondern nur den des Kreises. Denn auch die Quadrate haben einen Durchmesser <Diagonale> und überhaupt die Parallelogramme; ebenso bei den Körperfiguren die Kugel. Allein beim ersteren heißt sie auch Diagonale und bei der Kugel Achse, einzig bei den Kreisen führt sie den Namen Durchmesser; denn auch bei der Ellipse, beim Zylinder und Kegel hat man 10 sich gewöhnt, von Achse zu sprechen, von Durchmesser aber eigentlich nur beim Kreis. Diese Linie ist der Gattung nach eine Gerade. Nun gibt es viele Gerade im Kreise, wie auch ungezählte Punkte*); aber wie nur ein Punkt der Mittelpunkt ist, so wird auch Durchmesser nur die Linie genannt, die durch den Mittelpunkt geht und weder innerhalb der Peripherie aufhört, noch deren Grenze überschreitet, sondern auf beiden Seiten von ihr begrenzt wird. Diese Bestimmungen klären ihren Ursprung, der Zusatz am Schlusse aber, daß sie den Kreis halbiert, macht bekannt mit der ihr eigenen Wirksamkeit

gegenüber dem Kreise im Gegensatz zu 20 allen anderen Geraden, die durch den Mittelpunkt geführt, aber nicht beiderseits von der Peripherie begrenzt werden.

Daß nun der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird, soll zuerst der berühmte THALES nachgewiesen haben; der Grund für die Halbierung liegt aber darin, daß die Gerade ohne jede Ablenkung durch den Mittelpunkt 30 geht. Denn da sie durch die Mitte geht und in allen ihren Teilen immer

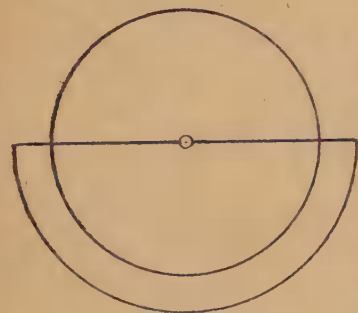


Fig. 1

die gleiche Bewegungsrichtung einhält, ohne nach der einen oder anderen Seite auszubiegen, so schneidet sie an der Kreisperipherie beiderseits die gleiche Strecke <Bogen> ab. Will man dies auch auf 34

*) Bezüglich der hier vorliegenden Textschwierigkeit folge ich BAROCIUS und lasse $\mu\epsilon\nu\ \sigma\upsilon\nu$ 156, 21/22 weg. Zur Annahme, es seien einige Worte ausgefallen, liegt kein Grund vor. Man wüßte nicht, was ausgefallen sein sollte, da alles Notwendige gegeben ist.

mathematischem Wege beweisen, so denke dir den Durchmesser gezogen und die eine Kreishälfte auf die andere gelegt. Ist sie nicht gleich, so wird sie entweder innerhalb oder außerhalb zu liegen kommen. In beiden Fällen wird sich die Folgerung ergeben, daß die kürzere Gerade gleich ist der längeren; denn alle Linien vom Mittelpunkt an die Peripherie sind einander gleich. Das ist aber unmöglich. Sie werden also so aufeinander passen, daß sie gleich sind. Also halbiert der Durchmesser den Kreis.

Wenn es aber nur einen Durchmesser, hingegen zwei Halbkreise 10 gibt, und Durchmesser von unbegrenzter Zahl durch den Mittelpunkt gehen, so ergibt sich die Folgerung einer Verdoppelung des der Zahl nach Unbegrenzten. Einige werfen nämlich diese Schwierigkeit auf bei der Teilung der Größen, die ins Unendliche fortgeführt wird. Dagegen bemerken wir, daß die Größe zwar ins Unendliche fort geschnitten wird, aber nicht in eine unendliche Zahl. Denn letzteres bewirkt erst in Wirklichkeit die Unendlichkeit, ersteres nur in der Potenz, und letzteres bedingt das Wesen des Unbegrenzten, ersteres nur seinen Ursprung. Zugleich mit einem Durchmesser gibt es also zwei Halbkreise, und die Durchmesser werden niemals unendlich 20 sein, wenn sie auch ins Unbegrenzte fort genommen werden, so daß es niemals eine Verdoppelung des Unbegrenzten geben wird, sondern die entstehenden Verdoppelungen werden stets Verdoppelungen von begrenzten Zahlen sein¹³⁴). Denn stets sind die genommenen Durchmesser der Zahl nach begrenzt. Und wie soll*) auch nicht jede Größe nur begrenzte Teilungen zulassen, nachdem die Zahl vor den Raumgrößen besteht und alle ihre Teilungen bestimmt, die Unbegrenztheit vorwegnimmt und immer das wirklich Vorhandene begrenzt¹³⁵)?

18. und 19. Definition: *Ein Halbkreis ist eine Figur, die umschlossen ist vom Durchmesser und dem von ihm abgeschnittenen Bogen. Der 30 Mittelpunkt des Halbkreises ist derselbe wie beim Kreise¹³⁶).*

Von der Definition des Kreises aus fand EUKLID das Wesen des Mittelpunktes, das verschieden ist von allen anderen Punkten im Kreise; mit Hilfe des Mittelpunktes definierte er den Durchmesser und unterschied ihn von allen anderen Geraden, die innerhalb des Kreises gezogen werden. Mit Hilfe des Durchmessers bestimmt er 36 das Wesen des Halbkreises, und daß er von zwei Grenzen umschlossen

*) 158, 16 muß es natürlich οὐ μέλλει statt οὐ μέλει heißen.

wird, und zwar von stets verschiedenen, einer geraden und kreisrunden, und daß die Gerade nicht die nächste beste ist, sondern der Kreisdurchmesser, da ja auch das Segment, das größer und kleiner als der Halbkreis sein kann, von einer Geraden und der Peripherie umschlossen ist. Aber das sind keine Halbkreise, weil die Teilung des Kreises nicht durch den Mittelpunkt geht.



Fig. 2

„Möndchen“

Alle diese Figuren sind zweifacher Art, wie der Kreis einfach ist, und bestehen aus unähnlichen Teilen. Denn alles, was von zwei Grenzen umschlossen 10 wird, wird entweder von zwei Peripherien umschlossen wie das Möndchen¹³⁷), oder von einer Geraden und einer Peripherie, wie die genannten Figuren, oder von zwei gemischten Linien, wie wenn z. B. zwei Ellipsen

einander schneiden: Denn sie werden die zwischen ihnen abgesonderte Figur*) umschließen, oder von einer gemischten und einer Kreislinie, wie wenn ein Kreis eine Ellipse schneidet, oder von einer gemischten und einer Geraden, wie die Hälfte der Ellipse. Der Halbkreis besteht also aus unähnlichen Teilen, die aber 20 gleichwohl einfach und durch Aneinanderfügung miteinander verbunden sind. Bevor nun der Gang der Untersuchung die Definition der Dreiecksfiguren bringt, ging der Meister mit Recht nach dem Kreis auf die Figur, die aus zwei Linien besteht, ein. Zwei Gerade können nämlich niemals einen Raum einschließen, wohl aber eine Gerade und eine Peripherie und ebenso zwei Peripherien, indem sie entweder Winkel bilden, wie bei der Figur 30 des Möndchens <Fig. 2>, oder eine winkel-

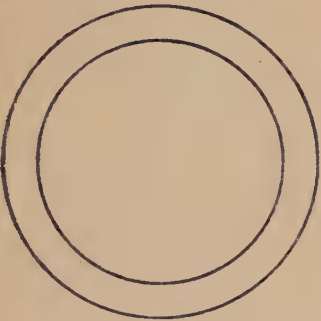


Fig. 3

„Krone“

lose Figur, wie wenn man sich zwei konzentrische Kreise denkt. Denn der Zwischenraum zwischen beiden wird von zwei Peripherien umschlossen, einer inneren und äußeren, und es entsteht kein 34

*) Mit der Parenthese ist so, wie sie lautet, nichts anzufangen. BAROCIUS übersetzt: *Figuram siquidem claudent, quae inter ipsas intercipitur*. Von einem Punkt sucht man vergebens etwas. Es handelt sich wohl um ein Versehen des Setzers oder des Herausgebers bei der Korrektur. Im Texte dürfte stehen: τὸ (nicht τὰ) γὰρ μεταξύ αὐτῶν ἀπολαμβάνόμενον περιέξουσι σχῆμα (nicht σημείον).

Winkel; denn sie schneiden einander nicht wie bei dem Möndchen und bei der Sichelfigur.

Daß nun ferner der Halbkreis denselben Mittelpunkt hat wie der Kreis, ist klar. Denn der Durchmesser, der den Mittelpunkt in sich hat, vollendet den Halbkreis, und alle Linien, die von ihm an die Peripherie gehen, sind einander gleich. Denn auch sie ist ein Teil des Kreises. Die Linien aber, die vom Mittelpunkt an alle Teile der Kreisperipherie gezogen werden, sind einander gleich. Der Mittelpunkt des Halbkreises und des Kreises ist also nur einer. Dabei ist
 10 zu bemerken, daß einzig diese Figur den Mittelpunkt in der Umfassungslinie hat, ich meine aber die Planfiguren, so daß man folgern kann, daß der Mittelpunkt drei Orte hat, entweder innerhalb der Figur wie beim Kreis, oder im Umfang wie beim Halbkreis, oder außerhalb wie bei einigen konischen Linien¹³⁸).

Der Halbkreis hat also denselben Mittelpunkt wie der Kreis. Was bedeutet und versinnbildet das? Doch wohl, daß das, was keinen vollkommenen Ausgang von den ersten Prinzipien, aber doch irgendwie teilhat an ihnen, konzentrisch mit ihnen Sein und Anteil an denselben Prinzipien haben kann. Denn zweifach ist der Anteil des
 20 Halbkreises am Kreise: Einmal durch den Durchmesser und dann durch die Peripherie. Deshalb ist ihnen auch der Mittelpunkt gemeinsam. Und so ist wohl der Halbkreis den zweiten Ordnungen nach den einfachsten Prinzipien zu vergleichen, die teilhaben an diesen und durch diese Verwandtschaft mit diesen wenn auch unvollkommen und zur Hälfte, dennoch auf das Seiende und ihre erste Ursache zurückgeführt werden.

20.—23. Definition: *Geradlinige Figuren sind die von geraden Linien umschlossenen: die dreiseitigen von drei, die vierseitigen von vier, die vielseitigen von mehr als vier Seiten¹³⁹).*

30 Nach der einfachen Figur, die gegenüber allen Figuren den Wert eines Prinzips hat, und nach dem aus zwei Linien geformten Halbkreis wird der zahlenmäßig ins Unendliche gehende Ausgang der geradlinigen Figuren behandelt. Deshalb geschah ja auch des Halbkreises Erwähnung, da er durch seine Grenzen in einer Beziehung mit dem Kreise, in anderer Beziehung mit den geradlinigen Figuren verwandt ist, wie auch die Zweiheit mitten zwischen der Einheit und der Zahl liegt. Denn die Einheit ergibt addiert mehr als multipliziert;
 38 umgekehrt ergibt die Zahl multipliziert ein größeres Produkt als

addiert; die 2 aber ergibt das gleiche Resultat bei Multiplikation mit sich selbst und bei Addition¹⁴⁰). Wie nun diese die Mitte ist zwischen Einheit und Vielheit, so ist auch der Halbkreis durch seine Basis verwandt mit den geradlinigen Figuren, durch seine Peripherie hingegen mit dem Kreis. Es gehen aber die geradlinigen Figuren in schöner Ordnung, entsprechend der Zahl von drei ab, in unbegrenzter Reihe hervor. Deshalb setzte auch der Verfasser der „Elemente“ hier ein. Denn er führt die dreiseitigen, vierseitigen und, der gewöhnlichen Benennung folgend, die sog. mehrseitigen Figuren an. Es sind ja auch die dreiseitigen Figuren vielseitig, aber sie haben neben 10 dem gemeinsamen Namen noch einen speziellen; da wir aber bei den anderen unvermögend waren, dem unbegrenzten Ausgang der Zahlen zu folgen, fanden wir uns mit der gewöhnlichen Bezeichnung ab. Der dreiseitigen und vierseitigen tat er allein Erwähnung, da die ersten Zahlen 3 und 4 sind; erstere ist unter den Ungeraden unvermischt ungerade, letztere unter den Geraden die geradeste. Beide Zahlen werden von EUKLID herangezogen bei der Konstruktion der geradlinigen Figuren zum Nachweis, daß sie allen Zahlen ihr Sein verdanken, den geraden und den ungeraden. Und weil er über diese, die Dreiecke und die Parallelogramme, als die grundlegendsten, seine 20 Lehre entwickeln will¹⁴¹), beendete er mit diesen seine eigene Aufzählung und faßte alle anderen unter dem gemeinsamen Namen der vielseitigen Figuren zusammen. Soviel hiervon.

Nun müssen wir aber wieder von vorne beginnen und darlegen, daß von den Planfiguren die einen von einfachen Linien umschlossen werden, die anderen von gemischten, wieder andere von beiden; und von den von einfachen Linien umschlossenen werden die einen wieder von gleichförmigen begrenzt, wie die geradlinigen Figuren, die anderen von ungleichförmigen, wie die Halbkreise, die Segmente und die Sektoren, die kleiner sind als Halbkreise. Und von den von 30 gleichförmigen Linien umschlossenen Figuren werden die einen begrenzt von der Kreislinie, die anderen von der Geraden; von den von Kreislinien umschlossenen werden die einen von einer Linie begrenzt, andere von zwei, wieder andere von mehreren: Von einer der Kreis selbst, von zweien die keine Winkel bildenden, wie die „Krone“ <Fig. 3>¹⁴²), die von konzentrischen Kreisen begrenzt wird, dann die Winkelbildenden wie das Mönchen <Fig. 2>. Mit mehr als zweien geht der Prozeß ins Unendliche. Denn einige Figuren werden umschlossen von drei, vier Kreislinien usw. Wenn z. B. drei Kreise ein- 39

ander berühren, so schneiden sie eine dreiseitige Fläche ab, die von drei Peripherien umschlossen ist; sind es vier, dann entsteht eine vierseitige Fläche usw. Von den von Geraden umschlossenen Figuren werden die einen von drei, die anderen von mehreren begrenzt. Denn weder von zwei Geraden wird eine Fläche umschlossen, noch viel weniger von einer einzigen. Jede Fläche also, von einer oder zwei Grenzlinien umschlossen, gehört entweder zu den gemischten oder den Kreisfiguren; zu den gemischten auf zweifache Weise: Entweder weil gemischte Linien sie umschließen, wie die von der Cissoide umgrenzte Figur, oder ungleichförmige, wie den Sektor. Es gibt nämlich
 10 eine doppelte Mischung, entweder durch Nebeneinandersetzung oder durch Vermengung. Aber nicht jede drei- oder vierseitige Figur ist geradlinig; denn auch aus Peripherien könnte eine solche Seitenzahl entstehen. Soviel über die Einteilung der Planfiguren.

Daß aber das Gerade Sinnbild des Ausgangs, der Bewegung und der Unbegrenztheit ist, und daß es den zeugenden und schöpferischen Ordnungen der Götter und den Prinzipien der Veränderung und Bewegung eigen ist, ist früher schon dargelegt worden. Auch die geradlinigen Figuren sind demnach diesen Göttern eigen, den obersten
 20 Prinzipien der Tätigkeit, die den umfassenden Ausgang der Seinsformen bewirkt. Deshalb ist auch die Welt durch diese Figuren in hervorragender Weise geordnet und erhielt von ihnen ihr Sein, da ja an Bewegung und Veränderung ihre Existenz geknüpft ist¹⁴³).

24.—29. Definition: *Von den dreiseitigen Figuren hat das gleichseitige Dreieck alle drei Seiten gleich, das gleichschenkelige nur zwei; das ungleichseitige hat alle drei Seiten ungleich. Ferner ist von den dreiseitigen Figuren ein Dreieck rechtwinklig, wenn es einen rechten, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel, spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat¹⁴⁴).*

30 Die Einteilung der Dreiecke hebt zuweilen mit den Winkeln an, zuweilen mit den Seiten. Voran geht die von den Seiten ausgehende, weil altbekannt; es folgt die von den Winkeln ausgehende als die charakteristische, da die folgenden drei Winkel den geradlinigen Figuren allein zukommen, der rechte, stumpfe und spitze. Gleichheit und Ungleichheit der Seiten findet sich doch wohl aber auch in den nicht geradlinigen Figuren. Der Meister sagt nun also, daß von den Dreiecken die einen gleichseitig, die anderen gleich-
 38 schenkelig, die anderen ungleichseitig sind: Denn entweder hat es alle

Seiten gleich oder ungleich oder nur zwei gleich; und wiederum, daß von den Dreiecken die einen rechtwinklig, die anderen stumpf-, die dritten spitzwinklig sind: Das rechtwinklige definiert er dahin, daß es einen rechten Winkel hat, und entsprechend auch das stumpfwinkelige: Denn mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel kann das Dreieck nicht haben¹⁴⁵); das spitzwinkelige aber dahin, daß es lauter spitze Winkel hat. Denn in diesem Falle genügt ein spitzer Winkel nicht, da sonst alle Dreiecke spitzwinkelige wären. Denn jedes Dreieck hat in jedem Falle zwei spitze Winkel, die drei spitzen Winkel hat aber nur das spitzwinkelige. Es dünkt mir aber, daß 10 der Verfasser der „Elemente“ gesondert die Einteilung mit Hilfe der Winkel und gesondert mit Hilfe der Seiten lediglich im Hinblick darauf vornahm, daß nicht jedes Dreieck auch dreiseitig ist. Es gibt nämlich auch „vierseitige Dreiecke“ (<s. Fig. 75>, von den Mathematikern selbst*) „spitzförmige“ genannt, von ZENODOR aber „hohlwinkelige“. Stelle dir z. B. irgendein Dreieck vor und errichte auf einer Seite zwei Gerade nach innen: Dann wird eine Fläche umschlossen von den beiden äußeren und den beiden inneren Seiten; sie hat einen Winkel, den von den Außenlinien umschlossenen, und zwei weitere, von diesen und den inneren Linien, an deren Endpunkten, 20 wo sie zusammenstoßen, umschlossene. Eine solche Figur ist also ein „vierseitiges Dreieck“¹⁴⁶). Wo wir also ein Dreieck mit drei spitzen oder einem rechten oder stumpfen Winkel finden, da haben wir nicht auch schon ein dreiseitiges gefunden, sei es nun gleichseitig, oder eines von den anderen dreiseitigen Arten. Denn es könnte wohl auch ein „vierseitiges“ sein. So kann man auch Vierecke finden mit mehr als vier Seiten, und man darf nicht vorschnell, auf die Zahl der Winkel gestützt, zu Behauptungen sich verleiten lassen über die Zahl der Seiten. Soviel hiervon.

Die Pythagoreer bezeichnen das Dreieck schlechthin als das 30 Prinzip des Werdens und Gestaltens alles Geschaffenen. Deshalb sagt auch TIMAIOS**), alle Ideen von Naturdingen und von dem Bau der Elemente seien dem Dreieck verwandt. Denn sie scheiden sich in drei Arten, vereinigen, was allenthalben geteilt und vielfacher Veränderung unterworfen ist, sind voll von der materiellen Un- 35

*) Die einfachste und natürlichste Ergänzung zu dem $\pi\alpha\rho'$ αὐτοῖς 165, 23 bietet wohl BAROCIUS, der übersetzt: ■ *mathematicis ipsis*.

**) PLATON, *Timaios* 53e.

- begrenztheit und stellen die lösbaren Bindungen über die materiellen Körper auf, wie auch die Dreiecke umschlossen werden von Geraden, Winkel haben, die die Menge der Linien zusammenführen und ihnen eine neugewonnene Verbindung und Berührung verleihen. Mit Recht hat daher PHILOLAOS den Winkel des Dreiecks vier Göttern geweiht, dem Kronos, Hades, Ares und Dionysos, indem er die ganze vierteilige Ordnung der Elemente, die oben vom Himmel herabkommen oder von den vier Schnittpunkten des Tierkreises, in diesen zusammenfaßt. Denn Kronos verleiht dem feuchten und kalten
- 10 Wesen das Sein, Ares dem feurigen, Hades schließt in sich alles irdische Leben, Dionysos aber beherrscht die feuchte und warme Erzeugung, deren Sinnbild der flüssige und warme Wein ist. Alle diese sind verschieden in ihrer Einwirkung auf die untergeordneten Wesen, untereinander aber sind sie eins*). Deshalb läßt auch PHILOLAOS ihre Einigung unter *einem* Winkel zustandekommen. Wenn aber auch die Unterschiede der Dreiecke mit beitragen zum Werden, dann dürfte man mit Recht der Behauptung zustimmen, das Dreieck sei die bestimmende Ursache für den Ursprung der sublunaren Welt. Denn der rechte Winkel verleiht ihnen das Wesen und be-
- 20 stimmt ihnen das Maß des Seins; und die Idee des rechtwinkligen Dreiecks begründet das Wesen der irdischen Elemente; der stumpfe Winkel aber verleiht ihnen die allseitige Ausbreitung, und die Idee des stumpfwinkligen Dreiecks läßt die materiellen Seinsformen zur Größe und zur mannigfachsten Ausgestaltung**) sich entwickeln. Der spitze Winkel endlich unterwirft die Natur selbst der Teilung, und die Idee des spitzwinkligen Dreiecks ist die Ursache davon, daß ihre Teilungen bis ins Unendliche fortgehen. Kurzum die Idee des Dreiecks bewirkt das ausgedehnte und ganz und gar geteilte Sein der materiellen Körperwelt.
- 30 Das waren die Untersuchungen, die wir über das Dreieck anzustellen hatten. Aus diesen Einteilungen kann man entnehmen, daß es *sieben Arten von Dreiecken* gibt, nicht mehr und nicht weniger.
- 33 Das gleichseitige Dreieck ist eine und existiert nur in spitzwinkliger

*) BAROCIUS hat hier einen vollständigeren Text vor sich. Er übersetzt: *juxta vero proprias naturas uniti sunt ad invicem*. FRIEDLEIN vermerkt hierüber nichts im Apparat; doch ist der Zusatz eigentlich gefordert als Gegensatz zu dem *κατὰ μὲν τὰς ποιήσεις* in der vorhergehenden Zeile.

**) 167, 22: Die Lesart *ἐκτασις* von M und GRYNÆUS verdient unzweifelhaft den Vorzug vor *ἐκτασι*.

Form; von den beiden anderen gibt es je drei Formen. Denn das gleichschenkelige ist entweder recht- oder stumpf- oder spitzwinkelig, und das ungleichseitige weist ebenso diesen dreifachen Unterschied auf. Wenn nun diese Arten in dreifacher, die gleichseitigen aber nur in einer Form vertreten sind, so muß man im ganzen von sieben Arten von Dreiecken sprechen¹⁴⁷). Man kann aber auch, unter Berücksichtigung der Einteilung nach Seiten, die Beziehungen der Dreiecke zu dem Seienden feststellen. Denn das gleichseitige Dreieck, in allem von Gleichheit und Einfachheit beherrscht, ist den göttlichen Seelen verwandt: Denn die Gleichheit ist auch für das Ungleiche Maß, wie 10 das Göttliche für alles, was nachher kommt, das gleichschenkelige den mächtigeren Gattungen, die die materielle Natur leiten und bestimmen, von denen die größere Mehrzahl dem Maße unterworfen ist, während die letzten Glieder behaftet sind mit der Ungleichheit und dem Mangel der Materie an Maß: Denn von den gleichschenkeligen Dreiecken sind zwei Seiten gleich, die Basis aber ungleich; das ungleichseitige Dreieck aber ist den geteilten Lebensformen verwandt, die allenthalben hinken und hin- und herschwanken, zu den Geburten sich drängen und völlig behaftet sind mit der Materie.

30.—34. Definition: *Von den vierseitigen Figuren ist das Quadrat 20 gleichseitig und rechtwinklig, das Rechteck rechtwinklig, aber nicht gleichseitig, die Raute gleichseitig, aber nicht rechtwinklig; das Rhomboid hat die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich, ist aber weder gleichseitig noch rechtwinklig. Die außer diesen noch vorkommenden Vierseite sollen Trapeze genannt werden¹⁴⁸).*

Die Vierseite muß man fürs erste zweifach einteilen: Die einen sind als Parallelogramme, die anderen als Nichtparallelogramme zu bezeichnen. Von den Parallelogrammen sind die einen rechtwinklig und gleichseitig, wie die Quadrate, andere keines von beiden wie die Rhomboide, andere rechtwinklig, aber nicht gleichseitig, wie die Rechtecke, andere hinwiederum gleichseitig, aber nicht rechtwinklig wie die Rauten. Entweder müssen nämlich beide Erfordernisse gegeben sein, Gleichheit der Seiten und Rechtwinkeligkeit, oder keines von beiden, oder eines, sei es dieses oder jenes, so daß das Parallelogramm in vierfacher Art sich findet. Von den Nichtparallelogrammen haben die einen nur zwei Seiten parallel, nicht auch noch die übrigen, die anderen haben überhaupt keine parallelen Seiten. Die einen heißen Trapeze, die anderen Trapezoide. Von den Trapezen haben 11

die einen die diese Parallelen verbindenden Seiten gleich, die anderen ungleich, und es werden erstere gleichschenkelige, letztere ungleichschenkelige Trapeze genannt. Das *Vierseit* wird also nach unserer Meinung in *sieben Arten* bestehen: Dem Quadrat, dem Rechteck, der Raute, dem Rhomboid, dem gleichschenkeligen und ungleichschenkeligen Trapez, dem Trapezoid. Wenn aber POSEIDONIOS eine

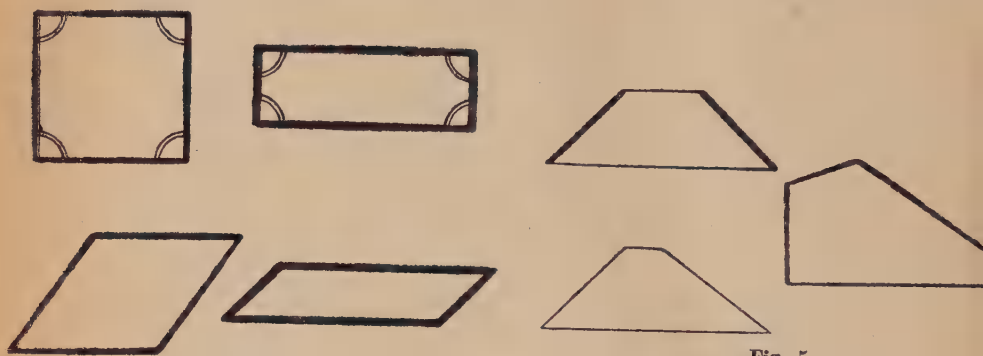


Fig. 1

Quadrat, Rechteck, Raute, Rhomboid

Fig. 5

Gleichschenkeliges Trapez,
ungleichschenkeliges Trapez, Trapezoid

vollkommene Einteilung der geradlinigen Vierseite in diese Arten durchgeführt hat, indem er wie bei den Dreiecken so auch hier sieben Arten annimmt, so konnte EUKLID keine Einteilung in Parallelo-
 10 gramme und Nichtparallelogramme geben, nachdem er weder von den Parallelen gesprochen, noch über das Parallelogramm selbst uns aufgeklärt hat. Alle Trapeze aber und Trapezoiden benannte er mit dem gemeinsamen Namen Trapeze, sie scheidend*) von jenen vier Arten, denen das Charakteristikum der Parallelogramme in Wahrheit zukommt, die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten und Winkel. Denn das Quadrat, das Rechteck und die Raute haben die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich; er fügte aber lediglich beim Rhomboid diese Bemerkung bei, damit er es nicht durch bloße Verneinungen kennzeichne, indem er es weder als gleichseitig, noch
 20 als rechtwinklig erklärte. Wo uns nämlich keine speziellen Ausdrücke zu Gebote stünden, müßten wir uns der allgemeinen bedienen. Daß

*) Den Übersetzern ins Lateinische bereitet die Konstruktion von *περιγράφειν* mit dem bloßen Genitiv ersichtlich Unbehagen; sie ist in dem Sinne von „wegnehmen“, von „scheiden“ zwar selten, kommt aber vor.

diese Eigenschaft aber allen Parallelogrammen gemeinsam ist, dafür werden wir den Beweis von ihm vernehmen. Es scheint aber die Raute ein seitwärts bewegtes Quadrat, und das Rhomboid ein aus dem Gleichgewicht gebrachtes Rechteck zu sein. Deshalb unterscheiden sich die einen von den anderen nicht in Hinsicht auf die Seiten, wohl aber in Hinsicht auf die stumpfen und spitzen Winkel, während Quadrat und Rechteck rechtwinkelig sind. Denkt man sich nämlich das Quadrat oder das Rechteck an den entgegengesetzten Winkeln auseinandergezogen, so findet man, daß diese sich zusammenziehen und spitz werden, die übrigen aber sich ausdehnen und stumpf 10 erscheinen. Es scheint, daß auch der Name Rhombos von der Bewegung stamme. Denkt man sich nämlich das Quadrat in schneller Kreisbewegung, so erscheint es einem mit veränderten Winkeln, wie auch der rasch rotierende Kreis den Anschein einer Ellipse erweckt¹⁴⁹).

Bezüglich des quadratischen Vierecks selbst könnte man die Frage stellen, warum es diesen Namen erhielt und man nicht auch die anderen Vierseite als Vierecke bezeichnen kann, nachdem doch auch die Bezeichnung Dreieck allen Arten gemeinsam ist, auch den nicht-gleichwinkelligen und ungleichseitigen, und ebenso die Bezeichnung 20 Fünfeck. Unser Meister selbst freilich fügt bei jenen hinzu „gleichseitiges Dreieck“ oder „Fünfeck, das gleichseitig und gleichwinkelig ist“, da diese auch andersartig sein können. Der Ausdruck „Viereck“ aber bezeichnet ihm sofort das gleichseitige und rechtwinkelige. Der Grund hiervon ist folgender: Einzig das Quadrat stellt in Hinsicht auf die Seiten sowohl, wie auf die Winkel einen Idealfall dar. Denn jeder der letzteren ist ein Rechter und beansprucht das Winkelmaß, das weder eine Vergrößerung noch eine Verkleinerung zuläßt. In zweifacher Beziehung also bevorzugt, erhielt es mit Recht den allgemeinen Namen. Beim Dreieck aber, mag es immerhin die Winkel 30 gleich haben, sind alle spitz und beim Fünfeck alle stumpf. Mit Recht also erhielt das Quadrat, dem Gleichheit der Seiten und Rechtwinkeligkeit die letzte Vollendung geben, allein von allen Vierseiten diesen Namen. Denn den vollkommensten Arten legen wir häufig den Namen der ganzen Gattung bei.

Den Pythagoreern scheint das Quadrat mehr als die anderen Vierseite das Abbild des göttlichen Wesens in sich zu tragen. Denn die reine Seinsordnung bezeichnen sie vorzugsweise durch dieses: Die Rechtwinkeligkeit bringt nämlich das Unwandelbare, und die 30

Gleichheit die beharrende Kraft zum Ausdruck. Denn die Bewegung entstammt der Ungleichheit, die Ruhe der Gleichheit. Die Ursachen der festen Begründung des Alls und seiner lauterer und unerschütterlichen Kraft werden demnach mit Recht durch die Figur des Quadrats wie durch ein Bild veranschaulicht. Außer diesen nennt auch PHILOLAOS, einem anderen Gedankengange folgend, den Winkel des Quadrats den Winkel der Rhea, Demeter und Hestia. Weil nämlich das Quadrat die Erde begründet und ihr unmittelbares Element ist, wie wir von TIMAIOS erfahren haben, die Erde aber von allen diesen

10 Göttinnen Ausflüsse und zeugende Kräfte empfängt, weihte er mit Recht den Winkel des Quadrats diesen lebenspendenden Göttinnen. Manche nennen ja die Erde auch Hestia und Demeter und erklären, sie habe Anteil an der ganzen Rhea; und wirklich ruhen in ihr alle zeugenden Ursachen in erdhafter Weise. PHILOLAOS behauptet also, der quadratische Winkel umfasse die eine Vereinigung dieser göttlichen Ordnungen. Man vergleicht das Quadrat aber auch mit der Tugend insgesamt, insofern es vier Rechte hat, jeden einzelnen von höchster Vollendung; so bezeichnen wir auch jede Tugend als vollkommen und unabhängig, als Maß und Ziel des Lebens und alle

20 Mittelmäßigkeiten als stumpf und spitz. Es darf uns aber nicht entgehen, daß PHILOLAOS den Dreieckswinkel vier Göttern weihte, den quadratischen hingegen drei, womit er ihre wechselseitige Durchdringung anzeigen wollte und jene Verbindung von allem mit allem, des Ungeraden mit dem Geraden, und des Geraden mit dem Ungeraden. Die vierfache Dreizahl und dreifache Vierzahl, die teilhaben an dem fruchtbaren und schöpferischen Guten, enthalten in sich die ganze Welt des Geschaffenen. Die von ihnen abgeleitete Zwölfzahl erhebt sich zu der einzigen Monade¹⁵⁰) der Herrschaft des Zeus. Denn der Winkel des Zwölfecks ist nach einem Worte des PHILO-

30 LAOS dem Zeus eigen, da Zeus in einer einzigen Einheit die ganze Zwölfzahl in sich schließt. Auch bei PLATON beherrscht Zeus die Zwölfzahl und leitet das All in unumschränkter Weise*).

Soviel war zu sagen über die Vierseite, indem wir einerseits die Meinung des Verfassers der „*Elemente*“ erläuterten, andererseits denen, die nach Erkenntnis des intelligiblen und unsichtbaren Seins streben, Winke gaben für tiefere wissenschaftliche Unter-

37 suchungen.

*) Hier ist die Stelle aus PLATONS „*Phaidros*“, 247a gemeint. — M. St. —

35. Definition: Gerade sind parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und auf beiden Seiten ins Unendliche verlängert, in keiner Richtung miteinander zusammentreffen¹⁵¹).

Die für die Parallelen geltenden Grundgesetze und die Akzidentien, an denen man sie erkennt, werden wir weiterhin kennenlernen; das Wesen der parallelen Geraden aber definiert EUKLID mit obigen Worten. Sie müssen also, sagt er, in einer Ebene liegen und dürfen, nach beiden Seiten verlängert, nicht miteinander zusammentreffen, sondern müssen ins Unendliche gehen. Denn auch die Nichtparallelen blieben, bloß eine Strecke weit verlängert, ohne 10 Berührung; aber daß sie, ins Unendliche verlängert, trotzdem nicht zusammentreffen, ist charakteristisch für die Parallelen und nicht bloß einfach das, sondern daß sie, nach beiden Richtungen ins Unendliche verlängert, gleichwohl nicht zusammentreffen. Denn auch bei den Nichtparallelen ist eine Verlängerung ins Unendliche nach einer Richtung denkbar, nach der anderen aber nicht. Denn nähern sie sich auf der einen Seite, so stehen sie auf der anderen um so weiter voneinander ab. Der Grund hierfür liegt darin, daß zwei Gerade eine Fläche nicht umschließen können. Wenn sie aber auf beiden 20 Seiten zusammenliefen, so würde dieser Fall eintreten. Mit Recht wurde auch der Zusatz mit aufgenommen, daß die Geraden in derselben Ebene liegen. Denn läge die eine unten, die andere aber darüber, so sind sie in jeder Lage ohne Berührung miteinander, sind aber deshalb noch keine Parallelen¹⁵²) (<windschiefe Geraden>). Es muß also ein und dieselbe Ebene sein; die Linien müssen nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert werden und dürfen in keiner Richtung miteinander zusammentreffen. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann handelt es sich um parallele Gerade.

Auf diese Weise definiert EUKLID die parallelen Geraden. Po- 30 SEIDONIOS aber sagt, parallel sind die Geraden, die in einer Ebene sich weder nähern noch entfernen, sondern alle Senkrechten gleichhaben, die von den Punkten der einen zur anderen gezogen werden¹⁵³). Diejenigen, die immer kleinere Senkrechte bilden, laufen zusammen; die Senkrechte kann nämlich die Höhe der Orte und die Abstände der Linien bestimmen. Sind daher die Senkrechten gleich, so sind auch die Abstände der Geraden gleich; werden sie aber größer oder kleiner, so vermindert sich auch der Abstand, und sie laufen auf der Seite zusammen, wo die Senkrechten kürzer sind.

Man muß aber wissen, daß die Eigenschaft des Nichtzusammenlaufens die Linien nicht unbedingt parallel macht: Es fallen auch die Peripherien konzentrischer Kreise nicht zusammen, sie müssen vielmehr ins Unendliche verlängert werden. Dies kommt aber nicht bloß bei Geraden vor, sondern auch bei anderen Linien. Man kann sich Schraubenlinien, die Geraden umschrieben sind¹⁵⁴), in solcher Anordnung denken, daß sie mit den Geraden, verlängert ins Unendliche, niemals zusammenlaufen. Die einen schied von vorneherein GEMINOS richtig von den anderen*), weil von den Linien
 10 die einen begrenzt sind und eine Figur umschließen, wie der Kreis, die Linie der Ellipse, die Cissoide und viele andere; die anderen unbegrenzt und ins Unendliche verlängert, wie die Gerade, der Schnitt des rechtwinkligen und des stumpfwinkligen Kegels und die Muschellinie¹⁵⁵). Von den ins Unendliche verlängerten umschließen wiederum die einen keine Figur, wie die Gerade und die genannten konischen Schnitte, die anderen laufen zusammen und bilden eine Figur, um dann weiter ins Unendliche hinauszugehen. Von diesen sind die einen Asymptoten, die, wie sie auch verlängert werden, nie zusammentreffen, Symptoten hingegen diejenigen, die einmal
 20 zusammenlaufen. Von den Asymptoten liegen die einen in einer Ebene miteinander, die anderen nicht. Von Asymptoten, die in einer Ebene liegen, wahren die einen immer den gleichen Abstand voneinander, die anderen verringern immer mehr den Abstand gegenüber der Geraden, wie die Hyperbel und die Konchoide. Diese bleiben nämlich bei steter Verringerung des Abstandes immer Asymptoten; sie nähern sich zwar einander, aber nie gänzlich. Es ist das das unwahrscheinlichste Theorem in der Geometrie, das eine Zuneigung gewisser Linien zeigt, die nie in ein Zusammenlaufen übergeht. Von den Linien aber, die stets den gleichen Abstand wahren, sind die
 30 Geraden, die ihren Abstand nie verringern und in einer Ebene liegen, Parallelen.

Soviel haben wir von dem Schögeist GEMINOS zur Erläuterung
 33 unseres Gegenstandes ausgewählt.

*) 176, 26: *παρὰ τούτων* versieht FRIEDLEIN mit einem Fragezeichen. Es ist aber nicht zu beanstanden. Wohl nimmt *παρὰ* in der Regel nur den Genitiv von Personen zu sich, doch nicht ausschließlich. Es sei nur an die HOMERISCHE Wendung erinnert: *ἔλπος ὅξδ' ἐρυσσάμενος παρὰ μηροῦ*.

**Des Proklus Diadochus 3. Buch des Kommentars
zum 1. Buch von Euklids „Elementen“**

Postulate und Axiome

Die geometrischen Prinzipien zerfallen in drei Teile, die Definitionen, die Postulate und die Axiome. Nachdem wir deren Unterschied voneinander schon früher dargelegt haben, soll es jetzt unsere Aufgabe sein, im besonderen und genauer uns zu verbreiten über das Postulat und das Axiom, da wir hierüber jetzt vorzugsweise zu sprechen haben. Denn die Voraussetzungen und die sog. Definitionen haben wir im Vorausgehenden behandelt.

Gemeinsam ist nun den Axiomen und den Postulaten, daß sie keiner Begründung und keiner geometrischen Beweise bedürfen, sondern daß sie als bekannt angenommen werden und Prinzipien 10 sind für das Folgende¹⁵⁶). Sie unterscheiden sich aber voneinander ebenso, wie die Lehrsätze von den Aufgaben verschieden sind. Wie wir nämlich bei den Lehrsätzen die Aufgabe stellen, die Folgerung aus den Voraussetzungen einzusehen und zu erkennen, bei den Problemen aber den Auftrag erhalten, etwas zu finden und zu tun, ebenso*) wird auch bei den Axiomen das angenommen, was auf der Stelle ersichtlich ist und unserem ungeschulten Denken keine Schwierigkeiten bereitet; bei den Postulaten aber suchen wir das zu finden, was leicht zu beschaffen und festzustellen ist, den Verstand bei den Bemühungen darum nicht ermüdet, keines komplizierten 20 Verfahrens und keiner Konstruktion bedarf¹⁵⁷). Eine ohne Beweise einleuchtende Erkenntnis also und ein müheloses Finden ohne Konstruktion scheiden die Postulate und die Axiome, wie auch eine auf Beweisen beruhende Erkenntnis und das Finden des gesuchten Problems mit Hilfe einer Konstruktion die Lehrsätze von den Aufgaben schied. Denn es müssen eben in jedem Fall die Prinzipien vor den Folgerungen aus den Prinzipien durch Einfachheit, durch den Wegfall von Beweisen und durch die eigene Evidenz sich auszeichnen. Denn ganz allgemein, bemerkt SPEUSIPP, stellt der denkende Geist die einen seiner Forschungsobjekte ohne irgendwelche komplizierte 30 Gedankengänge klar heraus, richtet sie im vorhinein als Material 31

*) 179, 2: Statt *κατὰ ταῦτα* ist wohl richtiger *κατὰ ταῦτὰ* zu lesen.

für die künftige Forschung zurecht und hat einen überzeugenderen Kontakt mit ihnen als das Auge mit dem, was es sieht; andere aber, die er nicht sofort begreifen*) kann, sucht er, indem er mit wechselnder Methode zu jenen Prinzipien vordringt, als deren Folgerung zu erfassen. Die Aufgabe z. B., von einem Punkte zu einem Punkte eine Gerade zu ziehen¹⁵⁸), ist ihm etwas Selbstverständliches und Leichtes. Denn einbezogen in die Bewegung des gleichmäßigen Fließens und Ausgehens des Punktes gelangt diese mit Ausschluß jeder größeren oder geringeren Abweichung zum anderen Punkte. Wiederum wenn
 10 der eine Endpunkt der Linie bleibt, der andere sich um ihn bewegt, so hat er mühelos den Kreis beschrieben. Wenn man aber eine einzige Schraubenwindung zeichnen will, bedarf es einer umständlicheren Veranstaltung: Denn komplizierte Bewegungen sind hierzu erforderlich; und wenn einer ein gleichseitiges Dreieck konstruieren will, so bedarf es auch in diesem Falle eines methodischen Verfahrens zur Konstruktion des Dreiecks¹⁵⁹). Denn es wird der geometrische Verstand sagen, daß ich die Schraubenwindung gezeichnet habe, wenn ich mir eine Gerade vorstelle, die mit einem Endpunkt ruhig verharret, mit dem anderen sich um ihn bewegt, und dazu einen Punkt, der von dem
 20 bleibenden Endpunkt weg auf ihr sich bewegt. Denn zugleich das einen Kreis beschreibende Ende der Geraden und der Punkt, der auf der Geraden sich bewegt, werden in ihrem Zusammentreffen und Zusammenfallen eine solche Schraubenlinie bilden. Und wenn ich hinwiederum zwei gleiche Kreise zeichne und den gemeinsamen Schnittpunkt mit den Kreiszentren verbinde und von einem Zentrum zum andern eine Gerade ziehe, so werde ich das gleichseitige Dreieck erhalten. Es fehlt also viel, daß diese Aufgaben durch ein einfaches Verfahren von uns auf den ersten Blick gelöst werden. Wir müssen uns damit begnügen, ihrem Werdeprozeß zu folgen. Daß nun der-
 30 artige Lösungen leichter oder schwerer sind und durch mehr oder weniger Mittelglieder bewiesen werden, ist auf die Geschicklichkeit der damit sich Befassenden zurückzuführen; die Notwendigkeit eines Beweises aber und einer Konstruktion überhaupt hängt ab von der Eigenheit der Probleme, die der Klarheit der Postulate und Axiome
 35 entbehren. Beide also, die Forderung und das Axiom, sage ich,

*) 179, 20: Statt des hier sinnlosen *αἰεῖν* ist wohl *αἰεῖν* zu lesen, womit wir bei dem mit dem Relativsatz *ὅν ἡ διάνοια τὴν θήραν ποιεῖται* angeschlagenen Bilde bleiben.

müssen den Charakter des Einfachen und leicht Faßlichen haben; aber die Forderung trägt uns auf, zur Darlegung eines Akzidens irgendeinen Gegenstand zu beschaffen und ausfindig zu machen, der einfach und leicht zu finden ist; das Axiom hingegen, irgendein wesentliches Akzidens zu nennen, das ohne weiteres den Hörenden bekannt ist, wie z. B. daß das Feuer warm ist oder irgend eine andere Wahrheit von höchster Klarheit, deren Bezweifeln gegenüber wir sagen, es fehle ihnen an gesundem Verstand oder sie bedürften der Züchtigung¹⁶⁰). So ist die Forderung mit dem Axiom homogen, unterscheidet sich aber von ihm auf die angegebene Weise. Denn 10 beide sind unbewiesene Prinzipien; aber das erstere von der Art, das letztere von einer anderen, wie wir gesagt haben.

Nunmehr zu der Tatsache, daß die einen alles als Forderung bezeichnen wollen, wie auch sämtliche Untersuchungen als Probleme. Z. B. sagt ARCHIMEDES zu Beginn des ersten Buches „Vom Gleichgewicht“^{*)}: „Wir fordern, daß gleiche Gewichte in gleicher Entfernung im Gleichgewicht sich befinden“¹⁶¹). Aber diesen Satz möchte man eher ein Axiom nennen. Andere wieder bezeichnen alle Sätze als Axiome, wie auch alle, die eines Beweises bedürfen, als 20 Lehrsätze. Vermöge derselben Analogie sind sie nämlich allem Anschein nach von den speziellen zu den gemeinsamen Namen übergegangen. Es unterscheiden sich aber gleichwohl wie Problem und Lehrsatz, so Forderung und Axiom voneinander, wenn auch beide beweislos sind: Forderung wird im Sinne des leicht Vollziehbaren genommen, und beim Axiom ist man sich über den Charakter der leichten Einsicht einig.

GEMINOS scheidet also auf diese Weise die Forderungen von den Axiomen; andere möchten etwa sagen, daß die Forderungen der geometrischen Materie eigen sind, die Axiome hingegen <seien> der gesamten Theorie über die (Zahlen-) Quantität und (Raum-) Größe 30 gemeinsam. Denn der Satz, daß die rechten Winkel gleich sind¹⁶²), und die Aufgabe, jede begrenzte Gerade in gerader Richtung zu verlängern¹⁶³), sind dem geometrischen Fachmann bekannt; der Satz aber: Sind zwei Größen derselben Größe gleich, so sind sie auch unter sich gleich¹⁶⁴), ist eine allgemeine Einsicht, deren sich der Arithmetiker bedient wie jeder Sachkundige, indem er die allgemeine 36

*) Die unmögliche Leseart τῶν ἀνισορροπιῶν hat HULTSCH dahin berichtigt, daß zu lesen ist: τοῦ ἁ ἰσορροπιῶν s. PAULY-WISSOWA unter ARCHIMEDES, 529, 50–57.

Wahrheit seinem Gegenstande anpaßt. ARISTOTELES aber behauptet, wie wir schon früher dargelegt haben, die Forderung sei beweisbar und werde darum nicht (ohne weiteres) vom Hörer zugestanden, gleichwohl aber als Prinzip angenommen; das Axiom aber sei an sich unbeweisbar, und alle würden es vermöge ihrer seelischen Veranlagung zugestehen, wenn auch einige aus Vorliebe für Disputationen Zweifel dagegen äußerten¹⁶⁵).

Nachdem*) also diese drei Definitionen vorliegen, so ist klar, daß nach der ersten, die lediglich durch das Finden und Erkennen
 10 die Forderung vom Axiom scheidet, der Satz, alle rechten Winkel sind gleich¹⁶⁶), keine Forderung ist, ebensowenig der fünfte, der besagt: Wenn eine Gerade mit zwei anderen Geraden zusammentrifft und dabei die inneren Winkel auf derselben Seite kleiner als zwei Rechte bildet, dann laufen die Geraden in ihrer Verlängerung nach der Seite zusammen, wo die Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte¹⁶⁷). Denn dieser Satz wird nicht zu einer Konstruktion verwendet, noch stellt er die Forderung, etwas zu finden, sondern er klärt über ein Akzidens auf, das den rechten Winkeln und Geraden, die von Winkeln ausgehen, die kleiner sind als zwei Rechte, gemeinsam
 20 ist. Nach der zweiten Definition¹⁶⁸) enthält der Satz, daß zwei Gerade keine Fläche umschließen, den auch jetzt einige zu den Axiomen rechnen, kein Axiom. Denn er gehört zur geometrischen Materie wie der Satz von der Gleichheit aller rechten Winkel**)¹⁶⁹). Nach der dritten, der ARISTOTELISCHEN Definition, sind alle Sätze, die durch ein Beweisverfahren begründet werden, Forderungen; Sätze, die keines Beweises fähig sind, Axiome. Es war also ein vergebliches Unterfangen des APOLLONIOS, Beweise für die Axiome zu liefern. Treffend hat ja GEMINOS darauf hingewiesen, daß die einen auch für unbeweisbare Sätze Beweise erklügeln wollten und darauf aus-
 30 gingen, mit Hilfe von weniger bekannten Mittelgliedern allbekannte Wahrheiten zu beweisen: Dieser Gefahr ist APOLLONIOS erlegen bei dem Bestreben, die Wahrheit des Axioms zu beweisen, das besagt, daß Größen, die einer dritten gleich sind, auch unter sich gleich sind¹⁷⁰), während andere auch Sätze, die eines Beweises bedürfen, 35 unter die unbeweisbaren aufgenommen haben, wie EUKLID selbst

*) Im folgenden überprüft PROKLUS die Forderungen und Axiome, wie sie in EUKLIDS „Elementen“ zusammengestellt und überliefert sind.

**) 183, 10 setzt FRIEDLEIN nach γωνίας wieder einmal ein Komma statt eines Punktes.

die 4. und 5. Forderung*)¹⁷¹⁾. Denn von letzterer behaupten manche, sie bedürfe wegen ihrer Unsicherheit eines Beweises. Wie sollte es auch nicht lächerlich sein, Sätze zu den unbeweisbaren zu zählen, deren Umkehrungen beweisbare Lehrsätze sind¹⁷²⁾? Denn daß die Innenwinkel zweier zusammenstoßender Geraden kleiner sind als zwei Rechte, beweist EUKLID selbst in jenem Lehrsatz, daß in jedem Dreieck zwei Winkel, man mag sie nehmen wie immer, <zusammen> kleiner sind als zwei Rechte¹⁷³⁾. Auch daß nicht in jedem Falle ein Winkel, der einem Rechten gleich ist, ein Rechter ist, läßt sich klar beweisen¹⁷⁴⁾. Es ist demnach, sagt GEMINOS, nicht zuzugeben, daß 10 Sätze, die zu diesen die Umkehrung bilden, unbeweisbar sind. Es scheint also nach dessen Aufstellung, daß drei der Sätze Forderungen sind, die beiden anderen aber des Beweises durch die Wissenschaft bedürfen, sie selbst und ihre Umkehrungen; die Aufnahme des Satzes aber, daß zwei Gerade keine Fläche umschließen, unter die Axiome, erscheint zwecklos, wenn er erst durch einen Beweis überzeugend <dargetan wird>. Soviel über den Unterschied der Forderungen und Axiome.

Von den Axiomen hinwiederum sind die einen der Arithmetik eigen, die anderen der Geometrie, eine weitere Gruppe ist beiden gemeinsam. Denn daß jede Zahl durch die Einheit gemessen wird, 20 ist ein arithmetisches Axiom; daß gleiche Strecken einander kongruent sind, und daß jede <Raum->Größe ins Unendliche teilbar ist, sind geometrische Axiome¹⁷⁵⁾; der Satz aber, daß Größen, die einer dritten Größe gleich sind, auch unter sich gleich sind¹⁷⁶⁾, und was sonst noch von der Art ist, ist beiden gemeinsam. Es benützen aber beide diese Sätze, soweit ihr Gegenstand es erfordert, die Geometrie bei den Größen, die Arithmetik bei den Zahlen. Ebenso sind auch von den Forderungen die einen den einzelnen Disziplinen eigen, die anderen allen gemeinsam. Eine Zahl z. B. in ihre kleinsten Teile <Primfaktoren> zu zerlegen, wird man als eine Forderung bezeichnen¹⁷⁷⁾, 30 die der Arithmetik eigen ist; jede begrenzte Gerade aber in gerader Richtung zu verlängern, als eine Forderung der Geometrie¹⁷⁸⁾; ein Quantum aber ins Unendliche zu vermehren, ist eine beiden gemeinsame Forderung. Denn die Zahl ebenso wie die Größe kommen hierfür in Betracht.

35

*) Warum FRIEDLEIN τὸ τε πέμπτον αἴτημα καὶ τὸ τέταρτον stellt, ist nicht ersichtlich. BAROCIUS hat die natürliche Reihenfolge. Diese muß stehen, weil das folgende τοῦτο sich nach dem Zusammenhang nur auf die 5. Forderung <Parallelenpostulat> beziehen kann.

1.—3. Forderung: *Es sei die Forderung gestellt, von jedem beliebigen Punkte zu jedem beliebigen <anderen> Punkte eine Gerade zu ziehen; eine begrenzte Gerade ohne Unterbrechung in gerader Richtung zu verlängern; und um jeden Mittelpunkt mit jedem beliebigen Radius einen Kreis zu beschreiben*¹⁷⁹⁾.

Diese drei Sätze müssen wir ihrer Klarheit wegen und weil sie verlangen, etwas auszuführen, nach GEMINOS unbedingt unter die Forderungen einreihen. Denn die Möglichkeit, von jedem beliebigen Punkt zu jedem beliebigen Punkt eine Gerade zu ziehen, folgt daraus, 10 daß die Linie ein Fließen des Punktes ist, und die Gerade ein gleichgerichtetes und unablenkbares Fließen. Stellen wir uns also vor, der Punkt führe eine gleichgerichtete und kürzeste Bewegung aus, so werden wir zu dem anderen Punkte hingelangen, und die erste Forderung ist erfüllt ohne komplizierten Denkvorgang unsererseits. Stellen wir uns nun in gleicher Weise eine durch einen Punkt begrenzte Gerade vor, deren Endpunkt eine kürzeste und gleichgerichtete Bewegung ausführt, so ist die zweite Forderung auf leichtem und einfachem Wege verwirklicht. Stellen wir uns dagegen vor, die begrenzte Gerade verharre mit dem einen Ende in Ruhe, mit dem 20 anderen bewege sie sich um den ruhenden Endpunkt, so wäre das die dritte Art der Forderung¹⁸⁰⁾. Denn Mittelpunkt ist der ruhende Punkt, Radius aber die Strecke. Denn ihrer Größe entspricht die Größe des Abstandes des Mittelpunktes von jedem Teil der Peripherie.

Würde aber jemand Schwierigkeiten geltend machen durch die Frage, wie wir Bewegung hineintragen in die unbewegte geometrische Welt und wie wir das Ungeteilte bewegen: Denn das sei völlig undenkbar, so wollen wir ihn auffordern, sich nicht allzu sehr zu grämen in Erinnerung an unsere früheren Ausführungen am Anfang über die Vorstellungen in der Phantasie*), daß nämlich die Ideen alle Objekte 30 des vermittelnden Denkens dort aufzeichnen als Bilder der Begriffe, die es in sich schließt. Denn die unbeschriebene Tafel ist dieser niedrigste und leidensfähige Nus. Aber leider bedeutet uns dieser Sachverhalt nichts. Denn der Nus, der die Ideen aus anderer Quelle empfängt, empfängt sie durch Bewegung. Die Bewegung müssen wir 35 uns aber nicht körperlich, sondern vorstellungsmäßig vorstellen, und

*) Ich halte mich bei diesem ziemlich verworren überlieferten Satz an FRIEDLEINS Text; nur erlaube ich mir zur Erzielung eines glatteren Sinnes eine kleine Umstellung und beziehe τῶν ἐν φαντασίᾳ κειμένων zu τῶν ἐν ἀρχῇ προαποδεδειγμένων.

wir dürfen nicht zugeben, daß das Ungeteilte körperlicher Bewegung unterworfen sei, daß es vielmehr Bewegungen der Phantasie unterliege. Denn der unteilbare Nus bewegt sich, wenn auch nicht in örtlicher Weise; und auch die Vorstellung hat entsprechend ihrem unteilbaren Sein eine ihr eigene Bewegung. Wir aber schauen nur auf die körperliche Bewegung und verwerfen die Bewegung bei den unausgedehnten Wesen. Vom körperlichen Orte und den äußeren Bewegungen ist das Ungeteilte also frei; aber bei ihnen ist eine andere Art der Bewegung, und ein anderer Ort diesen Bewegungen zugeordnet zu sehen, da wir ja auch behaupten, der Punkt habe eine Lage in der Vorstellung, und nicht darnach fragen, wie das, was irgendwie sich bewegt und vom Orte umschlossen wird, noch ungeteilt bleiben kann. Denn der Ort des Ausgedehnten ist eben ausgedehnt; <der> des Ungeteilten aber unausgedehnt. Andere sind also die speziell geometrischen Seinsformen, andere die Wesen, die von ihnen ihr Sein empfangen, und anders ist die Bewegung der Körper und der Phantasievorstellungen, und wiederum anders ist der Ort des Ausgedehnten, anders der des Ungeteilten. Das muß man auseinanderhalten und darf nicht das Wesen der Dinge chaotisch durcheinanderwerfen. 10

Es scheint aber die erste dieser drei Forderungen in Bildern 20 uns klar zu legen, wie das Seiende von seinen ungeteilten*) Ursachen umschlossen und begrenzt wird, und daß es schon vor Beginn seiner Existenz allseits von diesen umfaßt ist. Denn bestehen die Punkte, so ist die Gerade die Verbindung von dem einen zu dem andern und wird von ihnen begrenzt und zwischen ihnen eingeschlossen; die zweite Forderung <zeigt>, wie die Dinge, verbunden mit den eigenen Prinzipien, zu allen Ausgängen hervorgehen, wobei sie den Zusammenhang mit jenen wahren und von ihnen sich nicht losreißen lassen, aber vermöge der unendlichen Kraft der Ursache veranlaßt werden, nach allen Richtungen auszugehen; die dritte Forderung endlich 30 zeigt uns, wie die Ausgänge wieder zurückkehren zu den eigenen Prinzipien. Denn die Drehung des sich Bewegenden um den bleibenden Punkt, die den Kreis ausmacht, sinnbildet die Rückkehr im Kreise.

Man muß aber wissen, daß die Verlängerung ins Unendliche nicht bei allen Linien möglich ist, nicht bei der Kreislinie, der Cissoide¹⁸¹⁾ und überhaupt nicht bei denen, die eine Figur bilden, ja 37

*) Ich lese nicht ἀμερτέτοις, sondern mit GRYNAEUS ἀμερίστοις οὐσι.

nicht einmal bei allen, die keine Figur bilden. Denn nicht einmal die Schraubenlinie mit einer Windung geht ins Unendliche, da sie nur zwischen zwei Punkten besteht, noch irgendeine andere von den so entstehenden Linien. Ja, es ist nicht einmal möglich, von jedem beliebigen Punkte zu jedem beliebigen Punkte jede beliebige Linie zu ziehen. Denn nicht jede kann zwischen beliebigen Punkten bestehen. Soviel hiervon. Nun wollen wir uns dem Folgenden zuwenden.

4. Forderung, daß alle rechten Winkel einander gleich sind¹⁸²⁾.

- 10 Geben wir zu, daß dieser Satz einleuchtend ist und keines Beweises bedarf, so ist er nach GEMINOS keine Forderung, sondern ein Axiom. Denn er spricht von einem wesentlichen Akzidens der rechten Winkel, fordert aber nicht, durch einfaches Nachdenken etwas auffindig zu machen. Aber auch nach der Einteilung des ARISTOTELES handelt es sich nicht um eine Forderung. Denn die Forderung bedarf nach ihm irgendeines Beweises. Wenn wir ihn aber als beweisbar erklären und seinen Beweis ergründen wollen, wird er nach GEMINOS trotzdem nicht unter die Forderungen eingereiht werden können. Es ist also schon nach unseren Gemeinbegriffen die Gleichheit
20 der rechten Winkel klar: Da er die Bedeutung einer Einheit oder einer Grenze*) hat gegenüber der unendlichen Vergrößerungs- und Verkleinerungsmöglichkeit der Winkel nach rechts und links, so ist er mit einem jeden Rechten gleich. Denn den ersten rechten Winkel haben wir
30 so gebildet, daß wir die Winkel zu beiden Seiten der auf einer Geraden stehenden Geraden gleich machten. Soll man hierfür auch einen geometrischen Beweis vorlegen, so seien ABC und DEF zwei rechte Winkel. Von ihnen

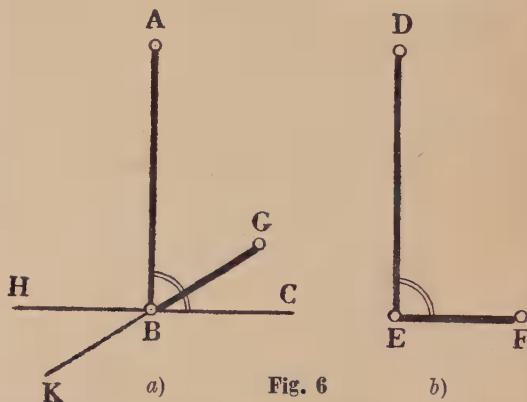


Fig. 6

*) 188, 13 muß *ὁμον* wohl als Druckfehler betrachtet und in den Genitiv *ὁμων* verändert werden. BAROCIUS übersetzt: *unitatis vel termini rationem*.

behaupte ich nun also, daß sie gleich sind; andernfalls wäre der eine größer; nehmen wir an, der bei B. Deckt sich nun DE mit AB, so muß EF einwärts fallen wie BG*) und man verlängere BC bis zu dem Punkte H. Da nun der Winkel ABC ein Rechter ist, aber ebenso auch ABH, sind beide einander gleich**): Denn unter den Definitionen haben wir eine des Inhalts, daß der rechte Winkel gleich ist seinem Nebenwinkel¹⁸³). Der Winkel ABH ist also größer als ABG. Wiederum werde BG verlängert gegen K. Da nun ABG ein rechter Winkel ist, so ist deshalb auch der Nebenwinkel ABK ein Rechter und gleich dem Winkel ABG. Der Winkel ABK ist also 10 gleich dem Winkel ABG, so daß der Winkel ABH zugleich kleiner, aber auch***) größer ist als der Winkel ABG, was unmöglich ist. Es ist also kein rechter Winkel größer als ein anderer Rechter.

Dieser Beweis wurde auch von anderen Erklärern geführt und bedurfte keiner besonderen Mühe. PAPPUS aber machte uns richtig darauf aufmerksam, daß die Umkehrung dazu nicht mehr stimmt, daß ein dem Rechten gleicher Winkel in jedem Falle ein Rechter sei¹⁸⁴); nur wenn er ein geradliniger Winkel ist, sei er unbedingt ein Rechter; es könne aber auch ein Kreiswinkel gleich einem Rechten nachgewiesen werden, und es sei klar, daß wir einen solchen nicht 20 mehr als Rechten bezeichnen. Denn bei der Einteilung der geradlinigen Winkel nahmen wir den Rechten und ließen ihn entstehen durch eine Gerade, die unverändert senkrecht steht auf der Grundlinie, so daß also der dem Rechten gleiche Winkel nicht unbedingt ein Rechter ist, er sei denn zugleich auch geradlinig. Man denke sich z. B. <Fig. 7> zwei gleiche Strecken AB und BC, die einen rechten Winkel bei B bilden und über ihnen zwei gleiche Halbkreise beschrieben mit Zentrum und Radius. Da die Halbkreise gleich sind, werden sie sich miteinander decken, und der Winkel EBA ist gleich dem Winkel FBC. Beiden gemeinsam liege an der übrige Winkel ABF. 30 Der ganze rechte Winkel ist also gleich dem Mündchenwinkel EBF und gleichwohl ist der Mündchenwinkel kein Rechter. Ist der 32

*) 189, 1: Die richtige Lesart hat hier wieder GRYNÆUS, der *πιστέτω*, nicht *πιστεύω* schreibt.

**) 189, 3: Mit *καὶ ἴσαι ἀλλήλαις* beginnt (auch bei BAROCIUS) der Nachsatz; in der nächsten Zeile ist nach *τῇ ἐφεξῆς* ein Punkt zu setzen. Z. 5 ist statt ABC, ABG zu lesen.

***) 189, 9 ist natürlich nach *ἀλλὰ* unbedingt aus GRYNÆUS das *καὶ* herüberzunehmen.

Winkel ABC ein spitzer <Fig. 8> oder ein stumpfer <Fig. 9>, so läßt sich auf die gleiche Weise der Mönchenwinkel als ihm gleich nachweisen. Denn dies ist die Art der durch Kreislinien gebildeten Winkel, die mit den geradlinigen übereinstimmt. Freilich muß man soviel wissen: Beim rechten und stumpfen Winkel muß man den Zwischenwinkel der Geraden AB und der Peripherie BF hinzufügen,
 10 beim spitzen Winkel aber wegnehmen. Denn die Gerade AB schneidet die Peripherie BF. Für beide Fälle seien die Zeichnungen gegeben. Dies sei zum Beweise dafür niedergeschrieben, daß alle rechten Winkel einander gleich sind, daß aber nicht in

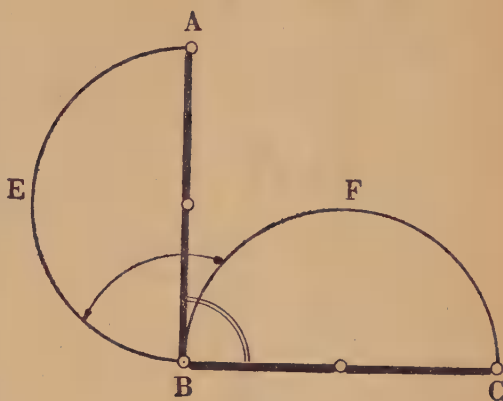


Fig. 7

„Mönchenwinkel“

20 jedem Falle ein dem Rechten gleicher Winkel ein Rechter ist. Denn wenn er kein geradliniger wäre, wie könnte man einen solchen einen rechten nennen?

Es geht aber auch aus dieser Forderung klar hervor, daß der rechte Winkel der Gleichheit verwandt ist, wie der spitze und stumpfe der Ungleichheit. Denn der rechte Winkel ist wesentlich der Gleich-
 26 heit zugeordnet: Denn beide unterstehen der Grenze wie auch die

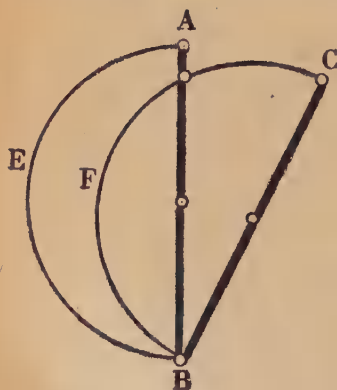


Fig. 8

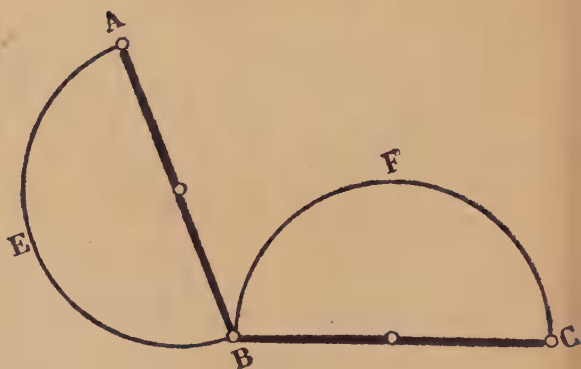


Fig. 9

Ähnlichkeit; der spitze und stumpfe Winkel aber der Ungleichheit, wie auch die Unähnlichkeit. Denn <letztere> alle kommen von der Unbegrenztheit her. Daher kommt es auch, daß die einen auf die Quantität der Winkel schauen und den Rechten gleich dem Rechten nennen, die anderen aber im Hinblick auf die Qualität von Ähnlichkeit sprechen: Denn was bei den Quantitäten die Gleichheit, das ist bei den Qualitäten die Ähnlichkeit.

5. Forderung: *Wenn eine Gerade zwei andere schneidet und dabei die inneren Winkel, die nach derselben Seite liegen, kleiner als zwei Rechte bildet, so müssen die Geraden, ins Unendliche verlängert, auf 10 der Seite sich schneiden, wo die Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte¹⁸⁵⁾ <Parallelenpostulat>.*

Dieser Satz ist aus der Reihe der Forderungen völlig zu streichen¹⁸⁶⁾; denn er ist ein Lehrsatz mit vielen Schwierigkeiten, die zu lösen PTOLEMAIOS in einem Buche sich als Aufgabe stellte^{186a)}. Es bedarf zu seinem Beweise vieler Definitionen und anderweitiger Lehrsätze und seine Umkehrung beweist EUKLID selbst als Lehrsatz¹⁸⁷⁾. Vielleicht lassen sich aber einige täuschen und möchten auch ihn in die Forderungen einreihen wollen, da er durch die Verkleinerung der zwei rechten Winkel ohne weiteres die Überzeugung 20 bewirkt, daß die beiden Geraden zusammenstreben und zusammen treffen. Mit Recht hielt ihnen GEMINOS die Behauptung entgegen, wir hätten von den Koryphäen unserer Wissenschaft selbst gelernt, bei der Aneignung der geometrischen Sätze kein Gewicht zu legen auf wahrscheinliche Phantasievorstellungen. Auch ARISTOTELES sagt*), von einem Redner Beweise fordern, sei das Gleiche, wie von einem Mathematiker Wahrscheinlichkeitsgründe hinzunehmen, und der PLATONISCHE SIMMIAS behauptet**): „Ich weiß, daß diejenigen, die ihre Beweise auf Wahrscheinlichkeiten gründen, leere Schwätzer sind“. Auch in unserem Falle ist demnach bei Verminderung der 30 zwei Rechten das Zusammenstreben der Geraden wirklich und notwendig; daß aber die zusammenstrebenden weiterhin bei ihrer Verlängerung sich einmal schneiden werden, ist nur wahrscheinlich, nicht notwendig, wenn nicht eine Begründung den Nachweis erbringt, daß dies bei den Geraden zutrifft. Denn daß es gewisse Linien gibt, die ins Unendliche sich einander nähern, aber nie zusammen- 36

*) *Nikomachische Ethik* I. 1094b.

**) *Phaidon* 92d.

fallen, mag unwahrscheinlich, ja widersinnig klingen; gleichwohl ist es Tatsache, die bei anderen Arten der Linien festgestellt worden ist¹⁸⁸). Wäre nun nicht auch bei den Geraden möglich, was bei jenen Linien vorkommt? Denn bis wir durch einen Beweis die Sache endgültig geklärt haben, lassen die Feststellungen bei anderen Linien die Phantasie unsicher hin- und herschwanken. Wenn aber auch die Gründe, die gegen eine Vereinigung sprechen würden, starken Eindruck machten, wie sollten wir nicht vielmehr dieses bloß Wahrscheinliche und Unbegründete von unserer Annahme ausschließen?

- 10 Soviel geht hieraus klar hervor, daß wir uns nach einem Beweis für den vorliegenden Lehrsatz umsehen müssen, und daß er mit der Eigenart der Forderungen nichts gemein hat. Wie er aber zu beweisen ist und durch welche Gründe die gegen ihn vorgebrachten Einwände zu beseitigen sind, ist dann zu sagen, wenn der Verfasser der „*Elemente*“ seiner Erwähnung tun will, sich seiner wie einer evidenten Wahrheit bedienend. Denn dann ist es notwendig, zu zeigen, daß seine Evidenz nicht ohne Beweis einleuchtet, sondern erst durch Beweise klar wird¹⁸⁹).

-
- 1.—5. Axiom: Sind <zwei> Größen einer dritten gleich, so sind sie auch
20 unter sich gleich; fügt man Gleiches zu Gleichem hinzu, so sind auch die Summen gleich; und nimmt man Gleiches von Gleichem weg, so sind auch die Reste gleich; das Ganze ist größer als sein Teil; und das Kongruente ist einander gleich¹⁹⁰).

Dies sind die von allen als unbeweisbar erklärten Axiome, insofern ihre Richtigkeit von allen anerkannt und von niemand in Zweifel gezogen wird. Häufig nämlich werden auch die Lehrsätze schlechthin Axiome genannt, gleichviel welcher Art sie sind, ob sie in strengem Sinne unmittelbar überzeugen, oder ob sie irgendeiner Erläuterung bedürfen; und die Stoiker nennen für gewöhnlich jeden
30 einfachen Aussagesatz ein Axiom, und wenn sie dialektische Lehrbücher abfassen, so sagen sie, sie erörterten Axiome*). Manche
32 aber scheiden das Axiom genauer von den übrigen Aussagesätzen

*) Der Text FRIEDLEINS bei diesem Satze ist sinnlos und paßt absolut nicht in den Zusammenhang. Ich halte mich an BAROCIUS, der übersetzt: *cumque dialecticas artes scribunt, de pronuntiatis disserere dicunt*. Damit ist der Zusammenhang gewahrt.

und bezeichnen damit den unmittelbar und von selbst überzeugenden und einleuchtenden Satz; so verstehen es auch ARISTOTELES und die Mathematiker. Nach ihnen sind nämlich Axiom und Gemeinbegriff identisch. Es liegt uns also völlig ferne, den Mathematiker APOLLONIOS zu loben, der, ganz im Gegensatz zu EUKLID, auch für die Axiome vermeintliche Beweise geschrieben hat^{190a}). Denn wenn ARISTOTELES auch das Beweisbare zu den Forderungen zählte, so unternahm es dieser auch, für unbeweisbare Sätze Beweise zu finden. Diese Begriffe sind also in ihrem Wesen voneinander verschieden, und die Wissenschaften zerfallen ihrer Gattung nach in solche, die sich mit 10 unmittelbaren Sätzen befassen, denen wir unbedingt ob ihrer Evidenz zustimmen, und solche, die Beweise verwenden, die die Prinzipien von ersteren empfangen und dann in der erforderlichen Weise für die eigenen Schlußfolgerungen davon Gebrauch machen. Daß aber der Beweis, den APOLLONIOS nach seiner Überzeugung für die

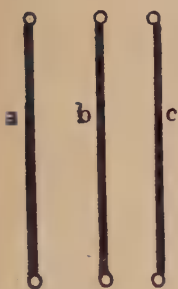


Fig. 10

erste Forderung gefunden hat, trotzdem ein Mittiglied hat, das nicht einleuchtender ist als die Forderung <selbst>, wenn nicht gar ein viel umstritteneres, das kann man erkennen, wenn man ihm auch nur ein wenig sein Augenmerk schenkt. 20 „Es sei nämlich, sagt er, die Linie a der Linie b gleich und diese der Linie c, dann behaupte ich, daß a auch c gleich ist. Denn da a gleich b ist, nimmt es denselben Platz ein mit ihm, und da b gleich c ist, so nimmt es auch den gleichen Platz wie dieses ein. Auch a nimmt also den gleichen Platz ein wie c.

Sie sind also einander gleich.“ Hierbei muß man also im vorhinein zwei Annahmen machen, einmal, daß das, was den gleichen Platz einnimmt, einander gleich ist; sodann, daß das, was mit einem dritten den gleichen Platz einnimmt, auch untereinander den gleichen Platz 30 einnimmt¹⁹¹). Es ist aber klar, daß diese Annahmen viel weniger einleuchtend sind, als das vorliegende Axiom. Denn wieso ist das, was den gleichen Raum ausfüllt, gleich? Im ganzen oder teilweise oder in der Wesensstruktur? Deshalb ist der Übergang zum Ort durchaus nicht so leicht vorzunehmen, da dieser weniger bekannt ist, als was am Orte ist. Jedenfalls ist die Feststellung seines Wesens schwierig und umstritten. Damit wir uns also nicht in Weitschweifigkeiten verlieren, so betone ich: Alle Axiome sind als unmittelbar einleuchtend darzustellen, als von sich aus bekannt und überzeugend. 39

Wer nämlich das Klarste einem Beweise unterwirft, bekräftigt nicht seine Wahrheit, sondern vermindert die Klarheit, die wir besitzen in den vor jedem Unterricht uns eigenen Vorstellungen¹⁹²).

Soviel war also im vornhinein zu sagen über die Axiome, zur Kennzeichnung ihres eigentlichen Wesens und zur Feststellung, daß alle zur gemeinsamen Gattung der mathematischen Disziplinen gehören. Denn jedes von ihnen bewahrheitet sich nicht bloß bei den Raumgrößen, sondern auch bei den Zahlen, den Bewegungen und den Zeiten. Und das muß so sein. Denn das Gleiche und Ungleiche,
 10 das Ganze und der Teil, das Größere und das Kleinere sind den getrennten und den zusammenhängenden Quantitäten gemeinsam. Die wissenschaftliche Betrachtung der Zeiten bedarf ihrer aller als evidenten Sätze, ebenso wie die der Bewegungen, Zahlen und Größen; und bei all diesen ist das Axiom wahr, daß zwei Größen, die einer dritten gleich sind, auch unter sich gleich sind, und so auch jedes beliebige, das wir von den übrigen nehmen. Unterschiedslos gebraucht sie ein jeder entsprechend seinem eigenen Gegenstand, soweit dieser es fordert, der eine bei den Größen, der andere bei den Zahlen, der dritte bei den Zeiten. Und so gestalten sich die Folgerungen in
 20 jeder Wissenschaft individuell, wenn auch die Axiome gemeinsam sind¹⁹³).

Man darf aber auch ihre Zahl nicht aufs Äußerste beschränken, wie HERON, der nur drei anführt¹⁹⁴). Denn es ist ein Axiom, daß das Ganze größer ist als der Teil¹⁹⁵), und unser Meister verwendet es vielfach zu seinen Beweisen, und ebenso, daß alles Kongruente¹⁹⁶) gleich ist. Denn dies wird sofort bei der vierten Proposition¹⁹⁷) zum Beweise der Thesis beitragen. Ebensovienig aber darf man immer neue hinzufügen, von denen die einen nur der geometrischen Materie eigen sind, wie z. B. daß zwei Gerade keine Fläche umschließen¹⁹⁸),
 30 obwohl die Axiome, wie wir dargelegt haben, von allgemeiner Art sind, andere nur Ableitungen aus den schon aufgestellten, wie z. B. der Satz von der Gleichheit der Verdoppelung derselben Größe¹⁹⁹); denn er ergibt sich aus dem Satz: Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, ergibt wieder Gleiches²⁰⁰). Denn Größen gleich der Hälfte, die noch die Hälfte hinzunehmen, werden das zweifache eben dieser und einander gleich wegen der gleichen Hinzufügung. Auf diese Weise werden nicht bloß die Verdoppelungen, sondern auch die Verdreifachungen und die Vervielfältigungen derselben Größe alle dasselbe Resultat
 39 ergeben.

Zu diesen Axiomen, sagt PAPPUS, wird noch der Satz hinzuge-rechnet: Fügt man Ungleiches zu Gleichem, so ist der Unterschied der Summen gleich dem der hinzugefügten Teile und umgekehrt: Fügt man Gleiches zu Ungleichem, so ist der Unterschied der Summen gleich dem am Anfang²⁰¹). Auch das ist im vorhinein von sich aus klar, wird aber gleichwohl auf folgende Weise be-wiesen: Die Linien a und b seien gleich, und man füge ihnen die ungleichen Teile c und d an; c aber sei um e größer als d *). Da nun a gleich b und f gleich d , so ist $a + f$ gleich $b + d$. Denn Gleiches 10 zu Gleichem hinzugefügt, ergibt wieder Gleiches. $c + a$ ist also bloß um e größer als $b + d$, um welches auch c allein größer ist als d . Hinwiederum sind ungleich c und d , und man füge zu ihnen die gleichen Teile a und b , und der Unterschied von c zu d betrage e . Da nun a gleich b ist und $a + f$ gleich $b + d$, so ist also das Ganze $a + c$ um e größer als $b + d$, um welchen Betrag auch c größer ist als d .

Das sind also Folgerungen aus den bereits ge- 20 nannten Axiomen, die darum mit Recht in den meisten Exemplaren <der „Elemente“> weggelassen werden. Diejenigen, die EUKLID sonst noch diesen hinzufügt, sind mit den Definitionen schon vorweg-genommen und Ableitungen hiervon, wie z. B. der Satz, daß alle Teile der Fläche <Ebene> und der Geraden einander kongruent sind²⁰²): Denn das in vollkommenstem Maße Ausgedehnte hat diese Eigenschaft, und daß die Linie der Punkt trennt, die Fläche die Linie, und den Körper die Fläche: Denn alles wird durch das getrennt, wodurch es unmittelbar begrenzt wird; und daß das Unbegrenzte 30 in den Größen sich findet, bei der Hinzufügung sowohl wie bei der Wegnahme, beides aber nur der Potenz nach; denn jede zusammen-hängende Größe ist ins Unendliche teilbar und vermehrbar²⁰³). 33

*) 197, 14: Natürlich muß nach e ein Punkt stehen statt eines Kommas. Hätte FRIEDLEIN richtig interpunktiert, so wären ihm vielleicht seine Bedenken wegen des Textes vergangen, und er hätte sich sein dreimaliges Kreuz mit Fragezeichen sparen können: 197, 14. 16; 198, 1. Von einer Lücke kann keine Rede sein. Alles Erforderliche fügt sich zum Beweise zusammen.

Erster Teil der Propositionen

- Nachdem wir auch hierüber einen zusammenfassenden Überblick gegeben, wollen wir uns nunmehr*) der Behandlung der auf die Prinzipien folgenden Materie zuwenden. Denn bisher hatten wir es mit den Prinzipien zu tun. Von den Gegnern der Geometrie hat aber die große Mehrzahl gegen die Prinzipien Schwierigkeiten vorgebracht und sich um den Nachweis bemüht, daß es den obersten Prinzipien**) an einer sicheren Grundlage fehle. Ihre Einwände gehen von Mund zu Munde. Und zwar wollen die einen die gesamte Wissenschaft beseitigen und wie Feinde die Früchte in einem fremden, die
- 10 Philosophie erzeugenden Lande vernichten wie die Skeptiker***); andere sehen ihr Ziel lediglich darin, die Prinzipien der Geometrie zu erschüttern wie die Epikureer; wieder andere, die mit den Prinzipien sich schon abgefunden, behaupten, die auf die Prinzipien folgenden Sätze könnte man nicht beweisen, würde mit ihnen nicht noch etwas anderes zugestanden, was in den Prinzipien nicht vorweg mit eingeschlossen ist. Diesen Weg der Bekämpfung schlug der Sidonier ZENON ein, der zur Schule EPIKURS gehörte. Gegen ihn hat POSEIDONTIOS ein ganzes Buch geschrieben, in dem er die Unhaltbarkeit seiner ganzen Auffassung nachwies.
- 20 Doch die Einwände bezüglich der Prinzipien wurden durch unsere früheren Darlegungen so ziemlich erledigt†); zu dem Angriff ZENONS aber wollen wir ein wenig später Stellung nehmen. Nun wollen wir nur kurz die Ausführungen über die Lehrsätze und Probleme hinsichtlich ihrer Unterschiede, ihrer beiderseitigen Teile und ihrer Gliederungen rekapitulieren, um uns dann der Erläuterung der Beweise des Verfassers der „Elemente“ zuzuwenden. Dabei wollen
- 27 wir das Passendere von dem, was die Alten dazu geschrieben haben,

*) 199, 2 muß es natürlich *λοιπὸν*, nicht *λοιπῶν* heißen. *λοιπὸν* steht adverbial. *τὰ μετὰ τὰς ἀρχάς* ist eine stehende Verbindung, die keinen weiteren Zusatz zu sich nimmt.

**) 199, 5 gibt *τὰ μέγη* keinen rechten Sinn. BAROCIUS korrigiert am Rande *partes* mit *terminos*. Ihm folgend lese ich statt *τὰ μέγη: τὰ πέματα* und übersetze dementsprechend.

***) Im griechischen Text heißt es: *τῶν Ἐφεκτικῶν*. Bekanntlich übten die Skeptiker die *ἐποχή* des Urteils, um nicht in einen Irrtum sich zu verstricken.

†) An der Leseart *ἠνώθησαν* ist wohl gegen *ἠνώθησαν* festzuhalten. Es hat denselben Sinn wie z. B. in *Odysee* 24, 71: *φλόξ σε ἥρπσεν* = „die Flamme verzehrte, vernichtete dich“.

auswählen und den hemmungslosen Strom ihrer Rede eindämmen; wir wollen an Hand von sachgemäßen Methoden in die eigentlichen Fragen der Wissenschaft einführen, indem wir mehr Gewicht auf die gründliche Behandlung des Gegenstandes legen, als auf die bunte Mannigfaltigkeit der Fälle und Hilfssätze, denen wir in der Regel die unreife Jugend nachjagen sehen.

1. Proposition, 1. Problem: *Über einer gegebenen Strecke ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren*²⁰⁴).

Jede Wissenschaft ist zweifacher Art: Entweder bemüht sie sich um die unmittelbaren Sätze, oder sie liefert, gestützt auf diese, Be- 10
weise und Konstruktionen, zieht überhaupt Folgerungen aus den Prinzipien und entwickelt so ihr System. Die unsere scheidet sich bei der Behandlung der Geometrie in die Erledigung der Probleme und die Gewinnung von Lehrsätzen. Sie bezeichnet als *Probleme* Aufgaben, bei denen sie sich zum Ziele setzt, nicht Vorhandenes ausfindig zu machen, ans Licht zu bringen und zu beschaffen, als *Theoreme* aber Sätze, durch die sie das, was zutrifft oder nicht zutrifft, sehen, erkennen und beweisen will. Die ersteren nämlich stellen die Aufgabe, den Werdegang, die Lagen, Anlagen, die Zeichnungen*), die Umschreibungen und Einbeschreibungen, die Berührungsfälle 20
usw. darzustellen; die letzteren bemühen sich, die Akzidentien und den wesentlichen Befund der geometrischen Materie durch Beweise zu erhärten und festzustellen. Alle Fragen, über die man Untersuchungen anstellen kann, erörtert die Geometrie und weist die einen den Problemen, die anderen den Theoremen zu. Denn sie fragt nach dem Wesen, und zwar auf zweifache Weise; entweder nämlich nach Sinn und Begriff oder nach dem unmittelbaren Wesen des Gegenstandes²⁰⁵). Ich nenne beispielsweise den Fall, sie fragt danach, welche Linie aus gleichförmigen Teilen besteht. Durch diese Frage will sie nämlich entweder die Definition dieser Linie herausbekommen, 30
daß eine Linie aus gleichmäßigen Teilen besteht, wenn alle ihre Teile sich miteinander decken, oder sie will die Arten der gleichförmigen Linie selbst erhalten, also, daß sie entweder gerade oder kreisrund oder zylindrische Schraubenlinien sind. Außerdem fragt sie nach der Möglichkeit der Existenz an und für sich, und das vor allem in den 35

*) Mit *ἀναγραφή* ist „eine einfache Zeichnung“ gemeint; das geht hervor aus dem Kommentar zu Prop. 46, Probl. 14, S. 423.

Erörterungen, indem sie prüft, ob die eben gestellte Aufgabe möglich ist oder unmöglich, wie weit die Möglichkeit der Lösung sich erstreckt und auf wie viele Fälle. Endlich fragt sie nach der Qualität. Wenn sie nämlich die wesentlichen Akzidentien des Dreiecks, des Kreises und der Parallelen untersucht, so ist klar, daß sie in dem Falle nach der Qualität fragt²⁰⁶).

Nun waren viele der Ansicht, es sei nicht Aufgabe der Geometrie, über Ursächlichkeit und Kausalität Forschungen anzustellen. Zu dieser Auffassung bekannte sich nach dem Vorgang des ARISTOTELES
 10 auch AMPHINOMOS. Doch wird man, sagt GEMINOS, auch diese Frage in der Geometrie finden. Wie wäre es auch nicht Aufgabe des Mathematikers, zu erforschen, warum man den Kreisen ungezählte gleichseitige Vielecke einzeichnen kann, hingegen nicht den Kugeln gleichseitige, gleichwinkelige, aus gleichen Flächen zusammengesetzte Vielflächner in unbegrenzter Zahl²⁰⁷)? Wem anders als dem Mathematiker käme es zu, diese Frage zu stellen und eine Lösung hierfür zu finden? Wenn also die Schlußfolgerung von den Mathematikern durch den Beweis der Unmöglichkeit vollzogen wird, so begnügen sie sich damit, das Akzidens allein zu finden; haben sie es aber
 20 durch primären Beweis gefunden, dann ist hinwiederum die Ursache noch nicht klar, falls die Beweise das Problem nur teilweise erfassen; wenn aber restlos und in allen gleichgearteten Fällen, dann wird sofort auch der ursächliche Zusammenhang klar.

Soviel über die zu behandelnden Fragen. Jedes Problem aber und jeder Lehrsatz, die aus ihren vollständigen Teilen sich zusammensetzen, müssen alle folgenden Stücke in sich schließen: Die *Aufgabe*, die *Angabe*, die *Thesis*, die *Konstruktion*, der *Beweis*, die *Schlußfolgerung*. Davon besagt die *Aufgabe*, was gegeben und was gesucht wird. Denn die vollständige Aufgabe enthält beides. Die *Angabe*
 30 nimmt das Datum für sich allein und gibt ihm die geeignete Fassung für die Untersuchung. Die *Thesis* macht im besonderen klar, wonach eigentlich gefragt wird. Die *Konstruktion* fügt dem Gegebenen das zur Erreichung des gesuchten Ergebnisses noch Fehlende hinzu. Der *Beweis* folgert in sachkundiger Weise aus dem, was zugegeben wird, den vorliegenden Satz. Der *Schluß* lenkt wieder zur Aufgabe zurück und bekräftigt das Resultat. Das sind die sämtlichen Teile der Probleme und Lehrsätze. Die wesentlichsten aber, die bei allen vorhanden sind, sind die *Aufgabe*, der *Beweis* und der *Schluß*. Denn man
 39 muß im vorhinein wissen, was in Frage steht; dies muß sodann durch

Mittelglieder bewiesen werden, und endlich ist das Beweisresultat zu ziehen. Von diesen drei Stücken eines auszulassen, ist unmöglich. Die übrigen werden vielfach verwendet, vielfach aber auch, soweit sie ohne Nutzen sind, weggelassen. Thesis z. B. und Angabe sind nicht vorhanden bei dem Problem, ein gleichschenkeliges Dreieck zu konstruieren, dessen beide Basiswinkel je doppelt so groß sind wie der dritte²⁰⁸). Die Konstruktion fehlt in fast allen Lehrbüchern, da die Angabe ohne jeden weiteren Zusatz hinreicht, den vorliegenden Satz auf Grund des Datums zu erweisen. Wann sagen wir nun, fehlt die Angabe? Wenn die Aufgabe kein Datum enthält. Denn die Auf- 10 gabe zerfällt in der Regel in das, was gegeben und was gesucht wird; doch ist dies nicht immer der Fall, sondern zuweilen besagt die Aufgabe nur, was zu erkennen oder zu beschaffen ist, wie bei dem oben genannten Problem. Denn es erklärt nicht, unter welchen Voraussetzungen man ein gleichschenkeliges Dreieck errichten soll, dessen beide Basiswinkel je doppelt so groß sind, wie der dritte, sondern daß man es konstruieren soll. Zwar erfolgt auch hier die Lösung der Aufgabe auf Grund des vorher schon Erkannten; denn was gleichschenkelig ist und gleich oder doppelt so groß, das wissen wir. Das ist aber nach ARISTOTELES ein Grundgesetz alles geistigen Er- 20 fassens. Indessen liegt uns nichts vor wie bei anderen Problemen, wie wenn EUKLID z. B. eine gegebene begrenzte Gerade <Strecke> halbieren heißt²⁰⁹). Denn in diesem Falle ist eine Strecke gegeben, und wir haben die Aufgabe, sie in zwei Hälften zu teilen, und es ist auseinander gehalten, was gegeben ist und was gesucht wird. Wenn nun also die Aufgabe beides enthält, dann ist auch Thesis und Angabe zu finden; wenn aber ein Datum fehlt, dann fehlen auch diese. Denn die Angabe bezieht sich auf das Datum und die Thesis lautet ebenso wie die Aufgabe*). Was könnte man auch anderes sagen bei der 29

*) Der gr. Text lautet hier: ἡ γὰρ ἔκθεσις τοῦ δεδομένου ἐστὶν καὶ ὁ διορισμός, ἔσται γὰρ ὁ αὐτὸς τῇ προτάσει. BAROCIUS übersetzt dementsprechend: *Siquidem expositio atque determinatio Dati est. Eadem enim erit cum propositione.* Man sieht ohne weiteres, daß der Text nicht stimmen kann. Mit der Verkoppelung von ἔκθεσις und διορισμός würde PROKLUS seiner eigenen Erklärung 203, 7—10 widersprechen, wonach eben der διορισμός nicht τοῦ δεδομένου, sondern τοῦ ζητουμένου ist. Auch kann nicht befriedigen, daß PROKLUS mit dem zweiten Satz das erste Subjekt ἡ ἔκθεσις völlig fallen läßt und nur den διορισμός berücksichtigt. Wir müssen eine kleine Operation vornehmen und eines von den vielen γὰρ, von denen es im Text des PROKLUS nur so wimmelt, streichen. Dann ergibt sich ein zweigliedriger mit καὶ verbundener Satz, jedes Glied mit eigenem Subjekt und Prädikat, und ein klarer, lückenloser Zusammenhang.

Abgrenzung des vorhin genannten Problems, als daß man eben ein gleichschenkeliges Dreieck von der geforderten Beschaffenheit finden muß? So lautete aber die Aufgabe. Wenn also die Aufgabe den Unterschied von Gegebenem und Gesuchtem nicht kennt, so unterbleibt die Angabe, weil kein Datum vorliegt; die Thesis aber unterbleibt, damit nicht eine Wiederholung der Aufgabe statfinde. Man kann noch viele andere derartige Probleme finden, besonders auf arithmetischem Gebiete und im 10. Buche, wie z. B. zwei der Potenz nach kommensurable Linien von mittlerer Proportionalität zu finden 10 und alle derartigen Probleme²¹⁰).

Jedes *Datum* wird aber auf eine der folgenden Weisen gegeben: Entweder durch die Lage, oder eine Proportion, oder eine Größe, oder eine Art. Der Punkt nämlich wird nur durch die Lage gegeben, die Linie aber und die übrigen Figuren durch alle. Wenn wir nämlich von einem gegebenen geradlinigen Winkel sprechen, so bezeichnen wir die Art, die vom Winkel gegeben ist, eben die geradlinige, damit wir nicht versuchen, nach demselben Verfahren auch den Peripheriewinkel zu halbieren²¹¹); wenn wir aber sagen, es ist von zwei gegebenen ungleichen Strecken auf der größeren ein der kleineren gleiches 20 Stück abzutragen²¹²), dann ist das Datum durch die Größe gegeben. Denn größer und kleiner und begrenzt und unbegrenzt sind der Größe eigene Kategorien. Wenn wir aber sagen: Wenn vier Größen einander proportional sind, dann sind auch die vertauschten Größen einander proportional²¹³), dann ist dasselbe Verhältnis bei den vier Größen gegeben. Wenn man aber von einem gegebenen Punkt aus eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke ziehen soll, dann ist der Punkt durch die Lage gegeben²¹⁴). Da nun die Lage verschieden sein kann, so läßt auch die Konstruktion verschiedene Möglichkeiten offen. Denn der Punkt kann entweder außerhalb der Strecke, oder 30 auf der Strecke gegeben sein; und dann entweder an den Enden der Geraden, oder zwischen ihren Endpunkten. Da nun das Datum auf vierfache Weise genommen werden kann, so ist klar, daß auch die Angabe auf vierfache Art erfolgt. Zuweilen verbindet sie auch zwei und drei Arten.

Bezüglich des sog. *Beweises* werden wir finden, daß er zuweilen den eigentlichen Anforderungen des Beweises genügt und von den Mittelgliedern der Definitionen aus den gesuchten Beweis führt (das ist nämlich die vollkommenste Form des Beweises), zuweilen 39 nur von Merkmalen ausgeht. Dieser Unterschied darf einem nicht

entgehen. Denn die geometrischen Wahrheiten haben wegen der ihnen zugrunde liegenden Materie immer einen unbedingten Charakter; nicht immer aber werden sie ins Reine gebracht durch die Beweismethoden²¹⁵). Wenn z. B. mit dem Satz, daß der Außenwinkel eines Dreiecks den zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln gleich ist²¹⁶), der Satz bewiesen wird, daß die drei Innenwinkel des Dreiecks zwei Rechte betragen²¹⁷), wie soll dieser Beweis vom Prinzip ausgehen, wie wäre das Mittelglied kein Merkmal? Denn auch ohne Außenwinkel sind die Innenwinkel zwei Rechten gleich; das Dreieck besteht ja auch ohne Verlängerung der Seiten. Wenn aber das mit 10 Hilfe von umschriebenen Kreisen entstandene Dreieck als gleichseitig bewiesen wird²¹⁸), dann geht das Verfahren von der Ursache aus. Denn die Ähnlichkeit und Gleichheit der Kreise werden wir als Ursache der Gleichseitigkeit des Dreiecks bezeichnen.

Auch die *Schlußfolgerung* zieht man gewöhnlich sozusagen in doppeltem Sinne. Denn man schließt, daß man den Beweis auf der Grundlage des Datums, aber auch im allgemeinen Sinne erbracht habe, indem man von dem partikulären Ergebnis dem allgemeinen sich zuwendet. Indem man nämlich die Eigenart des Gegenstandes nicht mit berücksichtigt, sondern das Datum vor Augen stellt, indem man 20 einen Winkel oder eine Gerade zeichnet, so glaubt man, eben die Folgerung, die in diesem Falle sich ergeben, sei mitbewiesen für jeden ähnlichen Fall. Man vollzieht also den Übergang zum Allgemeinen, damit wir nicht meinen, es handle sich nur um ein Teilergebnis. Der Übergang ist aber vollkommen begründet, da man sich der Angaben zum Beweise bedient, nicht insofern sie so oder so lauten, sondern insofern sie den anderen Fällen ähnlich sind. Denn nicht insofern der gegebene Winkel von bestimmter Größe ist, vollziehe ich die Halbierung, sondern nur insofern er geradlinig ist. Die bestimmte Größe ist dem gegebenen Winkel eigen; die Geradlinigkeit 30 aber ist allen geradlinigen Winkeln gemeinsam. Es sei z. B. ein rechter Winkel gegeben. Wenn ich nun diese Eigenschaft zum Beweise heranzöge, so könnte ich nicht zu jeder Art des geradlinigen Winkels übergehen; wenn ich aber darauf kein Gewicht lege und nur die Geradlinigkeit berücksichtige, so wird der Beweis ebenso auch auf alle anderen geradlinigen Winkel zutreffen.

Alles, was da soeben dargelegt wurde, wollen wir nun bei diesem ersten Problem ins Auge fassen. Denn daß es sich um ein Problem handelt, ist klar. Es stellt uns nämlich die Aufgabe, ein gleichseitiges 39

- Dreieck entstehen zu lassen. Die Aufgabe setzt sich hierbei zusammen aus dem Gegebenen und dem Gesuchten. Gegeben ist eine begrenzte Gerade <Strecke>; gesucht wird, wie über ihr das gleichseitige Dreieck entsteht; das Datum geht voran, es folgt das Gesuchte, damit man beides auch zusammenziehen und so formulieren kann: Ist eine begrenzte Gerade gegeben, so besteht die Möglichkeit, auf ihr ein gleichseitiges Dreieck zu errichten. Das Dreieck entstünde nämlich nicht, wenn die Linie nicht gerade wäre: Denn es wird von geraden Linien umschlossen; noch auch, wenn sie nicht begrenzt wäre: Denn ein
- 10 Winkel kann nur entstehen an einem bestimmten Punkte. Die unbegrenzte Linie aber hat keinen Endpunkt. Auf die Aufgabe folgt die Angabe: Die gegebene begrenzte Gerade sei diese. Man sieht, daß die Angabe nur das Datum selbst nennt, ohne sich um das Gesuchte zu kümmern. Auf diese folgt die Thesis: Man muß also über der gegebenen begrenzten Geraden ein gleichseitiges Dreieck konstruieren. In gewissem Sinne erweckt die Thesis Aufmerksamkeit. Sie macht uns gespannter auf den Beweis, indem sie das Gesuchte verkündet, wie die Angabe unser Verständnis erleichtert, indem sie das Datum vor Augen stellt. Nach der Thesis kommt die
- 20 Konstruktion*): Man beschreibe einen Kreis mit dem einen End-

*) Der griechische Text der folgenden Stelle ist in heilloser Verwirrung, die durch die Verbesserungsvorschläge FRIEDLEINS nicht behoben, sondern womöglich noch gesteigert wird. Auch BAROCIUS hilft uns hier nicht weiter. Die Verwirrung ist um so befremdender, als es sich um einen klaren Sachverhalt handelt und um die Wiedergabe des eindeutig klaren Textes EUKLIDS, der allerdings an einer Zeichnung exemplifiziert und mit bestimmten Buchstaben operiert, während PROKLUS mit Umschreibungen sich behilft und dadurch Anlaß zu der Verwirrung gegeben hat. Es handelt sich um zwei Kreise, deren Mittelpunkte die beiden Endpunkte der gegebenen Gerade <Strecke> sind, und deren gemeinsamen Radius eben die gegebene Gerade <Strecke> bildet. Das ist festzuhalten. 209, 2 kann *διαστήματι* im Gegensatz zu *κέντρῳ μὲν* nur Radius bedeuten, nicht etwa Abstand der beiden Endpunkte. Dann ist aber das folgende *τῷ λοιπῷ* sinnlos. Es muß ursprünglich der Text etwa gelautet haben: *διαστήματι δὲ τῷ μεταξύ* (sc. *τῶν περάτων*). Das *τῷ λοιπῷ* setzen wir dann passend an die Stelle von *τῷ πρότερον*, und *πρότερον* verweisen wir in die nächste Zeile und schieben es ein vor *κέντρῳ*, das zu streichen ist. So ergibt sich der klare mit EUKLID übereinstimmende Text: *Κέντρῳ μὲν τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς εὐθείας, διαστήματι δὲ τῷ μεταξύ γεγράφθω κύκλος καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ λοιπῷ, διαστήματι δὲ τῷ πρότερον γεγράφθω κύκλος*. Ich verweise noch darauf, daß unser *τῷ λοιπῷ* im Gegensatz zu *τῷ ἑτέρῳ πέρατι* Z. 1 seine Stütze empfängt durch *τὸ λοιπὸν σημείον* Z. 15. Das wechselseitige Austauschen der Begriffe *κέντρον* und *διάστημα*, das uns FRIEDLEIN als Verbesserung vorschlägt, mutet uns eine sprachliche Unmöglichkeit zu.

punkt der Geraden $\langle$ Strecke $\rangle$ als Zentrum und dem Abstand der beiden Endpunkte als Radius und einen zweiten Kreis beschreibe man mit dem anderen Endpunkt als Zentrum und dem gleichen Radius wie vorher, und man ziehe von dem gemeinsamen Schnittpunkte der Kreise an die Endpunkte der Geraden $\langle$ Strecke $\rangle$ zwei Gerade^{218a}). Du siehst, daß ich mich bei der Konstruktion der Forderungen bediene, der einen, die lautet, von jedem Punkte zu jedem Punkte eine gerade Linie zu ziehen, und der anderen, die lautet, mit einem gegebenen Mittelpunkt und Radius einen Kreis zu beschreiben. Im allgemeinen sind nämlich die Forderungen zweck- 10 mäßig bei den Konstruktionen, wie die Axiome bei den Beweisen. Es folgt nun der Beweis: Da der eine von den die gegebene Gerade $\langle$ Strecke $\rangle$ begrenzenden Punkten der Mittelpunkt des ihn umschließenden Kreises ist, so ist die Gerade zu dem gemeinsamen Schnittpunkt gleich der gegebenen Geraden. Da nun auch der andere, der die gegebene Gerade begrenzenden Punkte Mittelpunkt des ihn umschließenden Kreises ist, so ist auch die Linie von ihm zum gemeinsamen Schnittpunkt der Kreise der gegebenen Geraden $\langle$ Strecke $\rangle$ gleich. Die Erklärung hierzu ergibt sich aus der Definition des Kreises, die besagt, daß alle Geraden, die vom Zentrum 20 ausgehen, gleich sind. Beide also sind mit derselben Linie gleich. Sind aber nach dem ersten Axiom zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch einander gleich. Die drei sind also gleich. Es entstand also über dieser Geraden $\langle$ Strecke $\rangle$ ein gleichseitiges Dreieck. Dies ist die erste Schlußfolgerung entsprechend der Angabe. Hierauf folgt die Verallgemeinerung: Es wurde also über der gegebenen Geraden ein gleichseitiges Dreieck gebildet. Denn ob du nun die Verdoppelung der eben gegebenen Strecke als gegeben annimmst oder ihre Verdreifachung oder jede beliebige andere Vergrößerung oder Verkleinerung: Es wird dasselbe Konstruktions- 30 und Beweisverfahren passen. Dazu fügte der Meister den Zusatz: „was zu tun war“ und zeigte damit an, daß die Schlußfolgerung ein Problem betrifft. Denn bei den Theoremen fügte er bei: „was zu zeigen war“. Denn das eine stellt die Herstellung von etwas in Aussicht, das andere den Beweis und das Auffinden eines Sachverhaltes. Ganz allgemein macht er diese Zusätze zu den Schlußfolgerungen, um anzuzeigen, daß die Aufgabe gelöst ist. Er verbindet so Anfang und Ende und macht es wie der Nus, der nach seiner Entfaltung auch wieder zum Ausgang sich zurückwendet. Aber 39

nicht immer fügt er den gleichen Zusatz an, sondern bald: „was zu tun“, bald: „was zu zeigen war“, wegen des Unterschiedes der Probleme von den Theoremen.

Wir haben nun an dem einen Beispiel des ersten Problems all diese Übungen vorgenommen und klargemacht. Es sollen aber die Hörer auch bei den anderen sich diese Fragen vorlegen: Welche Hauptstücke sind verwendet und welche ausgelassen, wievielfach ist das gegebene Datum und von welchen Prinzipien leiten wir die Konstruktionen oder die Beweise her? Denn ein kurzer zusammen-

10 fassender Überblick über diese Dinge trägt nicht wenig bei zur Schulung des Geistes und zum Durchdenken geometrischer Gedankengänge. Doch nachdem nun dies Kapitel erledigt ist, wollen wir uns in Kürze verbreiten über Punkte, die damit zusammenhängen, und uns fragen: Was ist ein Hilfssatz (*Lemma*), ein Fall (*Ptoſis*), ein Porisma, ein Einwand (*Enstasis*), eine Zurückführung (*Apagoge*)?²¹⁹

Von einem *Lemma* spricht man häufig bei jedem Satz, der verwendet wird zur Gewinnung eines anderen Ergebnisses, indem man behauptet, aus so und sovielen Hilfssätzen sei einem der Aufbau des Beweises geglückt. Im eigentlichen Sinne aber versteht man

20 unter Lemma in der Geometrie einen Satz, der des Beweises bedarf. Wenn wir nämlich bei der Konstruktion oder beim Beweis irgendeine Annahme machen, die nicht bewiesen ist, sondern der Begründung bedarf, dann fordern wir für die Annahme als an sich zweifelhaft eine Prüfung und nennen sie ein Lemma, das sich von der Forderung und dem Axiom durch seine Beweisbarkeit unterscheidet, während diese ohne Beweis ohne weiteres zur Begründung anderer Sätze herangezogen werden. Was das Finden der Lemmata anlangt, so ist das beste Mittel hierfür die Geschicklichkeit des Geistes hierzu. Man kann bei vielen großen Scharfsinn gewahren, den sie bei

30 Lösungen entwickeln, und zwar verfahren sie dabei ohne Methoden; so war z. B. in unserer Zeit KRATISTOS imstande, womöglich auf den ersten Anhieb und auf kürzestem Wege das gesuchte Ergebnis zu finden. Er konnte sich beim Finden auf seine natürliche Anlage verlassen. Gleichwohl werden verschiedene Methoden hierfür empfohlen. Die beste ist jene, die das gesuchte Problem auf analytischem Wege zurückführt auf ein anerkanntes Prinzip, die PLATON, wie es heißt, dem LEODAMAS übermittelte, mit deren Hilfe dieser dann auch viele Sätze in der Geometrie gefunden haben soll. Die zweite

39 ist die trennende, die den vorliegenden allgemeinen Komplex in Teil-

glieder auflöst und dem Beweise die Möglichkeit zur Erhärtung des betreffenden Problems erschließt durch Beseitigung aller anderen Möglichkeiten. Auch ihr Lob hat PLATON gesungen als einer Förderin sämtlicher Wissenschaften. Die dritte Methode bedient sich der Zurückführung auf eine Unmöglichkeit. Sie beweist nicht unmittelbar, was in Frage steht, sondern widerlegt das Gegenteil und findet so *per accidens* das Richtige²²⁰). Das ist also die wissenschaftliche Erklärung des Lemmas.

Der *Fall* aber unterrichtet über die verschiedenen Arten der Konstruktion und den Lagenwechsel durch Umstellung der Punkte, 10 Linien, Ebenen oder Körper. Überhaupt ist die Entfaltung seiner mannigfaltigen Möglichkeiten auf dem Gebiet der Zeichnung zu sehen, weshalb er als Veränderung in der Konstruktion auch „Fall“ genannt wird.

Die Bezeichnung *Porisma*²²¹) verwendet man bei gewissen Problemen, wie bei den von EUKLID verfaßten „*Porismen*“. Im eigentlichen Sinne gebraucht man den Ausdruck, wenn aus den geführten Beweisen noch ein weiterer Lehrsatz erhellt, der von uns nicht aufgestellt wurde, den man deshalb auch Glücksfund nennt, sozusagen eine Art Nebengewinn des wissenschaftlichen Beweises. 20

Der *Einwand* ferner hindert den ganzen Ablauf des Beweisverfahrens, mag er nun bei der Konstruktion oder beim Beweise begegnen; dabei ist es nicht notwendig, die Richtigkeit des Einwandes zu erweisen, wie derjenige, der einen Satz*) vorlegt, seine Richtigkeit nachweisen muß, sondern man muß den Einwand entkräften und zeigen, daß der, der ihn erhebt, nur täuschen will.

Die *Zurückführung* endlich ist der Übergang von einem Problem oder Lehrsatz zu einem andern, dessen Erkenntnis oder Lösung auch die vorliegende Aufgabe klärt. Als z. B. die Lösung des Problems der Würfelverdoppelung²²²) gesucht wurde, übertrug man die Unter- 30 suchung auf ein anderes Problem, aus dem dieses folgt, nämlich die Auffindung der zwei mittleren Proportionalen, und untersuchte fortan, wie man zu zwei gegebenen Geraden (Strecken) zwei mittlere Proportionale finden könne²²³). Als erster soll HIPPOKRATES von Chios die Zurückführung des schwer zu lösenden Konstruktions- 35

*) Man fragt sich, was der eben erläuterte Terminus *πρόωσις* in diesem Zusammenhang für einen Sinn haben soll. Ich nehme an, es handle sich um eine Verwechslung mit *πρότασις*, wie es in der nächsten Zeile richtig heißt.

problems vorgenommen haben, derselbe, der auch das Mönchen quadrierte²²⁴) und viele andere geometrische Entdeckungen machte, ein fähiger Kopf im Zeichnen und Konstruieren wie nur irgendeiner. Soviel hiervon. Nun wollen wir aber zu dem vorliegenden Problem zurückkehren.

Daß nun das gleichseitige Dreieck das vortrefflichste ist unter den Dreiecken und dem Kreise am nächsten kommt, der alle vom Mittelpunkt ausgehenden Radien gleich hat und eine einzige einfache, ihn*) außen begrenzende Linie, ist jedem klar. Es scheint
 10 aber die Umfassung durch die beiden Kreise, und zwar durch je einen Teil derselben <, gemeint zu sein>: Denn es ist nicht in das Ganze eines jeden eingeschrieben, sondern nur in den 6. Teil, wie in Bildern zu zeigen, daß alle Ausgänge von den Prinzipien von diesen auch die Vollendung, die Identität und die Gleichheit erhalten. Denn auf diese Weise schwingt auch das in gerader Richtung Bewegte im Kreise herum vermöge des ständigen Werdeprozesses, und die Seelen sind trotz ihrer veränderlichen Bewegungen**) vermöge der periodischen Wiederkehr des Gleichen Bilder der unwandelbaren Tätigkeit des Nus. Es heißt aber auch, daß vom zwiefachen Nus die
 20 lebenspendende Quelle der Seelen umschlossen wird. Wenn also der Kreis ein Bild des intellektuellen Seins, und das Dreieck wegen der vollkommenen Gleichheit der Winkel und Seiten ein Bild der ersten Seele ist, so möchte allem Anscheine nach auch dafür der Beweis gegeben sein, daß es den Kreisen, von denen es mitten umschlossen ist, seine Gleichseitigkeit verdankt. Wenn aber jede Seele vom Nus ausgeht und wieder zu ihm zurückkehrt und in doppelter Weise am Nus teilhat, dann stünde auch damit im besten Einklang, daß das Dreieck, das Sinnbild des dreifachen Wesens der Seelen, von zwei Kreisen umschlossen, seinen Ursprung nimmt. Diese Ausführungen
 30 sollen uns also wie Bilder an das Wesen der Dinge erinnern.

Nachdem aber einige gegen die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks Einspruch erhoben im Glauben, sie könnten den ganzen Bau der Geometrie aus den Angeln heben, wollen wir auch diesen kurz erwidern. Es stellt also ZENON, dessen ich früher Erwähnung
 35 tat, die Behauptung auf, auch wenn man die Prinzipien der Geo-

*) 213, 17 muß es natürlich statt *αὐτὸ: αὐτὸν* (sc. *τὸν κύκλον*) heißen.

**) 213, 26: Ich lese mit GRYNAEUS, B₃ u. M nicht *νοήσεις*, sondern *κινήσεις*, das durch den Zusammenhang begründet ist. Mit *νοήσεις* wird hier ein fernliegender Begriff hereingetragen.

metrie anerkenne, so seien die Folgerungen nicht stichhaltig, wenn man mit ihnen nicht zugebe, daß zwei Gerade keine zusammenfallenden Schnittstrecken haben. Würde nämlich dieses Zugeständnis nicht gemacht, so könne man die Gleichseitigkeit des Dreiecks nicht

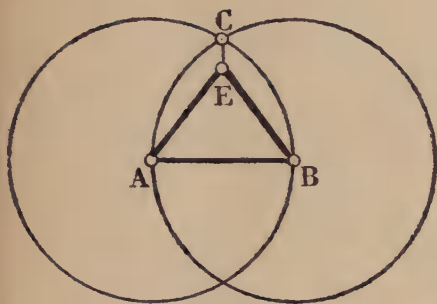


Fig. 12

beweisen. Es sei z. B. AB die Strecke, über der das gleichseitige Dreieck konstruiert werden soll. Man beschreibe die Kreise und ziehe von ihrem gemeinsamen Schnittpunkt $\langle C \rangle$ die Linien CEA 10 und CEB, die die Schnittstrecke CE gemeinsam haben^{224a}). Nun ergibt sich, daß die Linien vom gemeinsamen Schnittpunkt an gleich sind der gegebenen AB, daß sie aber nicht mehr die

einander gleichen Dreieckslinien sind, sondern daß die zwei $\langle AE \text{ und } BE \rangle$ kleiner sind als AB. Steht aber das nicht fest, so entbehren auch die Folgerungen einer sicheren Begründung. Auch wenn also die Prinzipien zugestanden werden, sagt ZENON, so 20 möchten die Folgerungen sich nicht ergeben, wenn nicht vorweg auch dies Ergebnis gewonnen würde, daß weder Kreislinien noch Gerade gemeinsame Schnittstrecken haben.

Hierauf ist fürs erste zu sagen, daß dieser Satz, „zwei Gerade haben keine gemeinsame Schnittstrecke“, in gewissem Sinne in den Prinzipien vorweggenommen wurde: Denn die Definition der Geraden schließt ihn in sich, wenn anders eine Gerade ist, die auf gleicher Strecke liegt wie ihre Endpunkte. Denn daß der Abstand der Punkte mit der Geraden gleich ist, macht die Verbindungslinie zwischen ihnen zu einer einzigen, kürzesten; würde man sie daher teilweise 30 mit der anderen zusammenpassen, so wäre sie auch im übrigen mit ihr kongruent. Denn, vollkommen ausgedehnt, muß sie wegen ihrer Kürze ganz mit der ganzen zusammenfallen. Unser Satz ist aber offenbar auch schon mit den Forderungen gewonnen. Denn die Forderung, eine begrenzte Gerade in Richtung der Geraden zu verlängern, zeigt deutlich, daß die verlängerte Linie nur eine einzige sein und nur in einer einzigen Bewegung verlängert werden darf. Soll man den Beweis hierfür wie für ein Lemma gewinnen, so sei, wenn möglich $\langle \text{Fig. 13} \rangle$, die Strecke AB die gemeinsame Schnittlinie von 30

AC und AD, und mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BA werde der Kreis ACD beschrieben. Da nun die Gerade ABC durch den Mittelpunkt geht, so ist AEC ein Halbkreis, und da auch die Gerade ABD durch den Mittelpunkt geht, so ist auch AED ein Halbkreis. Also sind die Halbkreise AEC und AED einander gleich, was unmöglich ist.

Zu diesem Beweise würde ZENON vielleicht bemerken, daß auch der Beweis dafür, daß der Durchmesser den Kreis halbiere, von uns nur geführt wurde²²⁵⁾ durch die unbewiesene Annahme, daß zwei Peripherien keine gemeinsame Schnittlinie haben. Denn wir machten die Annahme, daß die eine Kreislinie sich mit der anderen völlig decke, oder wenn das nicht der Fall, daß sie nach außen oder innen falle. Es hindert aber nichts, sagt er, daß sie nicht völlig sich miteinander decken, sondern nur teilweise. Solange aber nicht bewiesen wird, daß der Durchmesser den Kreis halbiere, kann man auch den vorliegenden Satz nicht beweisen (s. Fig. 1).

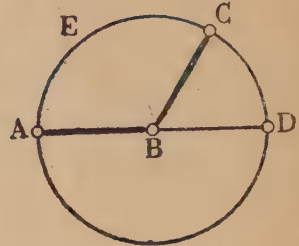


Fig. 13

Die entsprechende Antwort hierauf blieb POSEIDONIOS nicht schuldig. Er goß die Lauge seines Spottes aus über den Scharfsinn EPIKURS, der nicht merke, daß der Beweis gelinge, auch wenn die Kreislinien nicht mit einem Teile zusammenfielen. Denn für den Teil, für den sie sich nicht decken, wird die eine drinnen, die andere draußen verlaufen, und der Widersinn ist der gleiche, da die Gerade vom Mittelpunkt an die äußere Peripherie verlängert wird. Es werden nämlich die vom Mittelpunkt auslaufenden gleich sein, die größere, die zur äußeren und die kleinere, die zur inneren Peripherie verläuft. Entweder werden sie sich also miteinander völlig decken und gleich
30 sein, oder die eine wird sich teilweise decken und im übrigen abweichen, oder kein Teil wird sich mit einem Teil der anderen decken, und wenn das, dann liegt sie entweder nach außen, oder nach innen zu. Alle diese Möglichkeiten werden in gleicher Weise widerlegt. Soviel hierüber.

ZENON verzeichnet noch folgenden Beweis und bemüht sich, ihn zu entwerten. (Fig. 14) Zwei Gerade AC und AD sollen die gemeinsame Schnittlinie AB haben und zu AC werde BE im rechten Winkel gezogen. Der Winkel EBC ist also ein Rechter. Wenn nun auch EBD ein rechter
39 Winkel ist, so sind sie gleich, was unmöglich ist; andernfalls werde

zu AD, FB im rechten Winkel gezogen. Der Winkel FBA ist also ein Rechter. Es ist aber auch EBA ein Rechter. Sie sind also einander gleich, was unmöglich. So lautet der Beweis. ZENON bemängelt aber an ihm, er nehme ein späteres Problem vorweg, nämlich von

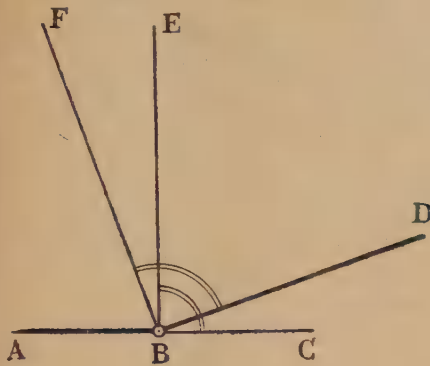


Fig. 14

einem gegebenen Punkte zu einer gegebenen Geraden eine Gerade im rechten Winkel zu ziehen²²⁶). POSEIDONIOS hingegen behauptet, nirgends in den „*Elementen*“ finde sich ein derartiger Beweis, 10 vielmehr erhebe ZENON gegen die Mathematiker seiner Zeit die falsche Anklage, sie bedienten sich eines schlechten Beweises. Es sei aber auch zu seinen Gunsten einiges zu sagen. Da nämlich für jeden Fall mit beiden Geraden

eine einen rechten Winkel bilden kann: Denn jedes Paar von einer Geraden kann einen Rechten bilden, wie wir bei der Definition des rechten Winkels vorweggenommen haben; denn durch eine solche 20 Neigung allein lassen wir den rechten Winkel entstehen: So sei es eben die, die wir errichtet haben. Außerdem räumen EPIKUR selbst

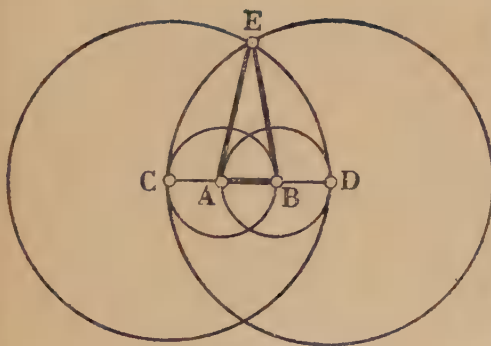


Fig. 15

und die anderen Philosophen ein, viele mögliche und unmögliche Hypothesen aufzustellen zur Untersuchung der daraus sich ergebenden Folgerungen. Soviel über das gleichseitige Dreieck. Wir müssen aber auch die 30 anderen Arten noch konstruieren und zunächst das gleichschenkelige.

Es sei also AB die Strecke, über welcher man das gleichschenkelige Dreieck konstruieren soll. Man beschreibe Kreise wie beim gleichseitigen Dreieck und verlängere AB nach beiden Seiten bis zu den Punkten C und D. Dann ist also $CB = AD$. Nun beschreibe man mit dem Mittelpunkt D und dem Radius CD 39

den Kreis CE und weiter mit dem Mittelpunkt C und dem Radius DC den Kreis DE. Hierauf ziehe man vom Punkte E, wo sich beide Kreise schneiden, zu den Punkten A und B die Verbindungslinien EA und EB. Da nun $EC = CD$ und $ED = DC$, und $AD = BC$, so ist auch $EA = EB$. Beide sind aber auch größer als AB. Das Dreieck ABE ist also gleichschenkelig, wie es herzustellen war²²⁷).

Es sei nunmehr die Aufgabe, ein ungleichseitiges Dreieck zu konstruieren über der gegebenen Strecke AB. Man ziehe die Kreise mit den Mittelpunkten und Radien wie

10 vorhin, nehme beim Kreise mit dem Mittelpunkte A den Punkt C <beliebig> und ziehe die Verbindungsstrecke AC; auf dieser nehme man den Punkt D <beliebig> und ziehe die Verbindungslinie DB. Da nun A Mittelpunkt ist, so ist $AB = AC$, AB also größer als AD. Mittelpunkt ist aber auch B. Also ist $EB = AB$. Also ist DB größer als BA.

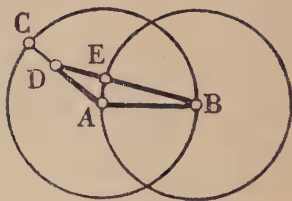


Fig. 16

BA aber ist <auch> größer als AD. Die drei Geraden DB, BA und AD sind folglich ungleich. Das Dreieck ist also ungleichseitig
20 und damit sind die drei Dreiecke konstruiert²²⁸).

Das sind nun allbekannte Dinge; das aber ist hierbei eine feine Beobachtung, daß das gleichseitige Dreieck, das allseits gleich ist, nur auf eine Weise gebildet wird, das gleichschenkelige aber, das nur zwei gleiche Seiten hat, auf zwei Arten: Denn die gegebene Strecke ist entweder kleiner als die beiden gleichen Seiten, wie wir sie gebildet haben, oder größer als beide; das allseits ungleiche ungleichseitige aber auf dreierlei Art. Die gegebene Strecke ist nämlich entweder die größte oder die kleinste von den dreien, oder größer als die eine und kleiner als die andere. Jeder mag für sich die ein-
30 zelnen Möglichkeiten durch Verlängerung oder Verkürzung ausprobieren; uns mag das Gebotene genügen.

Im allgemeinen werden wir sehen, daß die Probleme teils auf einfache, teils auf mehrfache, teils auf unbestimmt viele Arten gelöst werden. Wie AMPHINOMOS sagt, nennt man die einfachen Probleme regelmäßige, diejenigen mit mehreren Behandlungen in bestimmter Zahl mittlere, die aber ungezählte Variationen zulassen, nennt man die unregelmäßigen Probleme²²⁹). Wie die Probleme auf einfache oder mehrfache Weise konstruiert werden, wird klar bei den eben
39 behandelten Dreiecken. Denn das gleichseitige Dreieck wird nur auf

eine Art, von den übrigen wird das eine auf zweifache, das andere auf dreifache Art konstruiert. Unbestimmte Möglichkeiten aber lassen Probleme wie das folgende zu: Eine gegebene Strecke in drei proportionale Teile zu teilen. Wird sie nämlich im Verhältnis von 1:2 geteilt, und das Rechteck mit dem kleineren Abschnitt, das der quadratischen Form entbehrt, dem größeren Abschnitt angelegt, dann ist sie in drei gleiche Teile geteilt²³⁰). Wenn aber der größere Abschnitt zwei oder dreimal so groß als der kleinere wäre, und ein dem kleineren Quadrat gleiches Rechteck, das der quadratischen Form entbehrt, dem größeren Abschnitt angelegt würde, dann wird 10 sie in drei ungleiche proportionale Teile geteilt. Da sie nun unzählige Male in zwei Teile geteilt werden könnte, wovon der größere Teil*) das Zwei- oder Dreifache des kleineren ist: Denn die Vervielfachung geht ins Unendliche, so wird sie auch ins Unendliche fort in drei proportionierte Teile zerlegt werden können.

Man muß aber wissen, daß der Ausdruck „Problem“ in mehrfachem Sinne gebraucht wird. Denn jede vorgelegte Aufgabe wird Problem genannt, ob sie nun gestellt wird, etwas zu erkennen, oder etwas auszuführen. Im eigentlichen Sinne aber bezeichnet „Problem“ in der Mathematik die Aufgabe einer wissenschaftlichen 20 Zwecken dienenden Konstruktion. Denn was dabei geschieht, hat die wissenschaftliche Theorie zum Endzweck. Nicht selten bezeichnet man auch einige unmögliche Dinge als Probleme; eigentlich aber führt diese Bezeichnung jede ausführbare Aufgabe, die weder zu viel noch zu wenig Angaben enthält. Zu viel besagt das Problem: Ein gleichseitiges Dreieck von der Art zu konstruieren, daß der Scheitelwinkel zwei Drittel eines Rechten beträgt. Denn diese Angabe ist unnötig und wird überflüssigerweise beigefügt. Denn das trifft bei jedem gleichseitigen Dreieck zu. Von den überladenen Problemen bezeichnet man diejenigen, die zuviel an 30 unmöglichen und nicht vorkommenden Akzidentien bringen, als unmögliche; die mit möglichen Angaben überbelasteten nennt man 32

*) Der Zusatz τοῦ ἐλάσσονος μείζον, den FRIEDLEIN für notwendig hält, ist völlig überflüssig. Klar ist natürlich, daß ἡ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον hier und wenige Zeilen weiter oben (220, 21. 22) in gleichem Sinne genommen werden müssen, was BAROCIUS und ZAMBERTO nicht tun. Aus sachlichen Gründen fasse ich ἡ nicht komparativ, sondern spezifizierend = *vel.* Das Ergebnis, das PROKLUS erzielen will, erfordert nicht, daß der größere Abschnitt den kleineren um mehr als das Zweifache übertriffe; es genügt, wenn er ihn um das Zweifache übertrifft.

zu umfangreiche Probleme. Mangelhaft ist ein Problem (man nennt es unzureichend), wenn es eines weiteren Zusatzes bedarf, damit es aus dem Zustand der Unbestimmtheit in den der Ordnung und wissenschaftlichen Bestimmtheit übergeführt werde. Nehmen wir an, es fordere jemand, ein gleichschenkeliges Dreieck zu konstruieren. Dies Problem ist lückenhaft und unbestimmt; man muß hinzufügen, welcher Art das gleichschenkelige Dreieck sein soll, ob seine Basis größer oder kleiner sein soll als die beiden gleichen Seiten, und ob sein Scheitelwinkel doppelt so groß sein soll wie
 10 die beiden Basiswinkel wie beim Halbquadrat, oder ob jeder der Basiswinkel doppelt so groß sein soll wie der Scheitelwinkel, oder ob diese Winkel ein anderes Verhältnis aufweisen sollen, wie 1:3 oder 1:4. Denn sie können ohne Begrenzung variieren. Hieraus folgt klar, daß die eigentlich sogenannten Probleme alle Unbestimmtheit vermeiden und nicht zu denen gehören wollen, deren Möglichkeiten unbegrenzt sind. Man nennt aber gleichwohl auch diese Probleme, weil der Name nun einmal gleich ist. Das erste Problem der „*Elemente*“ hat denn auch den Vorzug, daß es weder
 20 nicht mehrere oder gar unzählige Lösungen der Konstruktion aufweist. So muß ja auch dasjenige sein, das die Grundlage für alle anderen abgeben soll.

2. Proposition, 2. Problem: *Zu einem gegebenen Punkt eine, einer gegebenen Strecke gleiche Strecke zu ziehen*²³¹).

Von den Problemen wie auch von den Lehrsätzen sind die einen aptotisch*), die anderen polyptotisch. Von denen, die dieselbe Methode durch mehrere Konstruktionen hindurch aufweisen und bei Änderung der Lagen dasselbe Beweisverfahren einhalten, sagt man, sie hätten Fälle; diejenigen aber, deren Abwicklung an eine Lage
 30 und an eine Konstruktion geknüpft ist, sind aptotisch. Denn der Fall <Ptoxis>^{231a}) ist lediglich bei der Konstruktion, sei es von Lehrsätzen oder von Problemen zu gewahren. Das zweite Problem ist nun polyptotisch. Gegeben ist bei ihm der Punkt durch seine Lage: Durch
 34 diese wird er ja allein bestimmt, die Gerade aber durch ihre Art: Sie

*) Nachdem in der mathematischen Terminologie Ausdrücke wie Symptote, Asymptote gang und gäbe sind, möchte auch gegen aptotisch, polyptotisch nichts einzuwenden sein; deutsche Termini stehen dafür nicht zu Gebote.

ist nämlich nicht schlechthin eine Linie, sondern eine begrenzte, und durch die Lage. Verlangt wird nun, eine dieser gleiche Strecke zu dem Punkt zu legen, wo immer dieser liegen mag. Es ist aber klar, daß der Punkt unbedingt in der zugrunde liegenden Ebene sich befinden muß, in derselben wie die Gerade und nicht in einer höheren. Denn für alle Probleme und Lehrsätze, die auf Ebenen sich beziehen, muß man eine einzige Ebene als gegeben annehmen. Wenn aber einer Schwierigkeiten machte mit der Frage, in welchem Sinne EUKLID verlange, eine einer gegebenen Geraden gleiche zu ziehen: Denn was dann, wenn eine unbegrenzte gegeben ist? Dieses Datum geht ja auf die 10 begrenzte ebenso wie auf die unbegrenzte; es bezeichnet die ganze Angabe und die uns zur Lösung gestellte Aufgabe. Er beweist das selbst, indem er einmal fordert, über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, und dann wieder, auf eine gegebene Gerade eine unbegrenzte Senkrechte zu fällen. Wenn einer nun also solche Schwierigkeiten geltend machte, so wäre zu erwidern: Wenn er verlangt, eine der gegebenen gleiche Gerade zu einem gegebenen Punkt zu ziehen: Wie hätte er dir dann nicht eben dadurch klar gemacht, daß die gegebene begrenzt ist? Denn auf jeden Fall ist die, die zu dem Punkt gezogen werden soll, eben durch den Punkt 20 selbst begrenzt, so daß noch viel eher auch jene begrenzt ist, der die gezogene gleich ist. Indem er also sagte: Zu einem gegebenen Punkt, hat er beide Gerade begrenzt, die gegebene sowohl wie die dieser gleiche, die er zieht.

Daß aber die Fälle dieses Problems nach der verschiedenen Lage des Punktes sich bestimmen, ist klar. Denn entweder liegt der gegebene Punkt außerhalb der gegebenen Strecke, oder auf ihr, und wenn auf ihr, dann wird er entweder das eine der beiden Enden sein, oder auf der Zwischenstrecke zwischen den Endpunkten liegen; und wenn außerhalb derselben, entweder seitwärts, 30 so daß die Verbindungslinie von ihm zum Ende der Geraden mit dieser einen Winkel bildet, oder in gerader Richtung mit der Geraden, so daß ihre Verlängerung mit dem Punkt zusammentrifft. Der Meister der Geometrie nahm an, der Punkt liege seitwärts außerhalb; der Übung wegen müssen wir aber alle Lagen annehmen, von denen wir die schwierigere behandeln wollen. Es sei <Fig. 17> also AB die gegebene Strecke und C der gegebene Punkt, der auf ihr zwischen den Endpunkten liegt, und es entstehe auf dieselbe Weise wie beim grundlegenden (1.) Problem über GA das gleichseitige 39

Dreieck DCA , und es sollen DC und DA verlängert werden und mit dem Zentrum A und dem Radius AB werde der Kreis BE , und wieder mit dem Zentrum D und dem Radius DE werde der Kreis EF beschrieben. Da nun A Mittelpunkt ist, so ist $BA = AE$. Und aus dem gleichen Grunde ist $DE = DF$,

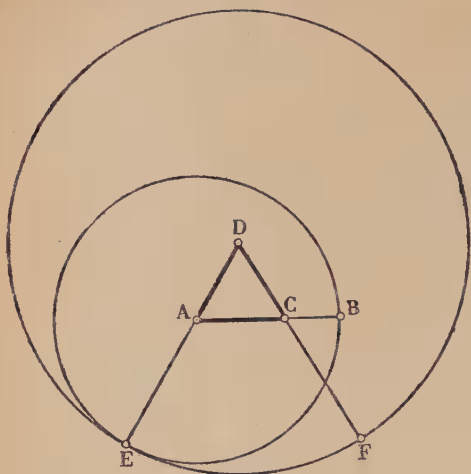


Fig. 17

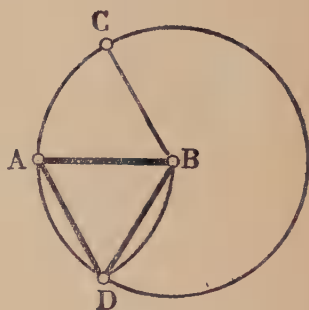


Fig. 18

wovon $DC = DA$: Denn DAC ist ein gleichseitiges Dreieck. Also ist die Reststrecke $AE = CF$. Es ist aber, wie gezeigt worden, 10 $AE = AB$. Also ist auch $CF = AB$. Zu dem gegebenen Punkt C wurde also die Linie CF gezogen, die gleich ist AB . Was nun also die Lage des Punktes betrifft, sind es so viele Fälle, was aber die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks, die Verlängerung der Seiten und die Zeichnung von Kreisen betrifft, gibt es noch viel mehr. Man nehme z. B. $\langle$ Fig. 18 $\rangle$ wie in dem 20 grundlegenden (1.) Problem den Punkt A und die Gerade BC und ziehe die Verbindungslinie BA . Man konstruiere nun mit ihr ein gleichseitiges Dreieck mit der Spitze nicht nach oben, weil da nicht Platz ist, sondern nach unten, nämlich ADB . Dann ist AD entweder $= BC$, 27 oder größer, oder kleiner. Ist sie gleich $\langle$ Fig. 18 $\rangle$, so ist die Auf-

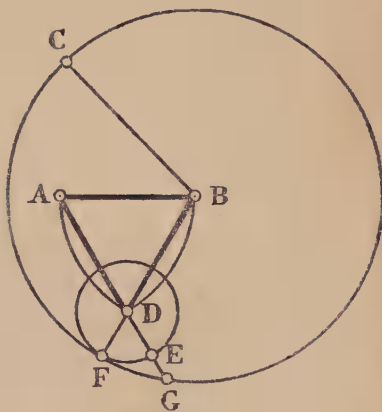


Fig. 19

gabe gelöst; ist sie aber kleiner <Fig. 19> dann beschreibe man mit dem Zentrum B und dem Radius BC einen Kreis und verlängere AD und BD bis zu den Punkten G und F, und mit dem Zentrum D und dem Radius DF beschreibe man den Kreis FE. Da nun $DF = DE$ als Radien und $AD = DB$: denn das Dreieck ist gleich-

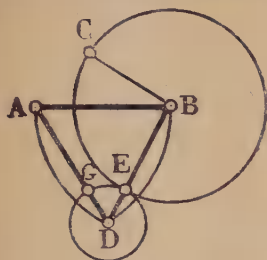


Fig. 20

seitig, so ist die ganze Linie AE demnach gleich der ganzen Linie BF. Aber BF und BC sind als Radien gleich. AE ist also gleich BC, was zu tun war. Wenn aber AD größer ist als BC <Fig. 20> — der Fall ist 10 noch übrig — so zeichne man mit dem Zentrum B und dem Radius BC einen Kreis. Dann wird der Kreis CE die Linie DB <in E> schneiden. Wiederum beschreibe man mit dem Zentrum D und dem Radius DE

einen Kreis. Dann wird der Kreis GE die Linie DA <in G> schneiden. Da nun D Zentrum des Kreises GE ist, so ist $GD = DE$. Es ist aber auch $DA = DB$. Also ist die Reststrecke $AG = BE$. Aber $BE = BC$; denn beide gehen vom Zentrum aus. AG ist also gleich BC und liegt am Punkte A, was zu tun war. Es gäbe noch viele andere 20 Fälle, aber es mag gegenwärtig genügen, diese dargelegt zu haben. Denn mit deren Hilfe können die Eifrigeren auch die anderen zur Übung durchgehen.

Es haben aber schon einige die mannigfachen Konstruktionsweisen dieses elementaren Problems zu beseitigen unternommen und

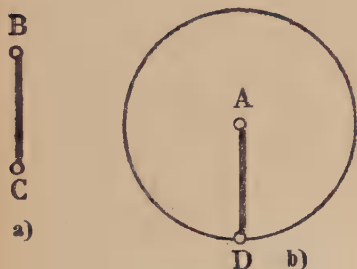


Fig. 21

so gesagt: A sei der gegebene Punkt, und BC die gegebene Strecke und mit dem Mittelpunkte A und einem Radius, dessen Länge BC entspricht <gleich ist>, werde der Kreis ED be- 30 schrieben und dazu werde von A aus eine Gerade an die Peripherie gezogen, AD. Diese ist dann $= BC$. Denn die vom Zentrum ausgehende Gerade ist so groß wie BC. Damit ist die Aufgabe gelöst. Wenn jemand so argu-

mentieren würde, würde er eine petitio principii begehen. Denn wenn er sagt, man solle mit dem Zentrum A und dem Radius BC den Kreis ED beschreiben, so hat er schon in gewissem Sinne eine 39

BC gleiche Strecke genommen, die am Endpunkt A liegt und, festhaltend*) an dem erschlichenen Radius, machte er dessen Endpunkt A zum Zentrum, mit dem Radius aber beschrieb er den Kreis. Hier aber ist der Kreismittelpunkt ein anderer und an anderem Orte befindet sich der Radius des Kreises. Wir werden also auf keinen Fall diese Art des Beweises uns zu eigen machen.

3. Proposition, 3. Problem: *Von zwei gegebenen ungleichen Strecken soll auf der größeren ein der kleineren gleiches Stück abgetragen werden²³²).*

- 10 Dieses dritte Problem hat zwei der Größe nach ungleiche Strecken gegeben und fordert, auf der größeren, ein der kleineren gleiches Stück abzutragen. Auch dieses ist polypototisch. Denn die gegebenen ungleichen Strecken sind entweder getrennt voneinander, wie beim Verfasser der „*Elemente*“, oder an einem Ende verbunden, oder sie schneiden einander, oder die eine schneidet mit ihrem Ende die andere und das auf zweifache Weise: Entweder schneidet nämlich die größere die kleinere, oder die kleinere die größere. Wenn sie nun mit dem einen Ende zusammenhängen, dann ist der Beweisgang klar. Denn mit dem gemeinsamen Ende als Mittel-
- 20 punkt und der kleineren Strecke als Radius beschreibst du einen Kreis, schneidest die größere und wirst damit ein der kleineren
- 22 gleiches Stück abtragen. Denn die Strecke, die der Kreis nach

*) Der griechische Text bereitet hier nicht geringe Schwierigkeiten. 227, 22 ist die allgemeine Lesart *φυλάττων*, nur GRYNÆUS hat *φυλάττων*. Lesen wir *φυλάττων*, dann ist *τὸ αἴτημα* Subjekt zu den Verben *ἐποίησεν* und *ἔγραψεν*, eine jedenfalls sehr kühne und ungewöhnliche Verbindung, wozu dann noch der harte Subjektswechsel zwischen dem persönlichen Subjekt zu *ἔλαβεν* und dem sachlichen Subjekt in dem mit *καί* angeschlossenen Satz kommt. Ferner sieht man sich vergeblich nach einem Objekt für das vereinsamte *φυλάττων* um. BAROCIUS schmuggelt zwar ein solches ein, indem er übersetzt: *et servans petitio extrema intervalli* und bezieht auf diese *extrema* die folgende Gegenüberstellung *τοῦτο μὲν, τῷ δὲ*, aber wie er zu diesen *extrema* kommt, bleibt sein Geheimnis und dann ist zu beachten, daß PROCLUS nicht *τὸ μὲν ... τῷ δὲ* sagt, sondern *τοῦτο μὲν ... τῷ δὲ*. Die Schwierigkeiten werden behoben, wenn wir mit GRYNÆUS *φυλάττων* lesen. Dann bleibt das persönliche Subjekt auch zu *ἐποίησεν* und *ἔγραψεν*, und *τοῦτο μὲν* ist auf *τῷ ᾧ πέρας*, *τῷ δὲ* aber auf *τῷ διαστήματι* in der jeweils vorhergehenden Zeile zu beziehen. Auch der Gegensatz zu dem folgenden *ἐνταῦθα δὲ* tritt so klar zutage. Vor diesem *ἐνταῦθα* ist sinngemäß jedenfalls ein Punkt zu setzen. Die von FRIEDLEIN nahegelegte Änderung des Akkusativs *τὸν τρόπον τοῦτον* in den Dativ im letzten Satz ist nicht nötig, da auch der Akkusativ, wie obige Übersetzung zeigt, einen guten Sinn gibt.

einwärts abschneidet, ist gleich der kleineren Strecke. Wenn aber die eine die andere mit ihrem Ende schneidet, so schneidet entweder die größere die kleinere oder umgekehrt; und wenn sie sich wechselseitig schneiden, so werden sie von einander entweder in gleiche oder ungleiche Teile geschnitten, oder die eine in gleiche, die andere in ungleiche

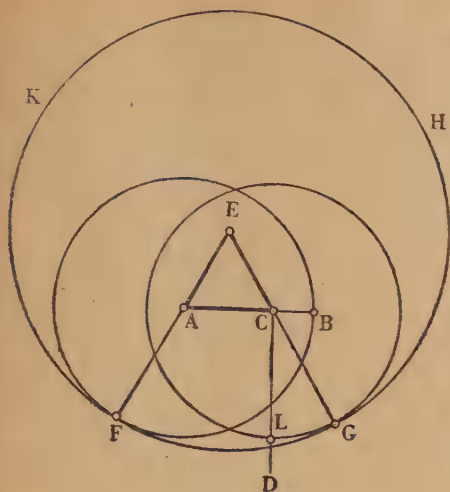


Fig. 22

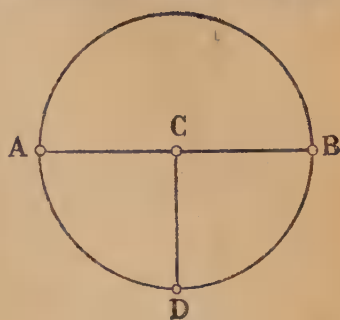


Fig. 23

Teile, auch dies wieder in doppelter Weise. All das gibt uns eine wunderbare Fülle von Übungsmöglichkeiten. Auch wir wollen indes 10 von vielen Fällen nur einige wenige vorlegen. AB und CD <Fig. 22> seien die ungleichen Strecken, CD die größere, und sie schneide AB

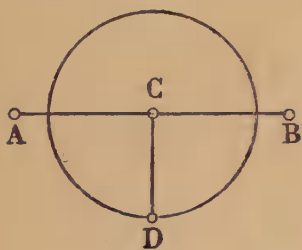


Fig. 24

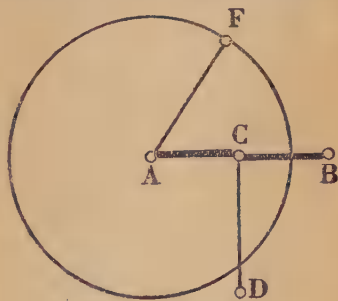


Fig. 25

in ihrem Ende C; ferner sei der Kreis BF mit dem Zentrum A und dem Radius AB, und das gleichseitige Dreieck AEC über AC, und man verlängere EA und EC <bis F und G>; ferner sei mit dem Zentrum E und dem Radius EF der Kreis HGK und wieder mit dem Zentrum C und dem Radius CG der Kreis GL <gezogen>. Da 17

nun $EF = EG$ (denn E ist Kreismittelpunkt), deren Teile EA und EC gleich sind, so sind auch die Reststrecken AF und CG gleich. Aber es ist auch $AF = AB$ (denn A ist Kreismittelpunkt) und dieses $= CL$, denn C ist Kreismittelpunkt. Es ist also die der Linie AB gleiche Linie CL abgeschnitten worden.

Nun sei $\langle \text{Fig. 23} \rangle$ aber CD kleiner als AB und schneide AB im Punkte C in ihrem Ende. Sie wird sie nun in der Mitte schneiden oder nicht in der Mitte. Fürs erste schneide sie sie in der Mitte. Dann ist CD entweder die Hälfte von AB und $AC = CD \langle \text{Fig. 23} \rangle$,
 10 oder kleiner $\langle \text{Fig. 24} \rangle$ als die Hälfte: In diesem Falle beschreibst du mit dem Mittelpunkt C und dem Radius CD einen Kreis und schneidest von AC eine CD gleiche Strecke ab, oder größer als die Hälfte $\langle \text{Fig. 25} \rangle$: Dann lege an den Punkt A die Gerade AF , die gleich ist CD , und beschreibe einen Kreis mit dem Zentrum A und dem Radius AF und schneide von AB ein mit AF , das ist mit CD gleichgroßes Stück ab.

Wenn aber CD die Linie AB nicht in der Mitte schneidet, so sei CA größer als die Hälfte davon. Wenn nun CD entweder die Hälfte von $AB \langle \text{Fig. 26} \rangle$ oder kleiner ist $\langle \text{Fig. 27} \rangle$, wirst du mit Hilfe des
 20 Mittelpunktes C und des Radius CD von AC ein mit CD gleiches Stück

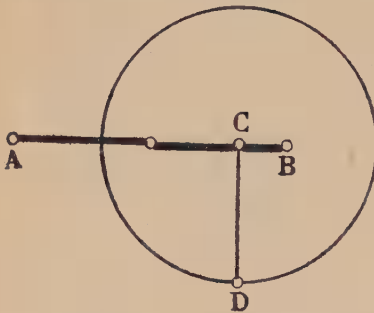


Fig. 26

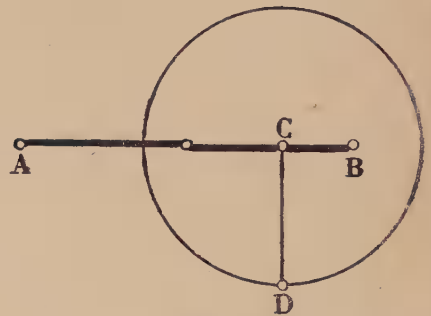


Fig. 27

abschneiden; wenn aber CD größer ist als die Hälfte von AB und entweder gleich mit AC , dann ist die Aufgabe gelöst, oder größer $\langle \text{Fig. 28} \rangle$, dann wirst du, indem du wiederum an den Punkt A eine mit CD gleichgroße Linie $\langle AF \rangle$ anlegst, dasselbe Ergebnis erzielen. Denn mit dem Mittelpunkt A und dem Radius FA wirst du einen Kreis beschreiben, der von AB eine AF , das ist CD gleichgroße Strecke ab-
 27 schneidet.

Falls sie sich aber schneiden (Fig. 29), wie CD und AB, so ziehe man mit dem Zentrum B und dem Radius BA den Kreis AF, und die Verbindungslinie BC werde bis zum Punkte F verlängert. Da nun BF und CD zwei ungleiche Gerade sind^{232a)} und CD mit ihrem

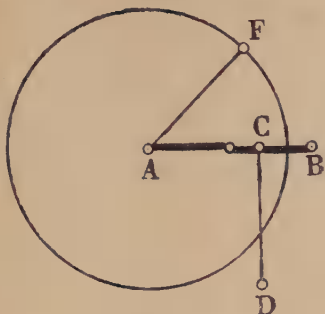


Fig. 28

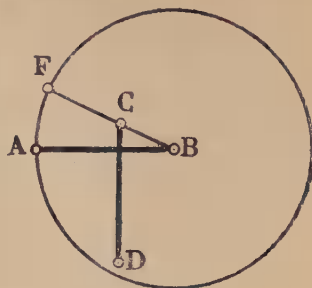


Fig. 29

Ende BF schneidet, so ist es möglich, auf CD*) eine BF gleiche Strecke zu erhalten. Die beiden Möglichkeiten sind hierfür gezeigt worden. Also ist es auch möglich, ein AB gleiches Stück auf CD abzutragen. Denn AB und BF sind einander gleich.

Wir haben also die verschiedenen Fälle nach der trennenden Methode behandelt und die mannigfachen Möglichkeiten hierbei zu 10 zeigen versucht. Bewundernswert ist aber der Beweis des Verfassers der „Elemente“. Denn er paßt für alle angeführten Konstruktionen, und es ist möglich, bei jeder Lage an das Ende der größeren Linie eine der kleineren gleiche anzufügen, und mit demselben Ende als Zentrum und der angefügten Geraden**) als Radius einen Kreis zu beschreiben, der von der größeren ein der kleineren gleiches Stück abträgt, ob sie sich nun wechselseitig schneiden oder eine die andere, oder sonst wie immer zueinander liegen.

18

*) Es ist merkwürdig, wie FRIEDLEIN das nächstliegende oft nicht sieht und sich mit Schwierigkeiten abmüht, die nicht vorhanden sind. Man korrigiere hier das BD seines Textes mit B₃, GRYNAEUS, BAROCIUS und ZAMBERTO in CD und alles ist in Ordnung. Das Wort ἀμφοτέρω 232, 6 beweist keineswegs, daß einige Worte ausgefallen sein müssen, wie meine obige Übersetzung zeigt. Es geht auf die beiden Möglichkeiten, von denen oben 228, 22. 23 die Rede war: wenn die eine die andere in ihrem Endpunkt schneidet, dann schneidet entweder die größere die kleinere oder umgekehrt. Die Ausdrucksweise ist etwas knapp, das wird man ohne weiteres zugeben, aber für den, der Zusammenhang und Sachverhalt kennt, ohne weiteres klar.

**) θέσις ist hier konkret im Sinne von τεθείσα εὐθεία zu nehmen.

4. Proposition, 1. Theorem: *Wenn zwei Dreiecke je zwei Seiten gleich haben und dazu den Winkel, der von den gleichen Seiten eingeschlossen ist, so haben sie auch gleiche Grundlinien, und die Dreiecke sind gleich, wie auch die übrigen Winkel, denen die gleichen Seiten gegenüberliegen²³³* <Erster Kongruenzsatz>.

Dies ist der erste Lehrsatz, den wir in den „*Elementen*“ überkommen haben. Die Sätze vor ihm waren alle nur Probleme. Der erste handelte von der Entstehung der Dreiecke, der zweite und dritte stellte die Aufgabe, eine einer anderen gleiche Gerade zu beschaffen; 10 und zwar gewann der zweite vom Ungleichen aus die gleiche Gerade, der dritte aber fand vom Ungleichen aus durch Wegnahme das Gleiche. Nachdem nun EUKLID den Weg zur Gleichheit, dem ersten Akzidens im Bereich der Quantität, beim Dreieck und den geraden Linien gezeigt, übermittelt er im Anschluß an jene Sätze zuerst den eben angegebenen Lehrsatz. Wie hätte er auch ohne die Grundlage der Dreiecksbehandlung und ohne den Nachweis ihrer Entstehung seine Lehre über ihre wesentlichen Akzidentien, über die Gleichheit ihrer Winkel und Seiten entwickeln können, wie hätte er mit anderen gleichen Seiten und mit anderen gleichen Strecken erhalten, hätte er nicht diesen 20 Gegenstand vorher in Problemen gründlich behandelt und die Methode zur Gewinnung von gleichen Strecken geschaffen? Er sage nur so ohne weiteres ohne Beschaffung dieser Grundlagen, daß, wenn zwei Dreiecke eine solche Eigenschaft haben, sie diese in jedem Falle haben. Wäre es da nicht leicht für einen jeden, ihm zu erwidern: Wissen wir denn überhaupt, ob ein Dreieck konstruiert werden kann? Er komme nur mit der Behauptung: Wenn zwei Dreiecke je zwei gleiche Seiten haben usw.: Könnte nicht jemand auch dagegen die Schwierigkeit geltend machen, es möchte am Ende nicht einmal möglich sein, daß Strecken einander gleich seien, vor allem angesichts der geometrischen 30 Gebilde, bei denen nicht völlige Ungleichheit besteht, sondern auch Gleichheit? Wir werden z. B. erfahren, daß der hornförmige Winkel²³⁴) dem spitzen immer ungleich ist und niemals gleich; und ähnlich verhält es sich mit dem Halbkreiswinkel. Und der Übergang vom Größeren zum Kleineren vollzieht sich nicht in jedem Falle durch das Gleiche. Um deshalb diese Schwierigkeiten zu beheben, entwickelte der Verfasser der „*Elemente*“ die Konstruktion der Dreiecke (sie ist ja gleich für alle drei Arten) und die Entstehungsweisen der gleichen Strecken, deren es zwei sind: Denn in einem Falle schafft er die gleiche, 39 die noch gar nicht existiert, im anderen Falle gewinnt er sie durch

Abtragung von der ungleichen. Auf diese Probleme läßt er mit Recht den Lehrsatz folgen, durch den gezeigt wird, wie bei den Dreiecken, die je zwei gleiche Seiten haben und einen gleichen Winkel, nämlich den von den gleichen Seiten eingeschlossenen, offenbar auch die Basen und die Flächen und die übrigen Winkel einander gleich sind. Denn drei Punkte werden bewiesen und zwei sind gegeben bezüglich der Dreiecke. Gegeben sind die Gleichheit zweier Seiten und zwei Seiten — es ist klar, daß dies nach dem Wortlaut gegeben — und die Gleichheit der von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel. Erwiesen werden soll ein Dreifaches*): Die Gleichheit der Grundlinien, der 10 Dreiecke und der übrigen Winkel. Da es aber möglich wäre, daß zwei Seiten des einen, zwei Seiten des anderen gleich wären, der Lehrsatz aber doch nicht stimmen würde, weil nicht je eine der anderen gleich wäre, sondern beide zusammen, deshalb fügte er beim Datum nicht schlechthin hinzu, daß die Seiten gleich sind, sondern daß je eine der anderen gleich ist. Hätte z. B. ein Dreieck eine Seite mit drei und die andere mit vier Einheiten, und das andere eine mit fünf und die andere mit zwei Einheiten und wäre der von ihnen eingeschlossene Winkel ein Rechter, dann wären die beiden Seiten zusammen beiderseits gleich — sie betrügen dort wie hier sieben Einheiten —, aber die 20 Gleichheit der Dreiecke wäre nicht zu beweisen; denn im einen Falle beträgt der Flächeninhalt 6, im anderen 5 und die Ursache davon ist, daß nicht jede der beiden Seiten für sich je der anderen gleich ist²³⁵). Schon viele haben z. B. bei Länderverteilungen das nicht beachtet, und trotzdem sie die größere Fläche für sich nahmen, erfreuten sie sich des Rufes der Rechtschaffenheit, als hätten sie den gleichen Anteil erworben, weil die beiden einschließenden Seiten zusammen den beiden anderen zusammen gleich waren. Es muß also jede einzelne für sich jeder einzelnen gleich sein und es ist zu beachten, daß, wo immer der Verfasser der „*Elemente*“ diesen Zusatz beifügt, 30 er es nicht ohne Grund tut. Auch bei der Behandlung der Gleichheit der Winkel zwischen den gegebenen Geraden machte er ja den Zusatz: Den von den gleichen Seiten eingeschlossenen, damit wir nicht durch unbestimmte Ausdrucksweise verleitet würden, irgendwelche Basiswinkel zu nehmen. Auch mit der Basis der Dreiecke ist es so: Ist noch keine vorher genannt, so muß man annehmen, die dem Beschauer zunächst liegende sei gemeint; sind aber die anderen beiden 37

*) Die adversative Kopula $\eta \dots \eta$ ist durch den Sinn ausgeschlossen; es ist also dreimal η statt $\eta \eta$ zu lesen.

schon genannt, dann muß man unbedingt an die noch übrige denken. Darum hat auch hier der Verfasser, nachdem er die den beiden anderen gleichen Seiten schon vorweggenommen hat, die übrigen als die Grundlinien der Dreiecke bezeichnet.

- Ein Dreieck wird aber dann als gleich mit einem anderen bezeichnet, wenn ihr Flächeninhalt derselbe ist. Es ist nämlich möglich, daß bei gleichem Umfang wegen der Ungleichheit der Winkel auch der Flächeninhalt ungleich ist. Flächeninhalt nenne ich aber eben den Raum, der von den Seiten des Dreiecks umgrenzt wird, wie ich 10 Umfang die Linie nenne, die aus den drei Dreiecksseiten zusammengesetzt ist²³⁶). Es ist also ein Unterschied zwischen beiden, und es bedarf neben der Gleichheit des Umfangs der Gleichheit der Winkel an je einer Seite*), wenn ein Flächeninhalt dem anderen gleich sein soll. Es kann aber bei einigen der Fall sein, daß bei Gleichheit der Flächeninhalte die Umfänge, und bei Gleichheit der Umfänge die Flächeninhalte ungleich sind. Nehmen wir z. B. zwei gleichschenkelige Dreiecke, deren gleiche Seiten je 5 und deren Grundlinien 8 bzw. 6 Einheiten betragen: Da würde der geometrische Laie behaupten, das mit der Basis 8 sei das größere. Denn der ganze Umfang beträgt 18. 20 Der Fachmann aber würde sagen, daß der Flächeninhalt beider 12 beträgt. Das wird er beweisen, indem er bei jedem Dreieck von der Spitze eine Senkrechte fällt und sie multipliziert mit dem einen Teile der Basisabschnitte²³⁷). Es kommt aber auch vor, wie ich sagte, daß bei Gleichheit der Umfänge der Flächeninhalt ungleich ist. Und schon manche haben ihre Genossen bei Länderverteilungen übervorteilt, indem sie vermöge der Gleichheit des Umfangs ein größeres Besitztum in Anspruch nahmen.

- Die Grundlinie und überhaupt jede Gerade wird als gleich mit einer anderen bezeichnet, wenn ihre Enden miteinander verbunden 30 bewirken, daß sie sich völlig miteinander decken: Denn die eine Gerade fällt ganz mit der anderen zusammen. Bei den gleichen Linien kommt also die Kongruenz durch die Endpunkte zustande. Ein Winkel aber wird einem anderen gleich genannt, ein geradliniger einem geradlinigen, wenn sich, falls man eine der den einen Winkel einschließenden Seiten auf eine vom anderen Winkel legt, auch die beiden übrigen 36 Seiten decken. Wenn aber von diesen die eine über die andere hinaus-

*) BAROCIUS zieht κατὰ μίαν πλευρὰν zu dem vorausgehenden ἰσότητος und hat damit den Satz gründlich mißverstanden. Er übersetzt: *et oportet eequidem propter ambituum juxta unumquodque latus aequalitatem, angulos etiam aequales esse.*

fällt, dann ist der Winkel größer, dessen Seite hinausfällt; fällt sie aber nach innen, dann ist der betreffende kleiner. Denn dort schließt der eine den anderen in sich, hier aber wird er von ihm umschlossen. Die Gleichheit der Winkel stellen wir fest durch Kongruenz der Seiten bei den geradlinigen, und bei den anderen, soweit sie gleichförmig sind, wie bei den mondförmigen, den striegelförmigen (doppelt konkaven)²³⁸⁾, den beiderseits konvexen*), da es möglich ist, daß sie gleich sind und die Seiten sich doch nicht miteinander decken. Denn der rechte Winkel ist gleich einem bestimmten mondförmigen und doch ist es unmöglich, daß die Kreislinien mit den Geraden sich decken. 10
 Noch ist ferner vorwegzunehmen, daß man von gegenüberliegenden Seiten sagt, sie dehnten sich unter dem Winkel aus. Denn jeder Dreieckswinkel wird von zwei Dreiecksseiten eingeschlossen, während die dritte sich unter ihm hinzieht. Deshalb hat der Meister zu dem Punkte, daß die Winkel gleich seien, den Zusatz beigefügt: Denen die gleichen Seiten gegenüberliegen, damit wir es nicht für belanglos halten, welchen Winkel nur immer zu nehmen und diesen als gleich mit den nächsten besten der übrigen zwei Dreieckswinkel zu bezeichnen. Nein, wir sollen die als gleich bezeichnen, die den gleichen Seiten gegenüberliegen. Von den gleichen Seiten aber liegt die eine 20 (von den den gleichen Winkel einschließenden**) dem einen Winkel gegenüber, die andere dem anderen.

Soviel sei zur Erläuterung des Lehrsatzes vorausgeschickt; für seinen Beweis aber wollen wir noch den Satz voranstellen, daß zwei Gerade keinen Raum einschließen. Denn diesen nahm der Meister als allgemein anerkanntes Axiom²³⁹⁾. Denn wenn die Endpunkte der Grundlinien, sagt er, miteinander zusammenfallen, werden auch die Grundlinien zusammenfallen, andernfalls würden zwei Gerade einen Raum umschließen. Woher kommt es nun, daß dies unmöglich ist?

ACB und ADB seien zwei Gerade, die einen Raum einschließen, 30 und sollen ins Unendliche verlängert werden (Fig. 30). Nun werde mit dem Zentrum B und dem Radius AB der Kreis AEF beschrieben. Da nun ACBF Durchmesser ist, so ist AEF die Hälfte der Kreislinie. 33

*) So übersetzt BAROCIUS.

**) Der Ausdruck mutet als störender Fremdkörper an; ich halte ihn für eingeschoben. BAROCIUS hat ihn nicht und übersetzt einfach: *aequalium etenim laterum alterum quidem, alterum aequalium angulorum subtendit: reliquum vero, reliquum*. FRIEDLEIN bringt den Ausdruck nach $\eta \delta \epsilon$, wo er nachhinkt und auffallen muß. Eher könnte man ihn sich bei $\eta \mu \epsilon \nu$ gefallen lassen, wozu ich ihn gezogen habe.

Da hinwiederum $ADBE$ Durchmesser ist, so ist AE die Hälfte der Kreislinie. Also*) ist $AE = AEF$, was unmöglich. Es umschließen also nicht zwei Gerade einen Raum. Das wußte der Verfasser der „Elemente“ wohl und darum verlangte er in der ersten Forderung, von jedem beliebigen Punkt zu jedem beliebigen Punkt eine Gerade zu ziehen, da stets nur eine Gerade und nicht zwei die zwei Punkte verbinden können: Denn der Kreislinien gibt es mehrere, die sie nach derselben Seite sowohl, wie nach der entgegen-

10 gesetzten verbinden können. So werden ja auch die Enden des Durchmessers durch zwei Kreislinien, aber nur durch eine Gerade verbunden. Es ist aber möglich, sowohl innerhalb wie außerhalb der Halbkreise unendlich viele Kreislinien zu ziehen, die die gegebenen Punkte verbinden. Der Grund davon liegt darin, daß die Gerade die kürzeste ist von allen, die die-

20 und wird stets zum Maßstab für alles andere. Wie der Rechte, der nur einer ist, zum Maße für die unbegrenzte Zahl der anderen Winkel wird, denn durch diesen finden wir auch die anderen, so dient auch die Gerade zum Maße für die ungeraden. Soviel hiervon.

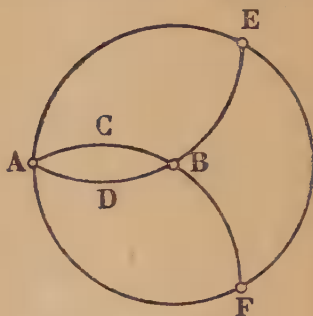


Fig. 30

Daß aber das ganze Beweisverfahren bei diesem Lehrsatz abhängt von Axiomen, daß es im Wesentlichen wurzelt und von der unmittelbaren Evidenz der Definitionen ausgeht, ist jedem klar. Weil nämlich die zwei Seiten beiden gleich sind, je eine der anderen, decken sie sich miteinander; und weil die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind, decken sich auch diese. Da nun aber

30 Winkel mit Winkel und Seiten mit Seiten sich decken, decken sich auch die unteren Endpunkte der Seiten; wenn aber das $\langle$ gilt $\rangle$, deckt sich auch Basis mit Basis; wenn aber die drei Seiten mit den dreien sich decken, dann auch Dreieck mit Dreieck insgesamt und alles mit allem. Somit erwies sich die Gleichheit, in gleichartigen Gebilden erfaßt, als logischer Grund des ganzen Beweisverfahrens. Denn zwei

37 satzes in sich: Das eine, daß das Kongruente einander gleich ist.

*) Den Zusatz *περιφέρεται* lehne ich als unnötig ab.

Es ist schlechthin wahr und bedarf auch nicht eines klärenden Zusatzes. Seiner bedient sich der Verfasser bei der Basis, dem Flächeninhalt und den übrigen Winkeln. Denn diese, sagt er, sind gleich, weil sie sich decken. Das andere lautet: Das Gleiche ist miteinander kongruent. Das ist aber nicht allgemein richtig, sondern nur bei gleichartigen Gebilden. Gleichgeartet nenne ich aber z. B. Gerade mit Geraden, Kreislinien mit Kreislinien desselben Kreises und Winkel mit Winkeln, die von gleichartigen und gleichliegenden Linien eingeschlossen sind. Was von diesen gleichartigen Stücken gegeben, ist, weil gleich, auch miteinander kongruent. So stellt sich, um es 10 zusammenfassend zu sagen, der ganze Beweisgang folgendermaßen dar: Gegeben sind diese Stücke gleich denen, zwei Seiten gleich zwei anderen und die Winkel, die von ihnen eingeschlossen sind, und diese Stücke sind kongruent. Wenn aber diese sich miteinander decken, dann deckt sich auch die Basis mit der Basis und alles mit allem. Wenn aber diese Stücke kongruent sind, sind sie auch gleich. Wenn also Gleichheit dieser Stücke mit diesen gegeben ist, so wird damit zugleich bewiesen, daß alle Stücke allen gleich sind. Dies erweist sich als die erste Schlußform zur Erkenntnis der vollständigen Gleichheit der Dreiecke. Soviel über den Beweisgang im allgemeinen. 20

Nun hat der Mechaniker KARPOS in seinem astronomischen Werk²⁴⁰⁾ die Auseinandersetzung über die Probleme und Lehrsätze wieder aufgenommen — ob zu guter Stunde oder nicht, wollen wir für den Augenblick auf sich beruhen lassen —, aber gleichwohl, er machte einen Vorstoß zur Erzielung einer klaren Scheidung dieser Begriffe und behauptete, der Reihenfolge nach gehe den Lehrsätzen die Gattung der Probleme voran. Denn man bemüht sich, die Träger vor den Akzidentien*) durch die Probleme ausfindig zu machen. Die Angabe des Problems sei ferner einfach und setze keinerlei wissenschaftliche Erkenntnis voraus: Denn offenbar fordert es nur, etwas 30 derartiges zu tun, wie ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, oder von zwei gegebenen Geraden von der größeren ein der kleineren gleiches Stück abzutragen. Was wäre da unklar und schwierig? Die Formulierung des Lehrsatzes aber sei mühevoll und beanspruche große Genauigkeit und wissenschaftliches Urteil, damit er nicht zuviel enthalte und nicht hinter der Wahrheit zurückbleibe, wie man 36

*) Nachdem B₃ und GRYNÆUS, denen sich BAROCIUS in seiner Übersetzung anschließt, einen Text bieten, der Sinn und Zusammenhang vollständig entspricht, so halte ich mich an diesen und lehne die willkürliche Änderung FRIEDLEINS ab.

z. B. an diesem ersten Lehrsatz sehen könne. Bei den Problemen gibt es sodann gemeinhin nur einen durch Analyse gefundenen Weg, auf dem wir zum Erfolg gelangen können. Denn auf diese Weise spürt man den dunkleren Problemen nach. Bei den Lehrsätzen aber ist die Behandlung schwierig, so daß bis auf unsere Tage, sagt er, niemand eine allgemeine Methode, sie ausfindig zu machen, lehren könne. Deshalb sei auch wegen des leichteren Charakters die Gattung der Probleme einfacher. Nach diesen Feststellungen fährt er fort: „Deshalb also gehen auch beim Elementarunterricht die Probleme
 10 den Lehrsätzen voran und mit ihnen hebt dieser an; und der erste Lehrsatz kommt der Reihe nach erst an vierter Stelle, nicht weil der vierte*) Satz durch sie bewiesen wird, sondern weil, wenn er auch keines der vorausgehenden Sätze zum Beweise bedarf, diesen als Problemen der Vorrang gebührt, jener aber ein Lehrsatz ist. Denn bei ihm verwendet er unbedingt die Axiome (Gemeinbegriffe) und nimmt in einem gewissen Sinne dasselbe Dreieck als an verschiedenen Orten liegend. Denn die Kongruenz und der Nachweis der Gleichheit durch diese sind bedingt durch die sinnenfällige und einleuchtende Vorstellung. Aber gleichwohl, trotz dieses Charakters des Beweises
 20 des ersten Lehrsatzes, gingen die Probleme mit Recht voran, weil**) sie ganz allgemein die führende Stelle innehaben.“

In der Tat gehen wohl der äußeren Anordnung nach die Probleme den Lehrsätzen voran, besonders für diejenigen, die von den im sichtbaren Bereich sich bewegenden Künsten sich erheben zur Höhe der reinen Wissenschaft. Dem inneren Werte nach aber gehen die Lehrsätze den Problemen voran, und es scheint die ganze Geometrie, soweit sie mit den zahlreichen Künsten zusammenhängt, in ihrer Tätigkeit durch Probleme bestimmt, soweit sie aber der höchsten Wissenschaft sich nähert, in rein geistiger Betrachtung von den Pro-
 30 blemen zu den Lehrsätzen, von den niedrigeren zu den höchsten Seinsordnungen, von den mehr praktischen Künsten zu den reinen Geisteswissenschaften emporzuführen. Es ist also ein müßiges Unter-
 33 fangen, dem GEMINOS einen Vorwurf daraus zu machen, daß er be-

*) Wie FRIEDLEIN zu τὸ πέμπτον kommt, ist nicht klar. Aber jedermann sieht leicht ein, daß es τὸ τέταρτον heißen muß, wie auch BAROCIUS übersetzt. Der 5. Satz kommt in diesem Zusammenhang gar nicht in Frage.

**) Wieder ist wie schon S. 20, 11 bei FRIEDLEIN der διότι-Satz von seinem vorausgehenden Hauptsatz fälschlicherweise durch einen Punkt getrennt. Sollte am Ende gar der Herausgeber διότι mit διὸ verwechseln?

hauptet, das Theorem sei wertvoller als das Problem. Denn KARPOS seinerseits hat den Problemen den Vorrang hinsichtlich der Reihenfolge eingeräumt, GEMINOS aber hinsichtlich des vollkommeneren Wertes. Wir haben aber zum 4. Lehrsatz schon bemerkt, daß er in gewissem Sinne der ihm vorausgehenden Probleme bedarf, in denen wir den Entstehungsprozeß der Dreiecke und den Weg zum Finden der Gleichheit kennengelernt haben. Dem sei nun noch die Bemerkung hinzugefügt*), daß er wenigstens unter den Lehrsätzen der einfachste und ursprünglichste ist: Denn er wird sozusagen unmittelbar und allein von den ersten Gemeinbegriffen her aus seinem innersten Wesen bewiesen; daß er aber, da er ein Akzidens beweist, das bei den Dreiecken zutage tritt, bei denen je zwei Seiten und dazu die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich sind, mit Recht nach den Problemen gestellt wurde, durch die die Träger für dieses Akzidens und überhaupt für das, was gegeben war, gewonnen wurden.

5. Proposition, 2. Theorem: *In gleichschenkeligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich. Verlängert man die gleichen Seiten, so sind die Winkel unter der Basis gleich*²⁴¹⁾ <Basiswinkelsatz>.

Von den Lehrsätzen sind die einen einfach, die anderen zusammengesetzt. Einfach nenne ich jene, die in ihren Voraussetzungen und Folgerungen keine Trennung aufweisen, da sie nur ein Datum und einen Fragepunkt haben, wie wenn z. B. der Verfasser der „Elemente“ sagte: Jedes gleichschenkelige Dreieck hat gleiche Basiswinkel; zusammengesetzt hingegen diejenigen, bei denen die Voraussetzungen oder die Folgerungen bei Einfachheit der Voraussetzung, oder beide Faktoren sich aus mehreren zusammensetzen. Von diesen wiederum sind die einen komplex (gekoppelt), die anderen inkomplex. Zu den inkomplexen gehören jene, die, obwohl zusammengesetzter Natur, nicht in einfache Lehrsätze aufgelöst werden können wie der vierte. Denn bei diesem sind Datum und Folgerung zusammengesetzt, aber das Datum kann nicht in einfache Sätze aufgelöst werden und

*) Man fragt sich vergebens, was hier am Ende des Kapitels über das erste Theorem *προκείσθω* für einen Sinn haben soll. Es muß natürlich *προσκεισθω* heißen. BAROCIUS übersetzt: *nunc autem addatur*. FRIEDLEIN beginnt mit *προκείσθω* einen neuen Abschnitt, ganz verkehrt. Der Satz schließt sich unmittelbar an den vorausgehenden an: wir haben schon bemerkt usw. Von *προσκεισθω* hängen zwei Nebensätze ab, der erste eingeleitet mit *ὡς μὲν*, der zweite mit *σύμπτωμα δὲ*, dessen Verbum *τίταται* erst unten Z. 7 folgt.

so einfache Theoreme bilden. Denn die Folgerungen treten nicht ein, wenn die Dreiecke bloß die Seiten oder den Scheitelwinkel gleich haben. Komplex aber sind jene Lehrsätze, die sich in einfache auflösen lassen, wie das Theorem: Dreiecke und Parallelogramme, die die gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien. Denn man kann auch gesondert sagen: Dreiecke, die die gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien und ebenso Parallelogramme. Von den zusammengesetzten Theoremen entfällt bei den einen, die von derselben Voraussetzung ausgehen, die Zusammen-
 10 setzung auf die Schlußfolgerung, bei den anderen auf die Voraussetzungen, während aus allen der gleiche Schluß gezogen wird, bei der dritten Klasse auf die Schlußfolgerung und die Voraussetzungen. Bei der Schlußfolgerung erfolgt die Zusammensetzung im vierten Satz*). Denn dies Theorem hat drei Beweispunkte: Daß die Grundlinien gleich, daß die Dreiecke gleich, daß die übrigen Winkel, denen die gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sind. Bei den Voraussetzungen liegt sie vor in dem den Dreiecken und Parallelogrammen von gleicher Höhe gemeinsamen Lehrsatz, bei beiden Faktoren wie etwa in dem Satz: Die Durchmesser der Kreise und Ellipsen²⁴²⁾
 20 halbieren die Flächen und die die Flächen umschließenden Linien. Von den komplexen Sätzen sind die einen allgemein, die anderen aber folgern aus den Teilen das Ganze. Wenn wir z. B. sagen, der Durchmesser halbiert den Kreis, die Ellipse und die Parallelogramme, so nehmen wir jedes einzelne Glied des Komplexes nicht im Sinne des Ganzen, sondern erhalten aus der Zusammenfassung aller das Allgemeine. Wenn wir aber sagen: Im Kreise halbieren sich alle Durchmesser und machen alle Schnittwinkel gleich, so sprechen wir allgemein. Bei der Ellipse hingegen sind nicht alle Schnittwinkel gleich, sondern nur jene, die von der Achse gebildet werden. Über-
 30 haupt aber haben diese Zusammensetzungen die Mathematiker nur der Kürze und der Analysen wegen ersonnen. Denn vieles, was nicht zusammengesetzt ist, entzieht sich der Analyse; das Zusammengesetzte allein bietet eine leichte Möglichkeit zur Zurückführung auf die Prinzipien.

Nach Erledigung dieser Voruntersuchungen kommen wir zum
 36 5. Lehrsatz. Er ist unbedingt als zusammengesetzt anzusprechen,

*) 245, 15: Der Sachverhalt fordert die Annahme der Konjekturen FRIEDLEINS. Statt *ἐνταῦθα* ist *ἐν τῷ τετραγώνῳ* zu schreiben.

und zwar in doppelter Beziehung; in Hinsicht auf das Datum und die Thesis, was der Verfasser der „Elemente“ auch andeutete, indem er das eine Theorem unterteilte und beide Daten und Beweispunkte gesondert vorlegte. Er sagt nämlich: Die gleichschenkeligen Dreiecke haben gleiche Basiswinkel, und dann wiederum: Verlängert man die gleichen Seiten, dann sind die Winkel unter der Basis gleich. Man darf nämlich nicht glauben, es handle sich um zwei Lehrsätze, sondern nur um einen, der aber nach Datum und Thesis zusammengesetzt ist. Und beide zusammengesetzte Sätze sind vollkommen und richtig, weshalb auch ihre Trennung (und die Umkehrung)*) beiderseits 10 richtig ist. Denn sind die Basiswinkel gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig; sind die Winkel unter der Basis gleich, dann sind die gleichen Seiten verlängert und das Dreieck ist gleichschenkelig. Doch unser Verfasser wird zu dem Satz von der Gleichheit der Basiswinkel die Umkehrung liefern; zu dem anderen aber von der Gleichheit der Winkel unter der Basis nicht mehr. Und doch ist auch dieser wahr.

Den Grund hierfür werden wir später angeben; jetzt wollen wir uns zuerst die Frage vorlegen, warum er überhaupt den Beweis hierfür, daß die Winkel unter der Basis gleich sind, noch dazu gab. Er verwendet nämlich diesen Satz in keiner Weise zur Konstruktion 20 eines anderen Problems oder zum Beweise eines Theorems. War er aber belanglos, warum mußte er dann auf diesen Lehrsatz eingehen? Auf diese Frage ist zu erwidern: Wenn er auch in keiner Weise vorhatte, den Satz zu verwenden, daß die Winkel unter den Basen der gleichschenkeligen Dreiecke gleich sind, so wird er sich doch zur Entkräftung der Einwände und zur Widerlegung von Schwierigkeiten gegen die Lehrsätze als nützlich erweisen. Von einem geschulten 27

*) FRIEDLEINS Text lautet: διὸ καὶ ἀνάλυσιν ἀληθῆς ἀφ' ἑκατέρου. BAROCIUS übersetzt: *idcirco conversio quoque vera est in utroque*. Beide Sätze decken sich nicht, da ἀνάλυσιν niemals den Sinn von *conversio* annimmt; es kann hier nur „Teilung“ heißen und ist dann die Begründung zur vorausgehenden Behauptung: Weil beide Glieder des Theorems vollkommen und wahr sind, kann es in zwei Teile zerlegt werden, von denen jeder wieder wahr ist. Verbindet sich FRIEDLEINS ἀνάλυσιν gut mit dem vorausgehenden Satz, so fehlt es bei ihm am Zusammenhang mit dem folgenden und doch wird dieser mit γὰρ als Begründung des vorausgehenden Gedankens eingeführt. Dieser Umstand fordert im vorausgehenden unbedingt einen Begriff, wie ihn BAROCIUS mit *conversio* bietet, also ἀντιστροφή, womit sich dann auch ἀφ' ἑκατέρου leichter verbindet. Wir haben also die Wahl, entweder ἀνάλυσιν zu ersetzen durch ἀντιστροφή oder nach ἀνάλυσιν ἀληθῆς zu ergänzen καὶ ἀντιστροφή. Ich entscheide mich für letzteres, um den Zusammenhang nach rückwärts und vorne zu wahren.

Vertreter der Wissenschaft darf man erwarten, daß er Möglichkeiten vorsieht zur Entkräftung von Einwänden, die dem, was dargelegt werden soll, widerstreiten und Mittel und Wege der Zurückweisung bereitzuhalten, damit nicht nur der Beweis des Wahren vermittle des bereits Bewiesenen, sondern auch die Widerlegung des Irrtums durch jene erfolge. Man kann hieraus auch für die Rhetorik Nutzen ziehen aus der in der Geometrie herrschenden Ordnung. Denn wer bei diesem Redehandwerk das zu leisten vermag, die den folgenden Hauptgedanken entgegenwirkenden Einwände vorzusehen, und
 10 vor der Behandlung der ersteren wie so nebenbei durch andere Vorbemerkungen die Widerlegung der Einwände vorbereitet, der möchte die allersicherste Methode für solche Redekämpfe aufstellen. Das lehrt uns auch der Verfasser der „*Elemente*“ durch die Tat, indem er vor den Theoremen zugleich den Beweis liefert für das, wodurch wir die Einwände mit Hilfe der eben geführten Beweise widerlegen, daß nämlich die Winkel unter der Basis der gleichschenkeligen Dreiecke gleich sind, und erleichtert so die Widerlegung jener falschen Einwände. Es wird uns beim weiteren Verlauf der Erläuterungen klar werden, daß wir auch die gangbaren Einwände beim 7. und
 20 9. Lehrsatz mit diesem Satze zurückweisen.

Hieraus wird auch klar, warum die 6. Proposition nicht auch von diesem Satz eine Umkehrung gibt, weil eben auch diese Umkehrung keinen nennenswerten Nutzen bietet, sondern nur *per accidens* uns Vorteile gewährt für den gesamten Aufbau der Wissenschaft²⁴³.

Wenn uns aber jemand aufforderte, auch ohne Verlängerung der gleichen Geraden die Gleichheit der Basiswinkel gleichschenkeliger
 30 Dreiecke zu beweisen: Denn man brauche deren Gleichheit nicht durch die unter der Basis liegenden Winkel zu beweisen, so werden wir mit sozusagen veränderter Konstruktion die Außenwinkel zu Innenwinkeln des gleichschenkeligen Dreiecks machen und so den geforderten Beweis führen. Es sei also ABC ein gleichschenkeliges Dreieck, und es werde auf AB ein beliebiger Punkt D angenommen und auf AC eine AD gleiche Strecke $\langle AE \rangle$,
 39 und man verbinde BE , DC und DE . Da nun $AB = AC$ und

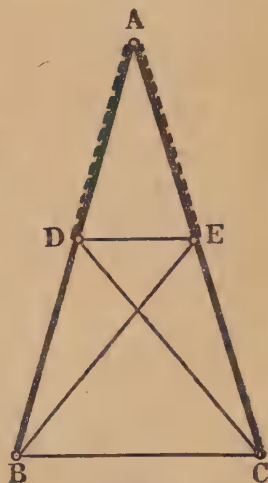


Fig. 31

$AD = AE$ und der Winkel bei A gemeinsam ist, so ist auch $BE = DC$, und die übrigen Winkel sind den übrigen gleich, so daß Winkel $ABE =$ Winkel ACD . Da nun wiederum $DB = EC$ und $BE = DC$ und Winkel $DBE = \sphericalangle ECD$ und die Basis DE gemeinsam ist, so ist alles allem gleich, so daß Winkel $EDB = \sphericalangle DEC$ und Winkel $DEB =$ Winkel EDC . Da nun Winkel $EDB =$ Winkel DEC , wovon die gleichen Winkel DEB und EDC weggenommen sind, so sind die restlichen Winkel BDC und CEB gleich. Es sind aber auch die Seiten BD und DC (bzgl.) gleich CE und EB , je eine der anderen, und BC ist gemeinsame Basis; und so ist alles allem 10 gleich, so daß auch die übrigen Winkel, denen die gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sind. Denn DC liegt dem Winkel DBC und EB dem Winkel ECB gegenüber. Die Basiswinkel der gleichschenkeligen Dreiecke sind also gleich, auch ohne daß die gleichen Geraden verlängert wurden.

Noch kürzer führt PAPPUS, ohne irgendeiner Zutat zu bedürfen, den Beweis folgendermaßen: ABC sei ein gleichschenkeliges Dreieck mit den gleichen Seiten AB und AC . Denken wir uns nun dies eine

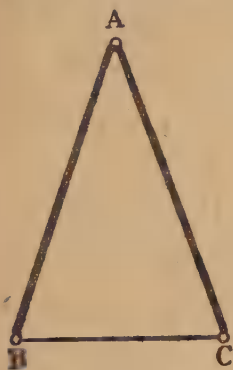


Fig. 32

Dreieck als zwei und sagen wir so: Da $AB = AC$ und $AC = AB$, so sind die zwei Seiten AB und 20 AC gleich den zwei Seiten AC und AB , und Winkel BAC ist gleich Winkel CAB , denn es ist derselbe. Also ist alles allem gleich, $BC = BC$; das Dreieck ABC dem Dreieck ABC , Winkel $ABC =$ Winkel ACB und Winkel $ACB = \sphericalangle ABC$. Denn ihnen liegen die gleichen Seiten AB und AC gegenüber. Also sind die Basiswinkel in gleichschenkeligen Dreiecken gleich. PAPPUS scheint dieses Beweisverfahren gefunden zu haben, indem er bemerkte, daß auch der Verfasser der 30

„Elemente“ beim 4. Lehrsatz die zwei Dreiecke

vereinte, zur Deckung miteinander brachte, aus den beiden ein einziges machte, und so ihre Gleichheit in allen Stücken erforschte. Auf dieselbe Weise können nun auch wir in diesen einen Dreiecke unserer Annahme zufolge zwei sehen und so die Gleichheit der Basiswinkel nachweisen.

Heil dem alten THALES, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Basis-

winkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Weise für „gleich“ die Bezeichnung „ähnlich“ gebraucht. In noch höherem Maße aber darf man diejenigen von den Jüngeren bewundern, und zu ihnen gehört GEMINOS, die in noch umfassenderer Weise nachgewiesen haben, daß die gleichen Geraden, die von einem Punkte zu einer gleichförmigen Linie gezogen werden, gleiche Winkel bilden. Ob sie also eine Gerade, eine Kreislinie oder eine zylindrische Schraubenlinie als Basis haben, immer seien ihre Basiswinkel gleich. Dieses Theorems bedient sich nämlich GEMINOS, um zu zeigen, daß es nur drei und nicht mehr
 10 gleichförmige Linien gebe, die Gerade, die Kreislinie und die zylindrische Schraubenlinie. Und das ist so recht eigentlich das Allgemeine (Universale), dem zuerst das Akzidens zukommt, wie auch gezeigt werden wird, daß der Satz, zwei Winkel seien größer als der dritte, jedem Dreieck als solchem zukomme²⁴⁴). Daß die Basiswinkel gleich sind, ist also kein Universale des gleichschenkeligen Dreiecks, wenn dies auch bei jedem einzelnen der Fall ist, sondern der auf eine gleichförmige Linie gefällten Geraden. Denn diesen ist es in erster Linie eigen, gleichen Winkeln gegenüberzuliegen.

6. Proposition, 3. Theorem: *Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich
 20 sind, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich²⁴⁵).*

Dieser Lehrsatz läßt zum erstenmal bei den Theoremen die folgenden zwei Dinge in Erscheinung treten, die Umkehrung und die Hinausführung auf etwas Unmögliches (*Deductio ad absurdum*)²⁴⁶). Er ist nämlich die Umkehrung des vorausgehenden Lehrsatzes und wird durch die Hinausführung auf etwas Unmögliches bewiesen. Es ist aber über beide Erscheinungen zu sagen, was zur vorliegenden Abhandlung gehört.

Man spricht also im Kreise der Mathematiker von „Umkehrung“
 30 einmal vorzugsweise und im eigentlichen Sinne, wenn die Lehrsätze die Schlußfolgerungen und Voraussetzungen miteinander vertauschen und somit die Folgerung des vorausgehenden Satzes zur Voraussetzung im folgenden gemacht, die Voraussetzung aber als Schlußfolgerung gezogen wird²⁴⁷), also z. B.: In gleichschenkeligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich: Voraussetzung ist hier das gleichschenkelige Dreieck, Folgerung aber die Gleichheit der Basiswinkel, und: Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln sind gleichschenkelig, was
 38 denn auch das 6. Theorem besagt, das die Gleichheit der Basiswinkel

zur Voraussetzung, und die Gleichheit der den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten zur Schlußfolgerung macht. Die andere Umkehrung aber besteht nur in einer irgendwie beschaffenen Vertauschung zusammengesetzter Glieder. Wenn nämlich der zusammengesetzte Lehrsatz mit mehreren Voraussetzungen beginnt und mit einer Folgerung endet, so nehmen sie die Folgerung und eine der Voraussetzungen und machen eine oder mehrere der Voraussetzungen zur Folgerung. Auf diese Weise ist der 8. Lehrsatz die Umkehrung des 4. Denn letzterer besagt: Gleichen Seiten und gleichen Winkeln liegen gleiche Basen gegenüber; ersterer: Gleichen Grund-
 10 linien anliegende gleiche Basen schließen gleiche Winkel ein, wovon die gleichen Grundlinien eine Folgerung im vorhergehenden Satze und die anliegenden gleichen Seiten eine der in ihm vorweggenommenen Voraussetzungen waren. Von diesen beiden Umkehrungen, die es gibt, ist die primäre gleichförmig und (zahlenmäßig) begrenzt; die andere aber ist mannigfach, bringt es zu einer hohen Zahl von Lehrsätzen und kennt eine Umkehrung nicht bloß in einem Punkte, sondern in vielen wegen der Menge der Voraussetzungen bei den zusammengesetzten Lehrsätzen. Vielfach stellen wir aber auch dem
 20 mit zwei oder mehreren Voraussetzungen beginnenden Lehrsatz nur eine Umkehrung entgegen, wenn die Voraussetzungen nicht alle bestimmt sind, sondern einige unbestimmt*). Es muß hierbei aber die Feststellung gemacht werden, daß viele Umkehrungen falsch und streng genommen keine Umkehrungen sind, z. B. folgende: Jede durch 2 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar. Aber es ist nicht wahr, daß jede durch 3 teilbare Zahl auch durch 6 teilbar ist. Der Grund hierfür liegt darin, daß der eine Faktor allgemeiner ist, der andere weniger allgemein; und nur vom Ganzen kann man das Eine und das Andere aussagen. Wo aber das zuerst Gegebene (das Allgemeine) und das
 30 Wesentliche zu gewahren sind, da ist auch die Umkehrung eine Begleiterscheinung. Diese Erkenntnis entging auch dem Kreise der Mathematiker um MENAICHMOS und AMPHINOMOS nicht.

Von den Umkehrungssätzen selbst aber ist man gewohnt, die einen als Leitsätze, die anderen als die Umkehrungen zu bezeichnen. Denn wenn man irgendeine Gattung zugrunde legt und das ihr eigene 35

*) Ich akzeptiere den obigen (Z. 13) Zusatz FRIEDLEINS ἡ πλείονων. Wenn er aber damit die Stelle noch immer nicht für geheilt betrachtet und sich an der vermeintlichen Unstimmigkeit zwischen ἐν ἀντιστρέφουμεν und ἐναι ὑποθέσεις stößt, so zeigt er damit nur, daß er den klaren Sinn der Stelle nicht erfaßt hat.

Akzidens beweist, so sprechen wir von einem Leitsatz; wenn man aber das Akzidens zur Grundlage macht, zur Schlußfolgerung hingegen die Gattung, dem das Akzidens zukommt, so nennt man das die Umkehrung. Jedes gleichschenkelige Dreieck hat gleiche Basiswinkel, das ist ein Leitsatz; denn Grundlage ist, was der Natur nach vorangeht; ich meine aber mit der Gattung das gleichschenkelige Dreieck selbst. Jedes Dreieck mit zwei gleichen Winkeln hat auch die gegenüberliegenden Seiten gleich und ist gleichschenkelig, dieser Satz ist eine Umkehrung. Denn der Meister vertauscht die Voraus-
 10 setzung und ihren Befund, macht letzteren zur Voraussetzung und beweist erstere von diesem aus. Soviel hatten wir von den geometrischen Umkehrungen zu sagen.

Die Zurückführungen auf etwas Unmögliches laufen alle auf eine evidente Unmöglichkeit hinaus, deren Gegenteil allgemein anerkannt ist. Es kann aber sein, daß die einen hinauslaufen auf Widersprüche mit den Axiomen, den Forderungen oder den Definitionen, die anderen auf Widersprüche mit bereits bewiesenen Sätzen. Denn der vorliegende 6. Lehrsatz erweist die sich ergebende Unmöglichkeit dadurch, daß er das Axiom umstößt, das besagt, daß das Ganze größer
 20 als der Teil ist. Der 8. läuft auf etwas Unmögliches hinaus, stößt aber nicht ein Axiom um, sondern das durch den 7. Lehrsatz Bewiesene. Denn was dieser zurückwies, von dem zeigt der 8., daß es von denen behauptet wird, die die Thesis nicht zugeben.

Es nimmt aber jede Zurückführung auf eine Unmöglichkeit das Gegenteil der Thesis an und schreitet von dieser Voraussetzung aus voran, bis sie bei einem anerkannten Widersinn anlangt, dadurch die Voraussetzung aufhebt und die ursprüngliche Thesis erhärtet. Man muß nämlich ganz allgemein wissen, daß alle mathematischen Beweise entweder von den Prinzipien ausgehen oder zu ihnen hinstreben,
 30 wie irgendwo PORPHYRIOS sagt. Die von den Prinzipien ausgehenden sind wieder zweifacher Art: Entweder gehen sie von den Axiomen und der in ihnen selbst liegenden Evidenz allein aus, oder von den früheren Beweisen. Die zu den Prinzipien zurückführenden aber bejahen diese entweder oder heben sie auf. Die die Prinzipien bejahenden heißen Analysen, und ihnen sind die Synthesen entgegengesetzt: Man kann nämlich von diesen Prinzipien aus in Ordnung bis zum Fragepunkt voranschreiten und das ist Synthese; die die Prinzipien aber aufheben, werden Zurückführungen auf etwas Unmögliches genannt.
 39 Denn allgemein gültige und evidente Sätze in irgendeinem Punkte

umzustoßen, ist Aufgabe dieses Verfahrens. Auch hierbei findet eine Art Schlußverfahren statt, aber nicht dasselbe wie bei der Analyse. Denn bei den Zurückführungen auf eine Unmöglichkeit ist die Verflochtenheit der Sätze gemäß der zweiten Art der hypothetischen Schlüsse gegeben, also z. B. so: Wenn in Dreiecken mit gleichen Winkeln die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten nicht gleich sind, dann ist das Ganze dem Teile gleich; das ist aber unmöglich. Es sind also in Dreiecken mit zwei gleichen Winkeln die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten auch ihrerseits gleich. Soviel über die bei den Mathematikern übliche Methode der Zurück- 10
führung auf eine Unmöglichkeit. Es verwendet aber, wie schon ge-

sagt, der Verfasser der „Elemente“ die Umkehrung in der Proposition; (so nahm er die Schlußfolgerung des 5. Theorems als Datum und fügte seine Voraussetzung als Thesis hinzu), die Zurückführung auf eine Unmöglichkeit aber bei der Konstruktion und beim Beweis.

Wenn aber einige mit dem Einwand kämen, wenn einer ein AB gleiches Stück von AC wegnimmt, dann dürfe er das nicht bei dem Punkte C 20 tun, sondern bei A , so werden wir auch bei Annahme dieser Voraussetzung auf dieselbe Unmöglichkeit hinauskommen. Denn es sei $AD = AB$, und es werde BA verlängert, und AE sei gleich DC . Dann ist die ganze Linie $BE = AC$. Nun verbindet man E mit C . Da nun $AC = BE$ und BC gemeinsam ist, so sind je zwei Seiten ein-

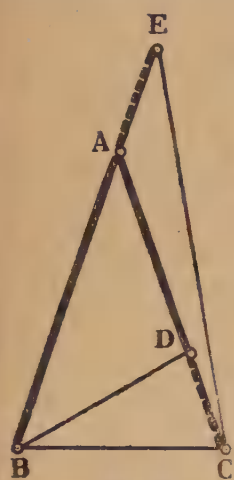


Fig. 33

ander gleich und Winkel bei $B = \text{Winkel } ACB$. (Denn so ist seine Lage.) Und alle Stücke sind nach dem 4. Satz allen gleich, so daß auch das Dreieck EBC gleich ist dem Dreieck ABC , das Ganze dem 30
Teile, was unmöglich <ist>.

Nachdem dies klar, ist nun in der Folge auch der noch übrige Teil der Umkehrung zu zeigen. Denn der Autor hat im 6. Satze insgesamt die Umkehrung des 5. Theorems nur zum Teile gegeben. Es ist darum notwendig, auch den noch übrigen Teil der Umkehrung beizufügen. Er nimmt als Voraussetzung die Gleichheit der unteren Basiswinkel eines Dreiecks und beweist die Gleichschenkeligkeit des Dreiecks. Es sei <Fig. 34> also ABC das Dreieck; man verlängere AB und AC , und es seien die Winkel unter der Basis gleich. Dann be- 39

- haupte ich, daß das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. Denn man nehme auf der Seite AB den Punkt E (auf AC den Punkt F) und $BE = CF$, und man ziehe die Verbindungslinien EC, BF und EF. Da nun $BE = CF$, und BC gemeinsam ist, so sind je zwei Seiten einander gleich, und Winkel $EBC = \sphericalangle FCB$, da sie unter der Basis liegen. So sind also nach dem 4. Satz alle Stücke allen gleich. Folglich ist die Basis $EC = FB$ und Winkel $BEC =$ Winkel CFB und Winkel $CBF =$ Winkel BCE , denn ihnen liegen die gleichen Seiten gegenüber. Es ist aber auch der ganze Winkel $EBC =$ dem ganzen Winkel FCB ,
 10 von denen Winkel $FBC =$ Winkel ECB ; also ist auch der Restwinkel $EBF =$ Winkel FCE . Es ist aber $BE = CF$ und $BF = EC$, und sie umschließen gleiche Winkel, und so sind alle Stücke allen gleich. Es ist also Winkel $BEF =$ Winkel CFE , daher auch $AE = AF$ nach eben dem 6. Satz, wie bewiesen; von diesen ist $BE = CF$; denn so wurde sie abgetrennt. Also ist der übrige Teil $AB = AC$. Das Dreieck ABC ist also gleichschenkelig.
 20 Wenn also das gegebene Dreieck die Basiswinkel gleich hat, ist es gleichschenkelig; und wenn es nach der Verlängerung der Seiten die Winkel unter der Basis gleich hat, so ist es auch in diesem Falle gleichschenkelig.

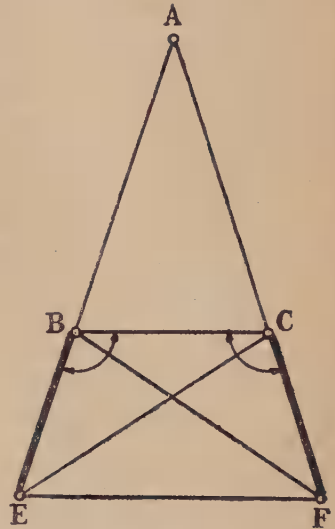


Fig. 34

„Winkel unter der Basis“

- Aus welchem Grunde hat nun der Verfasser nicht auch den übrigen Teil umgekehrt? Etwa weil auch im 5. Theorem der Satz, daß die Winkel unter der Basis
 30 gleich sind, nur Nebensache war und um der Lösung anderer Schwierigkeiten willen vorgetragen wurde, während der Satz, daß bei Gleichheit der Winkel unter der Basis das Dreieck gleichschenkelig ist, ihm weder für einen zu führenden Hauptbeweis, noch für die Lösung der aufgeworfenen Frage von Nutzen ist, wozu noch kommt, daß dieser Satz auch durch die folgenden Lehrsätze bewiesen wird, die ihm Möglichkeiten genug bieten, bei Gleichheit der Winkel unter der Basis zu zeigen, daß auch das Dreieck gleichschenkelig ist. Denn wenn jede Gerade auf einer Geraden, die zwei Winkel
 39 bildet, diese gleich zwei Rechten bildet, dann werden bei Gleich-

heit der Winkel unter der Basis auch die Basiswinkel selbst unbedingt gleich sein; sind aber diese gleich, dann sind es auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten. Mit Hilfe dieses Satzes konnte er in der ganzen Elementarlehre annehmen, daß bei Gleichheit der Winkel unter der Basis das Dreieck gleichschenkelig ist, wenn er dessen zum Beweise einiger Lehrsätze bedurfte. Denn nach wenig Lehrsätzen wird ein Beweis erscheinen, demzufolge eine Gerade, die, auf einer Geraden stehend, Winkel bildet, entweder zwei Rechte oder Winkel, die zwei Rechten gleich sind, bildet. Die Sätze vor diesem bedürfen der hier behandelten Umkehrung nicht; die folgenden aber 10 finden im Bedarfsfalle durch diesen Lehrsatz ihre Bekräftigung.

7. Proposition, 4. Theorem: *Auf derselben Geraden können nicht mit zwei Geraden zwei andere denselben, je eine der anderen, gleiche Gerade aufgestellt werden, die je nach verschiedenen Punkten auf derselben Seite laufen und dieselben Fußpunkte haben wie die ursprünglichen Geraden²⁴⁸).*

Dieses Theorem zeigt einen seltenen Befund, den man bei wissenschaftlichen Sätzen nicht häufig antrifft. Denn eine verneinende, nichtbejahende Formulierung ist ihnen nicht in besonders vielen Fällen eigen. Zumeist lauten die Sätze der geometrischen und arithmetischen 20 Theoreme affirmativ. Der Grund hierfür liegt nach ARISTOTELES darin, daß die Form genereller Bejahung für die Wissenschaften sich besonders eignet, da sie für sich genügt und keinerlei verneinender Ergänzung bedarf, während die Form genereller Verneinung auch der Bejahung bedarf, wenn ein Beweis zustande kommen soll; denn ohne Bejahung gibt es keinen Beweis und keine Schlußfolgerung; deshalb haben bei den beweisenden Wissenschaften die meisten Beweise die bejahende Form und nur selten finden in ihnen verneinende Schlußfolgerungen Anwendung.

Die Fassung des Lehrsatzes ist aber von bewundernswerter Genauigkeit und durch alle nötigen Zusätze gesichert gegen Versuche streitsüchtiger Rabulisten, sie zu widerlegen und in Zweifel zu ziehen. Fürs erste ist der Zusatz gewählt: Auf derselben Geraden, damit wir nicht beweisen, daß auf einer anderen zwei den zweien gleich sind, und so diejenigen, die des Satzes sich bedienen, hinters Licht führen. Dann sagt er, nachdem es sich nur um eine Gerade handelt, nicht einfach: Auf dieser Geraden zwei andere den zweien gleiche Seiten 37

zu errichten*) — denn das ist möglich —, sondern: Je eine der anderen. Denn was wäre es Besonderes, die beiden zusammen errichteten Linien den beiden gleichzunehmen, indem man die eine verlängert, die andere verkürzt. Nein, er sagt, je eine der anderen gleichzunehmen, ist unmöglich. Drittens fügt er hinzu: Je nach verschiedenen Punkten. Denn was wäre damit gewonnen, wenn man den zwei ursprünglichen Geraden zwei andere gleichmache, und zwar je eine der anderen, die beiden Paare sich decken ließe und zu demselben Scheitelpunkte der ursprünglichen Geraden auch die
 10 anderen beiden zöge? Denn da die Geraden einander vollkommen gleich sind, werden auch die Fußpunkte zusammenfallen. Der 4. Zusatz lautet: Nach derselben Seite. Denn was solls, wenn wir von einer Grundlinie aus die einen Geraden nach der einen Seite, die anderen nach der entgegengesetzten Seite ziehen, so daß die gemeinsame Gerade die Basis der beiden Dreiecke mit entgegengesetzten Scheitelpunkten bildet? Damit uns das nicht begegne und wir nicht unsere eigene Täuschung auf den Verfasser übertragen, machte er den Zusatz: Nach derselben Seite. Fünftens fügte er bei: Die dieselben Fußpunkte haben wie die ursprünglichen Geraden. Denn es wäre möglich,
 20 auf derselben Geraden zwei, zwei Geraden gleiche Linien, je eine der anderen, je an verschiedene Punkte auf derselben Seite zu ziehen, dazu die ganze Gerade zu verwenden und auf ihr die beiden zu errichten, aber so, daß die errichteten Geraden nicht die gleichen Fußpunkte wie jene haben, sondern verschiedene. Stellen wir uns z. B. in einem Quadrat die zwei Diagonalen über einer der Seiten des Quadrats vor, dann sind zwei Seiten zweien gleich: Die Seite und die Diagonale der parallelen Seite und der anderen Diagonale; aber die gleichen Seiten haben nicht die gleichen Fußpunkte; denn weder die Parallelen noch die Diagonalen haben diese, aber sie sind je einander gleich.
 30 Hält man sich an all diese Bestimmungen, dann ist der Satz wahr, und der Beweis wird in unanfechtbarer Weise geführt.

Vielleicht möchten aber trotz all dieser wissenschaftlichen Abgrenzungen einige sich erdreisten, Einwendungen zu machen und zu sagen, daß es trotz dieser Voraussetzungen möglich ist, was der Meister
 35 der Geometrie als unmöglich bezeichnet. Denn es sei AB eine Strecke

*) Ich lese nicht mit FRIEDLEIN *ὅδ φησὶν ἐπὶ ταύτην συσταθήσεσθαι* ... *οὐχ ἀπλῶς*, sondern mit GRYNÆUS, mit dem auch BAROCIUS in seiner Übersetzung übereinstimmt *ἀπλῶς συστήσασθαι*. Damit ist die unnatürlich vertrakte Stellung der zweiten Negation bei FRIEDLEIN, die man vor *συσταθήσεσθαι* erwartet, vermieden.

und über dieser die den zwei gleichen Linien AC und CB gleichen zwei Linien AD und DB, und letztere sollen innerhalb der ersteren hineinfallen, damit sie an verschiedene Punkte hingehen, an C und D, dieselben Fußpunkte haben wie die ursprünglichen Geraden, nämlich

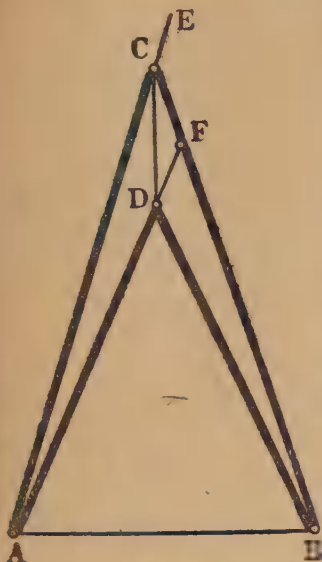


Fig. 35

A und B, und AC sei gleich AD, und BC gleich BD. Solchen Einwänden werden wir entgegentreten, indem wir die Verbindungslinie DC ziehen, und AC und AD verlängern. Ist dies geschehen, so ist klar, daß ACD ein gleichschenkeliges Dreieck 10 ist, da ihrer Behauptung zufolge $AD = AC$. Die Winkel unter der Basis ECD und FDC sind aber gleich. Also ist Winkel ECD*) größer als Winkel BCD, und demnach ist Winkel BDC noch viel größer als Winkel BCD. Da nun aber wiederum $DB = CB$, so sind auch die Basiswinkel BDC und BCD gleich. Derselbe Winkel ist also viel größer und gleich, was unmöglich ist. Das war es ja eben, was wir bei der 20 Erklärung des 5. Satzes sagten, daß der Satz von der Gleichheit der Winkel unter der Basis von Nutzen sei, wenn auch

nicht für die Beweise der folgenden Sätze, so doch für die Widerlegung der Einwände. Denn eben haben wir den Einwand widerlegt durch die Annahme, daß bei Gleichheit von AC und AD auch die Winkel ECD und FDC gleich sind. Ebenso wird sich uns dieser Satz auch bei anderen Theoremen als nützlich erweisen für die Lösung der bestehenden Schwierigkeiten.

Wenn aber jemand sagen würde (Fig. 36), es seien über der 30 Strecke AB die Linien BD und BC gleich AD und AC, und zwar BC gleich AC und BD gleich AD, sie seien zu verschiedenen Punkten gezogen, zu A und B, und hätten dieselben Endpunkte mit AC und AD, nämlich den Punkt C und D, was werden wir dann zu einer solchen Behauptung sagen? Doch wohl, daß wie die ursprünglichen Geraden 35

*) 262, 20: FRIEDLEIN erkannte richtig, daß sein Text hier nicht in Ordnung ist. Mit seiner Einschaltung kam er dem Richtigen nahe, hat aber doch nur Konfusion angerichtet. Den richtigen Weg weist BAROCIUS. Nach ihm haben wir Z. 22 *ὡς πρὸς FDC* in *ECD* zu ändern und alles ist in Ordnung, es bedarf weiter keines Zusatzes.

über der Geraden AB errichtet sein müssen, auch die diesen gleichen Linien auf derselben Geraden errichtet werden müssen. So sagt ja auch der Verfasser in seinem Satze: Die Geraden AC und AD stehen aber nicht über der Geraden AB, sondern wurden an einem Punkte der Geraden AB errichtet und nicht über ihr, so daß die Linien über AB wie AC und CB und AD und DB verschieden sind von den ursprünglichen Geraden und den mit ihnen gleichen Linien, während doch die zu errichtenden Linien denen gleich
 10 sein müssen, die auf AB ursprünglich waren. So viel sei zu dieser Frage gesagt.

Daß aber dieser Lehrsatz beim Verfasser der „*Elemente*“ bewiesen ist durch die Zurückführung auf Unmögliches, und daß dieses Unmögliche in Widerspruch steht mit dem Axiom, das besagt, das Ganze ist größer als der Teil, und: Es ist unmöglich, daß

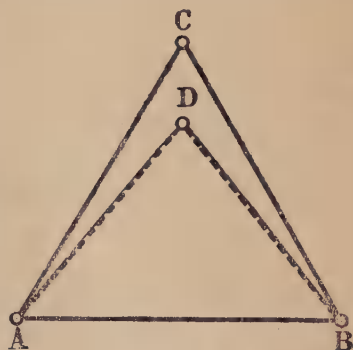


Fig. 110

20 dasselbe größer und gleich sei, ist klar. Es scheint aber dieser Lehrsatz eine Vorwegnahme des 8. Theorems zu sein²⁴⁹). Denn er trägt zu dessen Beweise bei und ist weder ein Grundelement schlecht-hin noch elementarhaft. Denn sein Anwendungsbereich ist nicht groß. Jedenfalls werden wir beim Meister unseres Faches nur sehr selten seine Verwendung finden.

8. Proposition, 5. Theorem: *Wenn zwei Dreiecke je zwei Seiten gleich haben, je eine der anderen, und dazu die Basis, so haben sie auch den von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel gleich*²⁵⁰).
 <Zweiter Kongruenzsatz>.

30 Der 8. Lehrsatz ist die Umkehrung des vierten, aber nicht in der Hauptform der Umkehrung genommen. Denn nicht die ganze Voraussetzung von jenem macht er zur Schlußfolgerung und die
 33 Folgerung zur Voraussetzung*), sondern <nur> einen Teil der Voraus-

*) Die Vorliebe für Parenthesen in Gedankenstrichen hat hier FRIEDLEIN einen Streich gespielt. Es handelt sich nicht um eine Parenthese, sondern Verneinung und Bejahung schließen sich mit οὐ γὰρ ... ἀλλὰ zu einem sinnvollen Ganzen zusammen. Vor οὐ γὰρ ist ein Punkt zu setzen.

setzung des vierten Satzes mit einem Teil seiner Fragepunkte verbindend, beweist er eines der dort gegebenen Daten. Denn die Gleichheit von je zwei Seiten ist Voraussetzung in beiden Sätzen*), die Gleichheit der Basis aber gehörte im früheren zu den Fragepunkten, in diesem aber zum Datum. Die Gleichheit der Winkel aber war Datum im früheren und ist Fragepunkt im gegenwärtigen Satz. Einzig die Vertauschung von Datum und Thesis macht nun aber die Umkehrung aus. Wollte aber jemand noch dazu erfahren, warum er ihn erst an der 8. Stelle gebracht hat und nicht sofort nach dem 4. Satz als dessen Umkehrung, wie er ja auch nach dem 5. den 6. Satz 10 als Umkehrung des 5. bringt: Denn die meisten Umkehrungen folgen den Leitsätzen und werden unmittelbar nach ihnen ohne Zwischenglied bewiesen, so ist zu sagen, daß der 7. Satz für den 8. notwendig war; denn dieser wird durch die Zurückführung auf eine Unmöglichkeit bewiesen. Was es aber mit der Unmöglichkeit für eine Bewandnis hat, wird aus dem 7. Satze klar. Dieser aber bedurfte hinwiederum zu seinem Beweise des 5. Es wurde also der 5. und 7. Satz notwendigerweise vor dem hier bewiesenen Satze vorausgenommen. Da aber auch die Umkehrung des 5. Satzes leicht von den Prinzipien aus zu beweisen war, wurde sie mit Recht sofort nach dem 5. eingereiht wegen der Verwandtschaft mit ihm und weil sie, durch die Zurückführung auf eine Unmöglichkeit bewiesen, den Nachweis der Unmöglichkeit mit Hilfe der Axiome erbringt und nicht durch einen anderen Lehrsatz wie der 8. Satz. Denn Widersprüche mit den Axiomen haben mehr Durchschlagskraft für die Widerlegung, als Gegensätze zu den Lehrsätzen. Denn deren Annahme beruht auf Beweisen; die Erkenntnis der ersteren aber wirkt stärker als Beweise.

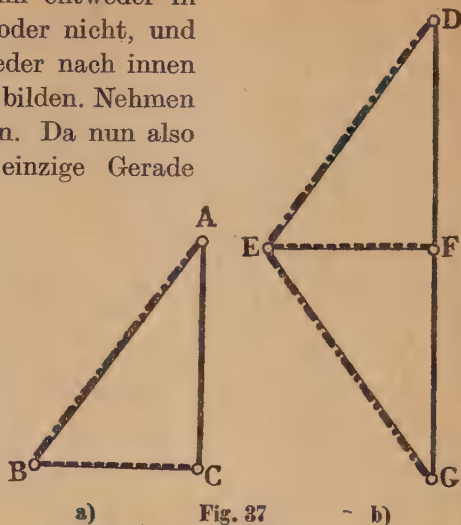
Der Verfasser der „Elemente“ beweist nun den vorliegenden Satz, gestützt auf den vorausgehenden Beweis des 7. PHILONS Schule aber 30 behauptet den Beweis führen zu können, ohne auf diesen angewiesen zu sein. Man stelle sich vor <Fig. 37>, sagen sie, es seien zwei Dreiecke ABC und DEF, die je zwei Seiten gleich haben, und deren Basen BC und EF, Basis mit Basis sich decken; es liege aber das Dreieck ABC mit DEF in der gleichen Ebene, damit die Basis der beiden nicht gegeneinander geneigt sei. Nach der anderen Seite von EF aber denke man sich etwa Gerade in der Weise gezogen, daß ihre 37

*) 265, 14 ist statt ἀποτέρας zu lesen: ἀποτέροις.

Scheitelpunkte entgegengesetzt <im gleichen Abstand> liegen. Und so setze man für ABC das Dreieck EFG, und DE sei gleich EG und $DF = FG$. FG wird dann entweder in einer Geraden liegen mit DF oder nicht, und wenn letzteres, wird sie entweder nach innen oder außen einen Winkel mit ihr bilden. Nehmen wir vorerst gerade Richtung an. Da nun also $DE = EG$ und DFG eine einzige Gerade bildet, so ist das Dreieck DEG

10 gleichschenkelig und Winkel bei D = Winkel bei G. Liegt sie aber nicht in gerader Richtung <Fig. 38>, so bilde sie den Winkel nach innen, und man ziehe die Verbindungslinie DG. Da nun DE, EG gleich sind, und die Basis DG ist, so ist auch Winkel EDG = Winkel EGD. Da hinwieder-

20 um DF, FG gleich sind und dazu die Basis DG ist, so ist Winkel FDG = Winkel FGD. Es ist aber auch Winkel EDG = Winkel EGD; der ganze Winkel EDF ist also gleich dem ganzen Winkel EGF, was zu beweisen war. Fürs dritte <Fig. 39> bilde FG mit DF nach außen einen Winkel, und man ziehe außen die Verbindungslinie DG. Da nun $DE = EG$ und die Basis DG ist, so sind 30 die Winkel EDG und DGE gleich. Da hinwiederum $DF = FG$ und die Basis DG ist, so ist Winkel FDG = Winkel FGD. Es sind nun aber die ganzen Winkel EDG und DGE einander gleich, und so sind auch die Teilwinkel EDF und FGE einander gleich und die Lösung der Aufgabe ist gefunden,



da wir den Lehrsatz für jede Lage der Geraden DG bewiesen haben, ohne daß wir irgendwie den 7. Satz herangezogen hätten. Am Ende, sagen sie, hat der Verfasser der „Elemente“ ihn überflüssigerweise mit hereingezogen. Denn haben wir ihn einzig des 8. Satzes wegen übernommen, ist dieser aber auch ohne ihn bewiesen worden, wie erweist sich dann der 7. nicht als gänzlich unnütz? Hierauf ist mit unseren Vorgängern zu erwidern, daß der Beweis des 7. Satzes den Astronomen auf dem Gebiet der Finsternisse von außerordentlichem Nutzen ist²⁵¹). Denn mit seiner Hilfe, sagen sie, könne man beweisen, daß drei aufeinanderfolgende Verfinsterungen in gleichen Zeitab- 10 ständen voneinander wohl nicht stattfinden können. Ich meine es aber so, daß die zweite von der ersten durch den gleichen Abstand getrennt ist, wie die dritte von der zweiten. Wenn z. B. die zweite nach Verlauf von 6 Monaten und 20 Tagen der ersten folgte, dann könne die dritte nicht um den gleichen Zeitraum später als die zweite eintreten, sondern entweder später oder früher. Daß dem so sei, werde durch den 7. Lehrsatz bewiesen. Und nicht bloß diesen habe der Verfasser der „Elemente“ als zweckdienlich für die Astronomie beiläufig bewiesen, sondern auch viele andere Lehrsätze und Probleme. Das letzte z. B. im 4. Buche, in welchem er die Seite des Fünfzehn- 20 eckes dem Kreise einbeschreibt²⁵²), warum legt er es wohl vor, wenn nicht wegen der Beziehung dieses Problems zur Astronomie? Beschreibt man nämlich in den durch die Pole gehenden Kreis das Fünfzehneck, so erhält man den Abstand der Pole vom Äquator und vom Tierkreis²⁵³). Denn ihr Abstand voneinander beträgt die Seite des Fünfzehnecks. Es scheint also, der Verfasser der „Elemente“ habe im Hinblick auf die Astronomie auf viele Beweise Vorbedacht genommen, um uns auch auf diese Wissenschaft vorzubereiten. Da er aber sah, daß dieser Satz mit Hilfe des 5. bewiesen wird und den 8. ganz einfach beweist, gab er ihm diesen 30 Platz, da das Verfahren PHILONS zwar richtig, aber bei der Mannigfaltigkeit seiner Fälle für den Elementarunterricht ungeeignet ist. Soviel sei zu dieser Frage gesagt. Wenn aber jemand die Schwierigkeit vorbrächte, wie es denn komme, daß EUKLID nicht auch beim 8. Theorem den Zusatz wie beim 4. machte, ich meine aber die Bemerkung, daß die Dreiecke wie auch die übrigen Winkel gleich sind, so werden wir erwidern, daß nach dem Beweis der Gleichheit des Scheitelwinkels sich auf Grund des 4. Satzes die Folgerung ergab, daß alle Stücke allen gleich sind. Dieses also mußte 39

er für sich allein beweisen, das übrige konnte er dann als Folgerung nehmen.

Es scheint aber die Gleichheit der Scheitelwinkel aus der Gleichheit der die Winkel einschließenden Seiten und der Grundlinien zu folgen. Denn weder bei Ungleichheit der Grundlinien bleiben die Winkel dieselben, trotzdem Gleichheit*) der einschließenden Seiten gegeben ist; sondern, wird die Basis kleiner, so wird es auch der Winkel, und wird sie größer, so wächst auch er, noch auch bleibt er bei Gleichheit der Grundlinien und Ungleichheit der Seiten derselbe, sondern mit ihnen wird er kleiner und größer. Es ergeht also den Winkeln umgekehrt wie den einschließenden Seiten. Denkt man sich nämlich auf derselben Grundlinie die Seiten unten auseinandergezogen, dann macht man sie selbst niedriger, vergrößert aber den von ihnen eingeschlossenen Winkel und ihren beiderseitigen Abstand; denkt man sie sich aber emporgezogen und verlängert, so verkleinert man den Winkel, den sie einschließen. Denn sie schneiden sich erst in größerer Entfernung, da ihre Spitze weiter absteht von der Basis. Man kann also mit Sicherheit behaupten, die Gleichheit des Winkels sei bestimmt durch die Gleichheit der Basis und der Seiten.

20 9. Proposition, 4. Problem: *Ein gegebener geradliniger Winkel ist zu halbieren*²⁵⁴).

Der Meister vermischt mit den Problemen die Lehrsätze und verflucht mit den Lehrsätzen die Probleme, und in beiderseitiger Verwendung bringt er die ganze Elementarlehre zur erschöpfenden Behandlung, bald die zugrunde liegenden Figuren beschaffend, bald ihre Akzidentien untersuchend. Nachdem er also im vorausgehenden Satz an einem Dreieck zeigte, wie aus der Gleichheit der Seiten die Gleichheit der Winkel sich ergibt und umgekehrt und ebenso an zwei Dreiecken, nur mit dem Unterschied, daß der Beweisgang der Umkehrung bei dem einen und den zwei Dreiecken verschieden war, geht er nun zu den Problemen über und stellt die Aufgabe, einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren. Es ist dabei klar, daß hier der Winkel der Art nach bestimmt ist: Denn er wird geradlinig genannt und

*) Man vermißt im gr. Text 270, 9 vor *ὑποκειμένων* den unbedingt erforderlichen Begriff *ἴσων*. Denn nicht darauf kommt es an, daß die Seiten überhaupt gegeben sind, sondern daß sie als gleiche gegeben sind. BAROCIUS übersetzt denn auch: *comprehendentibus lateribus aequalibus suppositis*.

nicht der nächste beste. Jeden Winkel zu halbieren ist nämlich in der Elementarlehre nicht möglich; zuweilen bleibt es auch zweifelhaft, ob es überhaupt möglich ist. Die Frage nämlich, ob man den hornförmigen Winkel²⁵⁵) halbieren kann, möchte Schwierigkeiten bereiten.

Bestimmt ist auch das Teilungsverhältnis, auch das wieder mit Recht. Denn die Teilung in einem beliebigen Verhältnis, z. B. in 3, 4 oder 5 gleiche Teile, geht über die gegenwärtigen Konstruktionsmöglichkeiten hinaus²⁵⁶). Zwar den rechten Winkel in drei Teile zu teilen, ist mit Hilfe einiger weniger der folgenden Sätze möglich; 10 eine Teilung des spitzen aber ist unmöglich ohne ein Übergreifen auf andere Linien, die zur gemischten Gattung gehören²⁵⁷). Das beweisen diejenigen, die sich die Aufgabe gestellt haben, diesen gegebenen geradlinigen Winkel in drei Teile zu zerlegen. NIKOMEDES z. B. führte die Dreiteilung eines jeden geradlinigen Winkels vermittle der Konchoiden durch²⁵⁸), deren Entstehung, Einteilung und Akzidentien er lehrte, er, der persönlich ihre Eigenart entdeckt hatte. Andere haben dasselbe getan mit Hilfe der quadrierenden Linien²⁵⁹) des HIPPIAS und NIKOMEDES, wozu auch sie gemischte Linien heranzogen, eben die quadrierenden. Andere wieder gingen von der archimedischen 20 Spirale²⁶⁰) aus und teilten so den gegebenen geradlinigen Winkel nach dem gegebenen Verhältnis. Da ihre*) Gedankengänge für das Studium von Anfängern zu schwer sind, so übergehen wir sie hier. Günstigere Gelegenheit zur Untersuchung möchte sich wohl bieten im 3. Buch der „*Elemente*“, wo der Verfasser eine gegebene Kreislinie halbiert²⁶¹). Denn dort findet sich dieselbe Art der Problemstellung nicht bloß der Zwei-, sondern auch der Dreiteilung, und von denselben Linien gingen die Versuche der Alten zur Teilung jeder Kreislinie in drei gleiche Teile aus²⁶²). Denn mit Recht hat er, der nur**) Gerade und Kreislinien anführte, auch nur die geradlinigen Winkel 30 und die Kreislinie und diese nur in zwei Teile geteilt, und ohne sich abzumühen mit den hieraus entstehenden gemischten Arten, die schwer zu entwickeln und aufzuzählen wären, übergeht er alle derartigen Untersuchungen, die gemischte Linien erfordern, und legt bei 34

*) 272, 12: Vor ωv ist ein Punkt zu setzen. Denn das Relativ bezieht sich nicht nur auf die zuletzt genannte Gruppe, sondern auf alle drei.

**) Der Text FRIEDLEINS kann nicht befriedigen, ebenso wenig seine Verbesserungsvorschläge. Ich habe daher die Ergänzung aus BAROCIUS in meine Übersetzung aufgenommen.

den ersten und einfachsten Arten nur das zur Untersuchung vor, was mit diesen allein konstruiert oder behandelt werden kann. Von dieser Art ist denn auch das jetzt vorliegende Problem, einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren. Er zieht hierbei zur Konstruktion eine Forderung und den ersten und dritten Lehrsatz, und zum Beweis einzig den 8. Satz heran. Es bedürfen nämlich, wie wir schon früher sagten, auch die Probleme des Beweises und durch diesen erhalten sie ihren wissenschaftlichen Charakter.

Vielleicht möchten nun einige dem Meister mit dem Einwand 10 kommen, das bei ihm*) konstruierte gleichseitige Dreieck**) habe seine Spitze nicht innerhalb der zwei Geraden, sondern entweder auf einer von beiden oder auch außerhalb von beiden; die Behauptung gehe klar hervor aus den „*Elementen*“.

Es sei BAC der zu halbierende Winkel und auf der Geraden AB der Punkt B <beliebig>; CA sei gleich BA, und man ziehe die Verbindungslinie BC und errichte über ihr das gleichseitige Dreieck BCD. Dieser Punkt D wird entweder zwischen den Geraden AB und AC, oder auf den Geraden AB oder AC, 20 oder außerhalb von beiden liegen. Der Verfasser der „*Elemente*“ nahm ihn nun in der „Mitte“ <der den zu halbierenden Winkel bildenden Geraden> an, und deshalb sagen sie, um den Beweis zu hindern und zu vereiteln, der Punkt liege entweder auf einer der Geraden oder auch außerhalb von beiden. Es liege also D auf AB <Fig. 40>, so daß BCD ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann ist DB = BC und auch die Basiswinkel BDC 30 und BCD sind gleich; folglich ist der ganze Winkel BCE größer als $\sphericalangle$ CBD. Da wiederum BA = CA, so ist ABC ein gleichschenkeliges Dreieck und hat die Winkel unter der Basis gleich. Also 34 ist Winkel BCE = $\sphericalangle$ CBD. Er ist aber auch größer, was unmöglich.

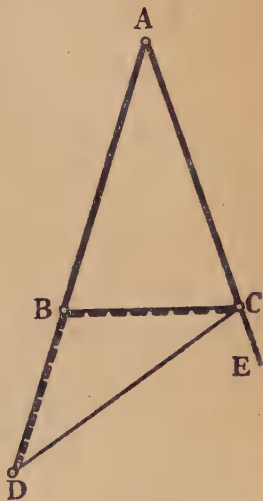


Fig. 40

*) 273, 12: ἐπ' αὐτοῦ ist trotz FRIEDLEINS Bemerkung in den *Addenda* 437 in keiner Weise zu beanstanden.

**) Zum Verständnis des Folgenden ist die Beweisführung EUKLIDS heranzuziehen. Er konstruiert zuerst mit Hilfe der Winkellinien ein gleichschenkeliges, und dann über dessen Basis mit der Spitze nach unten ein gleichseitiges Dreieck.

Unmöglich kann also die Spitze $\langle D \rangle$ des gleichseitigen Dreiecks auf der Geraden ABD liegen; ähnlich würden wir zeigen, daß sie auch nicht auf ACE liegt. Sie liege also, wenn möglich, außerhalb von beiden. Da nun $BD = CD$, so sind die Basiswinkel BCD und CBD gleich. Dann ist Winkel BCD größer als $\sphericalangle CBE^*)$; folglich ist noch Winkel BCF viel größer als $\sphericalangle CBE$. Er ist aber auch gleich, da er ja unter der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks ABC liegt. Das ist aber un- 10 möglich. Der Punkt D liegt also nicht außerhalb auf einer Seite der beiden Geraden. Ähnlich würden wir auch für die andere Seite den Beweis führen. Du siehst wiederum, daß wir die Einwände widerlegt haben durch Heranziehung des Satzes von der Gleichheit der Winkel unter der Basis in gleichschenkeligen Dreiecken. Das ist jener Satz, von dem

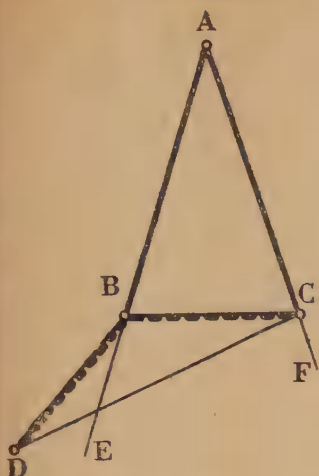


Fig. 41

wir schon oben bemerkten, daß durch ihn viele der Wissenschaft 20 widerstreitende Meinungen als hinfällig und leicht widerlegbar erwiesen werden, und daß er unserem Meister diesen Nutzen gewährt.

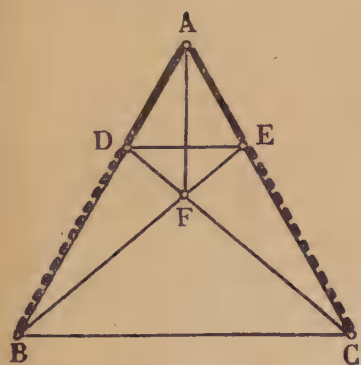


Fig. 42

Wenn aber jemand behauptete, es sei kein Platz**) unter der Basis BC, so muß man das gleichseitige Dreieck über der gleichen Seite wie BA und AC konstruieren; dann müssen die errichteten Linien sich entweder decken mit BA und AC selbst, wenn auch diese CB gleich sind, oder über sie hinaus- 30 fallen, wenn sie selbst kleiner sind als BC, oder zwischen sie hineinfallen, wenn BA und AC größer sind als BC. Vorerst seien sie kongruent $\langle \text{Fig. 42} \rangle$, 34

*) 274, 13: Man staunt über den Verbesserungsvorschlag FRIEDLEINS in den Addenda 437, da alles in bester Ordnung ist und somit jeder Grund zur Veränderung entfällt.

**) 275, 7: Ich lese nicht mit FRIEDLEIN *εἰδέναι*, sondern mit B₃, GRYNAEUS und BAROCIUS *εἶναι*.

- BAC sei das gleichseitige Dreieck, und D der Punkt auf AB, und man schneide von AC die Strecke $AE = AD$ ab und ziehe die Verbindungslinien DE, BE, CD und AF. Da nun $AB = AC$ und $AD = AE$, so sind die zwei Seiten AB und AE gleich den zwei Seiten CA und AD und schließen auch den gleichen Winkel ein, so daß alle Stücke allen gleich sind und Winkel $\angle DBE = \angle ECD^*)$. Es ist aber auch
- 10 $DB = EC$ und $BE = CD$, und alle Stücke sind sonach allen gleich, so daß Winkel $\angle DEB = \angle EDC$, da ihnen gleiche Seiten gegenüberliegen. Also ist nach dem 6. Satz auch $DF = EF$. Da nun $AE = AD$, AF gemeinsam ist und $DF = FE^{**})$, so ist der Winkel DAE in <zwei> gleiche Teile geteilt, was zu tun war. Wenn aber die Seiten des gleichseitigen Dreiecks über die Geraden BA und AC
- 20 hinausfallen, so seien es BD und CD, und die Verbindungslinie DA werde bis E verlängert. Da nun $BD = DC$ und DA gemeinsam ist, so ist auch $BA = AC$, und Winkel $\angle BDA = \angle CDA$ nach dem 8. Satz. Da wiederum die gleichen Seiten BD und DC und die gemeinsame <Seite> DE gleiche Winkel einschließen, wie gezeigt wurde, so ist nach dem 4. Satz auch $BE =$ der Basis EC. Da nun $AB = AC$ und AE gemeinsam ist, so ist auch Winkel $\angle BAE = \angle CAE$, was
- 30 zu zeigen war.

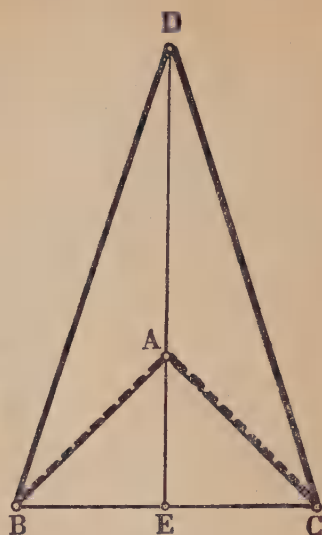


Fig. 43

- Fallen aber die Seiten des gleichseitigen Dreiecks innerhalb von BA und AC, wie BD und DC, dann werde wieder die Verbindungslinie AD gezogen. Da nun $BA = AC$ und AD gemeinsam ist und <die> Basis BD
- 36 gleich ist der Basis CD, so ist auch Winkel

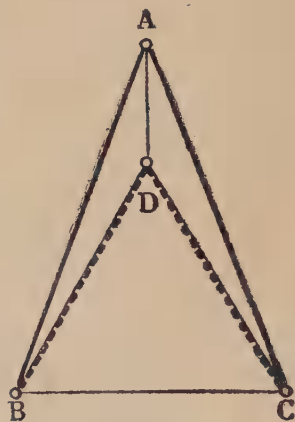


Fig. 44

*) 275, 22: nach $\epsilon\gamma\delta$ ist das Komma durch einen Punkt zu ersetzen.

**) 276, 4: Zu dem skeptischen Fragezeichen FRIEDLEINS besteht kein Grund. Wieder ist alles in bester Ordnung.

$\angle BAD = \angle CAD$ nach dem 8. Satz. Der Winkel bei A ist also halbiert, wie auch immer das gleichseitige Dreieck konstruiert wird.

Nachdem wir auch diese Beweise kurz zusammengefaßt haben, wollen wir uns den folgenden Lehrsätzen zuwenden und bezüglich des Gegebenseins der Winkel nur noch beifügen, daß sie auf vierfache Weise gegeben sein können: Nämlich durch die Lage, wenn wir z. B. sagen, an dieser Geraden und diesem Punkte liege der Winkel und er sei so gegeben; durch die Art, wenn wir ihn z. B. einen Rechten oder spitzen oder stumpfen oder überhaupt einen geradlinigen oder gemischten nennen; durch sein Verhältnis, wenn wir 10 ihn zweimal und dreimal so groß als diesen bezeichnen oder überhaupt als größer und kleiner; endlich durch die Größe, wenn wir ihn z. B. als ein Drittel des Rechten bezeichnen. Im vorliegenden Satz ist er nur der Art nach bestimmt.

10. Proposition, 5. Problem: *Eine gegebene begrenzte Gerade (Strecke) ist zu halbieren²⁶³.*

Auch hier handelt es sich um ein Problem. Es liegt eine begrenzte Gerade vor, da eine nach beiden Seiten unbegrenzte in keiner Weise zu bestimmen ist; eine nur nach einer Seite unbegrenzte aber, wo immer auch der Punkt genommen werden mag, nur in ungleiche Teile 20 geteilt werden kann. Denn notwendigerweise ist der Abschnitt nach der Seite der unbegrenzten größer als der übrige begrenzte Abschnitt. Es bleibt also nur übrig, eine beiderseitige begrenzte Gerade zu nehmen, wenn sie halbiert werden soll. Nun möchten vielleicht einige, durch dieses Problem veranlaßt, zu der Vermutung kommen, es gelte bei den Mathematikern von vornherein als Voraussetzung, daß die Linie sich nicht aus unteilbaren Größen zusammensetze. Denn würde sie das, dann besteht die begrenzte Linie entweder aus einer ungeraden oder geraden Zahl von Teilen. Besteht sie aus ungeraden Teilen, so wird bei Teilung von Geraden auch das Unteilbare halbiert, da sonst 30 der eine Teil, der aus mehr unteilbaren Gliedern besteht, größer ist als der übrige. Es wird also nicht möglich sein, eine gegebene Gerade zu halbieren, wenn die Raumgröße aus unteilbaren Gliedern besteht. Besteht sie nicht aus solchen, dann ist sie ins Unendliche teilbar. Das scheint also, behaupten sie, unbestritten und ein geometrisches Prinzip zu sein, daß die Ausdehnung zu dem ins Unendliche Teilbaren gehöre²⁶⁴). Wir werden darauf mit GEMINOS erwidern, daß das Zusammenhängende teilbar sei, nehmen die Mathematiker als 38

Axiom ohne weiteres an. Das nennen wir ja zusammenhängend, was aus verbundenen Teilen besteht. Dies zu teilen ist unbedingt möglich. Daß aber das Zusammenhängende bis ins Unendliche teilbar ist, das nehmen die Mathematiker nicht einfach an, sondern beweisen es aus den ureigenen Prinzipien. Denn wenn sie das Vorhandensein von Inkommensurabilität bei den ausgedehnten Größen nachweisen, und daß nicht alle einander kommensurabel sind, was wird man dann sagen, beweisen sie anderes, als daß jede Größe immerfort geteilt werden kann und wir nie zu dem Unteilbaren gelangen werden, welches
 10 das kleinste allgemeine Maß von Größen ist? Letzteres ist also beweisbar, ersteres aber ein Axiom, daß alles, was zusammenhängt, teilbar $\langle$ ist $\rangle$. Es ist also auch die begrenzte Linie, da sie zusammenhängt, teilbar. Von dieser Idee geht der Verfasser der „*Elemente*“ bei der Halbierung der begrenzten Geraden aus, ohne die unbewiesene Unterstellung ihrer unendlichen Teilbarkeit. Denn es ist nicht dasselbe, teilbar zu sein und ins Unendliche teilbar zu sein. Durch dies Problem wird auch XENOKRATES widerlegt, der die Lehre von den unteilbaren Linien aufbrachte. Denn wenn es überhaupt eine Linie gibt, so ist sie entweder gerade, und dann kann man sie
 20 halbieren, oder rund, und dann ist sie größer als eine gewisse Gerade: Denn jede Kreislinie enthält unbedingt eine gewisse kleinere Gerade, oder gemischt, und diese ist noch viel mehr teilbar, wenn sie aus einfachen teilbaren Linien besteht. Doch das sei einer anderen Untersuchung vorbehalten.

Es halbiert aber unser Meister die begrenzte Gerade, indem er zur Konstruktion den 1. und 9. Satz und zum Beweis den 4.
 30 allein heranzieht. Denn vermittels der Winkel zeigt er die Gleichheit der Grundlinien. APOLLONIOS von Perge aber halbiert die gegebene Strecke

auf folgende Weise. AB, sagt er, sei die zu halbierende Strecke, und man beschreibe mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AB einen Kreis und einen weiteren Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BA und ziehe an die Schnittpunkte der Kreise die Verbindungsline CD^{264a}). Diese halbiert dann die Gerade AB. Denn
 39

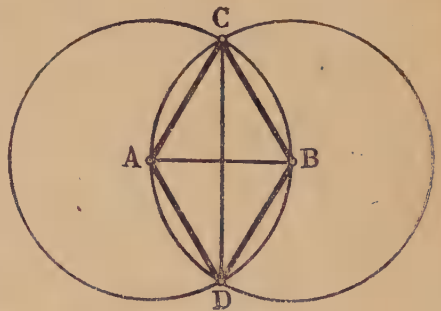


Fig. 45

man ziehe die Verbindungslinien CA und CB. Jede ist gleich AB, CD ist gemeinsam, und DA ist aus demselben Grunde gleich DB. Also ist Winkel ACD = Winkel BCD, so daß nach dem 4. Satz AB halbiert ist. So ungefähr lautet der Beweis des vorliegenden Problems bei APOLLONTOS. Er ist gleichfalls vom gleichseitigen Dreieck genommen; aber anstatt den halbierten Winkel C zu nehmen, beweist er die Halbierung vermittels der Gleichheit der Grundlinien. Es verdient aber der Beweis des Verfassers der „Elemente“ bei weitem den Vorzug, da er einfacher ist und von den Prinzipien ausgeht.

11. Proposition, 6. Problem: Auf einer gegebenen Geraden ist von einem 10 auf ihr gegebenen Punkte eine Gerade in rechten Winkeln zu ziehen²⁶⁵).

Ob wir eine beiderseits begrenzte, oder beiderseits unbegrenzte, oder eine einerseits unbegrenzte, andererseits begrenzte Gerade nehmen und den Punkt auf ihr: Die Konstruktion des vorliegenden Problems des Meisters gelingt (in jedem Falle). Denn wenn auch der gegebene Punkt am Ende der Geraden liegt, so verlängern wir die Gerade und verfahren in der gleichen Weise. Es ist aber klar, daß der Punkt, da er vermöge seiner Lage am Ende der Geraden liegt, hier einzig der Lage nach gegeben ist, während die Gerade der Art nach gegeben 20 ist; denn ihre Größe, oder ihr Verhältnis, oder ihre Lage ist nicht bestimmt. Der Verfasser der „Elemente“ beweist nun dieses Problem mit Hilfe des 1. und 3. Satzes und einer Forderung, weiter mit Hilfe

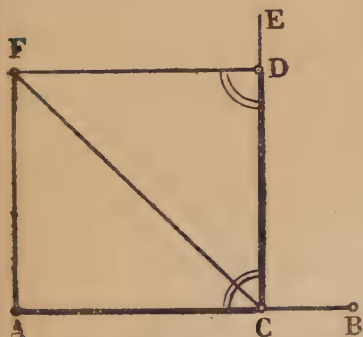


Fig. 46

des 1. und 8. Satzes und der Definition der rechten Winkel bildenden Geraden. Wenn aber einige den Punkt an das Ende der Geraden legen und fordern, daß wir ohne Verlängerung von diesem aus die, die rechten Winkel bildende Gerade ziehen, so werden wir auch das 30 als möglich erweisen.

Es sei AB und A der gegebene Punkt, und man nehme auf AB nach Belieben den Punkt C und von diesem in rechten Winkeln zu AB die Gerade

CE, wie wir es im grundlegenden 1. Element kennengelernt haben. Hierauf schneide man von CE eine AC gleiche Strecke DC ab und halbiere den Winkel bei C durch CF, und die vom Punkte D in 38

rechten Winkeln zu EC gezogene Linie schneide CF im Punkte F, und von F ziehe man zu A die Verbindungslinie FA. Ich behaupte nun, daß Winkel bei A ein Rechter ist. Denn da $DC = CA$, CF gemeinsam ist, und sie gleiche Winkel einschließen, da der Winkel bei C halbiert ist, so ist auch $DF = FA$, und ebenso sind nach dem 4. Satz alle Stücke allen gleich, so daß auch Winkel bei A = Winkel bei D. Also ist auch Winkel bei A ein Rechter. Das gestellte Problem ist demnach bewiesen. Aber der Verfasser der „*Elemente*“ bedarf dieses

10 nicht in *einem* Rechten die Linien zu ziehen. Man darf also den Punkt nicht am Ende der Geraden nehmen, damit die gezogene Gerade mit der gegebenen Geraden Winkel bilde und nicht bloß einen einzigen.

APOLLONTOS aber zieht die Gerade in rechten Winkeln auf folgende Weise. Auf AC liegt beliebig der Punkt D und von CB schneide man eine CD gleiche Strecke CE ab, und mit dem Zentrum D und dem Radius ED beschreibe man einen Kreis, und einen weiteren beschreibe man mit dem Zentrum E und dem Radius DE und ziehe von

20 F zu C eine Linie^{265a)}. Von dieser behaupte ich dann, daß sie die in rechten Winkeln gezogene ist. Zieht man nämlich die Verbindungslinien FD und FE, so sind sie gleich. Es

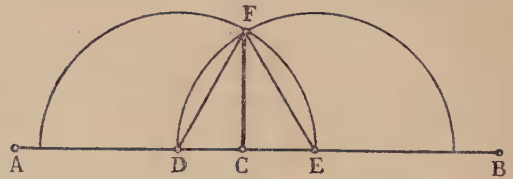


Fig. 47

sind aber auch DC und CE gleich und FC ist gemeinsam, so daß nach dem 8. Satz auch die Winkel bei C gleich sind. Sie sind also zwei Rechte. Man sieht wiederum, daß dieser Beweis komplizierter

30 ist als der beim Verfasser der „*Elemente*“, da er die Zeichnung von Kreisen noch dazu erfordert, während man doch ohne weiteres über DE ein gleichseitiges Dreieck zeichnen und den Satz beweisen kann. Alles übrige ist beiden Beweisen gemeinsam. Den mit Hilfe des Halbkreises geführten Beweis verlohnt sich nicht einmal anzuführen. Denn er setzt viele der späteren Sätze voraus und fällt gänzlich aus

36 dem Rahmen des Elementaren²⁶⁶⁾.

12. Satz, 7. Problem: *Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade ist von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, eine senkrechte Linie <Lot> zu ziehen*²⁶⁷).

Dieses Problem machte zuerst OINOPIDES zum Gegenstand seiner Forschung, da er es für die Astronomie für nützlich hielt. Er nennt aber die Senkrechte in altertümlicher Weise nach dem Gnomon, weil auch der Gnomon (Zeiger der Sonnenuhr) mit dem Horizont rechte Winkel bildet. Von der rechte Winkel bildenden Geraden ist diese Senkrechte lediglich der Beziehung nach verschieden; im Wesen besteht kein Unterschied, wie schon der Name „Kathete“ <Lot> besagt^{*)}. Es gibt aber zwei Katheten, die Plan- und die Raumkathete; wenn der Punkt, von dem die Senkrechte ausgeht, und die Gerade in derselben Ebene liegen, so heißt sie „Plankathete“; liegt aber der Punkt höher und außerhalb der Grundfläche, dann „Raumkathete“; die Plankathete wird auf die Gerade, die Raumkathete auf die Ebene gefällt. Deshalb ist es notwendig, daß letztere nicht bloß mit einer Geraden rechte Winkel bilde, sondern mit allen, die in derselben Ebene liegen. Denn zur Ebene wurde die Kathete gezogen. Mit diesem Problem stellt nun also der^{**) Verfasser der „Elemente“ die Aufgabe, eine Plankathete zu fällen. Denn die Aufgabe lautet, auf eine Gerade die Senkrechte zu fällen; und die Ausführung hat zur Voraussetzung, daß beide in einer Ebene liegen.}

Bei der die rechten Winkel bildenden Senkrechten benötigten wir keineswegs die Unbegrenztheit, da der Punkt auf der Geraden selbst angenommen wurde; bei der „Kathete“ aber setzt EUKLID die Gerade als unbegrenzt voraus, nachdem der Punkt, von dem aus die Kathete gezogen werden soll, irgendwo außerhalb der Geraden liegt. Denn wäre diese nicht unbegrenzt, so könnte man den Punkt so nehmen, daß er zwar außerhalb der gegebenen Geraden, aber in gerader Richtung mit ihr zu liegen käme, so daß die verlängerte Gerade 30

^{*)} Die Lesearten gehen hier wirr auseinander. Es ist aber kein Zweifel, daß der vielgelästerte GRYNÆUS hier wieder einmal den einzig vernünftigen und damit richtigen Text hat, und daß mit ihm zu lesen: ὥστερ φησὶ καὶ ἡ κάθετος. Daß κάθοδος nicht eintreten kann für den *terminus technicus* κάθετος und nie dafür eintritt, sollte von vornherein klar sein. In diesem und dem vorangehenden Problem werden zwei Senkrechte unterschieden, von denen die eine von der Geraden ausgeht <errichtet>, die andere auf die Gerade herabgezogen <gefällt> wird.

^{**) 283, 22:} EUKLID dürfte *generis masculini* gewesen sein und so ist zu lesen ὁ στοιχειωτής, nicht ἡ στ.

auf ihn treffen müßte, und dann wäre die Aufgabe nicht durchzuführen. Deshalb nahm er die Gerade unbegrenzt, damit, wenn der Punkt bloß zu beiden Seiten von ihr angenommen wird, nirgends ein Raum frei bleibt für ihn, wo er in gerader Richtung mit der gegebenen Geraden sich befindet, wenn die Lage auf ihr und nicht außerhalb von ihr nicht in Frage kam.

- Aus diesem Grunde also ist die Unbegrenztheit der Geraden gegeben, auf die die „Kathete“ gefällt werden soll. Es scheint aber angezeigt, die Seinsweise des Unendlichen überhaupt zu untersuchen.
- 10 Denn es ist klar, gibt es eine unendliche Gerade, dann auch eine unendliche Ebene, und zwar in Wirklichkeit, wenn das Problem seine Geltung haben soll. Daß es nun in der Sinnenwelt keine unendliche Größe in irgendwelcher Ausdehnung gibt, zeigen der unsterbliche ARISTOTELES und die von ihm die Philosophie überkommen haben zur Genüge. Denn weder daß ein im Kreis sich bewegender, noch irgendein anderer einfacher Körper unendlich sei, ist möglich. Denn der Ort eines jeden ist begrenzt. Aber auch daß den gesonderten und unteilbaren Ideen diese Unendlichkeit zukomme, ist undenkbar. Denn wenn in ihnen weder Ausdehnung noch Größe ist, dann wohl
- 20 noch viel weniger*) eine unendliche Größe. Es bleibt also nur übrig, daß das Unendliche in der Vorstellung existiere, aber ohne daß die Vorstellung das Unendliche erkennt. Denn sobald sie erkennt, bringt sie an das Erkenntnisobjekt Gestalt und Begrenzung heran und hemmt durch die Erkenntnis den Ablauf der Vorstellung, durchmißt und umgrenzt sie. Das Unendliche ist also nicht Gegenstand der erkennenden, sondern vielmehr der in bezug auf das Erkenntnisobjekt unbegrenzt schweifenden, aber nicht erkennenden Vorstellung, die das als unendlich anspricht, wovon sie, da es unermesslich, ablassen muß, und was sie denkend <begrifflich> nicht erfassen kann.
- 30 Denn wie der Gesichtssinn die Finsternis daran erkennt, daß er nicht sieht, so die Vorstellung das Unendliche daran, daß sie es nicht erfassen kann. Sie erzeugt es zwar, indem sie die unteilbare Fähigkeit hat, unbeschränkt ausgehen zu können, erkennt aber als Wirklich-
- 34 keit, daß sie das Unendliche nicht erfaßt. Denn wovon sie als uner-

*) 285, 5: σχολή, εἰ ist kein Griechisch, das sollte wissen, wer einen griechischen Text herauszugeben sich unterfähgt. Zu lesen ist natürlich mit B₃ und GRYNÆUS σχολῇ γ' ἄν, nur daß beide das *jota subscriptum* übersehen. Es sei erinnert an die klassische Stelle PLATON, *Phaid.* 65b: καίτοι εἰ αὐταὶ τῶν περὶ τὸ σῶμα αἰσθήσεων μὴ ἀκριβεῖς εἶσιν, σχολῇ αἱ γε ἄλλαι.

meßbar abstehen muß, das nennt sie unendlich²⁶⁸). Wenn wir daher die als unendlich gegebene Linie wie auch alle anderen geometrischen Formen, die Dreiecke, Kreise, Winkel, Linien in die Phantasie <Vorstellung> verlegen, werden wir uns nicht verwundert fragen, wie es eine in Wirklichkeit unendliche Linie gibt und sich diese trotz ihrer unendlichen Ausdehnung in die begrenzten Erkenntnisobjekte einreicht? Der Verstand aber, dem die Begriffe und die Beweise entstammen, bedient sich des Unendlichen nicht zum Beweise: Denn das Unendliche ist durch die Wissenschaft überhaupt nicht erfassbar, sondern er zieht es nur als <Arbeits-> Hypothese heran. Er ver- 10 wendet zum Beweise nur das Begrenzte und nimmt das Unbegrenzte nicht des Unbegrenzten, sondern des Begrenzten wegen an, da er des Unbegrenzten nicht weiter bedarf, wenn man ihm zugibt, daß der gegebene Punkt weder in gerader Richtung liegt mit der begrenzten Linie, noch die Entfernung von der Geraden derart ist, daß kein Teil von ihr unter den Punkt zu liegen kommt. Damit nun der Verstand ohne Gefahr der Widerlegung und des Zweifels der begrenzten Linie sich bediene, nimmt er das Unendliche an und bedient sich des unbegrenzten Dranges der Phantasie als Sprungbrettes zur Schöpfung der Idee des Unendlichen. Soviel mag für den 20 Augenblick über die Hypothese des Unendlichen genügen. Hierauf

wollen wir uns den Einwänden gegen die Konstruktion dieses Problems zuwenden.

Es sei also, sagt man, AB eine unendliche Gerade, und es sei C der Punkt, von dem aus die Senkrechte zu fällen aufgegeben ist, und man nehme auf der anderen Seite den Punkt D, wie der Meister an- 30 gibt; der Kreis aber, der die Gerade AB in A, B und F schneidet, habe die Lage wie in der beige-fügten Zeichnung. Auf diesen Einwand werden wir erwidern, daß er Unmögliches fordert. Es

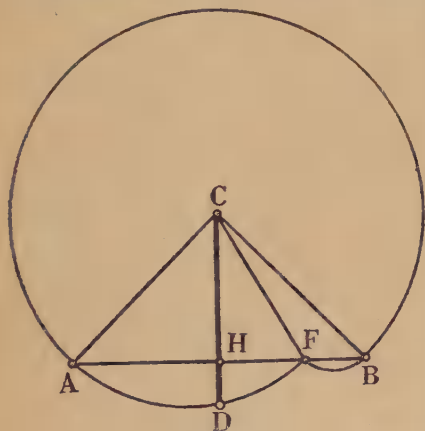


Fig. 48

werde nämlich AB im Punkte H halbiert, und man ziehe die Verbindungslinie CH und verlängere sie bis an die Peripherie; dann ziehe man die Verbindungslinien CA und CB. Da nun diese vom 39

- Zentrum ausgehen und $AH = HB$ und CH gemeinsam ist, so sind alle Stücke allen gleich. CH bildet also rechte Winkel bei H . Da hinwieder CA und CB gleich sind, so bilden sie gleiche Winkel bei den Punkten A und B . Es ist aber auch $CA = CF$, so daß Winkel $CAF =$ Winkel CFA , und $CB = CF$, so daß auch Winkel $CFB =$ Winkel CBF . Da nun <die> Winkel bei A und B gleich sind, so ist auch Winkel $CFA =$
- 10 $\sphericalangle CFB$; und da sie Nebenwinkel sind, so sind sie Rechte. Es ist aber auch jeder der Winkel bei H ein Rechter; also ist $CH = CF$; aber CF ist auch CD gleich, da sie vom Zentrum ausgehen: Also ist $CH = CD$, was unmöglich. Der Kreis schneidet also in keinem anderen Punkte die Gerade AB . Würde aber jemand sagen <Fig. 49>,
- 20 der gezeichnete Kreis solle AB <in F > halbieren, so werden wir wieder dieselbe Unmöglichkeit nachweisen. Denn man zeichne auch FB und halbiere sie im Punkte H . Da nun $AF = FB$, CF gemeinsam ist, so ist auch Basis $CA = CB$ und alles gleich allem, so daß die Winkel bei F gleich sind. Wiederum, da $FH = HB$ und CH gemeinsam, die zur Verbindung gezogene Basis $CF = CB$ als
- 30 Radien, so sind die Winkel bei H Rechte. Denn sie sind gleich und Nebenwinkel. Da nun beide Winkel CFH und CHF Rechte sind, so ist $CF = CH$. Aber CF und CE sind gleich als Radien: Also ist $CH = CE$, was unmöglich. Es erübrigt, noch den dritten Einwand durchzugehen <Fig. 50>. Es schneide also, sagen sie, der gezogene Kreis die Gerade in den Punkten A, B, F und H . Wir halbieren
- 39 also AB im Punkte K und ziehen die Verbindungslinien CA, CF ,

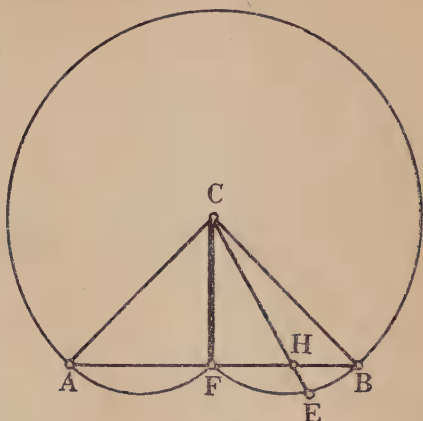


Fig. 49

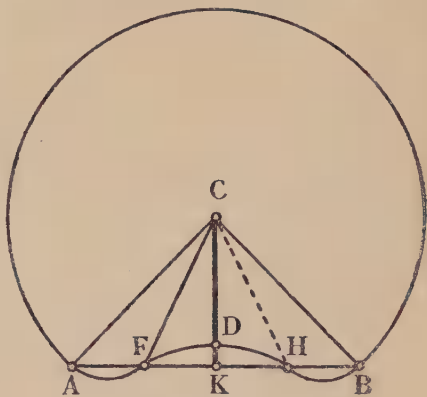


Fig. 50

CK und CB und weisen dann die Unmöglichkeit nach. Denn da AK und KB gleich, CK gemeinsam, und die Grundlinien CA und CB gleich sind, so sind auch die Winkel bei A und B gleich*), und die beim Punkte K sind Rechte. Aber CA und CB sind gleich CF, also sind auch die Winkel bei F Rechte, als gleiche Nebenwinkel. Dann ist $CF = CH$, da sie rechten Winkeln gegenüber liegen. Aber CF und CH sind gleich als Radien. Es ist also $CD = CK$, was unmöglich ist. Es ist demnach unmöglich, daß der gezogene Kreis außer den Punkten A und B die Gerade AB schneide, sei es in einem <Fig. 49>, sei es in zwei weiteren Punkten <Fig. 50>.

10

Das waren also die Einwände. Es gibt aber auch Konstruktionsfälle des Problems, die von den Einwänden zu scheiden sind. Denn Fall und Einwand sind nicht dasselbe, sondern ersterer zeigt nur dasselbe auf andere Weise; der Einwand aber führt das, was eingewendet wird, ad absurdum. Die Erklärer aber scheiden das nicht reinlich voneinander, sondern vermengen alles, und es bleibt unklar, ob sie sich anheischig machen, Fälle oder Einwände zu bringen. Wir bringen in reinlicher Scheidung nach den Einwänden die Fälle zur Behandlung.

Es sei also AB eine unbegrenzte Gerade und C der gegebene Punkt. Nun 20 behauptet jemand, es sei kein Platz auf der einen Seite der Linie, sondern nur auf der, auf der der Punkt C liegt. Wir nehmen nun auf der Geraden <AB> den Punkt D und ziehen mit dem Zentrum C und dem Radius CD die Kreislinie DEF, halbieren in H die Linie DF und ziehen die Verbindungslinien CD, CH und CF. Da nun $DH = HF$, CH gemeinsam, und CD und CF 30

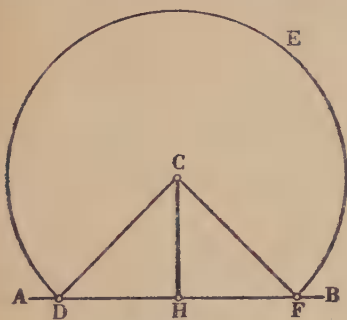


Fig. 51

als Radien gleich sind, so sind also die Winkel bei H gleiche Nebenwinkel und damit Rechte. CH ist also „Kathete“ <Lot> zu DF. Und sollte jemand sagen <Fig. 52>, der gezogene Kreis schneide die Gerade AB nicht, sondern berühre sie nur wie DE, so nehmen wir weiter draußen den Punkt E, verwenden C als Mittelpunkt und CE 35

*) Es ist nicht ersichtlich, warum FRIEDLEIN von der natürlichen Reihenfolge abgeht, wie sie bei BAROCIUS vorliegt, an den er sich doch anschließt. Ich halte mich an die Reihenfolge bei BAROCIUS.

als Radius und werden dann wie in der obigen Darlegung das gewünschte Resultat erhalten. Soviel sei zur Übung der Hörer über die Fälle dieses Problems gesagt.

- Soll ich an diese beiden Probleme noch eine spekulative Erörterung anschließen, so möchte die rechte Winkel bildende emporgezogene Gerade ein Abbild des aus den Niederungen zur Höhe strebenden und unbefleckt zurückkehrenden Lebens sein, das dem Schlechteren gegenüber in seiner unbeirrbaren Haltung verharret; die gefällte „Kathete“ <Lot> aber möchte ein
- 10 Bild des niedersteigenden Lebens sein, das sich aber frei hält von der unbegrenzten Variabilität im Bereiche des Werdens. Denn der rechte Winkel ist Sinnbild der unbeugsamen, der Gleichheit, der Grenze und dem Ende verbundenen Tatkraft, weshalb denn auch TIMAIOS den Kreis des Anderen, der die Ideen der Sinnendinge in der göttlichen Seele enthält, den Rechten
- 20 zubenannte. Denn in unseren Seelen erleidet er alle möglichen Brechungen und muß infolge des Werdens die verschiedensten Verkrümmungen aushalten; im Bereiche der ungeteilten Substanzen aber hat er in unversehrter Vollkommenheit den Vorrang vor den sichtbaren Kreisen. Wenn aber die unbegrenzte Gerade ihrerseits Sinnbild der ganzen Schöpfung ist, die ohne Ende und ohne Grenze in Bewegung ist, ja, der unbestimmten und ungestalteten Materie selbst, und wenn der außen liegende Punkt die Vorstellung der ungeteilten und von aller Materie freien Substanz erweckt, dann möchte wohl
- 30 unbedingt auch die gefällte Senkrechte ein Abbild des Lebens sein, das von dem Einen und Ungeteilten ausgeht, um in den Bereich des Werdens einzutreten. Wenn aber die „Kathete“ <Lot> nicht anders nachgewiesen werden kann als durch Kreise, so wäre schon das ein Fingerzeig dafür, daß nur durch den Nus den Lebensformen Unwandelbarkeit zukommt. Denn an und für sich entbehrt das Leben als Bewegung der Begrenzung. Es wird aber begrenzt und mit reiner
- 37 Kraft erfüllt, indem es teilhat am Nus und ihm verbunden ist*).

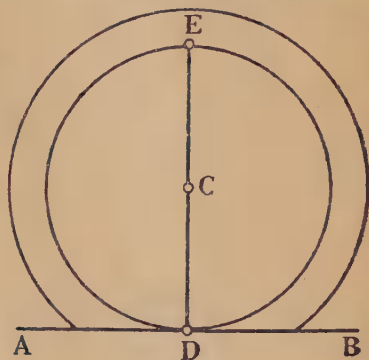


Fig. 52

*) $\nu\tilde{\phi}$ συμπεριούσα ist eine für einen Neuplatoniker unmögliche Vorstellung. Für ihn ist es Dogma, daß der Nus nicht ausgeht. Auch BAROCIUS scheint sich daran

13. Proposition, 6. Theorem: Wenn*) eine Gerade, auf einer Geraden stehend, Winkel bildet, so betragen diese entweder zwei Rechte oder sind zwei Rechten gleich²⁶⁹).

EUKLID geht wieder zu den Lehrsätzen über im Anschluß an das, was er in den Problemen bewiesen hat. Denn nachdem die Senkrechte auf die Gerade in rechten Winkeln gefällt war, war es folgerichtig für den Fall, daß die errichtete Gerade nicht senkrecht stand, zu fragen, welche Winkel sie bildet, und wie sie sich zu der Geraden verhalten. Er zeigt also ganz allgemein, daß jede Gerade, die auf einer Geraden steht und mit ihr Winkel bildet, entweder 10 zwei Rechte bildet, wenn ihre Richtung ganz gerade ist und nach keiner Seite geneigt, oder Winkel, die zwei Rechten gleich sind, wenn sie nach der einen Seite geneigt ist, nach der anderen hingegen einen größeren Abstand von der Grundlinie aufweist. Denn der Verkleinerung des rechten Winkels durch die Neigung nach der einen Seite entspricht die Vergrößerung des anderen durch den (zunehmenden) Abstand.

Es ist aber zu beachten, daß auch bei diesem Satz der Meister auf Genauigkeit bedacht war. Er sagte nicht einfach: Jede Gerade, die auf einer Geraden steht, bildet entweder zwei Rechte oder zwei 20 Rechten gleiche Winkel, sondern, „wenn“ sie Winkel bildet. Denn was dann, wenn sie am Ende der Geraden steht und nur einen Winkel bildet? Ist es möglich, daß dieser zwei Rechte beträgt? Gewiß nicht. Denn jeder geradlinige Winkel ist kleiner als zwei Rechte, wie jeder sphärische Winkel²⁷⁰) kleiner als vier Rechte ist. Selbst wenn man den anscheinend größten stumpfen Winkel nimmt, so kann man ihm nur eine solche Größe geben, daß er noch immer nicht das Maß zweier Rechten erreicht. Man muß also die Gerade so errichten, daß sie zwei Winkel bildet. Das ist, wie gesagt, wissenschaftliche Genauigkeit. 30

Was wollte er aber mit dem Zusatz: Sie bildet zwei Rechte oder zwei Rechten gleiche Winkel? Denn wenn sie zwei Rechte bildet, so macht sie doch zwei Rechten gleiche Winkel; die Rechten sind ja 33

gestoßen zu haben, weshalb er zu *unaque cum mente progrediens* am Rande vermerkt: *mentique adhaerens*. Ich schlage vor statt *συμπεριούσα συμπεριούσα* zu lesen.

*) In der EUKLIDausgabe steht nicht $\acute{\omega}\varsigma \acute{\alpha}\nu$, sondern $\epsilon \acute{\alpha}\nu$. HEIBERG bemerkt dazu im Apparat: $\acute{\omega}\varsigma \acute{\alpha}\nu$ PROCLUS *errore librarii*.

einander gleich. Nun, letzteres ist auch den gleichen Winkeln*) (mit den ungleichen) gemein, ersteres aber kommt den gleichen allein zu. Wir sind aber gewohnt, wenn eine besondere und eine gemeinsame Wahrheit**) vorliegt, im besonderen Fall beide Aussagen zu gebrauchen; ist aber dieser Fall nicht gegeben, dann begnügen wir uns mit dem gemeinsamen Prädikat zur Bezeichnung des zugrunde liegenden Sachverhalts. Daß die Nebenwinkel (zwei) Rechten gleich sind, kommt auch den Rechten zu, aber es wird nicht bloß von ihnen ausgesagt; daß sie aber Rechte sind, ist eine Besonderheit ihrer Gleichheit. Der Ausdruck also: Die zwei Rechten gleich sind, bezeichnet für sich allein die ungleichen Winkel. Denn auf sie trifft er allein zu, auf die gleichen aber nicht. Ihn stellt denn auch der Verfasser den zwei Rechten gegenüber. Denn dieser Ausdruck an und für sich bezeichnet die beiderseits ungleichen Winkel. Man kann aber auch hieraus wieder entnehmen, daß die Gleichheit auch für die Ungleichheit Maß und Grenze ist. Denn wenn auch die Verkleinerung und Vergrößerung des stumpfen und spitzen Winkels unbestimmt und unbegrenzt ist, so sagt man doch, sie empfangen vom Rechten Grenze und Bestimmung. Jeder von ihnen geht seine eigenen Wege, indem er sich entfernt***) von der Ähnlichkeit mit diesem, aber beide kehren einträchtig zur Begrenzung des Rechten zurück. Da sie aber außerstande sind, sich der Einfachheit des Rechten anzugleichen, so machen sie sich die Gleichheit des verdoppelten Rechten zu eigen. So ist die an sich unbestimmte Zweizahl der Beweis ihrer Unbegrenztheit. Das scheint ein klares Bild zu bieten von dem Ausgang der erstursächlichen Prinzipien, die in einer festen Grenze immer in derselben Weise verharren, im Bereich des unbegrenzten Werdens. Denn wie anders kommt es zur Harmonie, ja, gewissermaßen zur Gleichheit der Welt des Werdens, die teilhat am Mehr und Weniger und dahinfährt in schweifender Bewegung, und des Intelligiblen, wenn nicht durch Teil-

*) Der Text ist ganz klar. Es ist nichts daran zu ändern. KNOCHE fälscht ihn, wenn er *ισων* durch *ἀνίσων* ersetzt; FRIEDLEINS Ergänzung ist überflüssig, da der Text auch so schon besagt, was FRIEDLEIN ausdrücken will.

**) 293, 4: Wieder einmal setzt FRIEDLEIN irreführend ein Komma nach *ἀληθεύη*, statt erst nach *καὶ τὸ κοινόν*, das mit *καὶ τὸ ἴδιον* zu verbinden ist, wie auch BAROCIUS liest.

***) In 293, 21 liegt mit dem zweimaligen *ἀπρίσταται* augenscheinlich eine Dittographie vor, über die man sich weiter den Kopf nicht zu zerbrechen braucht.

habe*), indem jene Prinzipien vermöge ihrer zeugenden Kräfte ausgehen und sich nur vervielfachen. Denn soweit sie in ihrer Einfachheit und Unteilbarkeit verharren, sind sie ausgeschlossen vom Reiche des Werdens. Dies ist der Gewinn, den dieses Theorem zur Erkenntnis des Alls beiträgt.

14. Proposition, 7. Theorem: *Wenn zwei aufeinander folgende Gerade, die einer Geraden und dem auf ihr gelegenen Punkte nicht nach derselben Seite anliegen, die zwei Nebenwinkel gleich zwei Rechten bilden, so liegen die Geraden in gerader Richtung miteinander²⁷¹).*

Dieser Lehrsatz ist die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes. 10
Es folgen nämlich jeweils die Umkehrungen den Leitsätzen. Nachdem also jener eine Gerade auf einer Geraden errichtet und gezeigt hatte, daß sie die Nebenwinkel als zwei Rechte oder als zwei Rechten gleich bildet, nimmt dieser an, daß mit einer Geraden zwei Rechte gebildet werden, und beweist, daß es eine Gerade ist, die das mit der bezeichneten Geraden bewirkt. Das Datum in jenem ist demnach hier Thesis, die bewiesen wird durch die Zurückführung auf eine Unmöglichkeit. Denn so werden die Umkehrungen von Lehrsätzen gewöhnlich bewiesen. In den Problemen hingegen zieht der Meister auch leitende Konstruktionssätze heran. 20

Man kann aber auch bei diesem Satz die strengste und unüberbietbare Genauigkeit im wissenschaftlichen Ausdruck gewahren. Denn fürs erste fügt er zu den Worten: Wenn an einer Geraden hinzu: Und an dem auf ihr gelegenen Punkte. Denn was dann, wenn, da die Strecke zwei Enden hat, die eine von dem einen Ende aus, die andere von dem anderen aus gezogen wurde, und sie an der Geraden zwei Rechten gleiche Winkel bildeten? Konnten sie deshalb in einer Geraden liegen? Wie wäre das möglich bei Linien, die von verschiedenen Punkten derselben Linie aus gezogen wurden? Deshalb also fügte er bei: Und dem auf ihr gelegenen Punkte, da er wollte, daß 30 beide Geraden an einem Punkte liegen. Da es sodann möglich war, daß die gezogenen Linien an demselben Punkte der Geraden anliegen, ohne aufeinander zu folgen: Denn man kann ungezählte Gerade nehmen, die an einem Punkte liegen, fügte er hinzu: Zwei aufeinander 34

*) In 294, 9 ist η offenbar an eine falsche Stelle gekommen. Es ist nicht nach, sondern vor $\delta\iota\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \mu\epsilon\theta\acute{\epsilon}\xi\epsilon\omega\varsigma$ zu setzen. So liest auch BAROCIUS, wie FRIEDLEIN selbst im Apparat vermerkt.

folgende*) Gerade. Da drittens die unmittelbare Aufeinanderfolge ebenso auf derselben wie auf beiden Seiten stattfinden kann, es aber unmöglich ist, daß Linien, die auf derselben Seite unmittelbar einander folgen, auf derselben Geraden miteinander liegen, so lehnte er letzteres ab, und brachte uns auf den Gedanken, daß die unmittelbare Abfolge auf die Lage zu beiden Seiten zu beziehen ist. Denn in diesem Falle kann man nachweisen, daß sie in einer Geraden liegen.

Es seien an der Geraden AB zwei Gerade BC und BD auf derselben Seite; sie folgen also unmittelbar aufeinander. Denn zwischen ihnen
 10 liegt keine andere Gerade. Das aber folgt aufeinander, was nichts Gleiches zwischen sich hat. Jene Säulen z. B. bezeichnen wir als aufeinander folgend, zwischen denen sich keine andere Säule befindet. Allerdings liegt auf jeden Fall die Luft dazwischen, aber nichts von der gleichen Art. Weil sie also nach der gleichen Seite liegen, liegen sie nicht in einer Geraden, selbst wenn sie mit AB zwei Winkel gleich
 20 im Wege, daß <der> Winkel ABC $\frac{1}{3}$ und Winkel ABD die restierenden $\frac{2}{3}$ eines Rechten ausmache.

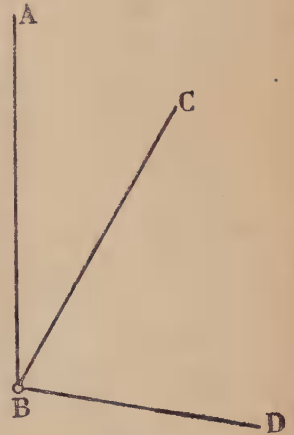


Fig. 53

Soviel zum Wortlaut des Satzes. Bei der Konstruktion aber bedient sich EUKLID einer Forderung, der zweiten, die die Verlängerung jeder Geraden in gerader Richtung verlangt, wie beim Beweis des unmittelbar vorausgehenden Theorems, und zweier Axiome: Einmal, daß was einer dritten Größe gleich ist, auch unter sich gleich ist, und dann, daß gleiche Reste bleiben, wenn man
 30 Gleiches von Gleichem hinwegnimmt. Dazu kommt noch zum Beweis der Unmöglichkeit der Satz, daß das Ganze größer ist als der Teil. Es war aber auch gleich nach Abzug des einen gemeinsamen Winkels**), was unmöglich ist.

Daß es aber möglich ist, daß an einer Geraden und einem auf
 35 ihr liegenden Punkt zwei Gerade, die aufeinander, aber auf derselben

*) PROKLUS ist hier wohl „päpstlicher als der Papst“. EUKLID hat $\epsilon\epsilon\eta\varsigma$ nicht in seinem Text. In der Tat ist es, wie jeder Mathematiker zugeben wird, selbstverständlich.

**) Gemeint ist: Im indirekten Beweis des EUKLID.

Seite folgen, die an der einen Geraden liegenden Winkel gleich zwei Rechten bilden, wollen wir zeigen wie PORPHYRIOS. Es sei eine Gerade AB und C ein beliebiger Punkt auf ihr, und in rechten Winkel mit AB werde CD gezogen; man halbiere den Winkel DCB durch CE und fälle von E die „Kathete“ <Lot> EB, verlängere EB, so daß $EB = BF$, und ziehe die Verbindungslinie CF. Da nun $EB = BF$, BC gemeinsam ist, so schließen sie auch gleiche Winkel ein, da es Rechte sind. Dann ist also die Basis EC gleich <der> Basis CF und alle Stücke sind einander gleich. Der Winkel ECB ist also gleich dem Winkel 10 FCB. Winkel ECB ist aber ein halber Rechter, da er durch EC halbiert wurde, also ist auch Winkel FCB ein halber Rechter; dann beträgt also Winkel DCF $1\frac{1}{2}$ Rechte. Es ist aber auch Winkel DCE ein halber Rechter. An der Geraden CD und dem auf ihr liegenden Punkte C liegen also zwei aufeinander folgende Gerade CE und CF auf derselben Seite und bilden 20 <mit DC> zwei Rechten gleiche Winkel, einen halben Rechten <mit> CE und $1\frac{1}{2}$ Rechte <mit> CF. Daß wir also

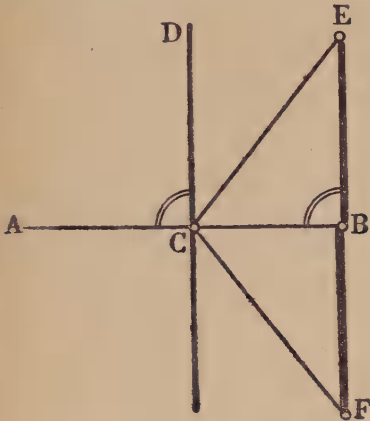


Fig. 54

nicht auf Unmögliches hinauskommen bei der Frage, wieso CE und CF, die mit DC die zwei Rechten gleichen Winkel bilden, miteinander in einer Geraden liegen, machte unser Meister den Zusatz: „Nicht auf derselben Seite“. Es müssen also die Geraden zu beiden Seiten der Geraden liegen, mit der sie zwei Rechten gleiche Winkel bilden; sie müssen von einem Punkte ausgehen, aber die eine nach der einen, die andere nach der entgegengesetzten Seite der Geraden. 30

15. Proposition, 8. Theorem: Wenn zwei Gerade einander schneiden, dann bilden sie gleiche Scheitelwinkel²⁷²).

Wir bemerken, daß die Nebenwinkel von den Scheitelwinkeln verschieden sind. Denn die einen entstehen dadurch, daß die beiden Geraden sich schneiden, die anderen dadurch, daß bloß die eine durch die andere geteilt wird. Denn wenn die Gerade selbst ungeteilt ist, die sie aber mit ihrem Endpunkt Schneidende zwei Winkel bildet, so nennen wir diese Nebenwinkel; wenn aber zwei Gerade sich wechsel- 38

seitig schneiden, so entstehen Winkel am Scheitel. Sie werden aber so genannt, weil ihre Scheitel in einem Punkte sich vereinen. Ihre Scheitel sind aber die Punkte, an denen die sich zusammenziehenden Flächen die Winkel bilden.

Dieses Theorem zeigt also, daß, wenn zwei Gerade sich schneiden, ihre Scheitelwinkel gleich sind. Es wurde, wie EUDEMOS berichtet, von THALES zuerst entdeckt, des wissenschaftlichen Beweises aber vom Verfasser der „*Elemente*“ für wert erachtet. Der Beweis wird aber nicht in allen Hauptpunkten geführt, da die Konstruktion hier
 10 ausfiel. Der Beweis aber, der unbedingt notwendig ist, hängt vom 13. Lehrsatz ab, zieht indes auch zwei Axiome heran, deren eines lautet: Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich, das andere aber: Nimmt man Gleiches von Gleichem weg, so sind auch die Reste gleich.

Nun, der Lehrsatz EUKLIDS ist klar. Seine Umkehrung lautet aber folgendermaßen: Wenn an einer Geraden Gerade, die nicht auf der gleichen Seite genommen sind, gleiche Scheitelwinkel bilden, so liegen die Geraden miteinander in einer Geraden. Es sei nämlich eine Gerade AB und auf ihr ein beliebiger
 20 Punkt C, und an diesem Punkt C nehme man zwei Gerade CD und CE nicht auf derselben Seite, die die gleichen Winkel ACD und BCE bilden. Dann behaupte ich, daß CD und CE in einer Geraden liegen. Denn da CD auf AB steht, so bildet sie die Winkel DCA und DCB gleich zwei Rechten. Aber Winkel DCA = Winkel BCE. Die Winkel DCB und BCE sind also gleich zwei Rechten. Da
 30 also an einer Geraden BC die Geraden CD und CE nicht auf derselben Seite die Nebenwinkel gleich zwei Rechten bilden, so liegen CD und CE in einer Geraden miteinander. Damit ist also die Umkehrung des vorliegenden Lehrsatzes bewiesen. Unser Meister scheint sie aber übergangen zu haben, da es leicht ist, durch die Zurückführung auf etwas Unmögliches auch diese auf demselben Wege zu beweisen, auf dem wir den voraus-
 39 gehenden Satz bewiesen haben. Sind nämlich die Voraussetzungen

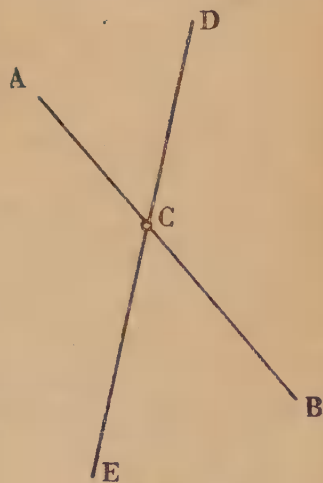


Fig. 55

dieselben, so behaupte ich, daß CD mit CE in einer Geraden liege. Denn ist dieses nicht der Fall, so nehme man an, CF liege in einer Geraden mit CD. Da nun die zwei Geraden AB und DF einander schneiden, bilden sie gleiche Scheitelwinkel. Die Winkel ACD und



Fig. 56

BCF sind also gleich. Aber auch die Winkel ACD und BCE sind gleich. Also ist Winkel $BCE = \sphericalangle BCF$, der größere gleich dem kleineren, was unmöglich ist. Es gibt also keine andere Gerade, die in einer Geraden läge mit CD; die Geraden 10 CD und CE liegen folglich, wenn die Scheitelwinkel gleich sind, in einer Geraden. Da nun derselbe Beweis vorliegt, der auch beim 14. Lehrsatz herangezogen wurde, wie wäre es da nicht überflüssig gewesen, auch diese Umkehrung anzuführen? Der Übung halber haben wir sie aber durch die Zurückführung auf etwas Unmögliches und auf dem Wege des direkten Beweises begründet.

Es scheint aber dies 15. Theorem sein Vertrauen zu setzen auf 20 die Gleichmäßigkeit der Geraden und ihre vollkommene Spannung, weil Linien, die sich so verhalten und gegenseitig schneiden, notwendigerweise ähnliche, ja dieselben Neigungen zueinander auf beiden Seiten haben müssen. Die Kreisperipherien allerdings und überhaupt die Ungeraden, die einander schneiden, haben nicht unbedingt gleiche Scheitelwinkel, sondern bald gleiche, bald ungleiche. Denn wenn zwei gleiche Kreise durch die Mittelpunkte sich schneiden oder auch nicht durch die Mittelpunkte, so bilden sie am Scheitel zwar die Mönchenwinkel gleich, aber die anderen, den beiderseits konkaven und beiderseits konvexen, nicht mehr, sondern den einen größer. 30 Bei den geraden Linien aber bewirkt die vollkommene Dehnung Gleichheit des Abstandes der Abschnitte der einen Geraden von denen der anderen.

Porisma (Folgerung): Daraus geht klar hervor, daß zwei Gerade, die einander schneiden, die vier Winkel gleich vier Rechten bilden.

Einer der geometrischen Termini ist *Porisma*²⁷³). Er bezeichnet ein Doppeltes. Man nennt nämlich Porismen Lehrsätze, die bei Beweisen anderer Sätze mit abfallen, sozusagen Hermesgaben und 38

- Gewinne der Forschenden; dann Sätze, die zwar unter Beweis stehen, aber ein Finden verlangen, weder eine bloße Konstruktion, noch eine einfache Untersuchung. Der Satz z. B., daß in gleichschenkeligen Dreiecken die Basiswinkel gleich sind, bedarf einer Untersuchung, und seine Erkenntnis bezieht sich auf einen bestehenden Sachverhalt. Hingegen einen Winkel halbieren, oder ein Dreieck konstruieren, oder $\langle$ eine gleiche Strecke $\rangle^*)$ abtragen oder ziehen, das alles enthält die Forderung, etwas zu tun; aber die Aufgaben, von einem gegebenen Kreis den Mittelpunkt zu finden, oder den größten gemeinsamen Teiler
- 10 von zwei gegebenen kommensurablen Größen u. dgl., nehmen eine gewisse Mittelstellung ein zwischen Problem und Theorem. Denn bei solchen Fragen handelt es sich nicht darum, daß etwas entstehe, sondern gefunden werde, und nicht um eine bloße Untersuchung. Denn man muß das Gesuchte vor Augen führen und sichtbar machen. Von der Art sind die „*Porismen*“, die EUKLID geschrieben, und die er in drei Büchern zusammengestellt hat. Doch von diesen Porismen wollen wir hier nicht sprechen. Die Porismen in den „*Elementen*“ ergeben sich zugleich mit dem Beweise anderer Sätze, ohne daß sie eigentliches Objekt der Forschung wären. Von der Art ist unser
- 20 Porisma. In Frage stand nämlich, ob die Scheitelwinkel gleich sind, wenn zwei Gerade sich schneiden.
- Mit diesem Beweis ist nun zugleich bewiesen, daß die vier Winkel vier Rechten gleich sind. Als wir nämlich sagten: „Es seien AB und CD zwei Gerade, die sich im Punkte E schneiden; da nun AE auf CD steht, so bildet sie die Nebenwinkel gleich zwei Rechten, und da hinwieder BE
- 30 auf CD steht, bildet sie gleichfalls die Nebenwinkel gleich zwei Rechten“:
- Damals haben wir mit unserer These zugleich den Beweis erbracht, daß die Winkel um den Punkt E vier Rechte betragen. Es ist also das Porisma ein Lehrsatz, der mühelos durch den Beweis eines anderen Problems oder Theorems klargestellt wird. Denn wie durch Zufall stoßen wir anscheinend auf Porismen.
- 37 Sie treten uns entgegen ohne unsere Zielsetzung und ohne unser

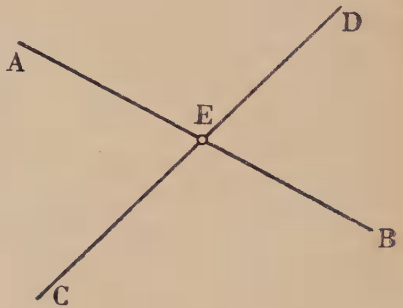


Fig. 57

*) Eine naheliegende Ergänzung aus BAROCIUS.

Suchen, weshalb wir sie auch den Gaben des HERMES verglichen haben. Und vielleicht haben die bedeutenden Mathematiker sie hiernach benannt, um der Masse, die wie verzaubert den sich zeigenden Schatz anstarrt, anzudeuten, daß eben das die wahren Gaben des Gottes und die Glücksfunde sind, aber nicht, was sie sich darunter vorstellt. Denn diese Gaben erzeugt der uns verliehene Reichtum, und die fruchtbare Kraft der Wissenschaft fügt sie zu den Hauptsätzen der Forschung hinzu, um den unerschöpflichen Reichtum an Lehrsätzen zu enthüllen.

Die Eigenart der Porismen ist also in diesem Sinne zu bestimmen. 10 Einzuteilen sind sie aber fürs erste nach den Wissenschaften; die einen Porismen sind nämlich geometrischer, die anderen arithmetischer Art. Das vorliegende Porisma ist z. B. ein geometrisches; das am Ende des 2. Satzes des 7. Buches zählt zu den arithmetischen²⁷⁴). Die 2. Einteilung ist bestimmt durch die vorangehenden Aufgaben; denn die einen folgen auf Probleme, die anderen auf Theoreme. So gehört das vorliegende zu einem Theorem, das aber im 2. Satz des 7. Buches*) zu einem Problem. Die 3. Einteilung ist gegeben durch die Beweise. Die einen werden nämlich im Wege des direkten Beweisverfahrens, die anderen durch Zurückführung auf etwas Unmögliches mitbe- 20 wiesen. Das vorliegende wurde durch direkten**) Beweis, das aber, das zugleich mit dem 1. Satz des 3. Buches bewiesen wurde, wurde durch Zurückführung auf etwas Unmögliches erschlossen. Auch auf vielfache andere Weise noch kann man die Porismen einteilen. Uns mögen indes die hier gegebenen Einteilungen genügen.

Dieses Porisma, das gegenwärtig zur Behandlung vorliegt und uns belehrt, daß die Fläche um einen Punkt herum auf vier Rechten gleiche Winkel sich verteilt, gab auch den Anstoß zu jenem überraschenden Theorem, das zeigt, daß allein die folgenden drei Vielecke imstande sind, die ganze Fläche um einen Punkt aus- 30 zufüllen: Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, und das gleichseitige 31

*) So liest BAROCIUS, dem ich folge. Im übrigen verweise ich zu der Stelle auf HEIBERGS Ausgabe der „Elemente“ EUKLIDS I, 319, Anm. 1. HEIBERG hat richtig erkannt, daß im PROKLUSTexte τὸ δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ein Fehler vorliegen müsse und ersetzt δευτέρῳ durch τετάρτῳ. Damit wäre der Fehler behoben, aber durch eine bloße Konjekture. Er ist auch beseitigt, wenn wir BAROCIUS folgen, für dessen Leseart spricht, daß PROKLUS gleich Z. 6 in ähnlicher Weise zitiert: τὸ δὲ τῷ πρώτῳ τοῦ τρίτου βιβλίου.

**) Ich lese nach FRIEDLEINS eigenem Vorschlag in den Addenda 437: ἐπενθελῶ.

und gleichwinkelige Sechseck, aber das gleichseitige Dreieck sechsmal genommen: Denn sechsmal zwei Drittel gibt vier; das Sechseck dreimal: Denn jeder Winkel eines Sechsecks ist gleich 4 Drittel eines Rechten; das Quadrat viermal: Denn jeder Winkel eines Quadrats beträgt einen Rechten. 6 gleichseitige Dreiecke also, die mit den Winkeln zusammenstoßen, machen 4 Rechte aus, ebenso 3 Sechsecke und 4 Quadrate. Jedes andere Vieleck, wie immer mit den Winkeln zusammengesetzt, bleibt entweder unter den 4 Rechten oder geht darüber hinaus. Einzig die genannten
 10 Vielecke kommen gemäß den genannten Zahlen den 4 Rechten gleich.

Aber auch wenn mehr als 2 Gerade in einem Punkte sich schneiden, z. B. 3 oder 4, oder wie viele nur immer, so wird durch dieses Porisma bewiesen, daß die entstehenden Winkel insgesamt gleich 4 Rechten sind. Denn sie teilen den Raum der 4 Rechten unter sich auf. Es ist aber klar, daß die Winkel stets die doppelte Zahl der Geraden ausmachen: Schneiden sich 2 Gerade, so gibt es 4 Winkel gleich 4 Rechten, schneiden sich 3, so entstehen 6 Winkel, bei 4 Geraden deren 8 usf. ins Unendliche: Immer wird die doppelte
 20 Zahl der Linien herauskommen. Die Winkel aber mehren sich an Zahl, vermindern sich hingegen an Größe, weil die zu teilende Größe immer dieselbe bleibt, nämlich die 4 Rechten.

16. Proposition, 9. Theorem: *Bei jedem Dreieck ist nach Verlängerung einer Seite der Außenwinkel des Dreiecks größer, als jeder der entgegengesetzten (nicht anliegenden) Innenwinkel²⁷⁵).*

Diesen Satz trugen einige verstümmelt vor ohne die Worte: Nach Verlängerung einer Seite, und boten so anscheinend einigen anderen, vor allem aber nach dem Zeugnis des Mechanikers HERON dem PHILIPPOS Anlaß zu abfälligen Bemerkungen. Denn das
 30 Dreieck hat als solches nicht unbedingt einen Außenwinkel. Diejenigen aber, die diesen Vorwurf entkräften wollten, trugen den Satz mit dem gegebenen, dem Meister gewohnten Zusatz vor. Denn auch als er im 5. Satz die Gleichheit der Winkel unter der Basis gleichschenkeliger Dreiecke nachweisen wollte, fügte er hinzu, daß nach Verlängerung der gleichen Seiten die Winkel unter der Basis gleich sind. Mochte der Satz also bei anderen auch nur verstümmelt vorkommen, so hat ihn doch der Verfasser der
 38 „Elemente“ vollständig niedergeschrieben. Was behauptet nun die

Thesis?*) Daß man in jedem Dreieck, wenn man irgendeine Seite verlängert, den entstehenden Außenwinkel größer finden wird als jeden der entgegengesetzten Innenwinkel. Es wird nämlich wenig später nachgewiesen²⁷⁶⁾, daß er beiden gleich ist; daß er aber größer ist als jeder einzelne, ergibt sich aus diesem Beweis. Notwendigerweise aber verglich er ihn mit den entgegengesetzten und nicht mit dem Nebenwinkel. Denn dieser kann sowohl gleich sein wie auch kleiner; der Außenwinkel**) aber ist unbedingt größer als jeder von jenen. Wenn z. B. das Dreieck rechtwinkelig ist, und man sich eine der dem rechten Winkel anliegenden Seiten verlängert denkt, so ist 10 der Außenwinkel gleich dem Nebenwinkel; ist es aber stumpfwinkelig, dann ist es möglich, daß der innere Winkel größer ist als der äußere. Aber im Vergleich mit den gegenüberliegenden Winkeln — denn von den Innenwinkeln des Dreiecks ist einer der Nebenwinkel, während zwei gegenüberliegen — ist der Außenwinkel größer als jeder von diesen, aber nicht als sein Nebenwinkel.

Nun haben einige die zwei Lehrsätze, diesen und den im folgenden bewiesenen, verbunden und tragen die Thesis so vor: Wenn eine Seite irgendeines Dreiecks verlängert wird, so ist der Außenwinkel größer als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel, und 20 zwei beliebige Innenwinkel sind kleiner als 2 Rechte. Den Anreiz zu dieser Verbindung der Theoreme bietet ihnen der Umstand, daß der Meister selbst in gleichen Fällen so vorging. Ein Beispiel: Bei jedem Dreieck ist der Außenwinkel gleich den zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln und die drei Dreieckswinkel betragen <zusammen> 2 Rechte²⁷⁷⁾. Auch hier fordern sie demnach in einem ähnlichen Falle die Fragen zu verbinden und eine zusammengesetzte Thesis aufzustellen. Es ist aber klar, daß der zum Beweise vorliegende Satz schon zusammengesetzt ist, und daß das Datum, wenn es mit dem angeführten Zusatz vorgetragen wird, gleichfalls zu- 30

*) Wieder ein leidiger Interpunktionsfall! Wie FRIEDLEIN interpunktiert, bleibt der ganze Passus 306, 9—15 in seinem Zusammenhang unverständlich. Es ist mit BAROCIUS Z. 9 nach *πρότασις* ein Fragezeichen zu setzen, das Fragezeichen Z. 12 hingegen durch einen Punkt zu ersetzen.

**) 306, 17: Der griechische Text ist zwar nicht sorgfältig gefeilt, aber klar und bedarf keiner Ergänzung, da der Außenwinkel stark genug als Objekt der Erörterung der Reflexion sich aufdrängt, wenn er auch nach den strengen grammatikalischen Gesetzen eigens genannt sein müßte. Erst recht ist FRIEDLEINS Verbesserungsvorschlag in den *Addenda* 437 abzulehnen.

sammengesetzt ist: Denn man hat sich zweierlei zu denken, ein gegebenes Dreieck und eine verlängerte Seite; wenn aber ohne diesen*), dann ist er der Potenz nach zusammengesetzt, in Wirklichkeit aber einfach. Denn man muß auf jeden Fall auch diesen Zusatz als gegeben mit einbeziehen, auch wenn er nicht beigelegt ist. Denn mit der Voraussetzung der Tatsächlichkeit des Außenwinkels hat er auch schon die Verlängerung der Seite angenommen. Soviel hiervon.

- Durch das vorliegende Theorem gewinnen
 10 wir auch den Satz, daß es unmöglich ist, von demselben Punkte zur selben Geraden drei gleiche Strecken zu ziehen. Es seien z. B. die drei Linien AB, AC und AD von einem Punkte aus zur Geraden BD gezogen. Da nun $AB = AC$, so sind die Basiswinkel gleich, also Winkel $ABC = \sphericalangle ACB$. Und wiederum, da $AB = AD$, so ist Winkel $ABD = \sphericalangle ADB$. Winkel ABC ist aber gleich $\sphericalangle ACB$. Also ist Winkel $ACB =$ Winkel ADB , der Außenwinkel
 20 $\langle$ gleich $\rangle$ dem gegenüberliegenden Innenwinkel, was unmöglich ist. Es können also nicht von demselben Punkte drei gleiche Strecken zur selben Geraden gezogen werden.

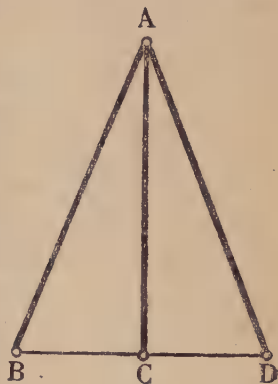


Fig. 58

- Mit Hilfe dieses Lehrsatzes beweisen wir auch jenen, der besagt: Wenn eine zwei Gerade schneidende Gerade den Außenwinkel gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel bildet, so bilden die Geraden kein Dreieck und treffen nicht zusammen, da der Winkel zugleich größer und gleich ist, was unmöglich. Es seien z. B. AB und CD Gerade $\langle$ Fig. 59 $\rangle$, und die sie schneidende BE bilde die gleichen Winkel ABD und CDE. Dann werden also AB und CD nicht zusammentreffen.
 30 Denn wenn sie zusammentreffen $\langle$ würden $\rangle$ und die gleichen Winkel bleiben, dann ist Winkel $CDE =$ Winkel ABD , der als Außenwinkel größer ist als der gegenüberliegende Innenwinkel. Es ist also notwendig, falls sie zusammentreffen, daß die Winkel nicht mehr gleich bleiben, sondern daß Winkel bei D unbedingt größer wird. Denn wenn du dir vorstelltest, AB würde in Ruhe verharren, CD würde sich
 36 aber auf sie zubewegen, damit sie zusammenfielen, so vergrößerst du

*) Man sieht nicht ein, warum FRIEDLEIN 307, 19 nach *ἀνεν ταύτης* ein Fragezeichen setzt. Der Sinn ist klar: *ἀνεν ταύτης* steht im Gegensatz zu *μετὰ τῆς εἰρημένης προσθήκης* Z. 16.

den Abstand bei Winkel CDE; denn je mehr CD sich AB nähert, desto weiter entfernt sie sich von DE. Denkst du aber, CD bleibt und AB bewegt sich gegen sie, dann verkleinerst du den Winkel ABD; denn sie bewegt sich zugleich gegen CD und BD. Wenn du sie aber beide gegeneinander in Bewegung setzest, so wirst du finden, daß AB gegen BD sich bewegt und den Winkel verkleinert, daß aber CD,



Fig. 59

die absteht von DE, wegen ihrer Bewegung in Richtung auf AB den Winkel CDE vergrößert. Soll also ein Dreieck entstehen und sollen AB und CD zusammenfallen, so muß unbedingt 10 der Außenwinkel größer sein als der gegenüberliegende Innenwinkel. Denn entweder bleibt der Innenwinkel, und der Außenwinkel wächst, oder der Außenwinkel bleibt, und der Innenwinkel wird kleiner, oder*) es wird zugleich der Innenwinkel kleiner und der Außenwinkel dehnt sich weiter aus. Ursache davon ist die Bewegung der Geraden: Die eine bewegt sich nach der Seite, wo sie den Innenwinkel bildet, die andere entfernt sich von der Seite, wo sie 20

den Außenwinkel bildet. Man kann daraus abnehmen, wie das Werden der Dinge uns die wahren Gründe der Forschungsobjekte vor Augen führt.

17. Proposition, 10. Theorem: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, wie immer genommen, kleiner als zwei Rechte²⁷⁸).*

Hier wird ganz allgemein bewiesen, daß zwei beliebige Winkel des Dreiecks kleiner sind als zwei Rechte. Im folgenden wird auch festgestellt werden, um wieviel sie kleiner sind, nämlich um den dritten Dreieckswinkel. Denn die drei betragen zwei Rechte²⁷⁹), so daß zwei davon um den dritten kleiner sind als zwei Rechte. Der 30 Beweis des Verfassers der „Elemente“ nimmt einen klaren Verlauf. Er verwendet nämlich den vorausgehenden Lehrsatz. Man muß aber wie beim vorausgegangenen Satz auf die Entstehung der Dreiecke sehen, um den Grund des vorliegenden Akzidens zu finden. Es seien also wieder die Geraden AB und CD, die mit BD rechte Winkel 35

*) 310, 1 ist $\epsilon\lambda$ in der Tat mit BAROCIUS auszumerzen, wenn sich ein vernünftiger Sinn ergeben soll. Auch FRIEDLEIN äußert sich zustimmend im Apparat.

bilden. Soll nun ein Dreieck entstehen, so müssen AB und CD gegeneinander konvergieren. Die Konvergenz vermindert die Innenwinkel, so daß sie geringer werden als zwei Rechte. Denn vor der Konvergenz sind sie Rechte. Wenn wir uns nun in ähnlicher Weise auf AB die Senkrechten AC und BD stehen denken (Fig. 61), so wird die Konvergenz der Geraden zu demselben Ergebnis führen, und die Winkel, die AB anliegen, werden kleiner als zwei Rechte. Dasselbe gilt von der anderen Seite. Dies ist der Grund
 10 und nicht der Umstand, daß der Außenwinkel größer ist als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel. Denn es ist gar nicht nötig, daß die Seite verlängert und ein Außenwinkel gebildet werde; von den Innenwinkeln müssen aber zwei beliebige unbedingt kleiner als zwei Rechte sein. Wie könnte aber das Nichtnotwendige Grund sein für das Notwendige? Nein, die Begründung liegt, wie gesagt, in dem, was ich ausführte, in der Konvergenz der Geraden gegen die Basis, die die rechten
 20 Winkel kleiner werden läßt.

Während nun der Verfasser der „*Elemente*“ mit Hilfe des Außenwinkels den gesuchten Beweis erbrachte, wollen wir ohne Verlängerung einer Geraden dasselbe Ergebnis erzielen. Es sei ABC das Dreieck; man nehme einen beliebigen Punkt D auf BC und ziehe die Verbindungslinie AD. Da nun vom Dreieck ABD eine Seite BD verlängert wurde, so ist der Außenwinkel
 30 ADC größer als der Innenwinkel ABD. Und da vom Dreieck ADC eine Seite, DC, verlängert wurde, so ist wieder der Außenwinkel ADB größer als der Innenwinkel ACD. Aber die Winkel beiderseits AD sind nach dem 13. Satz zwei Rechten gleich. Also sind die Winkel ABC und ACB kleiner als zwei Rechte. Ähnlich zeigen wir, daß auch die Winkel BAC und BCA kleiner sind als zwei Rechte,
 39



Fig. 60

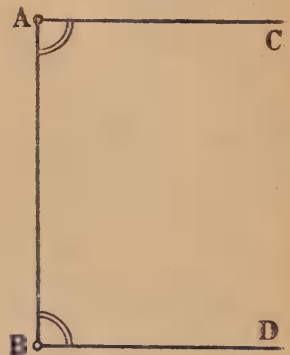


Fig. 61

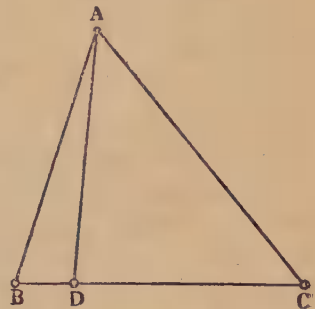


Fig. 62

indem wir auf AC einen Punkt nehmen und von B eine Gerade zu dem gewählten Punkte ziehen. Und wiederum werden wir dasselbe beweisen für die Winkel CAB und ABC, indem wir auf AB einen Punkt nehmen und von C aus eine Gerade zu diesem Punkte ziehen.

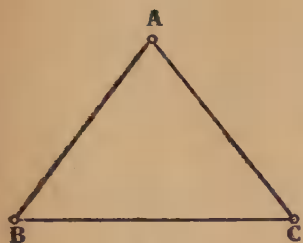


Fig. 63

Der vorliegende Satz wurde also durch dasselbe Theorem bewiesen ohne Verlängerung einer der Dreiecksseiten.

Mit seiner Hilfe kann man nun auch den Satz beweisen, daß man von demselben Punkte zwei Senkrechte auf eine 10 Gerade nicht fallen kann. Es seien z. B. <Fig. 63> AB und AC zwei Senkrechte vom Punkte A zur Geraden BC. Dann sind also ABC und ACB rechte Winkel.

Da aber ABC ein Dreieck ist, so sind zwei beliebige Winkel kleiner als zwei Rechte. Also sind die Winkel ABC und ACB kleiner als zwei Rechte. Sie sind aber auch wegen der „Katheten“ <Lote> gleich zwei Rechten, was unmöglich ist. Man kann also nicht von demselben Punkte auf dieselbe Gerade zwei Senkrechte fallen.

18. Proposition, 11. Theorem: *In jedem Dreieck liegt die größere Seite 20 dem größeren Winkel gegenüber²⁸⁰.*

Daß die Gleichheit der Seiten in jedem Dreieck Gleichheit der ihnen gegenüberliegenden Winkel bewirkt, und die Gleichheit der Winkel ebenso die Gleichheit der ihnen gegenüberliegenden Seiten bekundet, haben wir im 5. und 6. Lehrsatz kennengelernt. Daß aber auch der Ungleichheit der Seiten die Ungleichheit der ihnen gegenüberliegenden Winkel entspricht und umgekehrt, erfahren wir durch diese Lehrsätze, den 18. meine ich und den 19. Denn ersterer zeigt, daß die größere Seite dem größeren Winkel gegenüberliegt, letzterer, daß dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt. Sie stellen 30 die Umkehrung voneinander dar und untersuchen von entgegengesetzten Dingen dieselben Akzidentien wie der 5. und 6. Satz. Es ist aber klar, daß wir bei den ungleichseitigen Dreiecken die größere und kleinere Seite bzw. nehmen und zwischen der größten, der mittleren und der kleinsten scheiden werden und ebenso bei den Winkeln. Bei den gleichschenkeligen Dreiecken freilich können wir uns auf das Größere und Kleinere schlechthin beschränken; denn nur eine ungleiche steht den beiden anderen gegenüber, sei sie nun 38

größer oder kleiner. Auf die gleichseitigen Dreiecke vollends finden diese Lehrsätze keine Anwendung. (Man kann hierbei sehen, daß die Sätze, die die Gleichheit der Winkel oder Seiten beweisen, auf die gleichseitigen und gleichschenkeligen Dreiecke Anwendung finden, die Sätze aber von der Ungleichheit auf die ungleichseitigen und ungleichschenkeligen. Der Grund hiervon ist der, daß die einen von den Dreiecken lediglich von der Gleichheit abstammen, andere lediglich von der Ungleichheit, wieder andere von beiden, da sie ihr Sein teils der Gleichheit, teils der Ungleichheit verdanken. Ferner ist das
 10 Seiende teils der Grenze, teils der Unbegrenztheit verwandt, teils durch Mischung aus beiden entstanden, so daß diese Dreierheit in allem obwaltet, in den Linien, Winkeln, Figuren und hier wieder den drei- und vierseitigen und allen weiteren. Aber auch die Grenze wird bald durch die Ähnlichkeit, bald durch die Gleichheit in den geometrischen Seinsformen wahrgenommen, und die Unbegrenztheit bald durch die Unähnlichkeit, bald durch die Ungleichheit; und die Mischung erfolgt zuweilen aus Ähnlichkeiten und Unähnlichkeiten, zuweilen aus Gleichheiten und Ungleichheiten*). Auch hiervon ist der Grund, daß die geometrischen Seinsformen der Quantität und der
 20 Qualität zugeordnet sind.) Daher**) ist mit der Charakterisierung

*) Ich nehme den vollen Text aus BAROCIUS herüber.

**) Die folgende Stelle 315, 4—10 ist nach Sinn und Zusammenhang sehr schwer zu erklären, ein wahres Kreuz für die Herausgeber und Übersetzer, wie der kritische Apparat bei FRIEDLEIN ersehen läßt. Vor allem ist klar, daß von Z. 4 ab kein Zusammenhang gegeben ist mit dem Vorausgehenden. Die Kernfrage ist, worauf bezieht sich τῶν δύο τούτων ἐπισημασμένων? BAROCIUS übersetzt: *Haec itaque assignavimus quoniam haec duo nobis assignantibus manifestum nobis erit.* Die Übersetzung mutet frei an und gibt keine Antwort auf die Frage. Das folgende δῆλον ist Konjekture FRIEDLEINS. Die Handschriften fügen ἡμῶν ein, GRYNAEUS liest ἡμῖν. Meines Erachtens gibt es nur zwei Möglichkeiten zur Beseitigung der Schwierigkeiten. Der erste Abschnitt des 11. Theorems beginnt und schließt mit Erläuterungen zum Sinn und Wortlaut der 18. Proposition. In der Mitte schiebt sich 314, 12 mit καὶ ὁρᾷς so etwas wie eine Digression oder Parenthese ein, die eine tiefere Begründung des behandelten Problems zu geben sucht und bis 315, 4 reicht. Auch BAROCIUS vermerkt am Rande zu dieser Stelle *Digressio*, nur verzeichnet er: *finis digressionis* erst zu 315, 10, während sie meines Erachtens schon Z. 4 zu Ende geht. Da dieses Stück als Parenthese doch allzu unförmlich wäre und διότι unmittelbaren Anschluß verlangt, so kann ich nur annehmen, die Partie Z. 4—10 ist irgendwie an eine falsche Stelle gekommen; sie stand ursprünglich 314, 12 vor καὶ ὁρᾷς. τῶν δύο τούτων ἐπισημασμένων bezieht sich dann auf die größere und kleinere Seite Z. 6, die im gleichen Satz 315, 6. 7 mit τοῦ ἔχοντος μείζω καὶ ἐλάττω πλεονάν eigens nochmal aufgenommen werden. Das Verbum zu διότι deutet uns ἐπισημασμένων

dieser beiden Seiten uns zugleich auch angedeutet, daß der Verfasser der „Elemente“ mit den Worten: In jedem Dreieck, nicht auch das gleichseitige mitbezeichnet, sondern nur das, das eine größere und kleinere Seite hat. Denn das Datum muß man als führend betrachten, dem die Thesis zu entsprechen hat; das Dreieck aber mit der größeren und kleineren Seite muß gegenüber der größeren Seite den größeren Winkel haben.

Nun hat der Meister bei der Konstruktion das Dreieck ABC genommen und AC größer als AB, und damit er zeige, daß der Winkel bei B größer als bei C, trug er auf AC die AB gleiche Strecke AD ab. 10

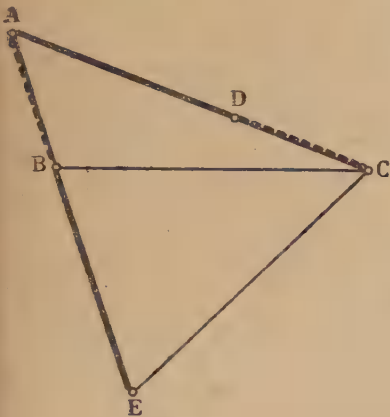


Fig. 64

Da man nun aber behaupten könnte, das Abtragen habe bei C zu erfolgen, so wollen wir auch unter dieser Voraussetzung nach dem Vorgang des PORPHYRIOS den vorliegenden Satz beweisen. Es sei also $DC = AB$, und man verlängere AB bis E, und BE sei gleich DA. Die ganze Gerade AE ist also gleich AC, und man ziehe die Verbindungslinie EC. Da 20 nun $AE = AC$, so ist nach dem 5. Satz Winkel $AEC =$ Winkel ACE . Winkel AEC ist also größer als Winkel ACB. Es ist aber auch Winkel ABC größer als $\angle AEC$.

Denn vom Dreieck CBE ist die Seite EB verlängert und Winkel ABC ist als Außenwinkel größer als der gegenüberliegende Innen- 27

an: es ist ein *ἐπισημαίνεται* ausgefallen, was bei der Wiederholung desselben Verbums leicht denkbar ist. Mit diesem *ἐπισημαίνεται* verbindet sich sehr glücklich das bei GRYNAEUS überlieferte *ἡμῖν*. 315, 8 ist wohl zu lesen *ἐπόμενον δέ, ὅτι ἂν τὸ ζητούμενον*. Den letzten Satz lasse ich mit BAROCIUS noch vom *δεῖ* abhängen und lese mit GRYNAEUS und BAROCIUS statt *τοῦτο: τοῦτω* sc. *εἶναι*. *δεῖ* soll begründen, warum es heißt *τοῦ ἔχοντος μείζω καὶ ἐλάττω πλευρὰν*. Gegeben ist die größere Seite; aus ihr wird auf den großen Winkel geschlossen. Es könnte auch umgekehrt sein. Vgl. 313, 20. 21 und die 19. Prop. Der größeren Klarheit wegen will ich meinen Versuch der Textgestaltung hierher setzen: *διότι τῶν δύο τοῦτων ἐπισημανομένων ἐπισημαίνεται καὶ ἡμῖν, ὅτι παντὸς τριγώνου λέγων ὁ στοιχειωτὴς οὐχὶ καὶ τοῦ ἰσοπλευροῦ λέγει, ἀλλὰ τοῦ ἔχοντος μείζω καὶ ἐλάττω πλευρὰν. δεῖ γὰρ τὸ δεδομένον ἡγούμενον νομίζειν, ἐπόμενον δέ, ὅτι τὸ ζητούμενον, ὃ δ' ἂν μείζονα πλευρὰν ἔχῃ καὶ ἐλάσσονα, τοῦτω ὑπὸ τὴν μείζονα πλευρὰν τὴν μείζονα γωνίαν* sc. *εἶναι*.

winkel. Also ist $\sphericalangle ABC$ noch viel größer als $\sphericalangle ACB$, was zu zeigen war.

- Das sind also die geometrischen Beweise. Es ist aber klar, daß die Ursache dieses Akzidens zu sehen ist in der Vergrößerung oder Verkleinerung der dem Winkel gegenüberliegenden Seite selbst. Ist sie nämlich größer, so erweitert sie den Winkel, wird sie aber kleiner, verkleinert sie auch diesen und zieht ihn auf engeren Raum zusammen. Der Grund hiervon ist die vollkommene Dehnung der Geraden. Denn
- 10 vollkommen gedehnt, verändert sie auch nach Maßgabe ihrer eigenen Vergrößerung und Verkleinerung die Größe der Winkel. Wir verstehen das von einem Dreieck; denn es ist möglich, daß demselben Winkel eine größere und kleinere Strecke gegenüberliegt, und daß dieselbe Gerade einem größeren und kleineren Winkel gegenüberliegt. Es sei z. B. ABC ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck;
- 20 man nehme auf AB den Punkt D (beliebig) und $AE = AD$, und man ziehe die Verbindungslinie DE . Dem Winkel bei A liegen nun gegenüber DE und BC , wovon die eine größer, die andere kleiner ist, und so kann man ungezählte andere größere und kleinere Gerade nehmen, die auf dieselbe Weise dem Winkel bei A gegenüberliegen. Wiederum sei ABC das gleichschenkelige Dreieck, und BC sei kleiner als BA und AC , und über BC sei BCD das gleichseitige Dreieck; man ziehe dann die
- 30 Verbindungslinie AD und verlängere sie bis E . Da nun Winkel BDE Außenwinkel des Dreiecks ABD ist, so ist er größer als Winkel BAD ; aus demselben Grunde ist auch Winkel CDE größer als $\sphericalangle CAD$. Der ganze Winkel BDC ist also größer als Winkel BAC und beiden, dem größeren und dem kleineren Winkel, liegt dieselbe Gerade gegenüber. Damit ist bewiesen, daß demselben Winkel größere und kleinere
- 39 Gerade gegenüberliegen. Aber im selben Dreieck liegt eine Gerade

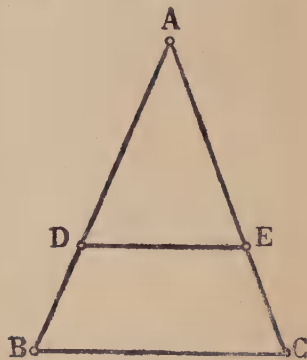


Fig. 65

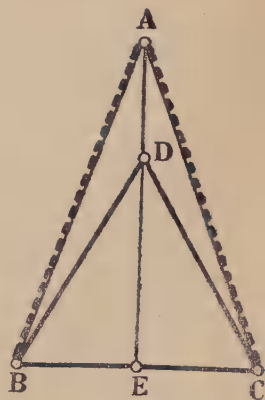


Fig. 66

einem Winkel gegenüber, und zwar die größere unbedingt dem größeren und die kleinere dem kleineren. Den Grund davon haben wir kennengelernt.

19. Proposition, 12. Theorem: *In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber²⁸¹).*

Dieses Theorem ist die Umkehrung des vorausgehenden, und in beiden ist Datum und Thesis einfach. Die Folgerung dort ist hier Voraussetzung, und die dortige Voraussetzung ist hier Folgerung. Es ist aber jenes vorangestellt, weil in ihm die Ungleichheit der Seiten gegeben ist. Dieses folgt, weil es die Ungleichheit der Winkel voraus- 10 setzt. Es scheinen nämlich die Seiten die geradlinigen Figuren zu umschließen, die Winkel aber umschlossen zu werden. Das Beweisverfahren ist bei jenem direkt, bei diesem indirekt (läuft es auf etwas Unmögliches hinaus).

Der Meister folgert nun die Unmöglichkeit auf Grund einer Unterscheidung. Sind nämlich die Winkel ungleich, sagt er, so behaupte ich, daß auch die gegenüberliegenden Seiten ungleich sind, und daß die größere dem gegebenen größeren Winkel gegenüberliegt. Denn ist die dem größeren Winkel gegenüberliegende Seite nicht größer, so ist sie entweder gleich oder kleiner. Aber wenn sie gleich ist, so 20 sind nach dem 5. Satz auch die Winkel, denen sie gegenüberliegen, gleich; ist sie hingegen kleiner, dann ist nach dem vorausgehenden Satz auch der Winkel, dem sie gegenüberliegt, kleiner. Denn es ist bewiesen worden, daß dem größeren Winkel die größere Seite, und dem kleineren die kleinere gegenüberliegt. Die Winkel verhalten sich aber umgekehrt. Also ist die Seite größer als die andere. Es ist aber möglich, auch ohne diese Unterscheidung, den vorliegenden Satz zu beweisen, wenn man vorher folgenden Hilfssatz beweist:

Wenn in einem Dreieck ein Winkel halbiert wird, und die Winkelhalbierende, zur Basis gezogen, diese in ungleiche Teile teilt, dann 30 sind die den Winkel einschließenden Seiten ungleich; und zwar ist diejenige größer, die mit dem größeren Abschnitt der Basis sich schneidet, während diejenige, die mit dem kleineren sich schneidet, kleiner ist (Fig. 67).

Es sei ABC das Dreieck, der Winkel bei A werde halbiert und AD schneide BC in ungleiche Teile, und CD sei größer als BD. Dann behaupte ich, ist AC größer als AB. Man verlängere AD (bis E) und DE sei gleich AD. Und da $DC > DB$, sei $BD = DF$, und man ziehe 33

die Verbindungslinie EF und verlängere sie bis G. Da nun $AD = DE$ und $BD = DF$, so sind zwei Gerade zweien gleich und sie schließen gleiche Scheitelwinkel ein. Also ist Basis $BA =$ Basis EF und alles ist allem gleich, so daß Winkel $DEF =$ Winkel DAB . Dieser aber ist gleich dem Winkel DAG , so daß nach dem 6. Satz auch die Seite $AG = EG$. AC ist also größer als EF . EF ist aber gleich AB . Es ist also AC größer als AB , was zu zeigen war.

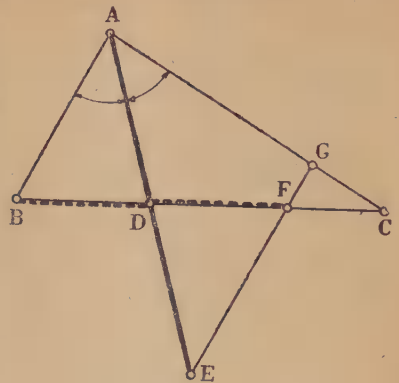


Fig. 67

Nachdem wir diesen Satz vorweggenommen, beweisen wir, daß dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt. Es sei ABC das Dreieck, das den Winkel bei B größer hat als den Winkel bei C . Dann behaupte ich, ist $AC > AB$. Man halbiere BC im Punkte D , ziehe die Verbindungslinie AD , ziehe $DE = AD$ und ziehe die Verbindungslinie BE . Da nun $BD = DC$ und $AD = DE$, so sind zwei Gerade zweien gleich und schließen gleiche Scheitelwinkel ein. Dann ist auch Basis $BE = AC$ und alles ist allem gleich, so daß auch Winkel $DBE =$ Winkel bei C , aber kleiner als Winkel ABD *). Nun halbiere man den Winkel ABE durch die Gerade BF . Dann ist EF größer als FA . Da nun im Dreieck ABE der Winkel bei B durch BF halbiert wurde und $EF > AF$, so ist nach dem eben geführten Beweis $BE > BA$. BE ist aber, wie bewiesen wurde, gleich AC . Also ist $CA > AB$. Damit ist die Thesis bewiesen.

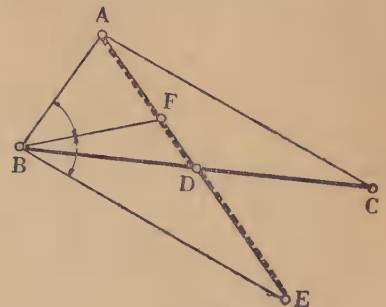


Fig. 68

*) Die richtige Beweisführung ersehen wir aus BAROCIUS. Darnach ist 321, 1 der Punkt nach $\pi\rho\acute{o}s\ \tau\tilde{\omega}\ \gamma$ durch ein Komma zu ersetzen, da auch zu $\epsilon\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omega\nu$ noch $\eta\ \epsilon\pi\acute{o}\ \delta\beta\gamma\ \delta\beta\epsilon\ \gamma\alpha\nu\iota\alpha$ Subjekt ist. Die Einschaltung FRIEDLEINS $\eta\ \pi\rho\acute{o}s\ \tau\tilde{\omega}\ \gamma$ fällt damit weg, ebenso wird aber auch der ganze Satz in Z. 2 bis $\tau\epsilon\tau\mu\eta\sigma\theta\omega$ überflüssig.

Es ist aber klar, daß der Verfasser der „*Elemente*“, um die Kompliziertheit des Beweises zu vermeiden, von diesem Verfahren Abstand nahm und sich des Beweises, der auf Grund der Unterscheidung auf Unmögliches hinausführte, bediente, da er die Umkehrung des Leitsatzes ohne irgendwelche Zwischenschaltung durchführen wollte, weil der 8. Satz, die Umkehrung des 4., reichliche Verwirrung schuf, indem er die Tatsache der Umkehrung nicht so leicht erkennen ließ. Denn die Umkehrungen auf indirektem Wege zu beweisen und dabei den Zusammenhang zu wahren, verdient den Vorzug vor der Methode, den Zusammenhang mit dem vorausgehenden Beweis zu unterbrechen. Deshalb also beweist er fast alle Umkehrungen auf indirektem Wege. 10

20. Proposition, 13. Theorem: *In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig <zusammen> genommen, größer als die dritte²⁸²).*

Über diesen Lehrsatz pflegen sich die Epikureer lustig zu machen und zu sagen, er sei auch einem Esel klar und bedürfe keines Beweises. Es sei aber in gleicher Weise Sache des Unverständigen, Selbstverständlichkeiten eines Beweises zu würdigen und ungeklärten Behauptungen ohne weiteres Glauben zu schenken. Denn wer beides zusammen fertig bringt, kennt offenbar den Unterschied nicht zwischen 20 dem, was bewiesen und nicht bewiesen werden kann. Daß aber auch einem Esel der vorliegende Lehrsatz klar ist, beweisen sie durch die Tatsache, daß der Esel, wenn ein Heubündel an einem Ende der Seiten niedergelegt wird, in seinem Verlangen nach Futter nur die eine Seite und nicht beide angeht.

Darauf ist zu erwidern, daß der Lehrsatz für den Augenschein klar ist, aber nicht für das wissenschaftliche Denken. Denn so geht es mit vielen Dingen. Das Feuer z. B. erwärmt: Das ist der Sinneswahrnehmung klar, aber auf welche Weise es erwärmt, das zu erfassen ist Sache der Wissenschaft, ob durch eine immaterielle Kraft 30 oder durch körperliche Teile, sei es nun durch kugel- oder pyramidenförmige Teilchen. Ferner, daß wir uns bewegen, ist den Sinnen klar; wie wir uns aber bewegen, das zu erklären ist für den Verstand schwierig, ob im ungeteilten Kontinuum oder von Abstand zu Abstand, und wie wir die unendlich vielen Räume durchmessen*). Denn jede 35

*) Es handelt sich augenscheinlich um die bekannte Problematisierung des Bewegungsbegriffes durch den Eleaten ZENON, gegen den ARISTOTELES Stellung nimmt. Vgl. *Phys. Z.* 9. 239^b 9. 14. 30.

Raumgröße ist ins Unendliche teilbar. Es mag also auch beim Dreieck der Sinneswahrnehmung klar sein, daß zwei Seiten größer sind als die eine übrige, aber wie dies Ergebnis zustande kommt, das zu erklären ist Sache der Wissenschaft.

Doch diese Erwiderung an die Adresse der Epikureer mag genügen. Wir müssen nun aber auch die anderen Beweise für den vorliegenden Lehrsatz in Kürze anführen, wie sie HERON und PORPHYRIOS niedergeschrieben haben. Sie haben die Gerade nicht verlängert, wie das
 10 der Verfasser der „*Elemente*“ getan. Es sei ABC das Dreieck, und es ist also zu zeigen, daß $AB + AC$ größer ist als BC . Man halbiere den Winkel bei A . Da nun Winkel AEC Außenwinkel des Dreiecks ABE ist, so ist er größer als Winkel BAE ; aber Winkel $BAE =$ Winkel EAC . Winkel AEC ist also größer als Winkel EAC , so daß auch die Seite AC größer ist als CE . Also sind $AB + AC$ größer als die ganze Linie BC . Ähnlich
 20 verfahren wir nun auch bei den anderen Seiten.

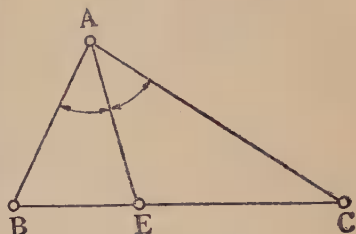


Fig. 69

Wiederum sei ABC das Dreieck. Wenn nun dieses gleichseitig ist, dann sind auf jeden Fall zwei <Seiten> größer als die dritte. Denn von drei gleichen Größen sind zwei beliebige das Doppelte der einen Größe. Ist es aber gleichschenkelig, dann ist seine Basis entweder kleiner oder größer als jede der beiden. Ist die Basis kleiner, dann sind wiederum die zwei größer als die dritte; ist sie
 30 aber größer, so sei BC größer und man trage auf ihr ab BE , die gleich sei mit jeder von ihnen und ziehe die Verbindungslinie AE . Da nun Winkel AEC Außenwinkel des Dreiecks AEB ist, so ist er größer als $\sphericalangle BAE$. Aus demselben Grunde ist auch Winkel AEB größer als Winkel CAE . Die Winkel beiderseits von AE sind also größer als der ganze Winkel bei A , von denen Winkel $BEA =$ Winkel BAE , da auch $AB = AE$. Der übrige Winkel AEC ist also größer als CAE , so daß auch AC größer ist als CE . AB ist aber gleich BE .
 39 Also sind $AB + AC$ größer als BC . — Wenn aber ABC ein ungleich-

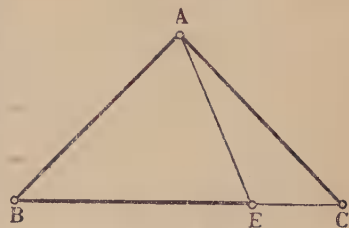


Fig. 70

seitiges Dreieck ist, so sei die größte Seite BC , die mittlere AC , die kleinste AB . Nun ist die größte, mit jeder der anderen genommen, jedenfalls größer als die dritte; sie ist ja für sich schon größer als jede andere. Wenn wir aber zu beweisen suchen, daß $AB + AC$

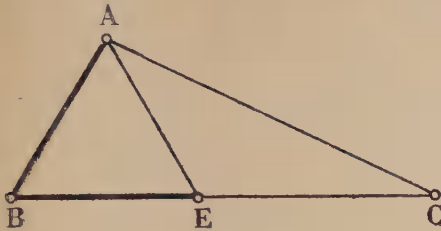


Fig. 71

größer sind als die größte BC , so verfahren wir wie beim gleichschenkeligen Dreieck: Wir tragen auf der größten Seite ein der kleinsten gleiches Stück <bis E > ab, ziehen dazu 10 eine Linie von A und gebrauchen die Außenwinkel der Dreiecke.

Wiederum sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ich behaupte nun, daß $AB + AC$ größer sind als BC . Wenn nicht, so sind sie entweder gleich oder kleiner*). Sie seien also gleich und man trage $BE = AB$ ab. Dann ist die übrige Strecke $EC = AC$. Da nun $AB = BE$, so liegen sie gleichen Winkeln gegenüber. In gleicher Weise liegen auch AC und CE , da sie gleich sind, gleichen Winkeln gegenüber. Die Winkel bei E sind also gleich denen bei A , was unmöglich ist. Wieder- 20

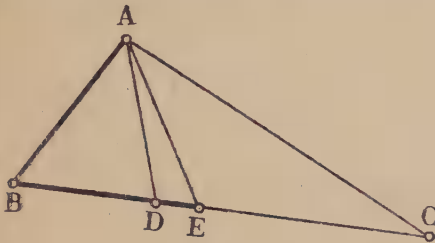


Fig. 72

um seien $AB + AC$ <Fig. 72> kleiner als BC und man trage $BD = AB$ und $CE = AC$ ab. Da nun $AB = BD$, so ist Winkel $BDA = \sphericalangle BAD$, und da $AC = CE$, so ist Winkel $CEA = \text{Winkel } EAC$. Da ferner Winkel BDA Außenwinkel des Dreiecks ADC ist, so ist er größer als Winkel EAC , da er 30

auch größer ist als Winkel DAC . Aus demselben Grund, da Winkel CEA Außenwinkel des Dreiecks ABE ist, ist er größer als BAD , da er auch größer ist als $\sphericalangle BAE$. Die Winkel BDA und CEA sind also größer als die Winkel BAD und EAC . Sie waren ihnen aber auch gleich, was unmöglich. Die Seiten $AB + AC$ sind also BC weder gleich noch kleiner, sondern größer als diese. In ähnlicher Weise verfährt man mit den anderen Seiten.

37

*) Nach *ἐλάσσονος* 325, 3 ist natürlich das Komma durch einen Punkt zu ersetzen.

21. Proposition, 14. Theorem: *Wenn auf einer Dreiecksseite zwei Gerade von den Endpunkten aus nach innen errichtet werden, so sind die errichteten Geraden kleiner als die beiden anderen Dreiecksseiten, schließen aber den größeren Winkel ein²⁸³).*

Der Inhalt des Satzes ist klar und der Beweis seitens des Verfassers der „*Elemente*“ einleuchtend. Der Lehrsatz ist eine Folgerung aus den ersten Prinzipien. Denn er ist bedingt durch zwei Lehrsätze, durch den eben bewiesenen und durch den 16. Satz. Um nämlich zu beweisen, daß die nach innen verbundenen Linien kleiner sind als
 10 die äußeren, benötigt er den Lehrsatz, daß in jedem Dreieck zwei Seiten größer sind als die dritte; um aber zu zeigen, daß der von ihnen eingeschlossene Winkel größer ist als der von den äußeren Seiten eingeschlossene, kommt ihm der Satz zustatten, daß in jedem Dreieck der Außenwinkel größer ist als der gegenüberliegende Innenwinkel. Du magst aber eine Probe geometrischer Genauigkeit und zugleich einen Hinweis auf paradox klingende Sätze in der Mathematik erhalten, wenn wir es als möglich erweisen, daß innerhalb eines Dreiecks auf einer Seite, nicht auf der ganzen, sondern auf einem Teile derselben, zwei Gerade sich verbinden, die größer sind als die Außenseiten
 20 und hinwiederum einen kleineren Winkel einschließen als der ist, der von den Außenseiten eingeschlossen wird. Denn wird dies bewiesen, so ist damit zugleich klar, daß der Verfasser der „*Elemente*“ unbedingt hinzufügen mußte, die beiden nach innen zusammenlaufenden Geraden müßten von den Endpunkten der gemeinsamen Basis ausgehen und müßten errichtet werden über einer Geraden, und zwar der ganzen und nicht über einem Teil der ganzen. Zugleich aber zeigt sich, wie gesagt, ein unwahrscheinliches Phänomen im Bereich der Geometrie. Denn wie sollte es nicht paradox klingen, wenn die auf
 30 der ganzen Seite errichteten Geraden kleiner sind als die Außenseiten, hingegen die auf einem Teil errichteten größer? Es sei also ABC das rechtwinkelige Dreieck mit dem rechten Winkel bei B ; man nehme den beliebigen Punkt D auf BC und ziehe die Verbindungslinie AD . Dann ist also AD größer als AB . Nun trage man auf AD die AB gleiche
 39 Strecke DE ab, halbiere EA im Punkte F und ziehe die Verbindungs-

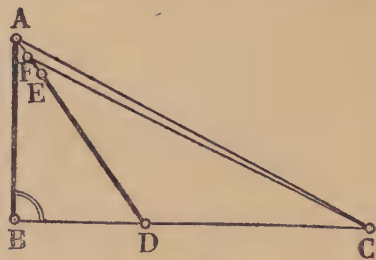


Fig. 73

linie CF. Da nun ACF ein Dreieck ist, so sind $AF + FC$ größer als AC. Aber $AF = FE$. Es sind also $FE + FC$ größer als AC. Es ist aber $DE = AB$. Also sind $FC + FD$ größer als $AB + AC$ und sie liegen nach innen. — Wiederum sei ABC das gleichschenkelige Dreieck, dessen Basis BC größer sei als jede der gleichen Seiten. Man trage auf BC die Strecke $BD = AB$ ab und ziehe die Verbindungs-

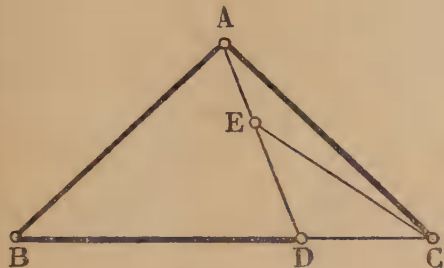


Fig. 74

linie AD; hierauf nehme man auf AD einen beliebigen Punkt E und ziehe die Verbindungs-
linie EC. Da nun $AB = BD$,¹⁰ so ist auch Winkel $BAD =$ Winkel BDA ; und da Winkel BDA Außenwinkel des Dreiecks EDC ist, so ist er größer als der gegenüberliegende Innenwinkel DEC, so daß auch Winkel BAD größer ist als

Winkel DEC. Also ist Winkel BAC noch viel größer als Winkel DEC und dabei wird $\angle BAC$ von den äußeren, $\angle DEC$ aber von den inneren Geraden umschlossen. Es wurden also innerhalb des Drei-²⁰ ecks DE und EC gezogen, die einen kleineren Winkel einschließen als die Außenseiten und somit ist der vorliegende Satz bewiesen, ohne daß wir die Parallelen der Erklärer herangezogen hätten. Es ist also notwendig, daß die errichteten Geraden von den End-

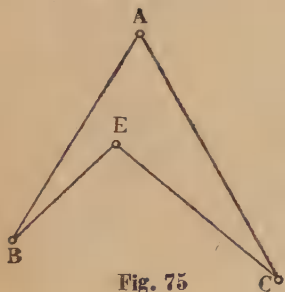


Fig. 75

punkten der Basis ausgehen. Denn werden sie über einem Teil von ihr errichtet, so erweisen sie sich zuweilen als größer als die Außenseiten und schließen einen kleineren Winkel ein. Werden sie aber so von den Endpunkten aus errichtet, dann kommt³⁰ auch die Art der zugespitzten Dreiecke zum Vorschein, auch das eines von den Paradoxen in der Geometrie, nämlich ein „vierseitiges Dreieck“²⁸⁴) zu finden, wie z. B. $BAC < E$.

Es wird nämlich umschlossen von vier Seiten, von BA, AC, CE, EB, hat aber nur drei Winkel, den einen bei B, den andern bei A, den dritten bei C. Die vorliegende Figur ist also ein vierseitiges Dreieck.³⁷

22. Proposition, 8. Problem: *Aus drei Strecken, die drei gegebenen Strecken gleich sind, ist ein Dreieck zu konstruieren. Es müssen aber zwei, wie immer man sie nehmen mag, größer sein als die dritte²⁸⁵).*

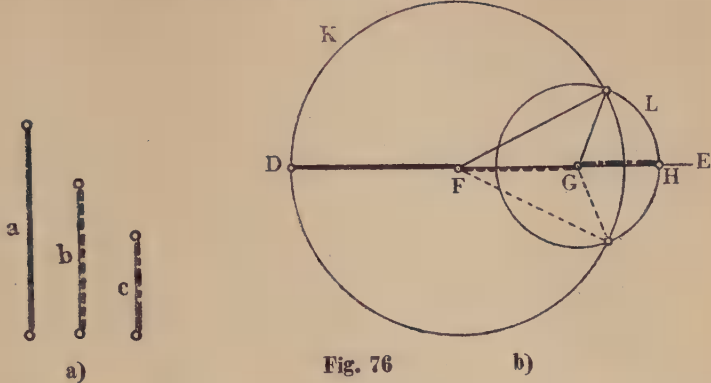
Wir sind wieder zu den Problemen übergegangen. EUKLID stellt die Aufgabe: Es sind drei Strecken gegeben, von denen zwei größer sind als die dritte, und es ist aus Seiten, die den gegebenen Geraden gleich sind, ein Dreieck zu konstruieren. Er sah fürs erste ein, daß es unmöglich ist, aus diesen Geraden selbst, die bereits die angegebene Lage haben, ein Dreieck zu konstruieren, aber daß es aus ihnen gleichen möglich ist; ferner daß von drei Geraden, die das Dreieck bilden sollen, zwei, wie immer genommen, größer sein müssen als die dritte. Denn in jedem Dreieck sind, wie bewiesen wurde, zwei Seiten größer als die dritte. Aus diesem Grunde fügte er bei, daß von den ursprünglichen Geraden in jedem Falle zwei unbedingt größer sein müßten als die dritte, wenn anders ein Dreieck aus den ihnen gleichen Geraden entstehen soll. Außerdem entzog er allen Einwänden, die gegen die Konstruktion vorgebracht wurden, jegliches Fundament, da sie allein durch diesen Zusatz zunichte gemacht werden können.

Das Problem zählt aber zu den bestimmten, nicht zu den unbestimmten. Von den Problemen sind nämlich, wie von den Lehrsätzen, die einen unbestimmt, die anderen bestimmt. Wenn wir nämlich so ohne weiteres sagen, aus drei Strecken, die drei gegebenen Strecken gleich sind, ist ein Dreieck zu konstruieren, dann ist das ein unbestimmtes und undurchführbares Problem; fügen wir aber hinzu, wovon zwei, wie immer genommen, größer sind als die dritte, dann wird es bestimmt und durchführbar*). Auch das mag man zur Kenntnis nehmen: Wie man die Lehrsätze einteilt nach wahr und falsch, so die Probleme darnach, ob die Aufgabe durchführbar ist oder nicht.

Daß aber die Einwände gegen die Konstruktion von hier aus entkräftet werden, erkennen wir, wenn wir unser Augenmerk nur ein wenig darauf richten. Wir werden dabei den Worten des Meisters folgen. Es seien drei Strecken a , b und c , von denen zwei, genommen wie immer, größer sind als die dritte, und man soll nun die gestellte

*) 330, 13. 14. Ein vernünftiger Sinn läßt sich nur im Anschluß an ZAMBERTO gewinnen. Z. 16 nehme ich das $\kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu$ aus der Übersetzung des BAROCIUS.

Aufgabe erledigen. Es sei eine Gerade DE gegeben, nach der einen Seite begrenzt, etwa durch den Punkt D, nach der anderen unbegrenzt, und es sei $DF = a$, $FG = b$ und $GH = c$. Man beschreibe nun mit dem Mittelpunkt F und dem Radius FD den Kreis K und wieder



mit dem Mittelpunkt G und dem Radius GH den Kreis L, und die Kreise sollen sich miteinander schneiden. Denn dies nahm der Verfasser der „Elemente“ an. Warum nur, mag einer sagen? Denn vielleicht berühren sie einander nur oder nicht einmal das? Denn von den drei Möglichkeiten muß eine auf sie zutreffen: Entweder schneiden sie sich, oder sie berühren sich, oder sie haben Abstand 10 voneinander. Ich behaupte nun, daß sie sich unbedingt schneiden müssen. Denn sie sollen vorerst einander nur berühren. Da nun

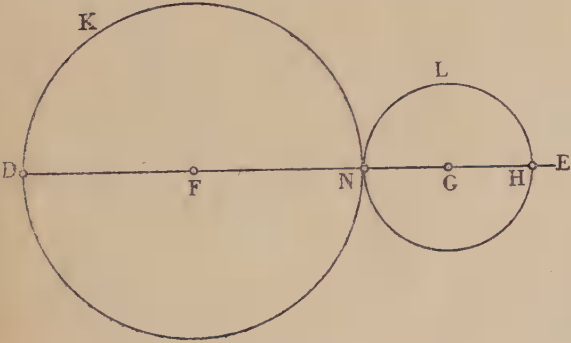


Fig. 77

also F Mittelpunkt des Kreises K ist, so ist $DF = FN \langle = a \rangle$, und da G Mittelpunkt des Kreises L ist, so ist $GH = GN \langle = c \rangle$. Die zwei $\langle$ Strecken $\rangle$ $DF + GH$ sind also gleich der 20 einen FG. Sie waren aber größer als sie, wie auch $a + c$ größer ist als b; denn sie sind jenen gleich. — Sodann

seien, wenn möglich, die Kreise voneinander entfernt wie K und L. Da nun F Mittelpunkt von K, so ist $DF = FN \langle = a \rangle$, und da G 27

Mittelpunkt von L, so ist $GH = GM < c$. Dann ist also die ganze Strecke FG größer als $DF + HG$. Denn FG ist um MN größer als $DF + GH$. Gegeben aber war, daß $DF + GH$ größer ist als FG, wie $a + c$ größer ist als b . Denn $DF = a$, $FG = b$, $HG = c$. Die Kreise K und L müssen also unbedingt einander schneiden, so daß die Annahme des Verfassers, sie schneiden sich, richtig war, weil er auch von der Voraussetzung ausging, daß von den 3 Strecken zwei, ganz beliebig genommen, größer

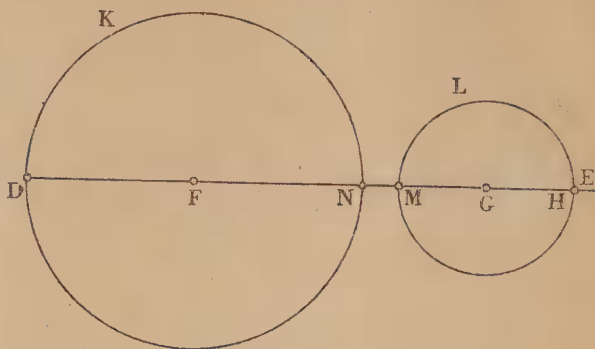


Fig. 78

sind als die dritte, und weder ihr gleich, noch kleiner als sie. Es ist aber notwendig, daß sie gleich sind, wenn sie einander berühren, und daß zwei zusammen kleiner sind als die dritte, wenn sie voneinander abstehen.

23. Proposition, 9. Problem: *An einer gegebenen Geraden ist in einem auf ihr gelegenen Punkte ein einem gegebenen geradlinigen Winkel gleicher geradliniger Winkel zu konstruieren <abzutragen>²⁸⁶.*

Auch hier liegt ein Problem vor, das nach der Versicherung EUDEMS eigentlich von OINOPIDES gefunden wurde. Es fordert, an einer gegebenen Geraden in einem auf ihr gegebenen Punkte einen Winkel abzutragen, der gleich ist einem anderen gegebenen geradlinigen Winkel. Daß der gegebene Winkel geradlinig <ist>, diesen Zusatz mußte er unbedingt beifügen, da es ja unmöglich ist, einen, jedem beliebigen Winkel gleichen Winkel an einer Geraden abzutragen. Es ist ja schon gezeigt worden, daß von den Kreislinienwinkeln nur zwei den geradlinigen gleich sind, der Mönchenwinkel, von dem gezeigt wurde, daß er jedem geradlinigen gleich sein kann, und der beilförmige Winkel²⁸⁷), der zwei Drittel eines Rechten ausmacht*).

*) 333, 14—16: Die textliche Überlieferung ist hier wiederum sehr verworren. Ich folge BAROCIUS, dessen Übersetzung uns auch hier wie so oft einen einwand-

Es entsteht aber diese Mondfigur, die man auch beilförmig nennt, wenn zwei Kreise durch die Mittelpunkte hindurch sich wechselseitig schneiden. Die Forderung, daß der Winkel an einer Geraden entstehen solle, bestimmt den Winkel der Art nach als einen geradlinigen oder gemischten und läßt ihn nicht unbestimmt. Da aber kein gemischter Winkel einem geradlinigen gleich sein kann, so ist klar, daß auch er selbst unbedingt ein geradliniger ist.

Der Verfasser der „Elemente“ zog nun einfach nur das vorangehende Problem heran, und indem er aus drei Strecken, die drei gegebenen Strecken gleich sind, ein Dreieck konstruierte, führte er 10 die gestellte Aufgabe durch. Für den Unterricht geeigneter ist aber die Konstruktion des Dreiecks, die man auf folgende Weise erhält. Es sei AB die Strecke, A der auf ihr gegebene Punkt und CDE der geradlinige Winkel. Nun ist also die gestellte Aufgabe durchzuführen. Man ziehe die Verbindungslinie CE und verlängere AB auf 15

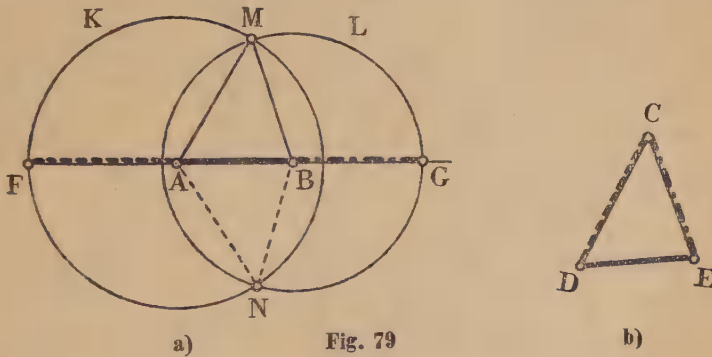


Fig. 79

freien, vernünftigen Sinn bietet. Im einzelnen bemerke ich noch: Den Beweis, von dem hier die Rede ist (wir haben mit GRYNÆUS jedenfalls das Perfekt *δεδειγμένη*, nicht das Präsens zu lesen) gab PROKLUS S. 190. Der betreffende Winkel hieß dort *ἡ μηροειδὴς γωνία*, und so ist anzunehmen, daß PROKLUS ihm auch hier diesen Namen gegeben. Demnach müssen die Begriffe *μηροειδὴς* und *τοῦ πελέκειως* Z. 15 u. 14 miteinander vertauscht werden. In den *Addenda* 437 bemerkt FRIEDLEIN selbst, daß Z. 15 alle Textzeugen nicht *μηροειδοῦς*, sondern *πελεκοειδοῦς* haben, nur B₃ lese *μηροειδοῦς*. FRIEDLEIN irrt, wenn er im Apparat meint, PROKLUS habe hier den Namen *μηροειδὴς* einer bestimmten Art dieser Winkel vorbehalten. Wenn dieser Z. 16 schreibt: *γίνεται τὸ μηροειδὲς τοῦτο*, so deutet er damit klar genug an, daß er eine *γωνία μηροειδὴς* in zweifachem Sinne unterscheidet und darunter die *μηροειδὴς* schlechthin versteht, wie er sie S. 190 beschrieben, und dann die *μηροειδὴς πελεκοειδὴς*, deren Genesis er hier darlegt. BAROCIUS hat denn auch hier den Zusatz: *fit autem huiusmodi lunularis figura, quae Pelecoides vocatur* usw.

beiden Seiten bis F und G, und es sei $CD = FA$, $DE = AB$ und $CE = BG$; hierauf beschreibe man mit dem Mittelpunkt A und dem Radius FA den Kreis K und ferner beschreibe man, wie im vorausgehenden Satz, mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BG den Kreis L. Dann schneiden sich also die Kreise, wie schon gezeigt wurde. Sie sollen sich nun in den Punkten M und N schneiden, und man ziehe von M und ebenso von N die Verbindungslinien zu den Kreiszentren $\langle A \text{ bzw. } B \rangle$. Da nun $FA = AM = AN$, FA aber auch $= CD$, so sind auch AM und AN gleich CD. Da hinwiederum $GB =$
 10 $BM = NB$, GB aber auch $= CE$, so sind also BM und BN gleich CE. Es ist aber auch $AB = DE$. Die beiden Seiten AB und AM sind also gleich DE bzw. DC, und die Basis $BM = CE$. Also ist der Winkel $MAB = \sphericalangle$ bei D. Und ferner sind die beiden Seiten NA und AB gleich den beiden Seiten CD bzw. DE, und die Basis $NB =$ Basis CE; also ist auch Winkel $NAB =$ Winkel CDE. So wurde die gestellte Aufgabe zweimal durchgeführt. Denn nicht bloß einen, sondern zwei dem gegebenen gleiche Winkel trugen wir zu beiden Seiten der Geraden AB an, damit auch im folgenden kein Zweifel und kein
 20 Widerspruch erhoben werde, ganz gleich auf welcher Seite wir die Konstruktion durchführen wollen. Dies wollten wir also zur Konstruktion des Verfassers noch hinzufügen.

Den Beweis des APOLLONIOS aber können wir nicht anerkennen, da er der Ergebnisse des dritten Buches²⁸⁸⁾ bedarf. Er nimmt nämlich einen beliebigen Winkel CDE und die Gerade AB und beschreibt mit dem Mittelpunkt D und dem Radius CD die Kreislinie CE, und ebenso mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AB die Kreislinie FB;



Fig. 80

hierauf trägt er $FB = CE$ ab, zieht die Verbindungslinie AF und erklärt die Winkel bei A und bei D auf Grund der Gleichheit der Kreisbögen als gleich. Er muß aber vorwegnehmen, daß $AB = CD$,
 30 damit auch die Kreise gleich sind. Eine solche Konstruktion, die auf das erst Folgende vorgreift, erachten wir für ungeeignet für den Elementarunterricht und geben der Konstruktion des Meisters den
 33 Vorzug, da sie sich aus den Prinzipien ergibt.

24. Proposition, 15. Theorem: *Wenn zwei Dreiecke je zwei Seiten, je eine der anderen gleich haben, von den von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkeln aber der eine größer ist als der andere, dann ist auch die eine Basis größer als die andere²⁸⁹⁾.*

Der Meister wendet sich wieder den Lehrsätzen zu und lehrt ähnliche Beziehungen in Hinsicht auf Ungleichheit bei den Dreiecken, wie bei der Gleichheit. Er nimmt nämlich zwei Dreiecke an mit je zwei gleichen Seiten, je eine gleich der anderen, und setzt die Scheitelwinkel in beiden bald gleich, bald ungleich an; er hat schon bewiesen, daß aus der Gleichheit des Winkels die Gleichheit der Basen folgt 10 und aus der Gleichheit der Basen die Gleichheit der Scheitelwinkel sich ergibt; und nun führt er den Beweis*) hinsichtlich der Ungleichheit. Der hier vorgetragene Lehrsatz steht im Gegensatz zum vierten; denn letzterer setzte gleiche Scheitelwinkel der Dreiecke voraus, dieser aber ungleiche, und jener bewies die Gleichheit ihrer Basen, dieser aber ihre Ungleichheit und ebenso die der Winkel. Er ist aber Lehrsatz für das folgende Theorem. Denn dieses überträgt das Verhältnis der Ungleichheit von den Basen auf die Winkel, denen die Basen gegenüberliegen; das vorliegende hingegen überträgt es von den Winkeln auf die gegenüberliegenden Basen. So**) bildet eben das 20 folgende die Umkehrung des vorliegenden in besagter Weise, steht aber im Gegensatz zum 8. Theorem. Denn letzteres beweist vermittle der Gleichheit der Basen die Gleichheit der Scheitelwinkel; ersteres aber weist vermittle der Ungleichheit der Basen die Ungleichheit der Winkel nach. Gemeinsam ist aber den vierten, von denen zwei, das vierte und achte, sich auf das Gleiche beziehen, zwei, das vorliegende und das folgende, auf das Ungleiche, zwei von den Winkeln ausgehen, das vierte und das jetzt zur Untersuchung vorliegende, und zwei von den Basen, das achte und das ihm folgende: Gemeinsam also ist diesen vierten, dem vierten und achten sowie dem 30 24. und 25., daß sie <die Dreiecke> je zwei Seiten gleich haben, je eine der anderen. Denn sind diese ungleich, dann ist alles Forschen umsonst und nicht frei von Irrtum. Soviel sei im allgemeinen zur vorliegenden Materie gesagt.

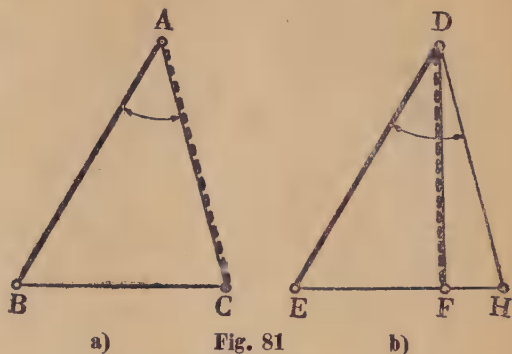
34

*) Es ist wohl anzunehmen, daß *δεικνύων* 336, 21 sich zu weit hinauf verirrt hat und seine Stelle 337, 1 hat: *καὶ δεικνύει τῇ ἀνισότητι τὴν ἀνισότητα*. Jedenfalls brauchen wir hier ein Präsens, während es dort fehl am Platze ist.

**) Statt des sinnlosen *ὥσπερ αὐτὸ* (337, 11) ist wohl zu lesen: *ὥστε αὐτὸ τὸ ἐπεξῆς*. BAROCIUS übersetzt mit *quamobrem ipsum* konsequenter.

Nun wollen wir aber auch die Konstruktion dieses Lehrsatzes seitens des Verfassers überprüfen und das ihr Fehlende ergänzen. Er nimmt also zwei Dreiecke ABC und DEF , die die Seiten AB und AC und DE und DF , je eine der anderen gleich haben, während der Winkel bei A größer ist als Winkel bei D , und will beweisen, daß BC größer ist als EF . Er legt nun an ED in dem auf

10 ihr gegebenen Punkt D den dem Winkel bei A gleichen Winkel EDH an: Denn Winkel bei A ist größer als Winkel bei D , und trägt die AC gleiche Linie DH ab. Wird nun

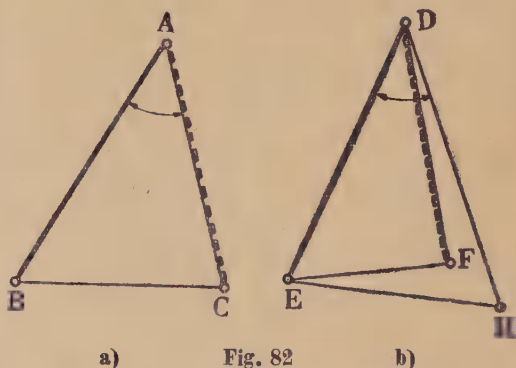


die Gerade EF verlängert, so kommt der Punkt H entweder über oder auf oder unter ihr zu liegen. Der Verfasser der „*Elemente*“ nahm die Lage darüber an. Er liege aber auf der Geraden $\langle EF \rangle$

20 selbst (Fig. 81b). Wir wollen wiederum auf demselben Wege vorgehen. Es sind nämlich die beiden AB und AC gleich den beiden DE und DH und schließen gleiche Winkel ein. Es ist also auch die Basis $BC = EH$. Aber

EH ist größer als EF , so daß auch BC größer als EF . — Nehmen wir aber seine Lage unter EF an. Wir ziehen nun die Verbindungslinie EH und

30 werden sagen, daß, weil AB und AC gleich sind DE und DH und gleiche Winkelschließen, auch $BC = EH$. Da nun im Dreieck DEH nach innen



über DE die Geraden DF und FE errichtet wurden, so sind sie kleiner als die Außenseiten. DH ist aber gleich DF , weil auch gleich AC ; also ist HE größer als EF . HE ist aber gleich BC ; also ist BC

39 größer als EF . Für jede Lage ist also der Lehrsatz bewiesen.

Warum hat nun aber EUKLID, wie er beim vierten Satz auch noch den Beweis hinzufügte, daß die Dreiecksflächen gleich sind, nicht ebenso auch hier beigefügt, daß zu der Ungleichheit der Basen hinzu auch die (Grund)flächen ungleich sind? Auf dieses Bedenken sei erwidert, daß nicht dasselbe Verhältnis bei den gleichen Winkeln und Basen und bei den ungleichen obwaltet. Sind nämlich die Winkel und Basen gleich, so folgt daraus auch die Gleichheit der Dreiecke. Sind sie aber ungleich, so ergibt sich nicht notwendig die Ungleichheit der Grundflächen, sondern es können die Dreiecke gleich und ungleich sein und dasjenige, das den größeren Winkel und die größere 10 Basis hat, kann größer, aber auch kleiner sein. Deshalb also unterließ der Verfasser die Vergleichung der Dreiecke, zugleich aber auch aus dem Grunde, weil zu dieser Untersuchung die Behandlung der Parallelen²⁹⁰⁾ erforderlich ist. Sollen wir aber das, was erst weiterhin bewiesen werden soll, vorausnehmen und jetzt schon die Vergleichung der Grundflächen durchführen, so behaupten wir: Betragen die Winkel bei A und D zwei Rechte — meine Darlegung soll sich aber anlehnen an die Zeichnung in diesem Element —, dann erweisen sich die Dreiecke als gleich; sind sie größer als 2 Rechte, dann ist das Dreieck mit dem größeren Winkel kleiner; sind sie aber kleiner, 20 dann ist dieses größer. Es sei die Zeichnung wie im Element gegeben; man verlängere ED und FD, und die Winkel BAC und EDF

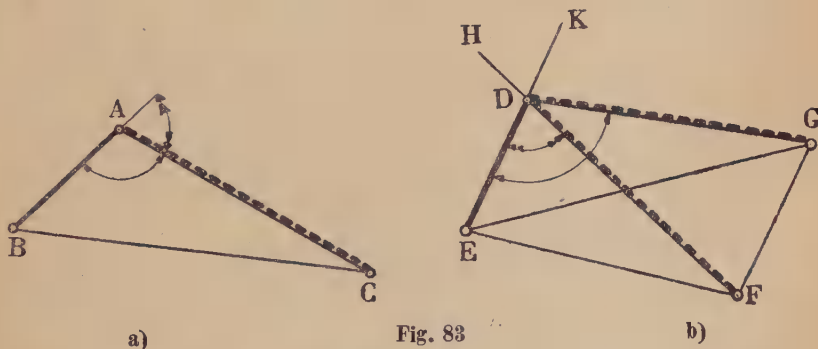


Fig. 83

sollen 2 Rechte betragen. Da nun Winkel $BAC = \text{Winkel } EDG$, so sind demnach die Winkel EDG und EDF 2 Rechte. Es sind aber auch die Winkel $EDG + KDG = 2 \text{ Rechte}$. Man nehme nun den gemeinsamen Winkel EDG weg, dann ist folglich Winkel $EDF = \text{Winkel } GDK$. Aber Winkel $EDF = \text{Winkel } HDK$ als Scheitel- 27

den Winkel DGL gleich und ziehe die Verbindungslinien EL (und GL)*). Dann sind GL und DE parallel. Folglich sind die Dreiecke GDE und LDE gleich. Aber Dreieck LDE ist kleiner als $\triangle FDE$. Also ist Dreieck GDE größer als $\triangle FDE$. $\triangle GDE$ ist aber gleich $\triangle ABC$. Also ist Dreieck ABC, das den größeren Winkel hat, kleiner als $\triangle FDE$. — Fürs dritte seien die ungleichen Winkel kleiner als zwei Rechte, und man mache dieselbe Konstruktion. Da nun $\sphericalangle EDG$ und $\sphericalangle GDK$ gleich zwei Rechten, so ist nach Wegnahme des gemeinsamen Winkels EDG**) der ganze Winkel GDH

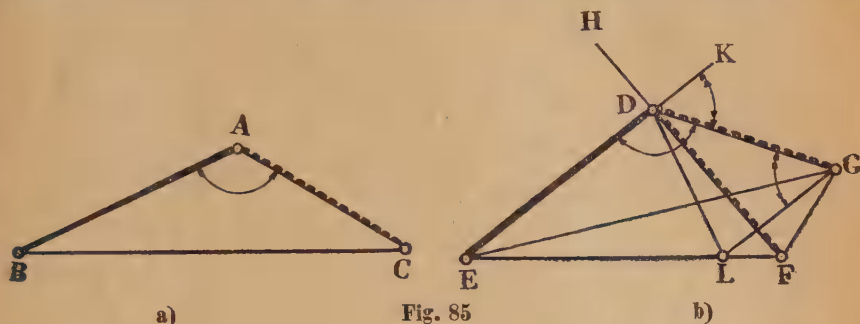


Fig. 85

kleiner als das Zweifache des Winkels GDK; er ist aber auch das 10
Zweifache des Winkels beim Punkte G. Der Winkel GDK ist also
größer als der Winkel bei G. Nun sei Winkel $DGL = \sphericalangle GDK$,
und GL laufe mit EF im Punkte L zusammen, und man ziehe die
Verbindungslinie DL. Dann ist also GL mit DE parallel. Folglich
sind die Dreiecke GDE und DLE einander gleich. Aber $\triangle GDE$ ist
größer als $\triangle FDE$, $\triangle GDE$ aber ist gleich $\triangle ABC$. Dreieck ABC
ist also größer als Dreieck DFE. Es ist also bewiesen, daß das
Dreieck ABC dem Dreieck DEF gleich ist und größer und kleiner,
je nachdem die Winkel bei A und D entweder 2 R gleich sind oder
größer oder kleiner als 2 R. Alle Annahmen sind möglich. Denn wie, 20
wenn Winkel bei A = $1\frac{1}{2}$ R***)) und Winkel bei D = $\frac{1}{2}$ R wäre?
Sind die zwei dann nicht 2 R gleich? Wenn ferner der Winkel 22

*) Ergänzung aus BAROCIUS.

**) Ich folge auch hier BAROCIUS und lasse die Einschaltung FRIEDLEINS aus. Wenn sie auch geometrisch diesmal richtig ist, ist sie doch nicht nötig. Nachdem PROKLUS den Beweis analog schon zweimal geführt hat, ist es begreiflich, wenn er ihn beim 3. Fall stark zusammenzieht und verkürzt.

***)) 344, I. 3. 4: Ist natürlich immer mit GRYNÆUS $\mu\acute{\alpha}\varsigma \kappa\alpha\iota \eta\mu\iota\sigma\epsilon\lambda\alpha\varsigma$ zu lesen.

bei $A = 1\frac{1}{2} R$ und Winkel bei D einen ganzen Rechten ausmachte, wären sie dann nicht größer als $2 R$, und wenn der Winkel bei $A = 1\frac{1}{2} R$ und der bei D ein Drittel eines Rechten ausmachte, wären sie dann nicht geringer als $2 R$? Und immer ist Winkel bei A größer als Winkel bei D. Alle diese Vergleiche*) gelangen uns nur durch Heranziehung der Parallelen. Notwendigerweise wurden sie also vom Verfasser der „*Elemente*“ übergangen.

25. Proposition, 16. Theorem: Wenn zwei Dreiecke je zwei Seiten, je eine der anderen gleich, hingegen eine Basis größer als die andere haben, so ist auch der eine der von den Geraden eingeschlossenen Winkel größer als der andere²⁹³).

Dieser Lehrsatz steht im Gegensatz zum achten und ist die Umkehrung des vorhergehenden. Der Verfasser trug nämlich die auf die Gleichheit und Ungleichheit der Winkel und Basen bezüglichen Lehrsätze paarweise vor, bei jedem Paare wechselnd zwischen Leitsätzen und Umkehrungen und bei den Leitsätzen der direkten Beweise, bei den Umkehrungen der Zurückführung auf etwas Unmögliches sich bedienend. So ging er auch bei jedem einzelnen Dreieck vor: Bald beweist er, daß der Gleichheit seiner Seiten die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel entspricht, bald der Ungleichheit deren Ungleichheit, und dann wieder zeigt er durch Umkehrung, daß aus der Gleichheit der Winkel die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten, und aus der Ungleichheit deren Ungleichheit sich ergibt. Doch um zu dem vorliegenden Lehrsatz zu kommen: Wie der Meister den Lehrsatz bewies, ist klar; wir überlassen es den Eifrigen, dies in den Büchern nachzulesen. Über die Beweise aber, die andere zu dem gleichen Satze bieten, wollen wir kurz berichten, an erster Stelle über den, den MENELAOS von Alexandrien fand und vorlegte.

- 30 Es seien ABC und DEF zwei Dreiecke; sie haben die zwei Seiten AB und AC gleich den beiden DE und DF, und BC sei größer als EF. Ich behaupte nun, Winkel bei A sei größer als Winkel bei D. Man trage auf BC eine EF gleiche Strecke BG ab und konstruiere beim
- 34 Punkte B den dem Winkel DEF gleichen Winkel GBH; ferner ziehe

*) 344, 6: Man vermißt ein Substantiv zu $\pi\acute{\alpha}\sigma\alpha\iota$. Man möchte an $\epsilon\pi\iota\theta\epsilon\sigma\epsilon\iota\varsigma$ 343, 14 denken, das aber zum Sinn nicht paßt. BAROCIUS übersetzt: *omnes hae itaque comparationes*. Ich folge ihm in meiner Übersetzung.

man die Linie $BH = DE$ und die Verbindungslinie GH , verlängere sie bis K und ziehe die Verbindungslinie AH . Da nun $GB = EF$ und $BH = ED$, so sind je zwei Seiten einander gleich und schließen gleiche Winkel ein. GH ist also gleich DF und Winkel BHG ist

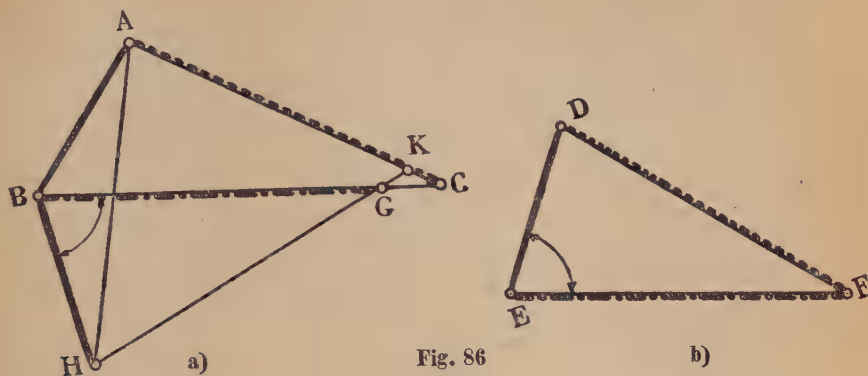


Fig. 86

gleich Winkel EDF . Und da $GH = DF$ und $DF = AC$, so ist auch $HG = AC$. HK ist aber größer als AC , so daß sie noch viel größer ist als AK . Folglich ist auch Winkel KAH größer als Winkel KHA . Und wiederum, da $BH = AB$: Denn sie ist gleich DE , so ist Winkel $BHA =$ Winkel BAH . Der ganze Winkel BAK ist also größer als der ganze Winkel BHK , der ganze Winkel BHK ist aber als gleich dem 10 Winkel bei D gezeigt worden. Also ist Winkel BAC größer als Winkel bei D . So lautet der Beweis des MENELAOS. Der Mechaniker HERON aber führt denselben Beweis folgendermaßen, ohne mit Unmöglichem zu operieren. Es seien die Dreiecke ABC und DEF und dieselben Voraussetzungen (Fig. 87). Und da BC größer als EF , so werde EF verlängert, und man ziehe $EG = BC$. Ebenso verlängere man DE und ziehe $DH = DF$. Dann wird also der mit dem Mittelpunkt D und dem Radius DF beschriebene Kreis auch durch den Punkt H kommen. Er werde beschrieben wie $FKH^*)$. Und da AC und AB größer als BC , diese aber gleich sind EH , wie BC gleich ist GE , so schneidet der mit dem Zentrum E und dem Radius EG beschriebene Kreis die Gerade EH (den Kreis FKH in K). Er schneide sie wie^{**) 22}

*) 347, 1: Es ist klar, daß der Kreis nur mit FKH zu bezeichnen ist und der Buchstabe E nicht dazu gehört.

**) 347, 4: Zu lesen ist auch hier wie oben 347, 1 nicht $\tau\epsilon\mu\nu\acute{\epsilon}\tau\omega \delta\acute{\eta}\kappa$, sondern mit GRYNÆUS und BAROCIUS: $\tau\epsilon\mu\nu\acute{\epsilon}\tau\omega \acute{\omicron}\varsigma \eta\kappa$.

GK und man ziehe die Verbindungslinien KD und KE zu den Kreismittelpunkten von dem gemeinsamen Schnittpunkt. Da nun D Mittelpunkt des Kreises HKF ist, so ist $DK = HD = DF = AC$. Da ferner E Mittelpunkt des Kreises KG, so ist $EK = EG = BC$. Da nun die beiden $\langle$ Seiten $\rangle$ AB und AC den beiden DE und DK gleich sind und $BC = EK$, so ist auch Winkel BAC = Winkel
 10 EDK. Winkel BAC ist also größer als $\angle$ FDE.

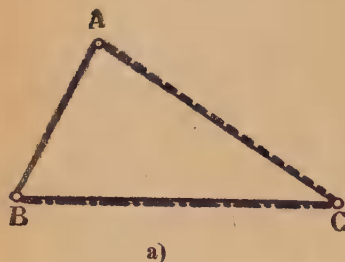
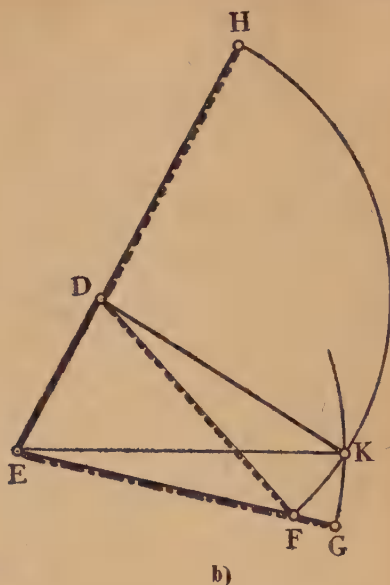


Fig. 87



26. Proposition, 17. Theorem: Wenn zwei Dreiecke je zwei Winkel, je einen dem anderen gleich haben und dazu noch je eine Seite, sei es die Basis der gleichen Winkel oder eine dem einen der beiden gleichen Winkel gegenüberliegende, dann sind auch die übrigen Seiten und der übrige Winkel einander gleich²⁹⁴). $\langle$ Dritter Kongruenzsatz $\rangle$.

Wer die Dreiecke, die Seiten, Winkel und Grundflächen $\langle$ Flächeninhalte $\rangle$ vergleichen will, muß unbedingt entweder die Seiten allein als gleich annehmen und die Gleichheit der Winkel erforschen, oder die
 20 Winkel allein als gleich und die Gleichheit der Seiten erforschen, oder er muß Winkel und Seiten zusammennehmen und so die Gleichheit der Winkel und Seiten ergründen. Nahm EUKLID lediglich die Winkel als gleich an, so konnte er damit nicht auch die Gleichheit der Seiten erweisen. Denn es gibt gleichwinkelige Dreiecke von kleinstem und größtem Ausmaß, die an Seiten und Flächeninhalt zurückstehen hinter anderen, die aber die einzelnen Winkel gleich haben mit diesen. Legte er lediglich die Gleichheit der Seiten zugrunde, so bewies er die
 28 Gleichheit aller Stücke durch den achten Satz, in dem zwei Dreiecke

vorkommen, die je zwei Seiten, je eine der anderen, gleich haben und dazu gleiche Grundlinien. Damit ist auch zu beweisen, daß sie gleiche Winkel haben und gleiche Flächen umfassen. Der Verfasser der „Elemente“ ließ diesen Zusatz weg, da er sich nach dem vierten Satz*) mit Notwendigkeit ergab und keines Beweises bedurfte. Wenn er aber Seiten und Winkel nahm, so mußte er entweder je eine gleiche Seite und je einen gleichen Winkel, oder je eine gleiche Seite und zwei gleiche Winkel der Dreiecke, oder umgekehrt je einen Winkel und zwei Seiten, oder einen Winkel und drei Seiten, oder je eine Seite und die drei Winkel, oder auch mehr als eine Seite und mehr als 10 einen Winkel nehmen. Wenn er aber nur eine Seite und einen Winkel nahm, so konnte er den geforderten Beweis für die Gleichheit der anderen Stücke nicht erbringen. Es ist ja möglich, daß zwei Dreiecke mit je einer gleichen Seite und einem gleichen Winkel in allen übrigen Stücken ungleich sind. Es stehe z. B. die Gerade AB senkrecht auf CD, BD aber sei größer als CB, und man ziehe die Verbindungs-

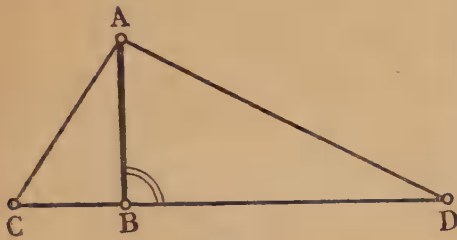


Fig. 88

linien AC und AD. Diese Dreiecke haben also eine Seite gemeinsam und je einen gleichen Winkel, alles andere aber ungleich. Es war aber möglich, mit einer Seite und zwei Winkeln zu beweisen, daß auch die übrigen Stücke gleich sind, und dies tut er tatsächlich in diesem Lehrsatz. Die Gleich-

heit einer Seite und der drei Winkel ferner vorauszusetzen, wäre überflüssig, wenn auch schon bei Gleichheit von zweien die Gleichheit der übrigen Stücke bewiesen ist. Hinwiederum bewies er mit einem Winkel und zwei Seiten die Gleichheit der übrigen Stücke im vierten Satz. Einen Winkel und drei gleiche Seiten zu nehmen war aber überflüssig, denn zwei Seiten gleichgenommen zogen auch die Gleichheit der übrigen Stücke nach sich. Auch je zwei gleiche Seiten und Winkel zu nehmen, oder zwei gleiche Seiten und drei Winkel, oder zwei Winkel und drei Seiten, all das erübrigt sich. Denn was aus weniger Voraussetzungen folgt, ergibt sich unbedingt 36

*) 348, 15: καθάπερ läßt richtig nicht bloß GRYNÆUS, sondern auch BAROCIUS weg.

auch aus mehreren, wenn nur die Voraussetzungen mit den nötigen Einschränkungen genommen werden. Es zeigte sich uns also, daß drei Voraussetzungen eines Beweises bedürfen: Diejenige, die nur die drei Seiten nimmt, dann diejenige, die zwei Seiten und den einen Winkel, und die, dieser entgegengesetzte, die eine Seite und zwei Winkel nimmt, die der Meister gegenwärtig vorlegt. Und deshalb haben wir nur diese drei Lehrsätze über die Gleichheit der durch die Seiten und Winkel begründeten Gleichheit der Dreiecke, weil alle anderen Voraussetzungen die Thesis entweder nicht erweisen können, 10 oder wenn sie dies können, dennoch überflüssig sind, weil aus weniger Voraussetzungen dieselben Folgerungen sich ergeben.

Wie nun EUKLID, als er je zwei gleiche Seiten und je einen gleichen Winkel nahm, nicht einen beliebigen Winkel nahm, sondern, wie er dort beifügte, den von den gleichen Geraden eingeschlossenen, so nimmt er auch in diesem Falle, wo er je zwei gleiche Winkel und je eine gleiche Seite wählt, die Seite nicht beliebig, sondern entweder die den gleichen Winkeln anliegende, oder die dem einen der gleichen Winkel gegenüberliegende. Denn weder kann im vierten Satz ein beliebiger gleichgenommener Winkel, noch in diesem Satz irgendeine 20 beliebige Seite die Gleichheit der übrigen Stücke erweisen. Ich veranschauliche an einem Beispiel: In dem gleichseitigen Dreieck ABC werde BC durch AD in ungleiche Abschnitte geteilt. Es entstehen dann also zwei Dreiecke, die AB und AD, AC und AD gleich haben und den Winkel bei B = Winkel bei C. Aber die übrigen Stücke sind nicht mehr gleich, wie BD und DC; diese sind vielmehr ungleich. Auch die übrigen Winkel sind nicht gleich. Der Grund hierfür liegt darin, daß wir wohl je einen gleichen 30 Winkel genommen haben, aber nicht den von den gleichen Seiten eingeschlossenen. Ebenso wird auch dieser Lehrsatz als ein Fehlschlag sich entpuppen, wenn wir nicht gemäß der gegebenen Einschränkung die Seite gleich nehmen, die einem der gleichen Winkel gegenüber-, oder die den gleichen Winkeln anliegt. — Es sei z. B. das rechtwinkelige Dreieck ABC <gegeben> mit dem rechten Winkel bei B, dessen Seite BC größer ist als BA; man 39 verlängere AB und lege an BC und dem auf ihr liegenden Punkte C

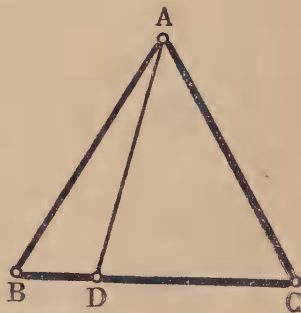


Fig. 89

den Winkel $\angle BCD = \angle BAC$ an, und es sollen sich AB und CD in ihrer Verlängerung im Punkte D schneiden. Wir haben nun zwei Dreiecke ABC und BCD , die eine Seite BC gemeinsam haben und zwei gleiche Winkel: $\angle ABC$ und $\angle CBD$ (als Rechte) und $\angle BAC = \angle BCD$ (denn so wurden sie gebildet). Die Dreiecke sind also anscheinend gleich, und doch erweist sich $\triangle BDC$ größer als $\triangle ABC$.

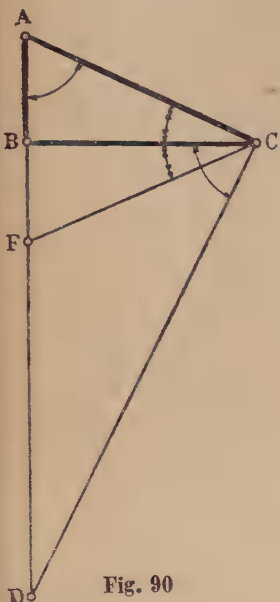


Fig. 90

Der Grund hierfür liegt darin, daß wir die gemeinsame Seite BC genommen haben, die im Dreieck ABC dem einen der gleichen Winkel, dem Winkel bei A , gegenüberliegt, während sie 10 im $\triangle BCD$ den gleichen Winkeln anliegt. Sie sollte aber in beiden Dreiecken entweder einem der gleichen Winkel gegenüber-, oder den gleichen Winkeln anliegen. Beachten wir das nicht, so erklären wir das Dreieck für gleich, das doch unbedingt größer ist. Wie sollte $\triangle BCD$ auch nicht größer sein als $\triangle ABC$? Denn man lege an BC und den Punkt C auf ihr den Winkel $\angle ACB = \angle FCB$ an; denn Winkel $\angle BCD$ ist größer als 20 $\angle ACB$, wie auch Winkel bei A . Da nun $\triangle ABC$ und $\triangle BCF$ zwei Dreiecke sind, die je zwei gleiche Winkel haben, Winkel $\angle ABC$ und $\angle BCA$ und Winkel $\angle CBF$ und $\angle BCF$, je einen gleich dem anderen, und eine gemeinsame

Seite, die den gleichen Winkeln anliegende BC , so sind die Dreiecke gleich. $\triangle BCD$ ist aber größer als $\triangle BCF$, also auch größer als $\triangle ABC$. Erst aber wurde vermöge der Wahl einer beliebigen Seite bewiesen, es sei gleich groß.

Diesen Beitrag zur exakten Behandlung des vorliegenden Gegen- 30 standes verdanken wir dem PORPHYRIOS. EUDEMOS aber führt in seiner „Geschichte der Geometrie“ diesen Lehrsatz auf THALES zurück. Denn bei der Art und Weise, auf die er die Entfernung der Schiffe auf hoher See bestimmt haben soll, erklärt EUDEMOS die Heranziehung desselben als unerlässlich.

Auf Grund der eben gegebenen Einteilung werden wir im gedrängten Überblick die ganze Doktrin über die Gleichheit der Dreiecke ableiten und die Gründe für die übergangenen Voraussetzungen angeben können, indem wir nachweisen, daß sie entweder unzutreffend 39

- oder überflüssig sind. Und hier, werden wir annehmen, beendigt der Verfasser der „*Elemente*“ den ersten Abschnitt seines Werkes, in dem er die Konstruktion der Dreiecke und ihre Vergleichung in Hinsicht auf Gleich und Ungleich durchführt und vermittels der Konstruktion uns über ihr Wesen, und vermittels der Vergleichung über Gleichheit und Verschiedenheit belehrt. Denn dreierlei ist mit der Existenz verbunden: Das Sein, das Dasselbige und das Andere, ebenso in den Quantitäten wie in den Qualitäten, je nach der Eigenart ihrer Träger^{294a}). Dadurch wird wie durch Bilder klar, daß jedes
- 10 Dreieck mit sich selbst identisch und doch auch wieder von sich verschieden ist wegen der Vielheit, die in ihm sich findet, und daß alle miteinander identisch sind und doch auch wieder verschieden voneinander. Denn bei jedem einzelnen Dreieck findet man das
- 14 Gleiche und Ungleiche und ebenso bei mehr als einem.
-

**Des Proklus Diadochus 4. Buch des Kommentars
zum 1. Buch von Euklids „Elementen“²⁹⁵⁾**

Zweiter Teil der Lehrsätze

Was man in einer Elementarlehre über die Entstehung und die Gleichheit oder Ungleichheit der Dreiecke sagen kann, haben wir in den bisherigen Darlegungen kennengelernt. Im Anschluß hieran entwickelt EUKLID die Lehre von den Vierseiten, indem er uns vorzugsweise über die Parallelogramme aufklärt, mit der Lehre von diesen zugleich aber auch die Belehrung über die Trapeze verbindet. Das Vierseit wird nämlich, wie wir oben schon bei den Definitionen (30.) dargelegt haben, in das Parallelogramm und das Trapez eingeteilt, das Parallelogramm dann wieder in verschiedene andere Arten und das Trapez ebenso. Aber da das Parallelogramm wegen der Teilhabe 10 an der Gleichheit wohlgeordnet ist, das Trapez hingegen nicht dieselbe oder auch nur <eine> ähnliche Ordnung hat, so erledigt er mit Recht vorzugsweise die Lehre von den Parallelogrammen*), bezieht aber auch das Trapez in die Behandlung mit ein. Aus der Einteilung der Parallelogramme wird sich uns nämlich auch die Entstehung der Trapeze ergeben, wie uns im weiteren Fortgang klar werden wird.

Da es aber hinwiederum unmöglich ist, ohne die Theorie von den Parallelen über die Entstehung oder Gleichheit der Parallelogramme etwas zu sagen (denn wie schon aus dem Namen klar hervorgeht, ist ein Parallelogramm eine von parallelen, einander gegenüber 20 liegenden Geraden umschriebene Fläche), so beginnt er notwendigerweise seine Unterweisung mit den Parallelen, um nach kurzer Wegstrecke diese Materie wieder zu verlassen und der Theorie der Parallelogramme sich zuzuwenden, wobei er nur einen Lehrsatz als Mittelglied zwischen der elementaren Einführung in die eine und die andere Materie heranzieht, der anscheinend mit einem Akzidens der Parallelen sich befaßt, in Wirklichkeit aber den ersten Ursprung der Parallelogramme darlegt. Denn das ist der wesentliche Inhalt des Satzes, der besagt: Gerade, die gleiche und parallele Gerade nach derselben 29

*) 354, 14: Die Einschaltung τὰ? zeigt, daß FRIEDLEIN die klare Stelle gründlich mißverstanden hat. ἀπεργάζεσθαι hat hier passive Bedeutung und nimmt den Dativ ἀντὶ = ὑπ' αὐτοῦ zu sich.

Richtung verbinden, sind selbst gleich und parallel. Damit wird nämlich ein Akzidens der gleichen und parallelen Linien betrachtet; durch die Verbindung aber kommt das Parallelogramm zum Vorschein, dessen gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind.

Daß nun die Lehre von den Parallelen unbedingt vorweggenommen werden mußte, ist hieraus klar. Man muß sich aber drei wesentliche Akzidentien der Parallelen einprägen, die bestimmend sind für sie und mit ihnen Umkehrungen bilden, und zwar nicht bloß die drei zusammen, sondern auch jedes einzelne getrennt von den
 10 anderen. Das erste davon besagt: Schneidet eine Gerade zwei Parallelen, so sind die Wechselwinkel gleich, das zweite: Schneidet eine Gerade zwei Parallelen, dann betragen die Innenwinkel zwei Rechte, das dritte endlich: Schneidet eine Gerade zwei Parallelen, dann ist der Außenwinkel gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel²⁹⁶). Denn jedes dieser Akzidentien, wenn es bewiesen, ist imstande, die Geraden als parallel zu erweisen.

Auf diese Weise pflegen auch die anderen Mathematiker die Linien zu erörtern, indem sie das Akzidens einer jeden Art angeben. So zeigt APOLLONIOS bei jeder konischen Linie <Kegelschnitt>, welches
 20 Akzidens gegeben sei, und ebenso NIKOMEDES bei den Muschellinien, HIPPIAS bei den quadrierenden²⁹⁷) und PERSEUS bei den spirischen Linien²⁹⁸). Denn ist nach der Entstehung das wesentliche Akzidens festgestellt, so scheidet es uns die entstandene Art von allen anderen. Ebenso erforscht nun auch der Verfasser der „*Elemente*“ zuerst die Akzidentien der Parallelen.

27. Proposition, 18. Theorem: *Wenn eine Gerade zwei Gerade so schneidet, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, dann sind die Geraden miteinander parallel*²⁹⁹). <Wechselwinkelsatz>.

Bei dem vorliegenden Satz*), oder vielmehr bei allen Lehr-
 30 sätzen, die es mit einer Ebene zu tun haben, ist das allgemeine
 31 Zugeständnis vorausgesetzt, daß die Geraden in einer einzigen Ebene

*) Man sieht ohne weiteres, daß der griechische Text am Anfang nicht stimmen kann. BAROCIUS übersetzt: *In praesente quidem theoremate tamquam evidens praeassumptum non fuit rectas lineas in uno esse plano, potius vero in omnibus theorematibus quae in plano considerantur.* Diese Übersetzung erscheint mir mißverständlich und will mir darum nicht gefallen; sie kann uns aber zum Richtigen hinführen. Ich denke mir, daß PROKLUS etwa folgendermaßen geschrieben hat: ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὡς ὁμολογούμενον προείληπται usw. 356, 24 ist natürlich διὸ in διὰ zu korrigieren.

liegen. Diese Bemerkung fügen wir bei, weil auch bei Gleichheit der Wechselwinkel die Geraden durchaus nicht parallel sind, wenn sie nicht auch in der gleichen Ebene liegen. Denn wenn z. B. die Geraden kreuzweise zueinander liegen (windschiefe Geraden), jede in einer anderen Ebene, so steht nichts im Wege, daß eine sie schneidende Gerade gleiche Wechselwinkel bilde, aber die so liegenden Geraden sind nicht parallel. Es ist also vorausgesetzt, daß wir alles, was wir in der Planimetrie niederschreiben, uns in ein und derselben Ebene vorstellen. Deshalb bedurfte es auch dieses Zusatzes gar nicht.

10

Man muß aber wissen, daß der Meister den Begriff des Wechsels in zweifachem Sinne nimmt, einmal im Sinne einer bestimmten Lage, dann im Sinne einer bestimmten Folge in den Proportionen. In letzterem Sinne gebraucht er den Begriff im 5. und in den arithmetischen Büchern³⁰⁰); in ersterem in diesem und in allen anderen Büchern bei den Parallelen und der sie schneidenden Geraden. Denn die Winkel, die nicht nach derselben Seite liegen, keine Nebenwinkel sind, sondern durch die schneidende Gerade getrennt werden, beide innerhalb der Parallelen sich befinden, sich aber dadurch unterscheiden, daß der eine oben, der andre 20 unten liegt, nennt er Wechselwinkel. Es seien z. B. die Geraden AB und CD, und EF schneide sie; dann, sagt er, sind AEF und DFE und wiederum CFE und BEF Wechselwinkel, da sie der Lage nach wechselnd sich verhalten.

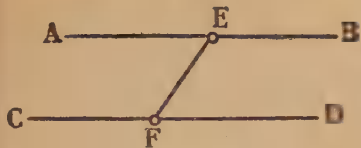


Fig. 91

Man muß aber wissen, daß bei solcher Lage der Geraden durch Einteilung im ganzen sechs Akzidentien herauskommen, von denen der Meister nur drei herausgriff, drei aber überging. Entweder nehmen wir nämlich die Winkel nach derselben Seite oder nicht, 30 und wenn nach derselben Seite, dann entweder beide innerhalb der Geraden, die der Gang der Untersuchung als parallel erweist, oder beide außerhalb, oder die einen außerhalb, die anderen innerhalb; und nehmen wir sie nicht nach derselben Seite, dann müssen wir sie wiederum ebenso entweder beide außerhalb der geschnittenen Geraden oder innerhalb, oder die einen innerhalb, die anderen außerhalb nehmen. Wir wollen an derselben Zeichnung das Gesagte veranschaulichen. — Es seien AB und CD die beliebigen Geraden, und es schneide sie EF, die bis H und K verlängert 39

werde. Nimmt man nun die Winkel auf derselben Seite, so läßt man sie entweder beide innerhalb liegen, wie die Winkel BEF und EFD, oder AEF und EFC, oder beide außerhalb wie die Winkel HEB und DFK oder HEA und CFK, oder den einen außerhalb und den anderen innerhalb, wie die Winkel HEB und EFD oder KFD und FEB oder HEA und EFC oder KFC und AEF: Denn vierfach kann
 10 man diese nehmen. Nimmt man aber die Winkel nicht auf der gleichen Seite, so läßt man sie entweder innerhalb liegen, wie die Winkel AEF und EFD oder CFE und FEB, oder beide außerhalb, wie die Winkel AEH und DFK oder HEB und CFK, oder den einen innerhalb, den anderen außerhalb, was wieder 4 Möglichkeiten gibt: Entweder Winkel AEH und EFD oder HEB und EFC oder KFC und FEB oder KFD und FEA. Außer diesen gibt es keine andere
 20 Möglichkeit, die Winkel zu nehmen.

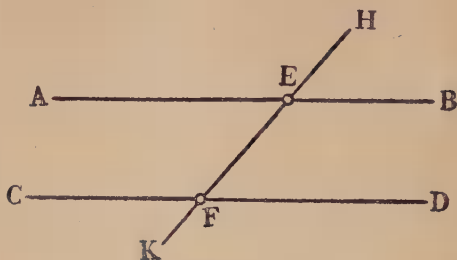


Fig. 92

Von diesen sechs Möglichkeiten, die Winkel zu nehmen, wählte der Meister nur drei aus; und die folgenden Akzidentien erweisen sich*) in der Tat als bezeichnend für die Parallelen. Von diesen drei Winkelpaaren besteht das eine aus solchen, die nicht auf derselben Seite liegen, die nur innerhalb genommen sind, und die er Wechselwinkel nennt, so daß die beiden außerhalb, und das Paar mit dem einen innerhalb und mit dem anderen außerhalb unberücksichtigt blieb; die beiden anderen Paare, aus denen, die nach derselben Seite liegen, dem einen mit beiden Winkeln innerhalb, die,
 30 wie er sagt, 2 Rechten gleich sind, dem anderen, wovon der eine innerhalb, der andere außerhalb liegt, die er als gleich bezeichnet. Eine Möglichkeit hat er dabei übergangen, bei der die beiden Winkel
 33 außerhalb angenommen werden.

*) Auch hier kann der Text nicht befriedigen. Es kann nicht ἀπέφηνεν heißen, was γεωμέτρως als Subjekt bedingen würde. Aber EUKLID reiht rein sachlich Beweis an Beweis, ohne sich über deren Bedeutung und Tragweite auszulassen. Also ist mit C πέφηνεν zu lesen und weiter oben Z. 8 εἰς zu streichen. BAROCIUS übersetzt richtig: *Et haec quidem consequentia symptomata parallelas exprimere apta nata sunt.*

Wir behaupten nun, daß aus den drei übergangenen Annahmen dieselben Folgerungen sich ergeben. Es seien z. B. auf derselben Seite <von EF> außerhalb die Winkel HEB und DFK. Da behaupte ich, daß diese 2 Rechte betragen. Wenn nämlich Winkel DFE gleich ist $\sphericalangle$ HEB und Winkel BEF = $\sphericalangle$ DFK, und wenn die Winkel BEF + EFD = 2 R, dann sind auch die Winkel DFK + HEB = 2 R. Ferner seien auf derselben Seite die Winkel AEH und EFC, der eine innen, der andere außen. Dann behaupte ich, daß auch sie 2 Rechte betragen. Denn wenn Winkel AEH = Winkel BEF und die Winkel BEF + EFD = 2 R, dann betragen auch AEH + EFC 2 Rechte. 10

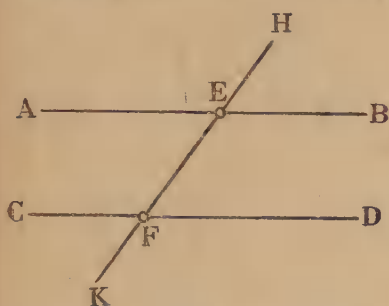


Fig. 93

Ferner seien nicht auf derselben Seite, aber beide außerhalb der Geraden, die Winkel AEH und DFK. Dann behaupte ich, daß sie einander gleich sind. Denn wenn die Winkel AEH und BEF einander gleich sind, Winkel DFK aber gleich ist $\sphericalangle$ BEF, dann ist auch Winkel AEH gleich Winkel DFK. Wenn sich also die Schlußfolgerungen bei den drei 20

Voraussetzungen, die der Meister machte, als wahr erweisen, dann ist das Ergebnis auch bei den übrigen drei Winkelpaaren ganz dasselbe. Nur besteht der Unterschied, daß bei der Auswahl, die der Meister getroffen, in zwei Fällen einander gleiche Winkel vorausgesetzt sind und in einem Falle Winkel, die <zusammen> 2 Rechte ausmachen, bei diesen aber umgekehrt in zwei Fällen Winkel, die <zusammen> 2 Rechte betragen, in einem aber solche, die einander gleich sind. Denn bei den sechs Auswahlmöglichkeiten, die es insgesamt gibt, trifft es sich, daß bei dreien die Winkel <zusammen> 2 Rechte betragen, bei dreien aber 30 einander gleich sind, so daß das umgekehrte Verhältnis zwischen den übergangenen und den für wert gehaltenen Winkelnahmen ganz in Ordnung ist. Es scheint aber der Meister die Voraussetzungen, die den Vorzug der Bejahung aufweisen oder einfacher sind, ausgewählt und aus dem Grunde von den nicht auf der gleichen Seite liegenden bloß die Innenwinkel, die er Wechselwinkel nannte, von den hingegen auf der gleichen Seite gelegenen die Innenwinkel und das Paar mit dem einen Winkel innerhalb und dem anderen außerhalb genommen zu haben, während er die anderen vermied, die mehr 39

auf negativem Wege bewiesen werden oder komplizierteren Charakters sind. Doch ganz gleich, ob dieser oder ein anderer Grund anzuführen ist; jedenfalls wird aus diesen Voraussetzungen klar, wie viele weitere Möglichkeiten sich ihnen analog anschließen.

28. Proposition, 19. Theorem: *Wenn eine Gerade zwei Gerade so schneidet, daß der Außenwinkel dem auf derselben Seite gegenüberliegenden Innenwinkel gleich ist, oder daß die Innenwinkel auf derselben Seite <zusammen> zwei Rechte betragen, dann sind die Geraden parallel³⁰¹.*
 <Gegenwinkelsatz>.

- 10 Der vorausgehende Lehrsatz nahm Gleichheit der Winkel an, die auf derselben Seite, aber innerhalb der Geraden liegen, und bewies damit, daß die Geraden parallel sind; dieser aber fügt noch die beiden übrigen Voraussetzungen hinzu, wovon die eine die Winkel nach dem Gesichtspunkt von innen und außen scheidet, die andere die beiden Winkel innen ansetzt und zu demselben Schlusse führt. Es möchte aber den Anschein erwecken, der Verfasser der „*Elemente*“ habe mit seiner Einteilung der Lehrsätze einen Fehlgriff getan. Denn er hätte entweder die drei Voraussetzungen auseinanderhalten und drei Lehrsätze bilden, oder alle drei zu einem einzigen Lehrsatz zusammen-
- 20 ziehen sollen wie AIGEIAS von Hierapolis, der einen Auszug aus den „*Elementen*“ machte, oder wenn er ja eine Trennung in zwei vornehmen wollte, mußte er eine geordnete Einteilung durchführen und die Voraussetzungen für sich nehmen, denen zufolge die Winkel gleich sind, und für sich jene, derzufolge sie <zusammen> 2 Rechte betragen. Nun aber setzte er in einem Lehrsatz Gleichheit der Wechselwinkel voraus, in einem anderen, daß der Außenwinkel mit dem Innenwinkel gleich sei, und daß die Innenwinkel auf derselben Seite <zusammen> 2 Rechte betragen. Was ist der Grund für diese Einteilung? Wenn er die Gleichheit der Winkel untereinander oder mit
- 30 zwei Rechten im Auge hatte, so schied er nicht einmal nach diesem Gesichtspunkt die vorliegenden Sätze voneinander, sondern danach, ob die Winkel auf der gleichen Seite genommen werden oder nicht. Denn beim vorausgehenden Satz nahm er die Winkel auf verschiedenen Seiten (von der Art sind ja die Wechselwinkel), dieses Mal aber auf derselben Seite, wie aus dem Wortlaut klar hervorgeht.

Wie aber der Autor beweist, daß die Geraden parallel sind, wenn die Innenwinkel zwei Rechte betragen, geht klar aus dem hervor,

38 was er geschrieben. Nun aber zu PTOLEMAIOS. In der Abhandlung,

in der er den Beweis erbringen wollte, daß Gerade, deren Verlängerungen von zwei Winkeln ausgehen, die $\langle$ zusammen $\rangle$ kleiner als 2 Rechte sind, auf der Seite sich schneiden, wo die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist, beweist er vor allem diesen Lehrsatz, daß die Geraden parallel sind, wenn die Innenwinkel zwei Rechte ausmachen. Er tut das auf folgende Weise. Es seien AB und CD zwei Gerade, und es schneide sie eine Gerade EFGH, so daß die Winkel BFG und FGD zwei Rechte ausmachen. Dann behaupte ich, daß die Geraden parallel sind, d. h. daß sie nie zusammentreffen. Denn wenn möglich, sollen BF und GD in ihrer Verlängerung 10

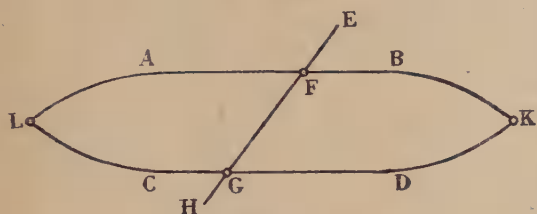


Fig. 94

im Punkte K zusammentreffen. Da nun die Gerade GF auf AB errichtet ist, so macht sie die Winkel AFG und BFG gleich zwei Rechten. Und da GF auf CD errichtet ist, bildet sie ebenso die Winkel CGF + DGF =

2 Rechten. Also sind die 4 Winkel AFG, BFG, CGF und DGF 20
 $\langle$ zusammen $\rangle = 4$ R; von diesen aber sind $BFG + FGD = 2$ R. Also sind auch die übrigen Winkel $AFG + CGF = 2$ R. Wenn nun FB und GD, falls die Innenwinkel $\langle$ zusammen $\rangle$ 2 Rechte betragen, in ihrer Verlängerung im Punkte K zusammentreffen sind, werden auch FA und GC in ihrer Verlängerung $\langle$ in L $\rangle$ zusammentreffen; denn auch die Winkel AFG und CGF sind $\langle$ zusammen $\rangle$ 2 R. Denn entweder werden die Geraden auf beiden Seiten oder auf keiner zusammentreffen, wenn die Winkel hier wie dort 2 Rechte betragen. Es sollen also FA und GC im Punkte L zusammentreffen. Dann schließen also die Geraden LABK und LCDK einen Raum ein, was 30
 unmöglich ist. Wenn also die Innenwinkel $\langle$ zusammen $\rangle$ 2 Rechte betragen, so ist es unmöglich, daß die Geraden zusammentreffen. Folglich sind sie parallel.

33

29. Proposition, 20. Theorem: *Schneidet eine Gerade Parallelen, so bewirkt sie Gleichheit der Wechselwinkel und des äußeren mit dem inneren auf derselben Seite gegenüberliegenden Winkels, ferner die Winkelsumme von zwei Rechten für die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel³⁰²).*

Dieser Lehrsatz ist die Umkehrung der beiden vorhergehenden. Denn er macht die Thesis in beiden zur Voraussetzung und stellt die Aufgabe, das in diesen Gegebene zu beweisen. Man muß aber auch auf folgenden Unterschied der Umkehrungen hinweisen, daß in
 10 jedem Falle entweder ein Satz die Umkehrung eines einzigen bildet, wie der 6. die des 5., oder von mehreren, wie der hier vorliegende von den vorausgehenden. In diesem Lehrsatz zog der Autor zum erstenmal jene Forderung³⁰³) heran, die besagt: *Wenn eine Gerade zwei andere so schneidet, daß die Innenwinkel auf derselben Seite kleiner als zwei Rechte sind, dann treffen die Geraden auf der Seite zusammen, auf der die Winkel sind, die weniger als zwei Rechte be-*
tragen. **<Parallelen-Postulat>**. Von dieser betonten wir bei der Erklärung der den Lehrsätzen vorausgehenden Partien, daß ihre Zugehörigkeit zu den ohne Beweis allgemein anerkannten Sätzen
 20 nicht von allen Seiten zugestanden wird. Wie wäre auch von der Art ein Satz, dessen Umkehrung in den Lehrsätzen als beweisbar verzeichnet steht? Der Satz nämlich, in jedem Dreieck sind zwei beliebige Innenwinkel kleiner als 2 Rechte, ist die Umkehrung dieser Forderung. Denn auch, wenn die Geraden stets mehr und mehr in ihrer Verlängerung sich einander nähern, so ist das noch kein Beweis dafür, daß sie zusammentreffen, weil auch andere Linien entdeckt wurden, die stets sich mehr und mehr einander nähern und doch nie zusammentreffen, wie oben schon dargelegt wurde.

30 Es haben denn auch bereits einige andere diesen Satz, den unser Autor als Forderung nahm, eher als Theorem bewertet und einen Beweis hierfür als erforderlich gehalten. Auch PTOLEMAIOS scheint ihn zu beweisen in der Abhandlung über den Satz, daß Gerade, die von Winkeln aus, die kleiner als 2 Rechte sind, verlängert werden, zusammentreffen, und er führt den Beweis, indem er vieles von dem voraussetzt, was bis zu diesem Theorem der Verfasser der „*Elemente*“ bereits bewiesen hat. Wir wollen annehmen, alles sei wahr, damit nicht auch wir noch eine weitere Schwierigkeit bereiten, und er werde
 39 wie ein Hilfssatz mittels der vorausgehenden Darlegungen be-

wiesen. Einer der bereits geführten Beweise ist aber der, daß Gerade, die von Winkeln aus verlängert werden, die 2 Rechten gleich sind, niemals zusammentreffen. Demzufolge behaupte ich, daß auch die Umkehrung richtig ist, daß also, wenn Parallelen von einer Geraden geschnitten werden, die Innenwinkel, die auf derselben Seite sich befinden, $\langle$ zusammen $\rangle$ 2 Rechten gleich sind. Denn die die Parallelen schneidende Gerade muß unbedingt die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel entweder gleich 2 Rechten bilden, oder kleiner, oder größer als 2 Rechte. Es seien also AB und CD parallel, und es treffe mit ihnen GF zusammen. Dann behaupte ich, daß sie die auf 10

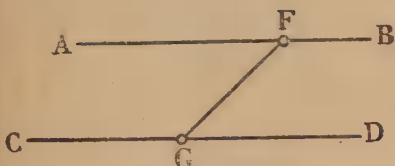


Fig. 95

derselben Seite liegenden Innenwinkel nicht größer als zwei Rechte bildet. Denn wenn die Winkel AFG und CGF größer sind als 2 R, dann sind die anderen Winkel BFG und DGF kleiner als 2 R; aber sie sind auch größer als 2 R: Denn AF und CG sind nicht mehr parallel als FB

und GD. Wenn daher die mit AF und CG zusammentreffende Gerade die Innenwinkel größer als 2 Rechte bildet, so wird dies auch die 20 mit FB und GD zusammentreffende tun. Aber sie sind auch kleiner als 2 R: Denn die 4 Winkel AFG, CGF, BFG und DGF betragen $\langle$ zusammen $\rangle$ 4 R, was unmöglich ist. Ebenso zeigen wir nun, daß eine die Parallelen schneidende Gerade die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel nicht kleiner als 2 R bildet. Wenn sie sie aber nicht größer und $\langle$ nicht $\rangle$ kleiner als 2 R bildet, so bleibt nur übrig, daß die schneidende Gerade die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel gleich 2 R bilde. Nachdem dies also vorweg bewiesen, kann der geforderte Beweis in zwingender Weise geführt werden. Ich behaupte also: Wenn eine Gerade zwei Gerade so schneidet, 30 daß die Innenwinkel, die sie auf derselben Seite bildet, kleiner als 2 Rechte sind, so werden die Geraden in ihrer Verlängerung auf der Seite zusammentreffen, wo die Winkel liegen, die kleiner sind als 2 R. Denn nehmen wir an, sie treffen nicht zusammen. Aber wenn sie auf der Seite nicht zusammentreffen, wo die Winkel kleiner sind als 2 R, dann werden sie erst recht nicht zusammentreffen auf der anderen Seite, wo die Winkel größer sind als 2 R. So würden die Geraden auf keiner Seite zusammentreffen. Wenn aber das $\langle$ gilt $\rangle$, dann sind sie parallel. Es ist aber gezeigt worden, daß eine Gerade 39

die Parallelen so schneidet, daß die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel gleich $2R$ sind. Dieselben Winkel sind also gleich 2 Rechten und kleiner als 2 Rechte, was unmöglich ist.

Nachdem PTOLEMAIOS dies im vorhinein bewiesen und zum vorliegenden Satz gekommen war, wollte er eine besondere Finesse anbringen und zeigen, daß wenn eine Gerade zwei Gerade so schneidet, daß die auf derselben Seite liegenden Innenwinkel kleiner sind als 2 Rechte, die Geraden nicht nur keine Asymptoten sind, wie gezeigt wurde, sondern auch ihr Zusammentreffen auf der Seite erfolgt, wo die Winkel kleiner sind als $2R$, nicht wo sie größer $\langle$ sind $\rangle^{304}$.

Es seien also die 2 Geraden AB und CD , und $EFGH$ schneide sie so, daß die Winkel AFG und CGF $\langle$ zusammen $\rangle$ kleiner sind als $2R$. Dann sind also die übrigen größer als $2R$. Daß nun die

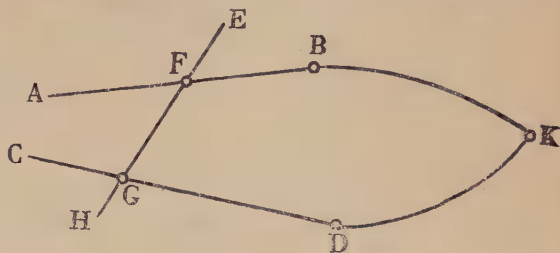


Fig. 96

20 Geraden keine Asym-

ptoten sind, ist gezeigt worden. Wenn sie aber zusammentreffen, so werden sie entweder auf der Seite von A und C , oder von B und D zusammentreffen. Sie sollen nun auf der Seite von B und D im Punkte K zusammentreffen. Da nun die Winkel AFG und CGF $\langle$ zusammen $\rangle$ kleiner sind als $2R$, die Winkel $AFG + BFG = 2R$, so wird nach Wegnahme des gemeinsamen Winkels AFG $\langle$ der $\rangle$ Winkel CGF kleiner sein als $\angle BFG$. Dann ist also der Außenwinkel des Dreiecks kleiner als der gegenüberliegende Innenwinkel, was unmöglich ist. Auf dieser Seite treffen sie also nicht zusammen.

30 Aber sie treffen zusammen. Sie werden also auf der anderen Seite zusammentreffen, wo die Winkel kleiner sind als $2R$.

Soweit PTOLEMAIOS. Es ist aber zu beachten, ob nicht ein Fehlschluß in den angenommenen Voraussetzungen vorliegt; ich meine aber in jenen, wo er sagte, daß von den vier Winkeln $\langle$ an $\rangle$ einer Geraden, die die nicht zusammentreffenden Geraden schneidet, die auf der gleichen Seite liegenden beiderseits entweder 2 Rechten gleich sind, oder größer, oder kleiner als 2 Rechte. Die Einteilung ist nämlich nicht vollständig. Denn es steht nichts im Wege, daß derjenige, 39 der die von Winkeln, die kleiner sind als 2 Rechte auslaufenden

Geraden Asymptoten nennt, die einen von den auf derselben Seite liegenden Winkeln als größer als 2 Rechte, die anderen auf der entgegengesetzten Seite als kleiner als 2 Rechte bezeichne und nicht dieselbe Aussage von beiden gelten lasse. Ist aber die Einteilung unvollständig, so ist der vorliegende Satz nicht bewiesen. Auch das ist noch zu dem Beweise zu bemerken, daß er nicht die Unmöglichkeit an sich beweist. Denn wenn eine Gerade Parallelen so schneidet, daß die auf derselben Seite liegenden Winkel beiderseits entweder größer oder kleiner sind als 2 Rechte, so folgt deswegen noch nicht der Widersinn dieser Voraussetzungen, sondern weil die vier Innen- 10 winkel der geschnittenen Parallelen gleich 4 Rechten sind, deshalb ist jede dieser Voraussetzungen undenkbar; denn auch wenn jemand die Geraden nicht als parallel annimmt, so ergeben sich bei denselben Voraussetzungen auch dieselben Folgerungen. Damit wollen wir unsere Bemerkungen zu PTOLEMAIOS beenden. Denn die Darlegungen zeigen die Schwäche seines Beweises.

Nun wollen wir aber auch die Behauptungen jener überprüfen, die sagen, es sei unmöglich, daß diejenigen Geraden, die von Winkeln, die kleiner als 2 Rechte sind, auslaufen, zusammentreffen. Indem sie nämlich die beiden Geraden AB und CD nehmen und AC, 20

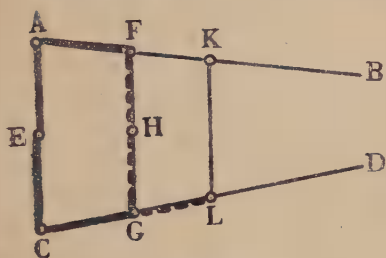


Fig. 97

die diese schneidet und die Innenwinkel kleiner als 2 Rechte bildet, glauben sie beweisen zu können, daß AB und CD nicht zusammentreffen. Es werde also AC im Punkte E halbiert, und man trage auf AB die Strecke $AF = AE$ ab und auf CD die Strecke $CG = EC$. Nun ist also klar, daß AF und CG nicht zusammentreffen werden in 30

den Punkten F und G*). Denn wenn das (wäre), so würden die zwei Seiten der Seite AC im Dreieck gleich sein, was unmöglich ist. Es werde nun weiter die Verbindungslinie FG gezogen und im Punkte H halbiert, und man trage gleiche Strecken $\langle FK = FH; GL = HG \rangle$ ab. Auch diese werden aus dem gleichen Grunde nicht zusammentreffen. Indem sie nun das ins Unendliche fortsetzen, die 36

*) 369, 11: $\kappa\alpha\tau\alpha\ \tau\acute{o}\ \zeta\bar{\eta}$ ist entweder zu lesen wie 370, 4: $\kappa\alpha\tau\alpha\ \tau\acute{o}\ \zeta\ \kappa\alpha\iota\ \tau\acute{o}\ \bar{\eta}$ oder wie 370, 5: $\kappa\alpha\tau\alpha\ \tau\acute{o}\ \zeta\ \bar{\eta}$.

nicht zusammentreffenden Punkte $\langle$ jeweils $\rangle$ verbinden, die Verbindungslinien halbieren und den Hälften derselben gleiche Strecken von den Geraden abtragen, behaupten sie zu beweisen, daß die Geraden AB und CD nirgends zusammentreffen. So sagen sie.

Ihnen ist unsererseits zu erwidern, daß sie in der Tat etwas Richtiges sagen, aber nicht soviel, als sie meinen. Denn daß es nicht so einfach ist, den Punkt des Zusammentreffens zu bestimmen, ist richtig; aber nicht richtig ist die Behauptung, daß sie überhaupt nicht zusammentreffen. Denn nehmen wir an, die Linien AB und CD 10 der bestimmten Winkel BAC und DCA treffen in den Punkten F und G nicht zusammen; aber nichts steht im Wege, daß sie in den Punkten K und L zusammentreffen, auch wenn FK und GL gleich sind FH und HG . Wenn nämlich AK und CL in den Punkten K und L zusammentreffen, so bleiben die Winkel KFH und LGH nicht mehr dieselben, und ein Teil der Linie FG fällt über die Geraden AK und CL hinaus, und so sind die beiden FK und GL wieder größer als die Basis, die sie innerhalb der Geraden FG abschneiden. Aber auch darauf ist noch hinzuweisen, daß sie mit ihrer uneingeschränkten Behauptung, die von Winkeln, die kleiner als 2 Rechte sind, aus- 20 laufenden Geraden treffen nicht zusammen, im Niederreißen weitergehen als sie beabsichtigen. Zum Beweise diene dieselbe Zeichnung. Ist es nun möglich oder nicht, von A zu G eine Verbindungslinie zu ziehen? Ist es nämlich nicht möglich, so heben sie mit der 5. Forderung zugleich auch die erste auf, die besagt, man könne von jedem Punkte zu jedem Punkte eine Gerade ziehen; ist es aber möglich, dann ziehe man sie. Da nun die Winkel FAC und GCA kleiner sind als 2 Rechte, so 30 ist klar, daß die Winkel GAC und GCA noch viel mehr kleiner sind als 2 Rechte.

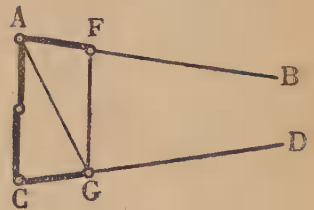


Fig. 98

Die Linien AG und CG , auslaufend von Winkeln, die kleiner sind als 2 R, sind also im Punkte G zusammengetroffen. Man kann folglich nicht uneingeschränkt sagen, die von Winkeln, die kleiner sind als 2 R, auslaufenden Geraden treffen nicht zusammen. Daß vielmehr gewisse Gerade, die von Winkeln, die kleiner sind als 2 R, auslaufen, zusammentreffen, ist klar, wenn die Untersuchung dies auch für alle erweisen möchte. Denn es könnte jemand behaupten, 39 da die Verkleinerung der 2 Rechten ohne Grenzen sei, so blieben

die Geraden bis zu diesem Grade der Verkleinerung Asymptoten, bei einem anderen geringeren Grade trafen sie hingegen zusammen. Wer sich bemüht, in einen derartigen Beweis einen Einblick zu gewinnen, dem sei unsererseits bemerkt, er müsse ein derartiges Axiom voraussetzen, dessen auch ARISTOTELES beim Beweis der Endlichkeit der Welt sich bediente: Wenn von einem Punkte aus zwei winkelbildende Gerade ins Unendliche verlängert werden, so übertrifft der Abstand der ins Unendliche verlängerten Geraden jede begrenzte Raumgröße. Er bewies damit, daß ein unendlicher Abstand sich ergibt, wenn die Geraden, die vom Mittelpunkt zur 10 Peripherie laufen, unendlich sind. Denn ist der Abstand begrenzt*), so ist es möglich, den Abstand zu vergrößern, so daß also dann die Geraden nicht unendlich sind. Gerade, ins Unendliche verlängert, werden also weiter voneinander abstehen als jede Größe, die begrenzt angenommen wird. Dies also vorausgesetzt behaupte ich: Wenn eine Gerade eine von parallelen Geraden schneidet, schneidet

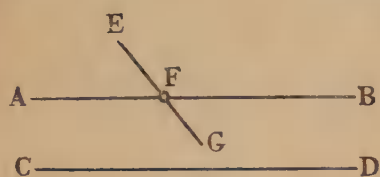


Fig. 99

sie auch die andere. Es seien die Parallelen AB und CD, und EFG schneide AB. Dann behaupte ich, daß sie auch CD schneidet. Denn 20 da BF und FG zwei Gerade sind, die von einem Punkte F ins Unendliche verlaufen, so haben sie einen größeren Abstand als jede andere Größe, also auch einen größeren als der Abstand der Parallelen beträgt. Wenn sie demnach weiter voneinander abstehen, als der Abstand der Parallelen beträgt, so wird FG auch CD schneiden.

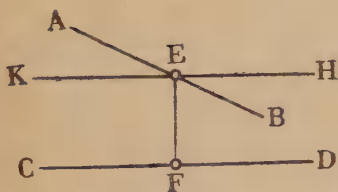


Fig. 100

Wenn also eine Gerade die eine der Parallelen schneidet, schneidet sie auch die andere. Nach Vorerledigung dieses 30 Beweises wollen wir anschließend den vorliegenden Satz beweisen. Es seien die zwei Geraden AB und CD, und es schneide sie EF so, daß die Winkel BEF und DFE, die sie bildet, kleiner 35

*) Aus der angezogenen ARISTOTELESstelle (*De caelo* I 271 B25—272 A 5) geht klar hervor, daß es 371, 20 nicht *ἀδύνατον* heißen darf, sondern *δυνατόν* heißen muß. Bei ARISTOTELES heißt es: *ἐπεὶ δ' αἰετὶ τοῦ δοθέντος μείζον λαβεῖν*. Auch BAROCIUS übersetzt in diesem Sinne.

als 2 R sind: Dann behaupte ich, daß die Geraden auf der Seite zusammentreffen, wo die Winkel kleiner als 2 Rechte sind. Denn da die Winkel BEF und DFE kleiner sind als 2 R, so sei der Winkel HEB gleich dem Mehrbetrag zu 2 Rechten. Nun verlängere man HE bis K. Da nun EF <die Geraden> KH und CD so schneidet, daß die Innenwinkel HEF + DFE = 2 R sind, so sind die Geraden HK und CD parallel. AB schneidet aber KH, also schneidet sie nach dem vorhergehenden Beweis auch CD. Es werden also AB und CD auf jener Seite zusammentreffen, wo die Winkel kleiner sind
 10 als 2 R. Der aufgestellte Satz ist demnach <mit Hilfe des Axioms des ARISTOTELES> bewiesen.

30. Proposition, 21. Theorem: *Linien, die mit derselben Geraden parallel sind, sind auch miteinander parallel³⁰⁵⁾.*

In den Ausführungen über die Beziehungen pflegt unser Meister zu zeigen, daß die Identität auf alles sich erstreckt, was zu demselben dieselbe Beziehung hat. So sagte er z. B. in den Axiomen*): Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; und im folgenden wird er sagen, was einem dritten ähnlich ist, ist auch unter sich ähnlich**); und: Proportionen, die im gleichen Verhältnis stehen
 20 zu einer dritten Proportion, stehen auch unter sich im gleichen Verhältnis***). Auf diese Weise zeigt er nun auch jetzt, daß die Linien, die mit einer dritten Geraden parallel sind, auch unter sich parallel sind. Es trifft dies aber nicht bei allen Relationen zu. Denn das Doppelte derselben Größe steht nicht auch unter sich im Verhältnis der Verdoppelung, und das Anderthalbfache derselben Größe steht nicht auch unter sich im Verhältnis von $1:1\frac{1}{2}$. Vielmehr scheint dies nur bei jenen Beziehungen Platz zu greifen, wo eine Umkehrung im gleichen Sinne möglich ist, bei Gleichheit, Ähnlichkeit, Identität und paralleler Lage. Denn die Parallele ist mit der Parallele parallel,
 30 wie das Gleiche mit dem Gleichen gleich, und das Ähnliche mit dem Ähnlichen ähnlich. Denn der Parallelismus ist Ähnlichkeit der Lage, wenn man so sagen kann.

Mit diesen Worten also sagt und beweist EUKLID, daß Linien, die einer dritten parallel sind, sich unbedingt so verhalten, daß sie auch unter sich parallel sind. Er selbst nahm die mit der Geraden
 36 parallelen Linien außen an und jene, zu der sie in ähnlicher Lage

*) 1. Axiom S. 302.

**) 21. Prop. Lib. VI.

***) 11. Prop. Lib. V.

sich befinden in der Mitte, damit die Behauptung uns auch durch eine Gemeinvorstellung klar werde. Denn wenn die zu beiden Seiten liegenden Geraden miteinander zusammentreffen, so werden sie unbedingt mit der inmitten liegenden zusammentreffen und nicht mehr mit ihr parallel sein. Es ist aber auch möglich, mit veränderter Lage auf demselben Wege, den der Meister beim vorliegenden Satze

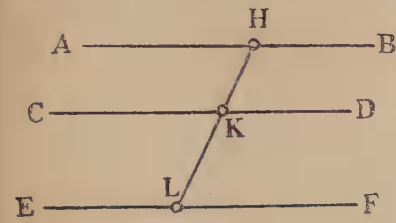


Fig. 101

einschlug, den Beweis zu führen, also z. B. zu AB und CD <die Gerade> EF so parallel zu nehmen, daß die beiden <ersten> oben liegen, 10 AB aber darüber*) und nicht in der Mitte. Denn die sie Schneidende HKL wird beide Winkel HKD und KLF als Wechselwinkel**) gleich bilden. Also sind CD und EF

parallel. Wenn aber jemand behaupten wollte, es seien AH und HB parallel mit CD und folglich seien sie auch miteinander parallel, so werden wir erwidern, daß AH und HB Teile einer einzigen Parallelen sind und nicht zwei. Man muß sich ja die Parallelen ins Unendliche verlängert denken. Verlängert man aber AH, so fällt 20 sie mit HB zusammen: Sie ist also die gleiche wie jene und nicht verschieden von ihr. Folglich sind alle Teile der Parallelen auch ihrerseits parallel mit der Geraden, mit der und deren Teilen die ganze parallel war, also z. B. AH mit KD, und HB mit CK. Denn ins Unendliche verlängert bleiben sie Asymptoten. Zu diesen***) Bemerkungen sehen wir uns notgedrungen veranlaßt wegen der sophistischen Schwierigkeiten und des Verhaltens der jugendlich 27

*) 374, 10—13: Der Text ist hier wieder verdorben, und FRIEDLEIN bemüht sich vergebens um seine Wiederherstellung. An seinen Verbesserungsvorschlag im Apparat ist nicht zu denken. BAROCIUS hat keineswegs frei übersetzt, sondern den richtigen Text und die richtige Figur vor sich gehabt und überliefert. Demzufolge ist mit M und GRYNÆUS nicht *κειμένης*, sondern *κειμένων* zu schreiben. Das sinnlose *ἐκατέρω* oder *ἐκατέρων*, mit dem neben *ἀμφοτέρων* nichts anzufangen ist, ist in *κατωτέρω* zu ändern. PROCLUS liebt es, denselben Gedanken zweimal auszudrücken, erst positiv und dann negativ. So macht er es auch hier. — Zu *οὐκ* werden wir nach BAROCIUS noch ein *λαβόντα* zu ergänzen haben.

**) Was an *οὐκ ἐναλλάξ* Bedenken erregen könnte oder zu beanstanden wäre, ist nicht ersichtlich. FRIEDLEINS Fragezeichen ist höchst überflüssig.

***) 375, 8: Statt des grammatikalisch unzulässigen Dativs *τούτοις* muß natürlich der Akkusativ *ταῦτα* stehen. BAROCIUS übersetzt: *haec adnotavimus*.

unreifen Hörer. Die meisten freuen sich nämlich, wenn sie solche verfängliche Schlüsse entdecken und damit den Vertretern der Wissenschaft überflüssige Mühe bereiten.

Es hat aber keinen Zweck, diesen Satz umzukehren und zu zeigen, daß Linien, die einander parallel sind, auch einer dritten parallel sind. Denn nehmen wir an, die eine ist mit irgendeiner parallel, dann werden diese und die noch übrige von ihnen mit derselben parallel sein, und wir kommen auf eine Wiederholung des Gleichen hinaus.

10 **31. Proposition, 10. Problem:** *Durch einen gegebenen Punkt ist zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen³⁰⁶.*

Es war erforderlich, durch die Ausführungen des Autors nicht bloß die wesentlichen Akzidentien der Parallelen kennenzulernen, sondern durch die geometrischen Methoden auch ihre Entstehung zu untersuchen und zu erkennen, wie eine Parallele zu einer anderen Geraden entsteht. Denn vielfach macht uns der Werdegang eines Objektes sein Wesen klarer. Das erreicht denn auch der Verfasser der „*Elemente*“ durch das vorliegende Problem. Er nimmt nämlich einen Punkt und zieht durch den Punkt eine Gerade, die mit der
 20 Geraden parallel ist. Wir müssen aber voraussetzen, daß es unbedingt notwendig ist, daß der Punkt außerhalb der Geraden liegt. Denn wenn es heißt: Durch einen gegebenen Punkt, so werden wir deshalb nicht zugeben, daß er auf der Geraden selbst liegt. Denn die durch ihn gehende Parallele ist keine von der Geraden verschiedene. Indem er also den Punkt und die Gerade trennte, bekundete er, daß der Punkt außerhalb der Geraden zu nehmen ist. Das machte er beim Satz vom Lot (12. Prop.) durch den Zusatz klar, auf eine gegebene unbegrenzte Gerade von einem gegebenen Punkte aus, der
 30 beiden Problemen gemeinsam; verschieden aber ist bei ihnen, daß von demselben Punkt nicht zwei Lote auf dieselbe Gerade gefällt, und daß durch denselben Punkt nicht zwei mit einer dritten parallele Linien gelegt werden können, weshalb auch der Verfasser der „*Elemente*“ nur so in der Einzahl sagte, es sei eine Gerade zu ziehen, dort eine Senkrechte, hier eine Parallele. Aber dort wurde der Beweis gegeben, hier ist die Sache durch den vorher geführten Beweis klar. Wenn nämlich durch denselben Punkt zwei Parallelen zu einer
 38 anderen Geraden gelegt würden, so wären sie auch unter sich parallel

und würden in dem gegebenen Punkt zusammentreffen, was unmöglich ist.

Man muß aber auch die Unterschiede der beiden Propositionen beachten. Dort hieß es: Von einem gegebenen Punkt aus, hier: Durch einen gegebenen Punkt. Im einen Falle nämlich ist der Punkt der Anfang der gezogenen Linie, und darum geht das Ziehen von ihm aus; im anderen befindet er sich auf der gezogenen Linie selbst und darum führt das Ziehen durch ihn. Denn nicht, als ob die Gerade den gegebenen Punkt schneiden würde, heißt es: Durch ihn, sondern weil sie mit ihm zusammentrifft und ihren Abstand von jener Geraden 10 durch die Entfernung des Punktes und der Geraden bestimmt. Denn die Größe des Abstandes des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden entspricht der Entfernung der Parallelen von dieser.

32. Proposition, 22. Theorem: *Bei jedem Dreieck, dessen eine Seite verlängert wird, ist der Außenwinkel gleich den zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln, und die Innenwinkel eines Dreiecks betragen <zusammen> zwei Rechte³⁰⁷. <Außenwinkel- und Winkelsummen-Satz>.*

Was der Autor im 16. und 17. Theorem beiseite ließ, das ergänzte 20 er in diesem. Denn nicht bloß erfahren wir durch dieses, daß der Außenwinkel größer ist als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel, sondern auch, um wieviel er größer ist. Denn da er den beiden gleich ist, ist er um den Betrag des übrigen größer als jeder der beiden. Wir ersehen daraus nicht bloß, daß zwei beliebige Dreieckswinkel <zusammen> kleiner sind als 2 Rechte, sondern auch um wieviel sie kleiner sind, nämlich um die Größe des übrigen von den dreien. Jene Lehrsätze hatten also eine unbestimmtere Fassung; dieser aber gab beiden die wissenschaftliche Bestimmtheit. Deshalb möchten wir 30 aber jene nicht als überflüssig bezeichnen. Denn sie erwiesen sich uns als nützlich bei vielen Beweisen, vermittels deren wir nun auch diesen Satz beweisen werden. Unsere Erkenntnis schreitet nun einmal notwendigerweise vom Unvollkommenen zum Vollkommenen und gewinnt so den Übergang von unsicheren Versuchen zu den exakten und unwiderlegbaren Aussagen der Wissenschaft.

Unser Autor zog die Parallele außen und bewies so die beiden Thesen. Man kann aber denselben Beweis führen auch ohne die Parallele außen zu ziehen, indem man lediglich die Reihenfolge der 38

Beweise vertauscht. EUKLID bewies nämlich zuerst, daß der Außenwinkel den gegenüberliegenden Innenwinkeln gleich ist, und erledigte hierauf den noch übrigen Teil der Aufgabe. Wir aber wollen den umgekehrten Weg gehen.

- Es sei ABC also das Dreieck, und man verlängere BC bis zum Punkte E , nehme auf BC den Punkt F , ziehe nun AF und ziehe durch F die Parallele FD zu AB . Da nun FD parallel ist zu AB und mit ihnen AF und BC sich schneiden, so sind die Wechselwinkel gleich, und der
- 10 Außenwinkel ist gleich dem Innenwinkel. Der ganze Winkel AFC ist also gleich den Winkeln $FAB + ABF$. In ähnlicher Weise zeigen wir, nachdem wir die Parallele gezogen, daß auch Winkel AFB gleich ist Winkel $FAC + \angle ACF$. Die zwei Winkel AFB und AFC sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks ABC . Die drei sind also gleich 2 Rechten, den Winkeln $AFB + AFC$. Aber auch Winkel
- 20 ACF und Winkel ACE sind gleich 2 Rechten. Man nehme nun den gemeinsamen Winkel ACF weg. Dann ist also der übrigbleibende Außenwinkel gleich den gegenüberliegenden Innenwinkeln.

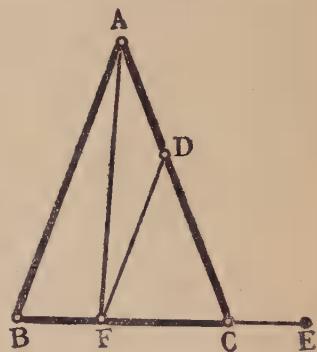


Fig. 102

- Dieser Beweis wurde also auf die angegebene Weise durchgeführt. Der ... Peripatetiker EUDEMOS führt die Entdeckung dieses Theorems, daß in jedem Dreieck die Innenwinkel 2 Rechte ausmachen, auf die Pythagoreer zurück. Er behauptet, sie hätten den Beweis folgendermaßen erbracht. Es sei ABC das Dreieck, und man ziehe durch A die Parallele DE zu BC . Da
- 30 nun BC und DE parallel, und die Wechselwinkel gleich sind, so ist also Winkel $DAB = \text{Winkel } ABC$, und Winkel $EAC = \text{Winkel } ACB$. Dazu füge man den gemeinsamen Winkel BAC . Die Winkel DAB , BAC und CAE , das sind die Winkel $DAB + BAE$, das sind die 2 Rechten, sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks ABC . Die drei Winkel des Dreiecks sind folglich <zusammen>
- 39 gleich 2 Rechten. Das ist der Beweis der Pythagoreer.

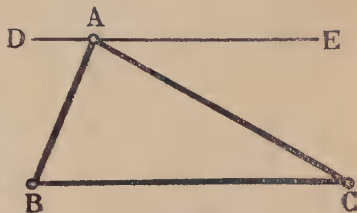


Fig. 103

Nun müssen wir aber auch die Umkehrungen dieses Satzes des Verfassers noch angeben. Er vollzieht aber die Umkehrung mit zwei Gliedern in eines, da er nach Thesis und Datum zusammengesetzt ist. Denn letzteres ist zweifach: Das Dreieck nämlich und die eine verlängerte Seite und ebenso erstere: Denn der eine Punkt ist, daß der Außenwinkel gleich ist den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln, der andere, daß die drei Innenwinkel $\langle$ zusammen $\rangle$ 2 Rechte betragen. Setzen wir nun voraus, der Außenwinkel sei den gegenüberliegenden Winkeln gleich, so beweisen wir, daß eine Seite verlängert wurde, und daß der Außenwinkel auf einer Geraden 10 liege mit einer der Dreiecksseiten; gehen wir aber davon aus, daß die drei Innenwinkel 2 Rechte betragen, so zeigen wir, daß die Figur ein Dreieck ist. Und so erscheint die ganze Thesis in ganzer Um-

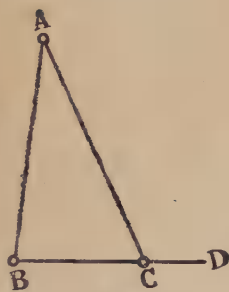


Fig. 104

kehrung als Datum. Es sei also ABC das Dreieck, und der Außenwinkel ACD gleich den gegenüberliegenden Innenwinkeln. Dann behaupte ich, daß BC bis D verlängert, und BCD eine einzige Gerade ist. Da nämlich Winkel ACD den gegenüberliegenden Innenwinkeln gleich ist, nehme man den gemein- 20 samen Winkel ACB noch hinzu. Die Winkel ACD und ACB sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks ABC. Aber diese drei Winkel des Dreiecks ABC betragen $\langle$ zusammen $\rangle$

2 Rechte. Wenn aber zwei aufeinanderfolgende Gerade, die nicht auf derselben Seite liegen, an einer Geraden und dem auf ihr liegenden Punkte die Nebenwinkel in Größe von 2 Rechten bilden, dann

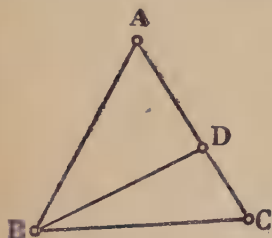


Fig. 105

liegen die Geraden miteinander auf einer Geraden. BC bildet also mit CD eine Gerade. Wiederum sei ABC irgendeine Figur, 30 von der nur drei Winkel gegeben sind, nämlich $\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ B und $\sphericalangle$ C. Dann behaupte ich, daß sie ein Dreieck ist und AC eine Seite davon. Denn man ziehe die Verbindungslinie BD. Da nun von beiden Dreiecken ABD und DBC die drei Winkel je gleich 2 R sind, wovon die der Figur ABC

gleich 2 R sind, so sind folglich die übrigen Winkel ADB und CDB gleich 2 R. Sie liegen aber an der Geraden DB. Also liegt DC mit 39

DA in einer Geraden. Ist nun die Figur, deren Innenwinkel 2 Rechte betragen, geradlinig, dann ist sie auf jeden Fall ein Dreieck. Man könnte nämlich finden, daß auch eine Figur, die aus Kreislinien besteht, Innenwinkel gleich zwei Rechten bildet. Es sei nämlich das Quadrat ABCD <gegeben>, und man beschreibe über AB nach innen einen Halbkreis <E> und über den anderen Seiten nach außen die Halbkreise G, F, H. Die von den Halbkreisen umschlossene Figur hat nun also die zwei
 10 Winkel GAE und EBH im Betrage von 2 R gleich den Winkeln CAB und DBA (das ist in den Forderungen bewiesen worden), und einzig diese Winkel sind in dieser Figur. Es gibt also eine Figur, die kein Dreieck ist, deren Innenwinkel aber doch 2 Rechte betragen. Soviel über die Umkehrungen.

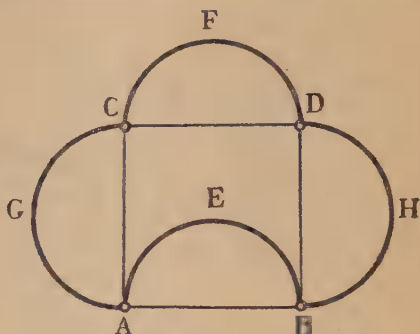


Fig. 106

20 Nachdem wir nun aber festgestellt haben, daß die Winkel eines jeden Dreiecks <zusammen> 2 Rechte betragen, müssen wir eine Methode erzielen, durch die wir herausbekommen, wie viele Rechte die Winkel auch aller anderen geradlinigen Vielecke betragen, der Vierecke, Fünfecke und aller folgenden Vielseite. Da muß man nun zuerst wissen, daß jede geradlinige Figur in Dreiecke aufgelöst werden kann. Denn die Konstruktion aller Figuren geht vom Dreieck aus, was auch PLATON behauptete, indem er lehrte, daß jede ebene Fläche aus Dreiecken sich zusammensetzt*). Man kann aber jede zerlegen in Dreiecke, deren Zahl um 2 kleiner ist als die der
 30 eigenen Seiten; wenn es ein Viereck ist, in 2, wenn ein Fünfeck, in 3, wenn ein Sechseck, in 4. Denn setzt man zwei Dreiecke zusammen,
 32 so ist sofort das Viereck fertig. Der Unterschied aber zwischen der

*) Das an sich klare, wenn auch von der gewöhnlichen Terminologie abweichende und etwas wortreiche PLATONZitat (*Tim.* 53c) sollte weder einem Philologen, noch einem Mathematiker, noch viel weniger beiden in Personalunion viel Kopferbrechen verursachen. Es kann nichts anderes heißen, als wie oben übersetzt wurde. FRIEDLEIN stellt nicht PLATON, sondern sich ein schlechtes Zeugnis aus, wenn er dazu bemerkt: *Ego sanum hunc locum esse negaverim, etsi idem in Platonis Timaeo legitur.*

Zahl der zusammengesetzten Dreiecke und der eigenen Seiten der zuerst zusammengesetzten Figur ist bestimmend auch für alle weiteren Zusammensetzungen. In jedem Vielseit ist also die Zahl der Seiten um 2 größer als die der Dreiecke, in die es zerfällt. In jedem Dreieck betragen aber die Winkel, wie gezeigt worden, <zusammen> 2 R. Da also die Winkelsumme das Doppelte der zusammengesetzten Dreiecke selbst beträgt*), so bietet sie die Anzahl der rechten Winkel, die ein jedes Vieleck bildet. Deshalb betragen in jedem Vierseit die Winkel 4 R; denn es setzt sich aus zwei Dreiecken zusammen; in jedem Fünfeck aber 6 R usw. 10

Das ist der eine Gewinn, den wir aus diesem Lehrsatz hinsichtlich aller geradlinigen Vielecke ziehen. Den anderen, der sich daraus ergibt, wollen wir kurz mitnehmen, daß nämlich in jeder geradlinigen Figur bei einmaliger Verlängerung jeder Seite die Außenwinkel <zusammen> 4 R betragen³⁰⁸). Denn die Zahl der beiderseitigen rechten Winkel muß das Doppelte der Zahl der Seiten betragen, da an jeder <Seite> Winkel gleich 2 Rechten entstehen. Zieht man nun die den Innenwinkeln gleiche Winkelsumme ab, dann kommen für die übrigen Außenwinkel 4 R heraus. Wenn z. B. die Figur ein Dreieck ist, dessen einzelne Seiten einmal verlängert werden, so 20 entstehen innen und außen Winkel mit der Winkelsumme von 6 R, die Innenwinkel betragen <zusammen> 2 R, die übrigen Außenwinkel also 4 R. Beim Vierseit machen alle zusammen 8 R aus; denn ihre Zahl ist das Doppelte der Seiten. Nun betragen die Innenwinkel davon 4 R, und somit betragen auch die Außenwinkel weitere 4 R. Beim Fünfeit betragen alle 10 R, die Innenwinkel 6, die Außenwinkel die 4 übrigen R<echten>. Und so geht es in ähnlicher Weise ins Unendliche fort.

Zu diesen Ergebnissen wollen wir noch die weiteren Folgerungen ziehen, daß nach diesem Lehrsatz in jedem gleichseitigen Dreieck 30 jeder Winkel zwei Drittel eines Rechten beträgt, in jedem gleich- 31

*) Die obige Übersetzung dürfte die beste Erklärung der etwas schwierigen und umstrittenen Stelle sein. Schwierigkeiten bereiten die beiden Genitive und ihre Beziehung zu ἀριθμός. αὐτῶν τῶν συνθετῶν τριγώνων ist als gen. comp. zu διπλάσιος zu beziehen, wofür schon das betonte αὐτῶν spricht. Für τῶν γωνιῶν ἀριθμός hatte PROKLUS klarer geschrieben: ὁ τῶν ὀρθῶν ἀριθμός. Aber da die Alten die Winkel nicht wie wir nach Graden, sondern nach Rechten bestimmten und bemaßen, so mag der ungenaue Ausdruck im Sinne von Winkelsumme und nicht von Winkelmaßzahl immerhin verständlich sein. Am Text ist nichts zu ändern.

schenkeligen, wenn der Winkel an der Spitze ein Rechter ist, die beiden anderen die Hälfte eines Rechten betragen, wie beim Halbkvadrat³⁰⁹), daß im ungleichseitigen Halbdreieck, das entsteht, wenn man im gleichseitigen Dreieck von irgendeinem Winkel aus auf die gegenüberliegende Seite das Lot fällt, der eine Winkel einen Rechten, der andere, der schon im gleichseitigen Dreieck vorhanden war, zwei Drittel, und folglich der übrige ein Drittel eines Rechten beträgt. Denn die drei zusammen müssen 2 Rechte betragen. Das vermerke ich nicht nur so beiläufig; es bereitet uns vielmehr vor auf die Lehre 10 des „*Timaios*“.

Es verdient aber auch hervorgehoben zu werden, daß der Satz, die Dreieckswinkel betragen <zusammen> 2 Rechte, jedem Dreieck an und für sich zukommt. Deshalb hat auch ARISTOTELES dies Beispiel zur Hand in den „*Traktaten über den Beweis*“, wo er von der Kategorie des Fürsichseins handelt. Wie also jeder Figur die Begrenzung an sich und zuerst eignet, so eignet jedem geradlinigen Dreieck, wenn auch nicht jeder Figur, daß die Innenwinkel <zusammen> 2 Rechte ausmachen. Es scheint sich uns aber die Wahrheit dieses Theorems auch auf Grund der Gemeinideen <Vorstellungen> aufzudrängen. Denken wir uns nämlich eine Gerade und an ihren Endpunkten irgendwelche Senkrechte, die sich dann zur Bildung eines Dreiecks zusammenneigen, so sehen wir, daß sie in dem Maße, als sie sich zusammenneigen, die Rechten, die sie mit der Geraden bildeten, vermindern. Was sie also dort wegnahmen, gewinnen sie durch die Vereinigung in der Spitze wieder dazu, und so bilden sie notwendigerweise die drei Winkel gleich 2 Rechten.

33. Proposition, 23. Theorem: *Gerade, die gleiche und parallele Gerade in gleicher Richtung verbinden, sind ebenfalls gleich und parallel*³¹⁰).

30 Von diesem Lehrsatz sagten wir, er bewege sich auf dem Grenzgebiet der Untersuchung über die Parallelen und die Parallelogramme. Denn er scheint ein Akzidens der gleichen und parallelen Geraden zu bezeichnen und lehrt die latente Entstehung der Parallelogramme. Ein Parallelogramm entsteht nämlich aus den von Anfang an parallelen Linien und aus deren Verbindungslinien, die sich ebenfalls als gleich und parallel erweisen. Deshalb betrachtet auch EUKLID unmittelbar darnach, als ob das Parallelogramm bereits gebildet wäre, die wesentlichen Akzidentien dieser Flächen. Das ist also klar.

Wir müssen aber auch die exakte Fassung der Proposition eingehend erwägen. Fürs erste begnügte er sich nicht mit der Forderung der Gleichheit der Verbindungslinien. Denn die Linien, die die gleichen Parallelen miteinander verbinden, sind nicht in jedem Falle gleich, wenn sie nicht auch <selbst> parallel sind. Denn nimmt man in einem gleichschenkeligen Dreieck auf einer der gleichen Seiten einen Punkt und legt durch ihn eine Parallele zur Basis, so verbinden die Parallele zur Basis und diese selbst gleiche Linien, aber sie sind selbst nicht gleich. Denn diejenigen, die an der Spitze des Dreiecks zusammen- 10 treffen, sind nicht parallel. Fürs zweite nahm er auch nicht an, daß der Parallelismus der gegebenen Geraden, auch wenn sie ungleich sind, Parallelismus der Verbindungslinien bewirke. Denn bei der an dem gleichschenkeligen Dreieck vorgenommenen Konstruktion ist auch dies klar. Die gezogene Gerade und die Basis sind nämlich parallel, aber die sie verbindenden Linien sind nicht parallel. Es sind nämlich Teile der Seiten des gleichschenkeligen Dreiecks. Es bedarf also zur Gleichheit der Verbindungslinien der parallelen Lage

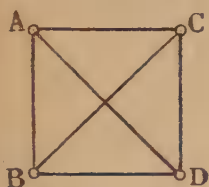


Fig. 107

der verbundenen Geraden und zur Lage der Parallelen der Gleichheit jener. Deshalb nahm der Autor beide Punkte, bei den verbundenen 20 Linien an, damit er beide auch an den verbindenden Geraden nachweise, daß sie miteinander gleich und parallel sind. Drittens sei dazu noch bemerkt, daß selbst <dann>, wenn die Geraden gleich und parallel sind, nicht auch in jedem

Falle die sie verbindenden Linien gleich und parallel sind. Denn stellen wir die Verbindungen nicht in gleicher Richtung her, so können sie unmöglich parallel sein, da sie einander schneiden: Gleichheit 30 aber ist zuweilen möglich, zuweilen unmöglich. Nimmt man nämlich ein Quadrat oder ein Rechteck wie ABCD und zieht man die Verbindungslinien AD und BC, so sind die Diagonalen gleich, aber nicht parallel. Und doch verbinden sie die gleichen und parallelen gegenüberliegenden Seiten der genannten Flächen. Nimmt man aber eine Raute oder ein Rhomboid, so sind deren Diagonalen nicht bloß nicht parallel, sondern nicht einmal gleich. Denn da 39

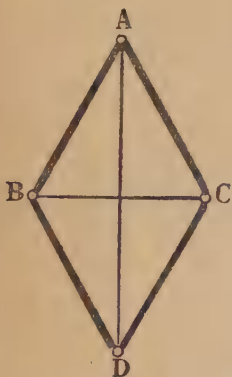


Fig. 108

AB = CD und AC gemeinsam ist, so ist Winkel BAC dem Winkel ACD ungleich, und auch die Basen sind ungleich. Mit Recht fordert also der Autor, daß die die gleichen Parallelen verbindenden Geraden die Verbindung in derselben Richtung herstellen, damit wir, wenn AC und BD als gleich und parallel gegeben sind, nicht AD und BC als Verbindungslinien nehmen, sondern AB und CD. Denn diese können wir als gleich und parallel nachweisen, jene hingegen als parallel niemals, als gleich beim Quadrat und Rechteck, aber niemals bei der Raute und dem Rhomboid; denn es wurde das Gegenteil
 10 davon bewiesen, daß die Diagonalen ungleich sind wegen der Ungleichheit der inneren, auf derselben Seite liegenden Winkel.

34. Proposition, 24. Theorem: *In Parallelogrammen sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich, und die Diagonale halbiert die Parallelogramme³¹¹).*

Der Autor übernimmt aus dem vorausgehenden Theorem das Parallelogramm als bereits bestehend, um seine ersten Akzidentien und die bestimmenden Bedingungen seiner eigenen Konstruktion zu erforschen. Es sind aber folgende: Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten und Winkel, und Halbierung der (Grund)flächen durch die
 20 Diagonalen. Mit Bezug hierauf ist nämlich gesagt worden: Und die Diagonale halbiert sie. Es ist also die (Grund)fläche das Ganze, das halbiert wird, nicht die Winkel, durch die die Diagonale geht. Diese drei Stücke kommen also den Parallelogrammen an sich zu: Die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten, die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel, die Halbierung der Flächen durch die Diagonalen. Du siehst, wie er von allen Seiten her ihre Eigenschaften zu erspüren suchte, von den Seiten, den Winkeln und den (Grund)flächen. Da es nun aber 4 Parallelogramme gibt, die er in den „Definitionen“ auch bestimmte, das Quadrat, das Rechteck, die Raute, das Rhomboid,
 30 so mag es angezeigt sein, soviel zu bemerken: Wenn wir die 4 Arten einteilen in rechtwinkelige (und nicht rechtwinkelige)*), so werden wir finden, daß ihre Diagonalen nicht bloß die Flächen halbieren, sondern daß auch die Diagonalen selbst gleich sind bei <Parallelogrammen mit> rechten Winkeln — andernfalls sind sie ungleich, wie
 35 in dem vorausgehenden Theorem bemerkt wurde. Teilen wir sie aber

*) 388, 17. 21: die Textergänzung nehme ich beide Male aus BAROCIUS herüber.

in gleichseitige (und ungleichseitige)*), so werden wir wiederum finden, daß bei den gleichseitigen nicht bloß die (Grund)flächen durch die Diagonalen geteilt werden, sondern auch die Winkel, durch die sie gehen. Denn beim Quadrat und bei der Raute halbieren die

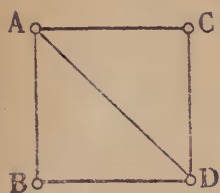


Fig. 109

Diagonalen die Winkel, nicht bloß die (Grund)flächen, beim Rechteck aber und beim Rhomboid nur die Flächen.

Es sei z. B. ABCD das Quadrat oder die Raute, und die Diagonale AD. Da nun AB und BD gleich sind AC und CD: Denn es handelt 10

sich um gleichseitige Figuren, die Winkel ABD und ACD als Gegenwinkel gleich sind, und die Basis gemeinsam ist, so sind alle Stücke allen gleich, so daß auch die Winkel BAC und CDB halbiert werden. Wiederum sei dieselbe Figur ein Rechteck oder ein Rhomboid. Wenn nun Winkel CAB



Fig. 110

halbirt würde, aber Winkel CAD gleich ist Winkel ADB, so wird auch Winkel BAD gleich sein Winkel ADB, so daß auch $AB = BD$. Sie sind aber ungleich. Zusammenfassend kann man sagen: Beim Quadrat sind die Diagonalen 20

werden von den Diagonalen halbiert wegen der Gleichheit der Seiten, und die (Grund)fläche wird durch die Diagonale in zwei gleiche Teile zerlegt wegen der gemeinsamen Eigenschaft der Parallelogramme. Beim Rechteck aber sind die Diagonalen gleich, die Winkel hingegen werden durch die Diagonalen nicht halbiert; die Teilung der (Grund)flächen in gleiche Teile ist aber auch diesem eigen, insofern es ein Parallelogramm ist. Bei der Raute hinwiederum sind die Diagonalen ungleich, doch werden von ihnen nicht bloß die (Grund)flächen halbiert, weil sie ein Parallelogramm ist, sondern auch 30 die Winkel, weil sie gleichseitig ist. Bei der letzten Figur, dem Rhomboid, sind die Diagonalen ungleich, weil es nicht rechtwinkelig ist, die Winkel werden in ungleiche Teile von diesen zerlegt, weil es nicht 33

*) Mit FRIEDLEINS Text ist im folgenden nichts anzufangen. Ich halte mich an BAROCIUS, dem auch TAYLOR folgt. In *πετέρχεσθαι* ist wohl nur eine entstellte Dittographie von *μεμερίσθαι* zu erblicken; das Wort ist somit auszumerzen und der Gedankenstrich hernach zu tilgen, so daß das Folgende von *ἀναμνήσομεν* abhängt. Statt *καί* (Z. 15) ist δ zu lesen. Natürlich muß es oben Z. 12 heißen: *τὰ μὲν ἔστι καθόλου, τὰ δὲ οὐ*.

gleichseitig ist, nur die Flächen zu beiden Seiten der Diagonalen sind gleich, da es ein Parallelogramm ist. Diese Ausführungen lassen den Unterschied in der Einteilung der 4 Arten der Parallelogramme erkennen. Wir dürfen aber nicht unterlassen, festzustellen, daß in diesem Lehrsatz eine treffliche Regel zutage tritt, daß nämlich von den Lehrsätzen die einen allgemein sind, die anderen nicht. Was wir mit jeder dieser Bezeichnungen sagen wollen, daran werden wir erinnern bei der Gliederung der Thesis, die zum Teil allgemein gehalten ist, zum Teil nicht mehr so. Nun möchte es aber doch scheinen,

10 daß jeder Lehrsatz allgemein, und jeder Beweis unseres Autors von solcher Art sei. So scheint z. B. auch hier ganz allgemein gesagt zu sein, nicht bloß von allen Parallelogrammen, daß sie die gegenüberliegenden Seiten oder Winkel gleich haben, sondern auch, daß die Diagonale jedes halbiere. Aber gleichwohl, behaupten wir, erweisen sich die einen Theoreme als allgemeine, die anderen aber nicht. Denn anderes pflegt man als allgemein zu bezeichnen, was auf alle Objekte zutrifft, von denen es ausgesagt wird, anderes das, was alle Gegenstände in sich begreift, denen dasselbe Akzidens zukommt. Denn es ist ein Universale, daß in jedem gleich-

20 schenkeligen Dreieck die drei Winkel <zusammen> 2 Rechte betragen, weil sich das bei allen gleichschenkeligen Dreiecken bewahrheitet. Es ist aber auch ein Universale, daß in jedem Dreieck die drei Winkel <zusammen> 2 Rechte ausmachen, weil es alle Objekte in sich begreift, denen das an sich zukommt. Deshalb sagen wir auch, dem Dreieck komme an erster Stelle der Nachweis zu, daß seine Winkel 2 Rechte betragen. Indem wir nun in diesem Sinne die einen Lehrsätze als allgemein bezeichnen, die andern nicht, behaupten wir von diesem Theorem, die eine Thesis enthalte ein Universale, die andere nicht. Daß nämlich die gegenüberliegenden

30 Seiten und Winkel gleich sind, ist ein Universale: Denn das trifft nur auf die Parallelogramme zu; daß aber die Diagonale die (Grund)fläche halbiere, ist kein Universale, weil es nicht alle Objekte in sich begreift, an denen dies Akzidens zu beobachten ist. Denn es kommt auch den Kreisen und Ellipsen zu. Es scheinen aber die ersten Begriffe von den Dingen von dieser mehr partikulären Art zu sein, bei weiterer Entwicklung dann aber das Ganze zu umfassen. Denn nachdem die Alten bemerkt hatten, daß der Durchmesser die Ellipse, den Kreis und das Parallelogramm halbiere, beobachteten

39 sie noch obendrein das Gemeinsame in diesen Erscheinungen. Es

entgeht aber, bemerkt ARISTOTELES, dem, der das Nichtuniversale als ein Universale nachweisen will, diese Erkenntnis, weil das Gemeinsame, dem das Akzidens zukommt, namenlos ist. Denn was den Zahlen, den Raumgrößen, den Bewegungen und Tönen, denen allen eine Wechselbeziehung zukommt, gemeinsam ist, kann man nicht sagen. Und was der Ellipse, dem Kreis und dem Parallelogramm gemeinsam ist, ist schwer wiederzugeben. Denn die eine Figur ist geradlinig, die andere rund, die dritte gemischt. Darum glauben wir, wer beweise, daß die Diagonale jedes Parallelogramm halbiere, beweise ein Universale, weil wir das Gemeinsame, auf dem seine 10 Wahrheit beruht, nicht einsehen. Dieser Satz ist also auch bei den Parallelogrammen aus dem angegebenen Grunde kein Universale von der Art, wohl aber jener andere, daß in jedem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich sind. Denn legt man eine Figur mit gleichen gegenüberliegenden Seiten und Winkeln zu-

grunde, so kann man diese als Parallelogramm nachweisen. Es sei ABCD eine solche Figur und AD die Diagonale. Da nun AB und BD gleich CD und AC, die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich 20 und die Basis gemeinsam ist, so sind alle Stücke allen gleich. Wenn also Winkel



Fig. 111

$\angle BAD = \angle ADC$ und $\angle ADB = \angle CAD$, dann ist demnach AB zu CD und AC zu BD parallel, so daß also ABCD ein Parallelogramm ist. Soviel hiervon.

Es scheint aber der Autor zur Bildung des Namens Parallelogramm durch das vorausgehende Theorem veranlaßt worden zu sein. Denn nachdem er bewiesen hatte, daß die Geraden, die die gleichen und parallelen Linien in derselben Richtung verbinden, selbst gleich und parallel sind, so ist klar, daß er die gegenüberliegenden Seiten 30 als parallel bezeichnete, die verbindenden sowohl wie die verbundenen. Die von Parallelen umschlossene Figur nannte er dann mit Recht Parallelogramm, wie er die von Geraden umschlossene Figur geradlinig (*euthygramm*) nannte.

Der Verfasser der „*Elemente*“ rechnet offenbar das Parallelogramm zu den Vierseiten. Es ist aber der Überlegung wert, ob nicht jede geradlinige Figur mit gerader Seitenzahl, wenn sie gleiche Seiten und Winkel aufweist, als Parallelogramm zu bezeichnen ist. Denn auch bei ihr ist Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten und Winkel 39

- vorhanden, wie z. B. beim Sechseck, Achteck und Zehneck. Wenn man sich z. B. das Sechseck ABCDEF denkt und die Verbindungslinie AC zieht, so kann man beweisen, daß AF zu CD parallel ist. Denn Winkel bei B beträgt wie jeder Winkel eines Sechsecks, wenn es gleichwinkelig ist, $\frac{4}{3}$ eines Rechten und $AB = BC$, denn das Sechseck ist gleichseitig. Jeder der Winkel BAC und BCA ist also der 3. Teil eines Rechten; folglich sind die Winkel FAC und ACD Rechte, so daß also
- 10 AF parallel ist zu CD. In ähnlicher Weise werden wir auch die übrigen gegenüberliegenden Seiten als parallel erweisen, und ebenso liegen die Dinge beim Achteck usw. Wenn nun jede von einander gegenüberliegenden Parallelen umschlossene Figur ein
- Parallelogramm ist, dann ist die Idee des Parallelogramms auch in den Nichtvierseiten verwirklicht. Die Einschränkung ist freilich klar, daß unserem Autor zufolge jedes Parallelogramm ein Vierseit ist: Das zeigt er deutlich hauptsächlich in jenem Lehrsatz, wo er ausführt,
- 20 ein Parallelogramm, das dieselbe Basis habe und zwischen denselben Parallelen liege, sei doppelt so groß wie das betreffende Dreieck³¹². Das trifft nämlich nur bei den Vierseiten zu.

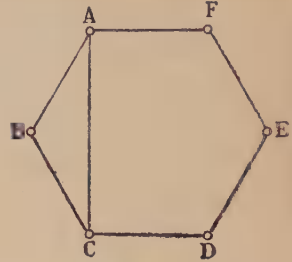


Fig. 112

35. Proposition, 25. Theorem: *Parallelogramme mit derselben Basis und innerhalb derselben Parallelen sind einander gleich*³¹³.

- Wie wir sagten, von den Lehrsätzen seien die einen allgemeiner, die anderen partikulärer Art, und hinzufügten, welchen Sinn diese Scheidung habe, und wie wir zeigten, daß die einen einfach, die anderen zusammengesetzt seien und was beides bedeute, so sagen wir einer anderen Einteilung zufolge, die einen seien ortsbestimmend (*τοπικά*),
- 30 die anderen nicht. Ortsbestimmend nenne ich aber diejenigen, denen dasselbe Akzidens an einem ganzen Ort zukommt; und unter Ort verstehe ich die Lage einer Linie oder Fläche, die ein und dasselbe Akzidens zur Folge hat. Von den ortsbestimmenden Lehrsätzen beziehen sich die einen auf Linien, die anderen auf Flächen. Und da von den Linien die einen eben, die anderen sphärisch (räumlich) sind (eben sind jene, die man sich einfach in der Ebene vorstellt wie die Gerade, sphärisch aber jene, deren Ursprung sich aus
- 38 dem Schnitt einer Körperfigur ergibt, wie bei der zylindrischen

Schraubenlinie und den konischen Linien), so möchte ich sagen, auch von den auf Linien bezüglichen Lehrsätzen haben die einen einen planimetrischen, die anderen einen sphärischen Ort*).

Das vorliegende Theorem ist nun ortsbestimmend, und zwar gehört es zu denen, die sich auf planimetrische Örter bei Linien beziehen. Denn der ganze Zwischenraum zwischen den Parallelen ist der Ort der über derselben Basis gebildeten Parallelogramme, deren Gleichheit der Autor nun eben beweist. Von den sogenannten sphärischen ortsbestimmenden Theoremen aber diene folgendes als Beispiel: Die zwischen den Asymptoten in die Hyperbel eingeschriebenen 10 Parallelogramme sind gleich³¹⁴). Daß die Hyperbel eine sphärische Linie ist, ist ja klar. Denn sie ist ein Kegelschnitt.

Diese Art von Lehrsätzen, sagt GEMINOS, verglich CHRYSIPP den Ideen. Denn wie jene das Werden des Unbegrenzten in bestimmte Grenzen einschließen, so erfolgt auch in diesen die Umgrenzung des Unbegrenzten in bestimmten Örtern. Und vermöge dieser Umgrenzung tritt die Gleichheit in Erscheinung. Denn die Höhe der Parallelen, die sich gleich bleibt, während man sich Parallelogramme von unbeschränkter Zahl über derselben Basis denkt, macht alle einander gleich.

20

Das vorliegende ist das erste ortsbestimmende Theorem, das der Verfasser erwähnte, und es scheint, nachdem er in Anbetracht des 22

*) Der Text im vorausgehenden Passus bereitet Schwierigkeiten, was FRIEDLEIN durch das Fragezeichen nach *διαγοόμενοι* andeutet, ohne sich weiter darüber auszulassen. *Διαγοόμενοι* kann es in der Tat im dem Relativsatz nicht heißen. Wir haben die Wahl zwischen *διαγοούμεν*, *διαγοόμεθα* und *διαγοόμενα*, zu welch letzterem *ἐστὶ* zu ergänzen wäre. Ich entscheide mich für die letztere Änderung als die einfachste. BAROCIUS ließ von *προσετίθμεν* den folgenden mit *καὶ ὅτι* eingeleiteten Satz abhängen und übersetzte: *et quemadmodum haec dividentes subjungebamus, quod etiam alia quidem simplicia, alia vero composita*. Diese Beziehung ist aus sachlichen und sprachlichen Gründen falsch. Sie verkehrt die tatsächliche Reihenfolge der gebotenen Unterscheidungen. Denn die Scheidung in einfache und zusammengesetzte Theoreme behandelte PROKLUS bereits in der 5. Proposition, die in allgemeine und partikuläre erst in der vorausgehenden. PROKLUS faßt in dem komparativen Satzgebilde drei Unterscheidungen von Lehrsätzen zusammen: zwei gibt er im Vordersatz, die dritte fügt er im Hauptsatz hinzu. Somit teilt sich der Vordersatz nicht in drei Glieder mit den Verben *ἐλέγομεν*, *προσετίθμεν*, *ἐπεδείκνυμεν*, sondern in zwei, deren zweites mit *καὶ ὅτι* beginnt. Die zwei Glieder sind im wesentlichen konzinn gebaut: an die Scheidung schließt sich jeweils noch ein weiterer klärender Satz, im ersten Glied *καὶ ὃν τρόπον προσετίθμεν*, im zweiten Glied heißt es kürzer einfach *καὶ τί τούτων ἑκάτερον*.

elementaren Charakters seines Werkes die Lehrsätze in buntem Wechsel auf alle Gliederungen verteilt, dürfte er recht daran getan haben, auch diese Art derselben nicht zu übergehen. Wenn er aber hier, wo von den geradlinigen Figuren die Rede ist, Lehrsätze über planimetrische Örter bei Geraden tradiert, so wird er im III. Buch bei der Behandlung des Kreises und seiner Akzidentien uns die Kreislinie als Bestandteil der Theoreme über planimetrische Örter vorführen. Von der Art sind unter ihnen die folgenden: Die Winkel in demselben Segment sind einander gleich und: Die Winkel im Halbkreis sind Rechte³¹⁵). Denn die Winkel, die sich mit derselben Basis in unbeschränkter Zahl an der Peripherie bilden lassen, erweisen sich als gleich³¹⁶). Das*) ist ein Analogon zu den Dreiecken und Parallelogrammen über derselben Basis.

Das ist also die Art der in unmittelbarer Folge zu untersuchenden Lehrsätze, die von den alten Mathematikern als „*topisch*“ bezeichnet wurden. Bei den Laien auf dem Gebiete dieser Wissenschaft möchte es aber höchste Verwunderung erregen, wenn Parallelogramme über derselben Basis einander gleich sind. Denn wenn die Länge der über derselben Basis entstehenden Flächen ins Unendliche sich ausdehnt
 20 (soweit wir nämlich die Parallelen verlängern, soweit können wir auch die Länge der Parallelogramme ausdehnen), so möchte mancher fragen, wie denn bei solchem Geschehen die Gleichheit der Flächen bestehen kann? Wenn nämlich die Breite dieselbe (denn die Basis ist nur eine), die Länge aber größer ist, muß dann nicht auch die Fläche größer sein? In der Tat gehört dieser Lehrsatz und der später folgende über das Dreieck zu den sogenannten *paradoxen Theoremen* in der Mathematik. Denn auch die Mathematiker behandeln das Kapitel von den sogenannten Paradoxien wie die Stoiker bei den Beweisen, und sie rechnen auch dieses Theorem zu dieser Gattung.
 30 Es verblüfft allerdings die große Menge auf der Stelle, wenn die Länge trotz ihrer Vervielfachung bei derselben Basis die Gleichheit der Flächen nicht aufhebt. Gleichwohl**) ist zu sagen, daß die Gleichheit und Ungleichheit der Winkel von größter Bedeutung ist für die Vergrößerung oder Verkleinerung des Flächeninhalts. Denn je ungleicher
 35 wir die Winkel machen, umsomehr verkleinern wir den Flächeninhalt,

*) 396, 7 Es ist wohl nicht mit M und GRYNAEUS ἐκείνα, sondern mit C ἐκείνο zu lesen.

**) 397, 6 statt des sinnlosen ὁμοίως ist natürlich mit BAROCIUS ὁμῶς zu lesen.

vorausgesetzt natürlich, daß Länge und Breite gleich bleiben. Es bedarf also der Vergrößerung der Länge, damit wir die Gleichheit beibehalten. Es sei zum Beispiel ABCD*) ein beliebiges Parallelogramm, und man verlängere AC ins Unendliche. Dieses sei nun gerade rechtwinkelig, und man errichte über der Basis BD ein zweites BEFD. Daß nun die Länge größer geworden, ist klar. Denn BE ist größer als die Senkrechte AB beim Winkel A. Aber

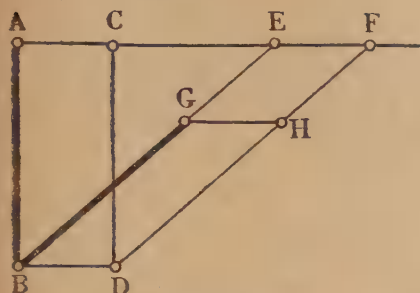


Fig. 113

das war unbedingte Notwendigkeit. Denn die Winkel des Parallelogramms BEFD sind ungleich geworden, die einen spitz, die anderen stumpf. Dies ist die Folge davon, daß die Seite BE sich gewissermaßen mit BD vereinigen will und den Flächenraum einschränkt. Denn man nehme $BG = AB$ beliebig und die Parallele GH zu BD durch den

Punkt G. Dann ist also die Länge <Umfang> von BDHG gleich der Länge <Umfang> von ABCD und die Breite ist die gleiche, aber die Fläche ist geringer als die ursprüngliche, nämlich um GEFH. Die Ungleichheit der Winkel verkleinerte also die (Grund-) Fläche; die Vergrößerung der Länge hingegen, ergänzte wieder, was jene hinwegnahm und wahrte so die Gleichheit der Flächenräume. Die Grenze aber für die Vergrößerung der Länge ist der Ort der Parallelen. Sind nämlich beide Parallelogramme rechtwinkelig, so erweist sich das Quadrat größer als das Rechteck³¹⁷); sind sie aber beide gleichseitig, so erweist sich das rechtwinkelige größer als das nichtrechtwinkelige³¹⁸). Denn die Rechtwinkeligkeit und die Gleichheit der Seiten sind entscheidend für die Vergrößerung der (Grund)fläche. Daher erweist sich das Quadrat als größer denn alle Figuren von gleichem Umfang, das Rhomboid aber ist kleiner als alle anderen. Doch das werden wir in anderem Zusammenhange zeigen. Denn es eignet sich mehr für die Definitionen des II. Buches³¹⁹). Was aber das vorliegende Theorem anlangt, so muß man wissen, daß er <EUKLID>, wenn er von Gleichheit der Parallelogramme spricht, ihren Flächeninhalt meint und nicht die Seiten: Denn

*) 397, 13 ist $\tau\acute{\alpha} \alpha\beta\gamma\delta$ wohl nur Druckfehler statt $\tau\acute{o}$.

davon spricht er, von den Flächen, und daß er jetzt zum erstenmal beim Beweis dieses Satzes der Trapeze³²⁰⁾ Erwähnung tat. Demnach ist es klar, daß er in den Definitionen mit Recht auch über dessen Wesen uns unterrichtete, daß es zur Gattung der Vierseite gehöre, aber nicht der Parallelogramme. Denn da es nicht einmal*) die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich hat, fällt es aus der Ordnung der Parallelogramme heraus.

Der Autor bewies nun den vorliegenden
 10 Satz, indem er den schwierigeren Fall auswählte. Wenn aber jemand vorschlägt, es sollten $ABCD$ und $BDCE$ auf derselben Basis BD liegen, so daß DC die Diagonale ist von $AB\langle CD \rangle$, so werden wir von dieser Lage aus den Nachweis führen, daß sie gleich sind. Denn das Dreieck BCD ist von beiden die Hälfte, weil CD die Diagonale von $AB\langle CD \rangle$, und BC die von $DE\langle CB \rangle$ ist. Die Diagonalen halbieren aber die Parallelogramme. Also ist $AB\langle CD \rangle = DE\langle CB \rangle$. — Wenn ferner

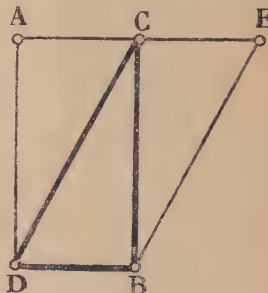


Fig. 114

20 jemand annehmen würde, DC schneide die Seite des Parallelogramms $AB\langle ED \rangle$, und die Parallelogramme lägen so wie $ABDE$ und $BCDF$, so beweisen wir, daß auch diese gleich sind. Denn da $AE = CF$: Denn beide sind DB gleich, da sie gegenüberliegen, so trage man die gemeinsame Strecke CE ab. Dann ist also $AC = EF$. Aber es ist auch $AD = EB$ und Winkel $CAD =$ Winkel FEB , weil AD zu EB parallel ist. Es ist also auch die Basis CD der Basis FB gleich und
 30 somit das ganze Dreieck ADC gleich dem Dreieck EBF . Nun füge man das gemeinsame Trapez $CB\langle ED \rangle$ hinzu. Dann ist also das ganze Parallelogramm $AB\langle ED \rangle$ gleich dem
 33 Parallelogramm $DF\langle CB \rangle$. Man sieht, daß nur diese drei Fälle mög-

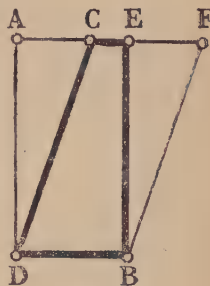


Fig. 115

*) Die Textschwierigkeit, mit der sich FRIEDLEIN abquält, ist nicht von Bedeutung. Ich lese τὸ γὰρ μὴδέ. Es ist hier das zum Wesen des Parallelogrammes unbedingt Erforderliche hervorgehoben zum Unterschied von Parallelogrammen, die noch mehr gleich haben: sämtliche Seiten und Winkel, oder sämtliche Seiten oder sämtliche Winkel. Wo aber nicht einmal die gegenüberliegenden Seiten oder Winkel gleich sind, kann von einem Parallelogramm nicht die Rede sein.

lich sind*). Denn DC schneidet entweder EB, wie der Autor annahm, oder sie trifft auf den Punkt E, wie in der vorletzten Zeichnung, oder sie schneidet AE, wie wir gerade annahmen. Und der Beweis für die Richtigkeit des Theorems wurde für alle Fälle erbracht. Es ist nur die Einschränkung zu machen, daß, nachdem wir zwei Arten von Trapezen zu unterscheiden haben, von denen die eine keine gegenüberliegenden Parallelen aufweist, die andere zwei, bei den von unserem Meister verwendeten Trapezen und bei dieser unserer Zeichnung die zweite Art vorliegt. Denn CE ist parallel mit DB.

36. Proposition, 26. Theorem: *Parallelogramme über gleichen Basen 10 und zwischen denselben Parallelen sind gleich³²¹).*

Das vorausgehende Theorem nahm dieselbe Basis, dieses nimmt einander gleiche, aber verschiedene <Basen>. Beiden ist aber gemeinsam, daß die Parallelogramme innerhalb derselben Parallelen angenommen werden. Sie dürfen also weder innerhalb noch außerhalb der gegebenen Parallelen liegen. Denn man sagt, Parallelogramme liegen zwischen denselben Parallelen, wenn ihre Basen und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit denselben Parallelen sich decken. Der Verfasser führte nun den Beweis, indem er die Basen ganz getrennt nahm; es hindert aber nichts, 20 sie auch so anzunehmen, daß sie einen Teil gemeinsam haben.

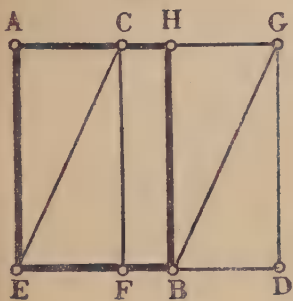


Fig. 116

Es seien zum Beispiel $AB\langle EH\rangle$ und $CD\langle FG\rangle$ die Parallelogramme über den gleichen Basen EB und FD. Dann behaupte ich, daß sie gleich sind. Man ziehe die Verbindungslinien EC und BG. Da nun $EF = BD$, weil $EB = FD$, CF aber gleich DG und Winkel EFC gleich Winkel BDG, weil CF und DG parallel sind, so ist auch 30 $CE = BG$. Sie sind aber auch parallel.

Folglich ist $CB\langle EG\rangle$ ein Parallelogramm. Auch hat es dieselbe Basis wie $AB\langle EH\rangle$ und $CD\langle FG\rangle$ und liegt zwischen denselben Parallelen. Demnach ist $AB\langle EH\rangle = CD\langle FG\rangle$. Wenn man aber annehmen würde, daß die Basen der Parallelogramme weder einen 35

*) 400, 7 statt $\pi\omega\varsigma$ muß es natürlich $\pi\rho\acute{o}\sigma\epsilon\iota\varsigma$ heißen. BAROCIUS übersetzt richtig: *et vide quod isti tres soli sunt casus.*

Teil gemeinsam hätten, noch voneinander getrennt wären, sondern, was allein noch übrig bleibt, in einem Punkte zusammenhängen würden, wie bei $AB\langle EH\rangle$ und $ED\langle CF\rangle$, so werden wir sagen: $BE = EF = CD$; also ist auch $CB = DE$. Denn die die gleichen und parallelen Linien verbindenden Geraden sind selbst gleich und parallel. $BD\langle CE\rangle$ ist also ein Parallelogramm mit derselben Basis und zwischen
 10 denselben*) Parallelen wie die Parallelogramme $AB\langle EH\rangle$ und $DE\langle CF\rangle$. Folglich sind die Parallelogramme $AB\langle EH\rangle$ und $DE\langle CF\rangle$ gleich. Wir haben nun beim ersten Versuch die Konstruktionen des Theorems geschieden, indem wir sagten, die Basen haben entweder einen Teil gemeinsam, oder berühren sich nur, oder sind voneinander getrennt. Für den Fall, daß sie
 20 sich aber berühren wie $DE\langle CF\rangle$ und $EC\langle BD\rangle$, ist auch die Annahme möglich, daß DE ganz außerhalb der Seite AE liege, oder daß die Seite CE sich mit AE decke, oder daß CE $\langle$ die Gerade $\rangle$ AH schneide, oder daß CE als Diagonale in $HE\langle AB\rangle$ liege, in welchem Falle $DF = AE$, oder daß bei Verlängerung von AH bis K , CE außerhalb von H falle und DF entweder AH schneide ... oder
 26 kongruent sei ...**).

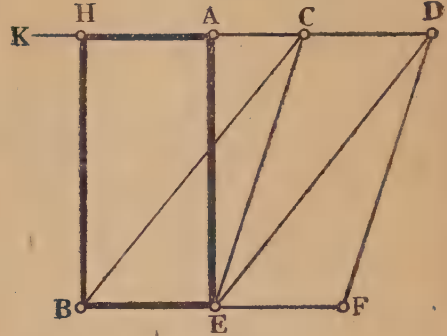


Fig. 117

*) Wenn der Beweis stimmen soll, so ist 402, 5. 6 zu lesen *ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τοῖς* (sc. *παραλληλογράμμοις* nicht *ταῖς*) $AB\ DE$. M und GRYNÆUS lesen richtig AB und DE , geben ihnen aber auch den falschen Artikel *ταῖς*. BAROCIUS übersetzt richtig.

**) Als Subjekt zu *ἐφαρμοζουσιν* kann man sich auf keinen Fall DF denken; es ist also schon vor ihm eine Lücke anzunehmen. Zu dieser Lücke bemerkt FRIEDLEIN im krit. App., der Schluß dieses Kommentars und der Anfang zur 37. Prop. fehle bei M, B_3 , GRYNÆUS und ZAMBERTO; sie deuteten durch kein Zeichen die Lücke an, da auf das Verbum *ἐφαρμοζουσιν* (*congruentem*) sogleich das Verbum *ἀποφαίνονται* (*ostendunt*) folge. BAROCIUS ergänze die Lücke, die er in allen seinen Vorlagen fand, von sich aus mit Zeichnungen der Figuren und den erforderlichen Erklärungen. Da es sich nur um verschiedene *πτώσεις* ein und desselben Satzes handelt, ist der Verlust nicht so gravierend, und es kann daher von einer Übertragung der Ergänzungen des BAROCIUS abgesehen werden.

37. Proposition, 27. Theorem: *Dreiecke mit derselben Basis und zwischen denselben Parallelen sind einander gleich*³²²).

... sie erklären. Denn bei gleichem Umfang sind die Flächen ungleich und bei ungleichem Umfang sind sie gleich. So erging es den Geographen, die die Größe von Städten aus ihrem Umfang erschlossen. Schon manche auch, die Teilhaber an Ländereien waren, übervorteilten bei der Verteilung die mit ihnen Teilenden durch unsaubere Manöver mit dem größeren Umfang. Sie kamen besser weg als ihre Genossen bei der Auswanderung, indem sie die vom größeren Umfang umschlossene Fläche, die sie erhalten hatten, 10 hinterher vertauschten gegen Flächen geringeren Umfangs und trugen noch dazu den Ruf von Biedermännern davon. Wenn zum Beispiel zwei gleichschenkelige Dreiecke gegeben sind, von denen im einen jede der gleichen Seiten 5 und die Basis 6 ebensolche Einheiten beträgt, im anderen jede der gleichen Seiten 5, die Basis 8 ebensolche Einheiten beträgt, wie Ellen oder Daktylen, so läßt sich der hierin unerfahrene Laie bei der Wahl vollständig irreführen. Denn ersteres hat den Umfang von 16, letzteres den Umfang von 18 Maßeinheiten. Aber der Mathematiker wird darüber nicht im unklaren sein, daß die Flächen gleich sind, wenn auch die Umfänge ungleich sind. 20 Denn jedes umfaßt 12 (Flächen-) Einheiten. Fällt man nämlich von der Spitze das Lot, so halbiert man die Basen und erhält im einen die Basenhälfte von 3, im anderen von 4 Einheiten, die „Kathete“ (Höhe) selbst aber umgekehrt im einen von 4, im anderen von 3 Einheiten. Denn das Quadrat von 5 muß gleich sein der Summe der Quadrate der „Kathete“ (Höhe) und der halben Basis. Wenn also letztere gleich 3, so ist die „Kathete“ gleich 4; ist sie aber gleich 4, dann ist die „Kathete“ offenbar gleich 3. Multipliziert man also die „Kathete“ mit der halben Basis, so erhält man die dem Dreieck gleiche Fläche. Diese ist aber die gleiche in 30 beiden Fällen, ob man nun 3 mit 4 oder 4 mit 3 multipliziert*).

Das soll gesagt sein, um anzudeuten, daß man die Gleichheit der Flächen durchaus nicht nach dem Umfang bestimmen darf, damit wir uns nicht wundern, wenn die Dreiecke mit gleicher Basis zwischen 34

*) Text und Erklärung der Stelle sind umstritten. Die Erklärung von ZAMBERTO ist reichlich unklar und dürfte schwerlich das Richtige treffen. Auch BAROCIUS kann ich diesmal nach dem vorliegenden Text nicht folgen. Hingegen scheint mir hier FRIEDLEIN bei der Textbehandlung eine glückliche Hand gehabt zu haben. Ich übersetze nach ihm.

denselben Parallelen mit Bezug auf die übrigen Seiten ins Unendliche sich vermehren lassen und dabei trotzdem die Gleichheit der Flächen unverändert bleibt. Man darf aber nur von jenen Dreiecken sagen, daß sie zwischen denselben Parallelen liegen, die ihre Basen auf der einen Parallele haben und mit der Spitze bis zur anderen reichen, und bei denen die Verbindungslinie der Spitzen eine einzige Gerade ist, parallel mit den Basen, die (gleichfalls) auf einer einzigen Geraden liegen.

38. Proposition, 28. Theorem: *Dreiecke über den gleichen Basen und*
 10 *zwischen denselben Parallelen sind gleich*³²³).

Auch dieses Theorem ist ortsbestimmender Art und setzt entsprechend den Parallelogrammen auch die Lage der Dreiecke über gleichen Basen voraus. Für diese vier Lehrsätze, von denen zwei Beweise sich auf die Parallelogramme, und zwei auf die Dreiecke beziehen, und die einen zwei dieselben Basen, und die anderen zwei gleiche Basen voraussetzen, scheint EUKLID im ersten Theorem des sechsten Buches einen einzigen Beweis zu bieten, was allerdings den meisten entgeht. Denn wenn er durch dieses beweist, Dreiecke und Parallelogramme von derselben Höhe stünden im selben Verhältnis
 20 zueinander wie die Basen, so beweist er nur alle diese Sätze in mehr genereller Weise auf Grund der Analogie. Denn „dieselbe Höhe <haben>“, besagt nichts anderes als „zwischen denselben Parallelen liegen“. Denn alles, was zwischen denselben Parallelen liegt, hat dieselbe Höhe und umgekehrt. Denn die Höhe ist die Senkrechte von einer Parallelen zur anderen. Dort ist nun auf Grund der Analogie der Beweis geführt, daß Dreiecke und Parallelogramme, die dieselbe Höhe haben, d. h. die zwischen denselben Parallelen liegen, sich wie ihre Grundlinien verhalten. Sind diese gleich, so sind es auch die Flächen; verhalten sie sich wie 1 : 2, dann auch die Flächen, und stehen sie
 30 in anderem Verhältnis, dann weisen auch die Flächen dasselbe Verhältnis zueinander auf. Hier aber bestand keine Möglichkeit zur Anwendung der Analogie, die er noch nicht dargelegt hatte, und so behilft er sich mit der Gleichheit allein und folgert diese aus der Gleichheit oder Identität der Basen. In jenem einen sind also diese vier Lehrsätze enthalten nicht bloß, weil er in einem Beweise zeigt, was in diesen vierten enthalten ist, sondern weil er noch etwas mehr hinzufügt, die Gleichheit der Proportionen, auch wenn die Basen ungleich
 38 sind. Soviel hiervon. Es gehört aber nur wenig Verstand dazu, um

einzusehen, daß man die Basen der Dreiecke so nehmen kann wie bei den Parallelogrammen, daß sie einen Teil gemeinsam haben, oder daß sie keinen Teil gemeinsam haben und sich nur in einem Punkte berühren, oder daß sie auch völlig getrennt sind und eine Linie zwischen sich haben, und daß in allen diesen Fällen, wie auch die Basen oder die Spitzen liegen mögen, das Beweisverfahren dasselbe ist: Man zieht Parallelen zu den Seiten und verwandelt jedes Dreieck in ein Parallelogramm und erweist so mit diesen die Gleichheit der Dreiecke.

39. Proposition, 29. Theorem: *Gleiche Dreiecke über derselben Basis 10 auf derselben Seite liegen zwischen denselben Parallelen³²⁴).*

Als unsere Aufgabe im Nachweis der Gleichheit bestand, da stellten wir vier Lehrsätze auf; zwei für die Parallelogramme und zwei für die Dreiecke, die entweder auf denselben oder auf gleichen Basen liegen*). Jetzt aber bei der Umkehrung übergehen wir die Umkehrungen bei den Parallelogrammen, während wir die bei den Dreiecken für erwähnenswert erachten. Der Grund hiervon liegt darin, daß einerseits das Beweisverfahren auch bei jenen unverändert das gleiche ist vermittels der Zurückführung auf Unmögliches und derselben Konstruktion, und daß wir uns andererseits damit 20 begnügen, den Beweisgang bei den einfacheren Figuren, ich meine bei den Dreiecken, zu zeigen und es den fähigeren Köpfen überlassen, dieselben Folgerungen bei den übrigen Figuren zu ziehen. Denn daß das Verfahren auch bei diesen das gleiche ist, ist leicht einzusehen. Wir nehmen eben gleiche Parallelogramme über derselben Basis oder über gleichen Basen und behaupten, daß sie gleichfalls zwischen denselben Parallelen liegen. Wenn nicht, wird das eine innerhalb der Verlängerungen der Parallelen des anderen hineinfallen oder nach außen hinausfallen. Welche Lage es aber auch hat, wir nehmen es und seine Parallelen und zeigen**) wie 30 bei den Dreiecken, daß das Ganze seinem Teile gleich wäre. Das ist aber unmöglich.

32

*) 407, 8 ist statt *κείμενα* unbedingt *κειμένον* zu lesen. Das Wort kann sich nur auf *παρλληλογράμμων* und *τριγώνων* beziehen, nicht auf *θεωρήματα*.

**) Der Aorist *ἔδειξαμεν* hat hier keinen Sinn und widerspricht dem Sprachgebrauch des PROKLUS, der eine Vorliebe für das Futur in solchem Zusammenhang hat. Es ist kein Zweifel, daß *δείξομεν* zu lesen ist. Auch BAROCIUS hat das Futur.

Daß aber der Autor mit Recht den Zusatz beifügte: Auf derselben Seite, ist klar*), denn es besteht die Möglichkeit, gleiche Dreiecke mit einer Basis zu nehmen, das eine auf der einen, das andere auf der anderen Seite. Aber diese liegen keinesfalls zwischen denselben Parallelen. Sie haben ja auch nicht dieselbe Höhe. Deshalb also fügte er diesen Zusatz bei.

Nun besteht eine doppelte Möglichkeit, nach der widersinnigen Annahme die Parallele zu ziehen. EUKLID zog sie innerhalb; wir aber werden dasselbe beweisen, indem wir sie außerhalb ziehen.

- 10 Es seien also die gleichen**) Dreiecke ABC und DBC über derselben Basis auf derselben Seite. Dann behaupte ich, daß sie zwischen denselben Parallelen liegen, und daß die Verbindungslinie ihrer Spitzen parallel zur Basis ist. Denn man ziehe die Linie AD . Ist sie aber nicht parallel zu ihr, so sei es AE , die außer ihr liegt. Man verlängere CD bis E und verbinde E mit B . Dann ist also $\langle$ Dreieck $\rangle ABC$
 20 gleich $\langle$ Dreieck $\rangle EBC$, aber $\triangle ABC$ ist auch gleich $\langle$ Dreieck $\rangle DBC$. $\triangle EBC$ ist folglich gleich $\triangle DBC$, das Ganze

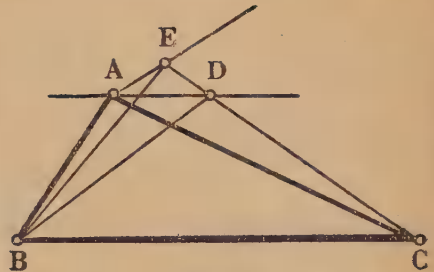


Fig. 118

dem Teil. Das ist aber unmöglich. Die Parallele fällt also nicht außerhalb AD . Seitens des Autors ist aber gezeigt worden, daß sie auch nicht innerhalb fällt. Demzufolge ist AD selbst zu BC parallel. Die gleichen Dreiecke, die auf derselben Seite liegen, befinden sich also zwischen denselben Parallelen. Damit***) ist auch der übrige Teil der *deductio ad absurdum* durchgeführt.

- 30 Eine Bemerkung ist noch am Platze. Dreierlei Arten von Umkehrungen der Lehrsätze gibt es: Entweder des Ganzen mit dem Ganzen, wie wir beim 18. und 19. Satz feststellten, oder des Ganzen
 33 mit dem Teil, wie beim 6. und 5., oder eines Teiles mit einem Teile,

*) 407, 27: Das Fragezeichen nach $\varepsilon\sigma\tau\iota$ konnte sich FRIEDLEIN sparen, da über die Richtigkeit des Textes kein vernünftiger Zweifel bestehen kann.

**) 408, 9: Der Begriff $\iota\sigma\alpha$ ist unbedingt zu ergänzen, wenn die Folgerung stimmen soll. BAROCIUS übersetzt: *triangula aequalia*.

***) 408, 25: $\kappa\alpha\iota \varepsilon\nu \tau\alpha\iota\varsigma \alpha\upsilon\tau\alpha\iota\varsigma \delta\upsilon\nu\alpha \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omicron\iota\varsigma$ ist augenscheinlich sinnlose Dittographie mit Z. 23 und ist demnach mit BAROCIUS zu tilgen.

wie beim 8. und 4. Denn nicht das ganze Datum*) im einen Satz ist Thesis im anderen und nicht die ganze Thesis ist Datum, sondern nur ein Teil. Von solcher Art scheinen**) auch diese auf die Dreiecke bezüglichen Lehrsätze. Denn in den vorausgehenden war Thesis die Gleichheit der Dreiecke. Diese ist aber nicht das einzige Datum in dem vorliegenden, sondern zieht noch einen Teil der Voraussetzung in jenen an sich. Denn das Liegen über derselben Basis oder über gleichen Basen ist hier wie dort gegeben, nur daß er bei diesen Voraussetzungen, nicht bei jenen, hinzufügte, was weder zur Thesis noch zum Datum gehörte. Den Ausdruck: Auf der gleichen Seite hat er 10 nämlich als fremden Bestandteil hereingenommen.

40. Proposition, 30. Theorem: *Gleiche Dreiecke, die über gleichen Basen auf derselben Seite sich befinden, liegen zwischen denselben Parallelen*³²⁵).

Die Art der Umkehrung ist die gleiche bei diesem Problem, und der Beweis unverändert; was der Autor bei der Zurückführung auf Unmögliches übergangen hat, wird auf ähnliche Weise bewiesen, und es ist nicht nötig, dasselbe zu wiederholen. Da es sich aber in den genannten Propositionen um folgende drei Punkte handelt, um dieselben oder um gleiche Basen, um das Liegen zwischen denselben 20 Parallelen (und) um die Gleichheit der Dreiecke und Parallelogramme, so ist klar, daß wir die Umkehrungen in mannigfacher Weise vornehmen können, indem wir jeweils zwei Punkte zusammennehmen, den dritten aber übergehen. Entweder nehmen wir nämlich dieselben oder gleiche Basen und die Dreiecke und Parallelogramme zwischen denselben Parallelen an und stellen vier Lehrsätze auf, oder wir nehmen sie gleich und die Basen identisch oder gleich und stellen andere vier Lehrsätze auf, von denen der Autor zwei unberücksichtigt ließ, — die auf die Parallelogramme bezüglichen — während er die zwei auf die Dreiecke bezüglichen bewies, oder wir nehmen sie gleich und 30 zwischen denselben Parallelen an und beweisen die noch übrige Möglichkeit, daß sie entweder über denselben oder gleichen Basen sind, 32

*) 409, 6: Statt τὸ δεδειγμένον muß es unbedingt τὸ δεδομένον heißen; BAROCIUS übersetzt richtig mit *Datum*. δεδειγμένον und ζητούμενον fallen ja identisch zusammen.

**) 409, 8: An der kleinen Inkonzinnität des griechischen δὲ braucht man sich nicht zu stoßen, nachdem bei εἰκεν der Zusammenhang mit der ursprünglichen Konstruktion nach der langen Parenthese nicht mehr empfunden wird.

und stellen weitere vier Lehrsätze auf, die freilich der Autor insgesamt übergang, denn der Beweis ist bei ihnen der gleiche, nur daß zwei von diesen nicht an sich wahr sind. Denn gleiche Parallelogramme oder Dreiecke, die zwischen denselben Parallelen liegen, müssen nicht unbedingt dieselbe Basis haben. Vielmehr trifft bei diesen Voraussetzungen nur das Ganze zusammen zu, daß sie dieselben oder gleiche Basen haben, während jeder Punkt für sich nicht unbedingt aus den gewählten Voraussetzungen sich ergibt. Es sind also im Ganzen 10 Lehrsätze, von denen EUKLID sechs verzeichnete und vier über-

10 ging, damit er sich nicht wiederholte, da der Beweis stets der gleiche blieb. Es werde also an den Dreiecken gezeigt, daß sie, wenn sie gleich sind und zwischen denselben Parallelen sich erstrecken, entweder dieselben oder gleiche Basen haben. Denn nehmen wir an, es sei nicht so, sondern, wenn möglich, sollen die Dreiecke ABC und DEF sich so verhalten, trotz ungleicher Basen BC und EF , und zwar sei BC größer <als EF >. Man trage

20 nun $BH = EF$ ab und ziehe die Verbindungslinie AH . Da nun ABH und DEF gleiche Basen haben, nämlich BH und EF und zwischen denselben Parallelen sich erstrecken, so sind sie folglich gleich. Aber auch ABC und DEF sind gleich. Es sind also ABC und ABH gleich, was unmöglich ist. Die Basen von ABC und DEF sind also nicht ungleich. Dasselbe Beweisverfahren findet auch bei den Parallelogrammen statt. Weil nun also der

30 Ganze dem Teile gleich ist, dieselbe ist, sind sie mit Recht vom Verfasser übergangen worden. Es ist also gesagt worden, daß es unbedingt 10 Lehrsätze sind, welche ausgelassen wurden und warum sie mit Stillschweigen übergangen wurden. Doch wir wollen

34 uns dem nunmehr Folgenden zuwenden.

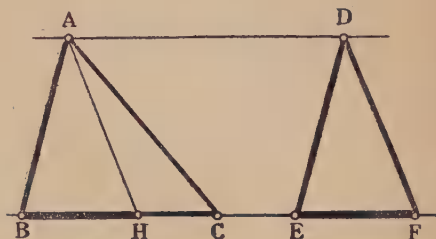


Fig. 119

41. Proposition, 31. Theorem: *Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck die Basis gemeinsam hat und zwischen denselben Parallelen sich erstreckt, dann ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck³²⁶).*

Auch dieser Lehrsatz ist ortsbestimmend; er verknüpft aber in einem die Beschaffenheit von Dreiecken und Parallelogrammen, die dieselbe Höhe haben. Wie wir nun die Parallelogramme und auch die Dreiecke einer gesonderten Betrachtung unterzogen, so wollen wir nun beide zusammen hernehmen, die denselben Befund zeigen wie in ihrer Vereinzelung, und sehen, in welchem Verhältnis sie zu- 10 einander stehen. Nun zeigt sich in ihrer Vereinzelung das Verhältnis der Gleichheit: Denn alle-Figuren, die dieselbe Basis haben und zwischen denselben Parallelen sich erstrecken, seien es nun Dreiecke oder Parallelogramme, sind einander gleich; in ihrer Verbindung aber erweist sich das erste ungleiche Verhältnis, das Verhältnis von 1 : 2. Denn EUKLID beweist, daß bei gleicher Basis und Höhe das Parallelogramm doppelt so groß ist wie das Dreieck. Wenn aber der Meister beim vorliegenden Beweis von der Annahme ausging, die Spitze des Dreiecks liege außerhalb des Parallelogramms, so wollen wir sie auf der anderen Seite des Parallelogramms annehmen, die parallel läuft 20 zu ihrer gemeinsamen Basis, und so den gleichen Beweis führen. Denn das sind die zwei Fälle dieses Lehrsatzes: Nachdem beide die gleiche Basis haben, muß das Dreieck seine Spitze entweder innerhalb oder außerhalb des Parallelogramms haben.

Es sei also ABCD das Parallelogramm und ECD das Dreieck, und Punkt E liege zwischen A und B. Nun ziehe man die Verbindungslinie AD. Da nun das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ACD ist, ACD aber gleich ist dem Dreieck EDC, so ist also das Parallelogramm doppelt so groß, wie das Dreieck ECD. 30 Daß nun bei derselben Basis das Parallelogramm als das Zweifache des Dreiecks sich erweisen läßt, ist klar. Aber auch wenn die Basen nur gleich sind, wird der Beweis ebenso geführt, indem wir die Diagonale der Parallelo-

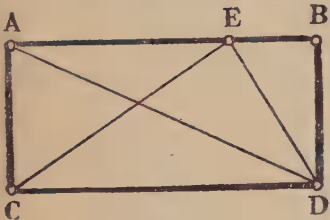


Fig. 120

gramme ziehen. Denn sind die Dreiecke gleich, so wird das Zweifache des einen dem Zweifachen des anderen gleich sein. Die Dreiecke sind aber vermöge der Gleichheit der Basen und der Höhe 39

wirklich gleich. Mit Recht ließ darum EUKLID auch diese Punkte beiseite, da der Beweis der gleiche ist. Denn entweder werden sie denselben Teil gemeinsam haben, oder nur in einem Punkte sich berühren, oder voneinander getrennt sein. Aber wie immer man $\langle$ auch $\rangle$ variieren mag, der Beweis bleibt in allen Fällen derselbe.

Wir wollen aber auch die Umkehrungen dieses Theorems in gleicher Weise zeigen. Eine davon ist folgende: Wenn ein Parallelogramm das Zweifache eines Dreiecks ist, und wenn sie dieselbe Basis oder gleiche Basen miteinander haben, wenn nur auf derselben Seite, 10 so erstrecken sie sich zwischen denselben Parallelen; denn wäre das nicht der Fall, dann wäre das Ganze gleich dem Teile und es gälte dasselbe (wie oben)*). Denn die Spitze des Dreiecks müßte dann entweder mit den Parallelen zusammentreffen oder nach außen fallen. Welche Lage sie aber auch haben mag, es ergibt sich die gleiche Unmöglichkeit, wenn man durch die Spitze des Dreiecks eine Parallele zur Basis legt. Eine andere Umkehrung: Wenn ein Parallelogramm das Zweifache eines Dreiecks beträgt und zwischen denselben Parallelen sich erstreckt, so liegen beide auf ein und derselben oder auf gleichen Basen. Denn liegen sie auf ungleichen Basen, so 20 werden wir gleiche nehmen und zeigen, daß das Ganze dem Teile gleich ist. Auf diese gemeinsame Unmöglichkeit laufen alle diese Lehrsätze hinaus, weshalb der Autor es uns überließ, der bunten Mannigfaltigkeit hierbei nachzuspüren, und es für sich bei den einfacheren und grundlegenden bewenden ließ.

Doch nach den Erklärungen zu diesem Punkte wollen wir der Übung wegen nicht ein Parallelogramm, sondern ein Trapez nehmen, von dem nur zwei Seiten parallel sind, das dieselbe Basis mit einem Dreieck hat und zwischen denselben Parallelen sich erstreckt, und wollen sehen, welches Verhältnis es zum Dreieck hat. Daß es nicht 30 das Verhältnis 2 : 1 haben kann, ist klar; denn dann wäre es ein Parallelogramm, während es doch nur ein Vierseit ist. Ich behaupte, daß es entweder größer oder kleiner als das Zweifache ist. Denn von den zwei vorhandenen Parallelen ist unbedingt die eine größer, die andere kleiner; denn wären sie gleich, dann wären auch ihre Verbindungs- 35 linien parallel. Wenn nun das Dreieck die größere Basis

*) 414, 2: Das Fragezeichen FRIEDLEINS ist unbegründet und zeigt nur, daß er Sinn und Zusammenhang der guten griechischen Phrase $\acute{\alpha}\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \acute{\epsilon}\xi\epsilon\iota\ \lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ nicht verstanden hat. PROKLUS greift damit offenbar zurück auf seine Ausführung 412, 23—26 in derselben Proposition.

hat, dann wird das Vierseit kleiner als das Zweifache des Dreiecks sein, wenn es aber die kleinere Basis hat, dann wird das Vierseit größer sein. Es sei zum Beispiel $ABCD$ ein Vierseit, AB sei kleiner als CD , und man verlängere AB ins Unendliche; das Dreieck ECD habe die gleiche Basis CD mit dem Vierseit, und man ziehe durch den Punkt D zu AC die Parallele DF . Dann ist also das Parallelo-

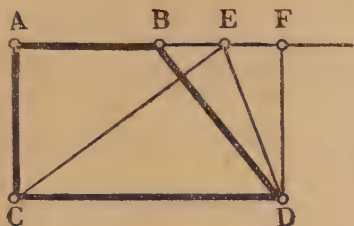


Fig. 121

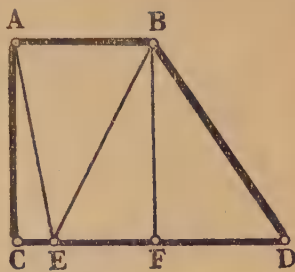


Fig. 122

gramm $ACDF$ doppelt so groß wie das Dreieck ECD , so daß das Vierseit $ABCD$ kleiner ist als das Doppelte. Hinwiederum habe das Dreieck die Basis AB und AC sei zu BF parallel. Dann ist also $ABCF$ doppelt so groß wie das Dreieck, so daß das Vierseit $ABCD$ 10 größer als das Zweifache ist. Nach Erledigung dieser Beweise können wir sagen: Wenn man in einem Vierseit, in dem nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, von der einen halbierten Parallele aus an die andere Gerade zieht, so ist das Vierseit größer oder kleiner als das Zweifache des entstehenden Dreiecks; wenn man aber die eine der Verbindungslinien der Parallelen halbiert und von da aus zur anderen Verbindungslinien zieht, dann ist das Vierseit auf jeden Fall das Zweifache des so entstehenden Dreiecks. Dies soll nun bewiesen werden.

Es sei also $ABCD$ das Vierseit, AD und CB seien parallel; man 20 halbiere nun DC im Punkte E und ziehe die Verbindungslinien EA und EB ; man verlängere BE , und sie

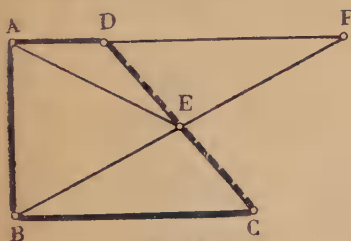


Fig. 123

sich schneide mit AD im Punkt F . Da nun die Winkel bei E als Scheitelwinkel gleich sind und ebenso Winkel FDE und Winkel BCE (gleich sind), so ist auch $FE = EB$, und die Dreiecke DEF und BCE sind gleich. Nun füge man das gemeinsame Dreieck ADE 29

hinzu. Dann ist das ganze Dreieck AFE gleich den beiden Dreiecken ADE und BCE. Aber AEF ist gleich AEB, da sie dieselben Basen haben, BE und EF, und zwischen denselben Parallelen sich erstrecken. Folglich ist $\triangle AEB$ gleich den Dreiecken ADE (und BCE und das Vierseit ABCD ist doppelt so groß wie das Dreieck AEB, was zu beweisen war. Auf dieselbe Art würden wir zeigen, daß auch für den Fall, wenn von der halbierten Seite AB zur Seite CD Verbindungslinien gezogen werden, das Vierseit das Zweifache des so entstehenden Dreiecks ist. Wenn also von der einen der halbierten

10 Verbindungslinien der Parallelen zur anderen Gerade gezogen werden, so ist das Vierseit das Zweifache des so entstandenen Dreiecks. Dies sollte der Übung halber bewiesen werden. Nun wollen wir uns aber dem Folgenden zuwenden)*).

[42. Proposition, 11. Problem: *Zu einem gegebenen Dreieck ist ein gleiches Parallelogramm zu konstruieren mit einem Winkel, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist*³²⁷).

43. Proposition, 32. Theorem: *In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der Diagonalparallelogramme einander gleich*]³²⁸).

... Daß**) die Parallelogramme nicht in einem Punkte an-

20 einanderstoßen. Weil denn die Ergänzungen keine Vierseite sind, so gilt es auch diesen Fall auszusetzen, um zu sehen, daß das gleiche sich ergibt. Mit dem Parallelogramm AB<CD> seien also beiderseits derselben Diagonale <CD> die Parallelogramme CK<EF> und DL<GH> und zwischen ihnen die Strecke KL, ein Teil der Diagonale. Nun wirst du wiederum das gleiche sagen. Das Dreieck ACD ist gleich <dem $\triangle$ > BCD, das Dreieck ECK ist gleich KCF,

27 und Dreieck DGL gleich DHL. Folglich ist der übrige Teil, das

*) Der Schluß der 41. Proposition ist in allen Handschriften verstümmelt. Die oben eingeklammerte Schlußpartie stammt aus BAROCIUS, der sie in griechischer Sprache als Ergänzung von wahrscheinlich fremder Hand in einem einzigen Exemplar der Basler Ausgabe vorfand und sie in seine Übersetzung herübernahm, da sie, wie er in einem Scholion bemerkt, den Beweis des PROKLUS in richtiger Weise zum Abschluß bringt. Weiterhin fehlt der ganze Kommentar zur 42. und der Anfang zur 43. Proposition.

**) Der Anfang mag dem Sinn nach folgendermaßen gelautet haben: EUKLID führt den Beweis dieses Problems für den Fall, daß die Diagonalparallelogramme in einem Punkte zusammentreffen. Wir wollen aber auch die anderen Fälle berücksichtigen. Nehmen wir also an, ...

Fünfseit AGLKE gleich dem Fünfseit BFKLH. Das sind die „Ergänzungen“. Wenn aber die Parallelogramme weder in einem

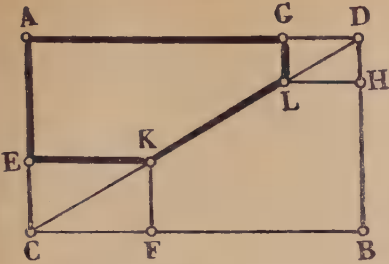


Fig. 124

Punkte zusammenstoßen noch getrennt sind, sondern einander schneiden, dann ist auch in diesem Falle der Beweis der gleiche. Denn es sei das Parallelogramm $AB\langle CD \rangle$ mit der Diagonale CD , und die Parallelogramme beiderseits von ihr $ECFL$ und das andere $DGKH$, das ersteres

10

schneide. Dann behaupte ich, daß die Ergänzungen $FG\langle AM \rangle$ und $EH\langle NB \rangle$ gleich sind. Denn da das ganze Dreieck DGK gleich ist DHK und ein Teil von ihm, KLM , gleich ist KLN : Denn $LK\langle MN \rangle$ ist ein Parallelogramm, so ist folglich der übrige Teil, das Trapez $DLNH$, gleich dem Trapez $DLMG$. Aber auch das Dreieck ADC ist gleich BDC , und FCL ist gleich ECL in dem Parallelogramm $EF\langle LC \rangle$; und Trapez $DGML$ ist gleich $DHNL$, also ist der übrige Teil, das Vierseit $GF\langle AM \rangle$, gleich dem Vierseit $EH\langle NB \rangle$. Das

20

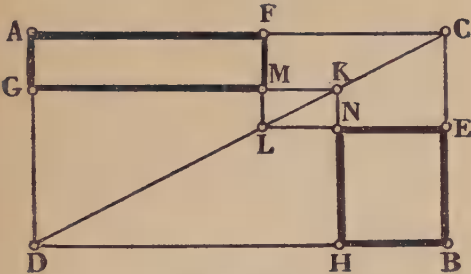


Fig. 125

Theorem ist also für alle Fälle bewiesen. Es sind aber nur drei, nicht mehr und nicht weniger. Denn die Parallelogramme beiderseits derselben Diagonale schneiden sich entweder, oder stoßen in einem Punkte aneinander, oder sind voneinander durch einen Teil der Diagonale getrennt.

30

Den Namen „Ergänzungen“ aber nahm der Autor von der Sache selbst, da sie neben den zwei Parallelogrammen das Ganze ausmachen. Deshalb wurde die Sache an sich für eine Erwähnung in den Definitionen nicht für wichtig genug befunden. Denn Mannigfaltigkeit tat Not zur Verdeutlichung, damit wir einsehen, was ein Parallelogramm ist und welche Parallelogramme beiderseits derselben Diagonale wie das ganze Parallelogramm liegen. Wurden diese Fragen geklärt, so konnte allein auch die „Ergänzung“ dem Verständnis erschlossen

39

werden. Es sind aber jene Parallelogramme beiderseits derselben Diagonale, die einen Teil der ganzen Diagonale auch als ihre eigene Diagonale haben, andernfalls sind sie es nicht. Wenn zum Beispiel die Diagonale des ganzen Parallelogramms eine Seite des inneren Parallelogramms schneidet, dann ist dieses Parallelogramm nicht beiderseits der gleichen Diagonale wie das ganze. Im Parallelogramm $AB\langle CD\rangle$ zum Beispiel schneidet CD die Seite EH des Parallelogramms $CE\langle H\rangle$. CE liegt also nicht beiderseits derselben Diagonale wie CD .

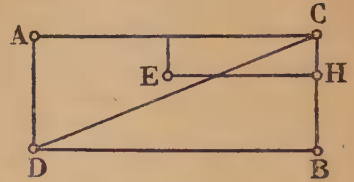


Fig. 126

44. Proposition, 12. Problem: *An eine gegebene Gerade ist ein, einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm anzulegen in einem Winkel, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist³²⁹).*

Der Schule des EUDEMOS zufolge sind das uralte Entdeckungen der pythagoreischen Muse, die „*Flächenparabel*“ <einfache Flächenanlegung>, die „*Hyperbel*“ <Flächenanlegung mit Überschuß>, und die „*Ellipse*“ <Flächenanlegung mit Fehlen>. Von diesen entlehnten die Neueren die Namen und übertrugen sie auch auf die sogenannten konischen Linien <Kegelschnitte> und nannten auch von diesen die eine Parabel, die andere Hyperbel und die dritte Ellipse, während jene alten ehrwürdigen Männer die mit diesen Namen bezeichneten Gebilde in der Anlage ebener Flächen an eine Strecke erblickten. Wenn nämlich eine Gerade gegeben ist, und man die gegebene Fläche der ganzen Geraden entlang sich erstrecken läßt, dann nennt man das „*die Fläche anlegen*“; macht man aber die „*Länge*“ der Fläche größer als die der Geraden selbst, dann spricht man von einem „*Hinausgehen*“ darüber; und macht man sie kleiner, so daß ein Teil der Geraden über die gezeichnete Fläche hinausragt, von einer „*Verkürzung*“. In diesem Sinne spricht EUKLID im VI. Buch von der „*Hyperbel*“ und von der „*Ellipse*“, hier aber benötigte er die „*Parabel*“, wo er an eine Strecke ein, einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm anlegen wollte*), damit

*) 420, 10: Es ist natürlich *παράλληλογράμμον* mit BAROCIUS zu ergänzen. Die Bemerkung FRIEDLEINS *equidem scribendum esse puto τὸ ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν ut infra in linea 15 τὸ ἴσον est scriptum*, geht daneben. Denn nur wenn oben *παράλληλογράμμον* schon genannt ist, versteht man unten, was mit *τὸ ἴσον* gemeint ist, und kann es sich der Verfasser ersparen, *παράλληλογράμμον* zu wiederholen.

wir nicht bloß die Konstruktion eines einem gegebenen Dreieck gleichen*) Parallelogramms haben, sondern auch die Anlage an eine Strecke. Wenn zum Beispiel ein Dreieck von 12 Quadratfuß gegeben ist und eine 4 Fuß lange Gerade, so legen wir das dem Dreieck gleiche Parallelogramm an die Gerade an, wenn wir die Länge der insgesamt 4 Fuß nehmen und dann herausbekommen, wieviel Fuß die Breite betragen muß, damit das Parallelogramm dem Dreieck gleich ist. Finden wir nun glücklich die Breite zu 3 Fuß und multiplizieren die Länge mit der Breite, dann erhalten wir also damit die erforderliche Fläche**), wenn der gegebene 10 Winkel ein Rechter ist. So etwa ist es um das Flächenanlegen, das wir vor alters von den Pythagoreern überkommen haben.

Es sind aber in diesem Problem drei Daten: Eine Gerade, an der die Anlage so stattfinden muß, daß sie die ganze Seite der Fläche selbst wird, das Dreieck, dem das angelegte Parallelogramm gleich sein muß, und der Winkel, dem der Winkel der Fläche gleich sein muß. Ist der Winkel ein Rechter, so ist wiederum klar, daß die angelegte Fläche entweder ein Quadrat oder ein Rechteck ist; ist er ein spitzer oder stumpfer, so ist die Fläche entweder eine Raute oder ein Rhomboid. Daß ferner die Gerade auch begrenzt sein muß, ist klar, denn 20 bei einer unbegrenzten ist es unmöglich. Indem der Autor also sagte: An eine Strecke ist anzulegen, erklärte er damit zugleich, daß die Gerade begrenzt sein muß.

Zur Konstruktion dieses Problems bedient er sich aber der Konstruktion eines Parallelogramms, das einem gegebenen Dreieck gleich ist; denn Anlage und Konstruktion sind nicht dasselbe, wie wir schon gesagt haben, sondern letztere konstruiert die ganze Fläche selbst mit allen Seiten, erstere aber hat eine Seite gegeben und legt an dieser die Fläche an, ohne diese Ausdehnung zu verkürzen oder darüber hinauszugehen; vielmehr läßt sie von dieser einen Seite die Fläche 30 begrenzt sein. Warum denn nur, möchtest du fragen, zog er Lehrsätze heran, als er den Beweis für die Gleichheit von Dreiecken führte, Probleme hingegen, als er die Gleichheit von Dreiecken und Parallelogrammen bewies? Wir werden erwidern: Weil die Gleichheit von gleichartigen Dingen etwas ganz natürliches ist und nur der Beachtung 35

*) 420, 12: ἴσον ist wohl nur Druckfehler; es muß natürlich ἴσον heißen.

**) 420, 20: Statt τοῦτο δὲ möchte ich vorschlagen zu lesen τοῦτο δὲ, ὁρθῆς ... τῆς γωνίας, ἔξομεν τὸ χωρίον. Ich habe dementsprechend übersetzt.

bedarf, die Gleichheit von ungleichartigen Dingen aber*) wegen der Verschiedenheit der Arten eines sachkundigen Vorgehens zum Erweis ihres Entstehens bedarf, da sie an sich schwer festzustellen ist.

45. Proposition, 13. Problem: *Es ist ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu konstruieren³³⁰).*

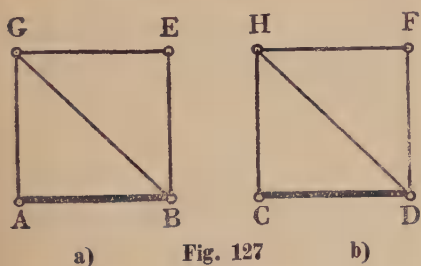
Von den zwei Problemen, in denen EUKLID die Konstruktion und die Anlage von Parallelogrammen fand, die einem gegebenen Dreieck gleich sind, ist dieses das allgemeinere. Denn ob nun ein
 10 Dreieck, oder ein Quadrat, oder überhaupt ein Vierseit, oder ein anderes Vielseit gegeben sein mag: Durch dieses Problem werden wir ein ihm gleiches Parallelogramm konstruieren. Denn jede geradlinige Figur wird, wie wir früher schon sagten, an sich in Dreiecke aufgelöst, und wir haben die Methode, die Anzahl der Dreiecke zu finden, schon angegeben. Indem wir also die gegebene geradlinige Figur in Dreiecke auflösen und ein Parallelogramm konstruieren, das einem davon gleich ist und den übrigen Dreiecken gleiche Parallelogramme an die gegebene Gerade anlegen, indem wir jene nehmen, an
 20 der wir die erste Anlage vollzogen, so erhalten wir das aus den Dreiecken bestehende Parallelogramm, das jener aus diesen Dreiecken bestehenden geradlinigen Figur gleich ist, und somit ist die Aufgabe erledigt. Wenn also die geradlinige Figur ein Zehneck ist, so werden wir sie in acht Dreiecke auflösen, werden ein, einem Dreieck gleiches Parallelogramm konstruieren, werden siebenmal den übrigen Dreiecken gleiche Parallelogramme anlegen, und so das Gesuchte erhalten.

Durch dieses Problem, glaube ich, wurden die Alten auch veranlaßt, sich um die Quadratur des Kreises zu bemühen. Denn wenn ein jeder geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm sich finden läßt,
 30 gelingt, daß die geradlinigen den kreisrunden Figuren gleich sind. In der Tat bewies ARCHIMEDES, daß jeder Kreis einem rechtwinkligen Dreieck gleich ist, dessen Radius einer der Katheten, und dessen Umfang der Basis gleich ist. Doch das bei anderer Gelegenheit. Wir
 34 wollen uns jetzt dem Folgenden zuwenden.

*) 421, 22: τῶν δὲ: Der Ausdruck ist hier doch zu knapp, um noch verständlich zu sein. Offenbar ist nach τῶν δὲ ein μὴ ὁμοειδῶν ὄντων oder ein ähnlicher Ausdruck ausgefallen. BAROCIUS übersetzt: eorum autem, quae dissimilis speciei sunt, propter eam, quae juxta speciem fit, mutationem ...

46. Proposition, 14. Problem: *Mit einer gegebenen Strecke ist ein Quadrat zu zeichnen³³¹⁾.*

Der Verfasser bedarf dieses Problems hauptsächlich bei der Konstruktion des folgenden Lehrsatzes. Seine Absicht dabei scheint aber gewesen zu sein, den Entstehungsprozeß der vorzüglichsten unter den geradlinigen Figuren*) anzugeben, des gleichseitigen Dreiecks und des Quadrats, weil denn auch zur Konstruktion der Weltkörper und besonders der vier, die bestimmend sind für alles Werden und Vergehen, diese geradlinigen Figuren notwendig sind. Denn das Ikosaeder, das Oktaeder und das Tetraeder (Pyramide) setzen 10 sich aus gleichseitigen Dreiecken zusammen, und der Würfel aus Quadraten. Deshalb scheint er mir das Dreieck vorzugsweise konstruiert, das Quadrat gezeichnet zu haben. Denn diese Namen erfand er als geeignet für diese Figuren. Denn das Dreieck, das aus vielen Bestandteilen sich zusammensetzt, bedarf der Konstruktion, das Quadrat hingegen, das aus einer einzigen Seite entsteht, nur der Zeichnung. Denn wenn wir das Quadrat erhalten, indem wir die Zahl der gegebenen Geraden mit sich selbst multiplizieren, so geht es nicht ebenso mit dem Dreieck, sondern wir müssen von außen an die Endpunkte der Geraden Verbindungslinien ziehen, und bilden 20 so aus diesen ein gleichseitiges Dreieck; und die Zeichnung von Kreisen führt zum Auffinden jenes Punktes, von dem aus die Geraden zu den Endpunkten der gegebenen Geraden zu ziehen sind. Das ist also klar. Zu beweisen ist aber, daß, wenn die Geraden, aus denen die Quadrate gebildet werden, gleich sind, auch diese selbst gleich sind. Es seien also



AB und CD gleich, und mit AB zeichne man das Quadrat ABEG und mit CD das Quadrat CDHF, und man verbinde GB und HD. 30 Da nun AB und CD, und AG und CH gleich sind und gleiche Winkel einschließen, so ist auch $GB = HD$ und Dreieck ABG

gleich Dreieck CDH und ebenso sind ihre Verdoppelungen gleich. Also ist Quadrat AE<GB> gleich CF<HD>. Es ist aber auch die 36

*) 423, 12: Ich vermute, daß statt *εὐθυγράμμοι* der Plural *εὐθυγράμμοις* zu setzen ist. BAROCIUS hat: *in rectilineis*.

Umkehrung richtig. Wenn nämlich die Quadrate gleich sind, dann sind auch die Geraden, mit denen sie gezeichnet sind, gleich. Es seien z. B. $AF\langle DB\rangle$ und $CG\langle BE\rangle$ die gleichen Quadrate, und sie sollen so liegen, daß AB mit BC eine Gerade bildet. Da nun die Winkel Rechte sind, so bilden auch FB und BG eine Gerade. Man ziehe nun die Verbindungslinien FC und AG . Da nun das Quadrat $AF\langle DB\rangle$ gleich $CG\langle BE\rangle$ ist, so ist das Dreieck AFB gleich dem
 10 Dreieck CBG . Nun füge man das gemeinsame Dreieck BCF hinzu. Dann ist also das ganze Dreieck ACF gleich CFG , folglich ist AG parallel mit FC . Da ferner Winkel AFG und $\sphericalangle CGB$ $\langle je\rangle$ einen halben Rechten betragen, so ist AF parallel zu CG . Folglich ist AF gleich CG als gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm. Da nun ABF und BCG zwei Dreiecke sind mit gleichen Wechselwinkeln (da AF und CG parallel sind) und mit den gleichen Seiten AF und CG , so ist auch
 20 AB gleich BC , und BF gleich BG . Es ist also gezeigt worden, daß auch die Seiten, aus denen die Quadrate $AF\langle DB\rangle$ und $CG\langle BE\rangle$ gebildet wurden, gleich sind, wenn diese selbst gleich sind.

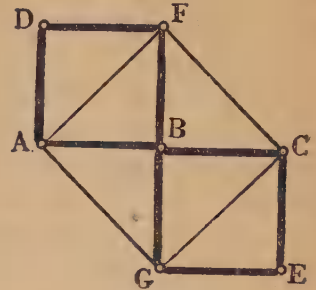


Fig. 128

47. Proposition, 33. Theorem: *In rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten³³²⁾.*

Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen*), so werden wir finden, daß sie dies Theorem auf PYTHAGORAS zurückführen und berichten, er habe der Entdeckung halber einen Stier geopfert**). Bewundere ich nun schon diejenigen, die die Wahr-
 30 heit dieses Theorems zuerst erforschten, so muß ich um so mehr den Verfasser der „*Elemente*“ hochschätzen: Er hat nicht nur durch den überzeugendsten Beweis dieses Theorem erhärtet, sondern auch im
 33 VI. Buche das noch umfassendere Theorem durch unwiderlegbare

*) BRETSCHNEIDER, Die Geometrie vor EUKLID, übersetzt wohl nicht glücklich (S. 80): „Diejenigen, welche alte Geschichten erzählen wollen“. Er übersieht den bestimmten Artikel bei ἀρχαία. Auch hätte bei seiner Auffassung βουλομένων keinen rechten Sinn.

**) Statt βουθότην lesen wir natürlich mit GRYNÆUS βουθνεῖν.

wissenschaftliche Beweise begründet. Dort zeigt er nämlich ganz allgemein, daß in rechtwinkligen Dreiecken die Figur über der Hypotenuse gleich ist der Summe der Figuren über den beiden Katheten, die ähnlich sind und auf dieselbe Weise gezeichnet werden. Denn jedes Quadrat ist jedem Quadrat ähnlich. Aber nicht alle geradlinigen Figuren, die einander ähnlich sind, sind Quadrate, denn auch in Dreiecken und anderen Vielecken findet sich die Ähnlichkeit. Der Beweis also, der zeigt, daß die Figur über der Hypotenuse, ob sie nun ein Quadrat ist oder von welcher Art nur immer, gleich ist der Summe der Figuren über den Katheten, die ähnlich sind und 10 auf dieselbe Weise beschrieben werden, führt den Beweis auf eine mehr allgemeine und wissenschaftlich begründetere Weise, als derjenige, der lediglich zeigt, daß das Quadrat der Summe der Quadrate gleich ist. Denn da wird auch die Ursache offenbar durch den generellen Nachweis, daß die Rechtwinkeligkeit der Figur über der Hypotenuse die Gleichheit vermittelt mit allen ähnlichen Figuren über den Katheten, die in derselben Weise beschrieben sind, wie auch der stumpfe Winkel die Ursache des Überschusses, und der spitze die Ursache der Verminderung ist.

Wie er nun das Theorem*) im VI. Buch beweist, wird sich dort 20 zeigen. Die Wahrheit des vorliegenden Satzes aber wollen wir jetzt untersuchen und nur die Bemerkung vorausschicken, daß er das Universale deshalb hier nicht beweist, weil er über die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren noch nicht gesprochen, noch überhaupt über die Proportion sich geäußert hat. Denn vieles von dem, was hier an partikulären Ergebnissen anfällt, findet in jenem Buch**) seine generelle Begründung nach demselben***) Verfahren. Es beweist aber der Autor hier seine These, indem er von der allgemeinen Doktrin über die Parallelogramme ausgeht. Es gibt nämlich zwei Arten von rechtwinkligen Dreiecken, die gleichschenkeligen und die ungleich- 30

*) Man sieht auf den ersten Blick, daß nicht *θεωρήματα*, sondern *θεώρημα* zu lesen ist.

**) Niemand wird im Ernste glauben, daß das *νῶ* 427, 15 ursprünglich im Texte gestanden. BAROCIUS vermerkt am Rande *nobis*. Das ist abwegig. FRIEDLEIN vermutet den Ausfall von *δεδειγμέναν*. Das ist wahrscheinlich, kann indes noch nicht völlig befriedigen. Wir brauchen vor allem einen Gegensatz zu *ἐνταῦθα*. Ich nehme an, daß *νῶ* ein Überbleibsel ist von *ἐν ἐκείνῳ*, womit EUKLID zurückweisen würde auf *ἐν τῷ ἑκτῷ*, Z. 9. Man vergleiche auch *ἐν ἐκείνοις*, Z. 10.

***) 427, 16: Statt *τοιαύτης* muß es sinngemäß *αὐτῆς* heißen. BAROCIUS übersetzt: *Per eandem viam*.

seitigen. Bei den gleichschenkeligen werden wir niemals (ganze) Zahlen finden, die den Seiten kongruent wären. Denn die Quadratzahl ist nicht das Doppelte einer Quadratzahl, außer man begnügt sich mit Annäherungswerten. Denn das Quadrat von sieben ist das Doppelte des Quadrats von 5 vermindert um 1. Bei den ungleichseitigen aber ist es möglich, solche zu nehmen, und*) es läßt sich klar beweisen, daß das Quadrat über der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate über den Katheten. Von der Art ist das Dreieck im „*Staat*“**), dessen rechten Winkel die Seiten 3 und 4 einschließen
 10 mit der Hypotenuse 5. Das Quadrat von 5 ist nämlich gleich der Summe dieser Quadrate. Denn es beträgt 25, von diesen aber beträgt das eine von 3, 9, das andere von 4, 16. Das Gesagte ist also auf Grund der Zahlen klar. Es wurden aber auch gewisse Methoden zum Finden von solchen Dreiecken überliefert, von denen man die eine auf PLATON, die andere auf PYTHAGORAS zurückführt. Die pythagoreische geht von den ungeraden Zahlen aus. Sie nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an, bildet hiervon das Quadrat, subtrahiert davon 1 und nimmt die Hälfte des Restbetrages als die größere Kathete; addiert sie aber 1 dazu, so bildet sie die dritte
 20 Seite, die Hypotenuse. Sie nimmt z. B. die Zahl 3, erhebt sie zum Quadrat, subtrahiert 1 von 9 und nimmt die Hälfte davon, 4; und dazu addiert sie wieder 1 und erhält die Zahl 5, und so ist ein rechtwinkeliges Dreieck gefunden mit den Seiten 3, 4 und 5. Die PLATONISCHE Methode aber geht von den geraden Zahlen aus. Sie nimmt die gegebene gerade Zahl und bestimmt sie als eine von den beiden Katheten. Diese halbiert sie sodann und erhebt die Hälfte zum Quadrat; addiert sie nun 1 zum Quadrat, so erhält sie die Hypotenuse, subtrahiert sie davon 1, so erhält sie die andere der beiden Katheten. Sie nimmt z. B. die Zahl 4, erhebt die Hälfte davon, 2, zum Quadrat
 30 und erhält so 4. Subtrahiert sie 1, so erhält sie 3, addiert sie 1, so erhält sie 5 und hat so das gleiche Dreieck, das auch bei der anderen Methode erzielt wurde. Denn das Quadrat hiervon ist gleich dem Quadrat von 3, und dem Quadrat von 4 zusammen. Diese Ergänzungen seien von anderer Seite noch beigelegt. Da aber der Beweis des Autors klar ist, so glaube ich, ich solle keine überflüssigen Bemerkungen anfügen, sondern mich begnügen mit dem, was geschrieben

*) Mit BAROCIUS nehme ich 427, 24—26 zwei Hauptsätze an, deren Copula nach *λαβείν* ausgefallen ist und zu ergänzen wäre.

**) VIII, 546c.

ist. Denn auch alle die, die weitere Zusätze machten, wie die Schule von HERON und PAPPUS, sahen sich also gezwungen, ohne wesentliche Förderung der Sache etwas von dem, was erst im VI. Buch bewiesen wurde, mit heranzuziehen. Wir wollen uns also dem Folgenden zuwenden.

48. Proposition, 34. Theorem: *Wenn in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten, so ist der von den beiden anderen Dreiecksseiten eingeschlossene Winkel ein Rechter³³³).*

Dieses Theorem ist die Umkehrung zum vorausgehenden Satz, 10 und zwar die ganze Umkehrung zum ganzen Satz. Denn ist das Dreieck rechtwinkelig, so ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den anderen Seiten; und ist dieses Quadrat gleich der Summe der Quadrate über den anderen Seiten, dann ist das Dreieck rechtwinkelig: Der von den anderen Seiten eingeschlossene Winkel ist ein Rechter. Der Beweis des Autors ist klar. Es sei ABC das <rechtwinkelige> Dreieck, in dem das Quadrat

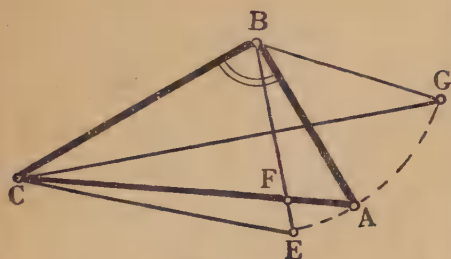


Fig. 129

über AC gleich ist der Summe der Quadrate über AB und BC, und man ziehe die zu 20 BC senkrechte Gerade*) vom Punkte B aus: Wollte man nun behaupten, man müsse die Senkrechte anders wohin ziehen und nicht in der Richtung, in der sie der Autor zog, so behaupten wir, daß diese

Forderung unmöglich ist. Denn sie**) kann weder in das Dreieck hinein, noch herausfallen, sondern es ist AB selbst. Denn wenn möglich, liege sie wie BE. Da nun Winkel EBC ein Rechter ist, so 30 ist folglich Winkel CFB ein spitzer, und der andere Winkel AFB ein stumpfer. AB ist also größer als BF. Nun sei BE gleich AB, und man ziehe die Verbindungslinie EC. Da nun Winkel EBC ein Rechter ist, so ist das Quadrat über EC gleich der Summe der Quadrate 34

*) Man wird wohl mit FRIEDLEIN 430, 7 τῆς einschieben müssen.

**) 430, 14: Statt αὐτὸν ist natürlich αὐτῇν zu lesen, da es sich auf τὴν πρὸς ὁρθῶς Z. 11 bezieht.

über EB und BC. Aber EB ist gleich BA. Folglich ist das Quadrat über EC gleich der Summe der Quadrate über AB und BC. Diesen beiden ist aber auch das Quadrat über AC gleich. Es ist also das Quadrat über EC gleich dem Quadrat über AC, und folglich ist EC gleich AC. Es ist aber auch EB gleich AB. Die beiden BE und EC, die gleich sind BA und AC, die eine der anderen, wurden also über BC errichtet, was unmöglich ist. Die Senkrechte wird daher nicht in das Dreieck hineinfallen. Aber auch nicht hinaus in anderer Richtung als AB. Denn wenn möglich, falle sie wie BG, und BG sei
 10 gleich AB, und man ziehe die Verbindungslinie CG. Da nun Winkel GBC ein Rechter ist, so ist das Quadrat über GC gleich der Summe der Quadrate über BG und BC*). Es ist aber auch das Quadrat über AC gleich der Summe der Quadrate über AB und BC. AB aber ist gleich BC. Folglich ist GC gleich AC; aber auch CB ist gleich AB über ein und derselben Geraden BC, was unmöglich ist. Die vom Punkte B zu BC gezogene Senkrechte wird also weder hinein noch hinausfallen. Demnach wird sie mit AB selber zusammenfallen. Folglich ist Winkel ABC ein Rechter. Der Einwand ist damit widerlegt.

- 20 Hiermit schloß der Verfasser der „*Elemente*“ das I. Buch ab. Er belehrte darin über viele Arten der Umkehrungen; denn häufig gab er Umkehrungen von Lehrsätzen, von Ganzen zu Ganzen, von Ganzen zu Teilen und von Teilen zu Teilen; er erdachte Probleme in großer Mannigfaltigkeit: Denn er belehrte über die Teilung von Geraden und Winkeln, über Lagen, Konstruktionen und Flächenanlagen; er befaßte sich ferner mit dem Gebiet der sogenannten Paradoxen in der Mathematik und wies uns nachdrücklich hin auf die ortsbestimmenden Lehrsätze; er erschloß uns die Anfangsgründe der generellen und partikulären Sätze, er klärte uns auf über den
 30 Unterschied der unbestimmten und bestimmten Probleme. Das alles haben denn auch wir im Anschluß an ihn auseinandergesetzt. Das ganze Buch richtete er aber aus auf ein einziges Ziel, auf den Elementarunterricht in der Wissenschaft von den einfachsten geradlinigen Figuren, deren Konstruktionen er erdachte, und deren wesentliche
 35 Akzidentien er erforschte. Was uns betrifft, so wären wir den Göttern

*) Ich folge hier der Übersetzung des BAROCIUS und lehne die Einschaltung von FRIEDLEIN ab. Sachlich ist kein Unterschied zwischen beiden, doch zeigt der Beweis bei BAROCIUS eine geschlossener Form.

dankbar, wenn es uns gelingen würde, auch mit den übrigen Büchern auf dieselbe Weise zu Ende zu kommen. Sollten uns aber andere Sorgen davon ablenken, so fordern wir die Freunde dieser Wissenschaft auf, auch die folgenden Bücher auf dieselbe Weise zu erklären und dabei allenthalben auf die Förderung der Wissenschaft und auf Klarheit der Distinktionen bedacht zu sein. Denn die Kommentare, die jetzt im Umlauf sind, leiden an großer und mannigfacher Verwirrung und tragen nicht das geringste bei zur inneren Begründung des Gegenstandes, zur dialektischen Auseinandersetzung und zur philosophischen Betrachtung.

10

Anmerkungen des Herausgebers
(Kommentare)

Die Bruchziffern dieser Anmerkungen sind im Übersetzungstext hochgestellt. (Siehe den Zwischentitel S. 153 und den dortigen Hinweis auf diese Kommentare.)

A. Anmerkungen des Herausgebers zum 1. Teil der Vorrede

¹⁾ Diese Partien über den Seinscharakter der mathematischen Gebilde hat KEPLER in seine „*Harmonice mundi*“ (Linz 1619) aufgenommen, und M. CASPAR übersetzt sie in seiner deutschen Ausgabe (*Weltharmonik*, München-Berlin 1939) S. 209 ff. so: „Es bleibt noch übrig zu untersuchen, welche Seinsart den mathematischen Allgemein- und Einzelbegriffen zuzuweisen ist. Kann man einräumen, diese Begriffe erhalten ihr Sein von den Sinnendingen, durch Abstraktion, wie man gewöhnlich sagt, bzw. Zusammenfassung der Einzelmerkmale, zu einer einzigen gemeinsamen Definition, oder muß man den Begriffen ein Sein auch vor den Sinnendingen zuerkennen, wie PLATO annimmt und der Emanationsprozeß alles Seienden dartut? — Fürs erste: Wenn wir behaupten, die mathematischen Begriffe werden von den Sinnendingen begründet, indem die Seele von den materiellen Dreiecken oder Kreisen aus den Begriff Kreis oder Dreieck aus sich selbst, gleichsam in einer nachträglichen Erzeugung, bildet, so frage ich, woher haben dann die Definitionen ihre so große Gewißheit und Genauigkeit? Diese wird herrühren entweder von den Sinnendingen oder von der Seele selber. Es ist aber unmöglich, daß sie von den Sinnendingen herrührt; denn den Definitionen wohnt eine viel größere Feinheit und Genauigkeit inne. Also rührt sie von der Seele her, die dem Unvollkommenen Vollkommenheit, dem Groben und Ungenauen jene feine Genauigkeit verleiht. — Denn man sage mir, wo findet sich unter den Sinnendingen das Unteilbare (*Punkt*), das Breitenlose (*Linie*), das Tiefenlose (*Fläche*), oder wo Gleichheit der Strecken vom Mittelpunkt aus [*Kreisdefinition*], wo durchgängige Konstanz der Seitenverhältnisse, wo genaue Rechtwinkligkeit? Ich sehe nirgends etwas hievon; alles Sinnliche ist gemischt und vermengt, nichts ist rein und von seinem Gegenteil frei; alles ist teilbar, räumlich getrennt und bewegt. Wie werden wir dem Unbeweglichen aus dem, was beweglich ist und sich immer wieder anders verhält, ein dauerndes Sein verleihen? Denn was sein Sein von bewegten Wesenheiten erhält, das, so geben jene selber zu, hat auch selber ein veränderliches Sein. Und wie werden wir den genauen und gewissen Begriffen ihre Genauigkeit aus etwas Ungenauem verschaffen? Denn alles, was Ursache einer unveränderlichen Erkenntnis ist, ist selber noch viel mehr von dieser Art. Man muß also annehmen, daß die Seele selber Erzeugerin der mathematischen Begriffe ist. Wenn sie nun aber, im Besitz der Urbilder, diesen Sein und Wesen gibt, so daß das Erzeugen nichts anderes ist als ein Hervorbringen der Begriffe, die in der Seele vorher schon vorhanden waren, dann werden wir mit PLATO in Übereinstimmung sein, und das wahre Wesen der mathematischen Dinge ist gefunden. Wenn aber die Seele die mathematischen Begriffe nicht besäße oder vorher anderswoher bekommen hätte (wenn sie diese nicht zugleich mit ihrer Erschaffung empfangen hätte) und trotzdem diesen wunderbaren Ornat webt, diese so herrliche Gedankenwelt gebiert, wie vermag sie dann zu unterscheiden, ob das, was sie erzeugt hat, Wesen und Bestand besitzt, oder im Winde verfliegt und eher Schein ist als Sein? Welche Normen besitzt sie, um zu er-messen, was davon wahr ist? Ja, wieso erzeugt sie eine so große Mannigfaltigkeit von Begriffen, wenn sie deren Wesen nicht in sich trägt? Denn dann würde das, was wir hervorbringen, zufällig und nicht auf Zweck und Ziel bezogen sein.

Die mathematischen Begriffe sind also Sprößlinge der Seele, und diese erhält die Begriffe, die sie bildet, nicht von den Sinnendingen; die letzteren sind vielmehr Offenbarungen der ersteren, und das Erzeugen und Gebären der Seele bringt ewige Begriffe ans Licht.“ — Die geistesgeschichtliche Einordnung dieser Stellen habe ich in „Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei KEPLER“, Leipzig 1941 (= Die Gestalt, Heft 5) gegeben. Siehe auch: A. SPEISER, „Proklus Diadochos über die Mathematik“ (Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 65 ff.). Es heißt dort (S. 66): „Dann wird in drei Ansätzen die ARISTOTELISCHE Ansicht zurückgewiesen, daß das Mathematische durch Abstraktion aus den Wahrnehmungen der Sinne gewonnen werde“ (s. unsere folgenden Anmerkungen). „Zuerst führt PROKLUS die *Genauigkeit der mathematischen Figuren* ins Feld, die es in den Wahrnehmungen nicht gibt. Dieses Argument gilt auch heute noch, denn unsere ganze Begründung der Analysis, der Begriff der Stetigkeit, des Grenzwertes, ferner die Unterscheidung zwischen rational und irrational sind nicht nur sinnlos im Sinnlichen, sondern ihm diametral entgegengesetzt. Die Länge einer gezeichneten Geraden ist ihrem Wesen nach nicht genau bestimmt und die Zahl $\sqrt{2}$ würde im Physikalischen einen unendlichen Progreß immer genauerer Konstruktionen erfordern, der niemals von einer seiner Stationen weiter fortgesetzt werden könnte ohne Zuhilfenahme der mathematischen Definition dieser Zahl. Gerade dieser Progreß aber ist das Wesen dieser Zahl. Keine Station hat die Eigenschaft der Irrationalität an ihr.“ — Vgl. auch die demnächst erscheinende Hamburger Dissertation über KEPLER und seine ontologische Auffassung der Mathematik von ERNA KNÖFEL.

²⁾ „der Winkelsumme“ ist zu ergänzen. — Von mir im Übersetzungstext eingefügte Ergänzungen, die das Verständnis erleichtern sollen, sind in <...> gesetzt; Ergänzungen in (...) hat der Herr Übersetzer eingefügt.

³⁾ Dieses zweite Argument gegen die Aristotelische Auffassung übersetzt M. CASPAR (s. Anm. 1) S. 210/11 so: „Zweitens: Wenn wir die mathematischen Definitionen von unten her aus den Sinnendingen gewinnen, wie kann es dann sein, daß die Beweise, die sich auf die Sinnendinge gründen, nicht besser sind als die Beweise auf Grund der allgemeineren und einfacheren Begriffe. Man sagt ja, daß bei der Lösung eines Problems das, was Ursache ist, zum Beweisen heranzuziehen sei. Wenn nun die Einzeldinge Ursache der Allgemeinbegriffe, die Sinnendinge Ursachen der Verstandesdinge sind, wie kann es dann sein, daß das zu Beweisende auf das Allgemeinere, nicht auf das Einzelne bezogen wird, und wie können wir zeigen, daß das Wesen des Intelligiblen sich zum Beweisen besser eignet als das des Sinnlichen? Denn, so sagt man, nicht der, der beweist, daß im gleichschenkligen Dreieck und im gleichseitigen und im schiefwinkligen Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, besitzt ein richtiges Wissen; vielmehr kommt dem ein eigentliches Wissen zu, der dies von einem jeden Dreieck schlechthin nachweist. Ferner sagt man: das Allgemeine taugt besser zum Beweisen als das Besondere, und die Beweise gehen vom Allgemeineren aus. Das aber, von dem die Beweise ausgehen, ist das Frühere und geht seiner Natur nach den Einzeldingen voraus; es ist die Ursache für das, was zu beweisen ist. Die apodiktischen Erkenntnisse [der Mathematik] sind weit davon entfernt, nach den ihrem Entstehen nach späteren und dunkleren Sinnendingen auszuschaun.“ — SPEISER bespricht dieses zweite Argument des PROKLUS (s. Anm. 1, S. 66) so:

„Das zweite Argument stützt sich auf die Aristotelische Beweislehre, wonach nicht aus dem Besonderen, nämlich der einzelnen sinnlichen Wahrnehmung, auf das Allgemeine, das mathematische Gesetz, geschlossen werden kann.“

*) M. CASPAR übersetzt in KEPLERS „*Weltharmonik*“ (s. Anm. 1) dieses wichtigste dritte Argument des PROKLUS gegen ARISTOTELES S. 211 so: „Dazu sage ich noch drittens: Wer die obige Ansicht vertritt, der drückt die Seele unter die Materie herunter. Denn wenn die Materie das, was wesentlich ist und ein höheres Sein hat und einleuchtender ist, von der Natur empfängt, die Seele aber in zweiter Linie hieraus hindendrein Begriffe und Bilder in sich schafft, die ihrem Sein nach niedriger sind, indem sie von der Materie entnimmt, was seiner Natur nach von ihr nicht getrennt werden kann, gibt man dann nicht der Seele einen niedrigeren und geringeren Rang als der Materie? Denn die Materie ist der Ort für die materiellen Begriffe, die Seele der Ort für die immateriellen. Es wäre dann aber die Materie der Ort für das Primäre, die Seele der Ort für das Sekundäre; die Materie der Ort für das, was seinem Sein nach vorangeht, die Seele der Ort für das, was sein Sein hieraus empfängt; die Materie der Ort für das, was in Wirklichkeit Sein besitzt, die Seele der Ort für das, was nur gedacht wird. Wie kann nun die Seele, die am Geist und am intelligiblen Sein zuvörderst teilhat und dadurch mit Erkenntnis und ganzem Leben erfüllt ist, die Stätte für dunklere Begriffe sein als die Sinnendinge, die unter allem Seienden der letzte und seinem Sein nach unvollkommenste Sitz sind? Doch es ist überflüssig, diese Lehre, die mit Recht schon von vielen ge- geißelt worden ist, noch weiter zu bekämpfen. — Wenn nun die mathematischen Begriffe nicht durch Abstraktion aus den materiellen Dingen und durch Zusammenfassung dessen, was den Einzeldingen gemeinsam ist, gewonnen werden, überhaupt nicht später als die Sinnendinge sind oder von diesen herrühren, so muß sie die Seele entweder aus sich oder vom Geiste oder zugleich aus sich und vom Geiste haben. Hätte sie nun aber diese Begriffe aus sich selber, wie können diese dann Abbilder der intelligiblen Ideen sein, wie können sie Zwischenglieder bilden zwischen der teilbaren und der unteilbaren Natur, wenn sie in keiner Weise aus den Urbildern eine Vollendung ihres Seins erhalten? Wie können schließlich die im Geiste wohnenden Urbilder die allgemeinen Formen regieren? — Hat aber die Seele die mathematischen Begriffe nur vom Geist, wie bleibt dann die Eigentätigkeit und Selbstbewegung der Seele erhalten, wenn die Begriffe, die sie in sich hat, nach Art der Dinge, die von einem anderen bewegt werden, von anderswoher in sie eingeflossen sind? Worin würde sich die Seele von der Materie unterscheiden, die nur in der Potenz alles ist, selber aber nichts an materiellen Formen erzeugt? — Es bleibt also nur übrig, daß die Seele die mathematischen Formen sowohl aus sich als auch aus dem Geiste ableitet, und daß sie selber die Fülle der Formen ist, die zwar in den intelligiblen Ideen ihren Ursprung haben, von sich aus aber den Zugang zum Sein erlangen. Die Seele ist also keine leere Tafel, aller Begriffe bar, sie ist vielmehr immer beschrieben; sie schreibt auf sich selber und wird vom Geist beschrieben. Denn die Seele ist auch selber ein Geist, der sich in Übereinstimmung mit dem Geist, der früher ist als er, tätig rührt; sie ist ein nach außen gesetztes Bild und Gleichnis von diesem. Wenn dieser Geist alles ist in intellektueller Art, so ist die Seele alles in seelischer Art; wenn jener urbildlich, so diese abbildlich; wenn

jener eingefaltet, so diese ausgefaltet. PLATO hat das erkannt. Er läßt daher die Seele aus allen mathematischen Formen bestehen, durch die Zahlen geteilt und durch Analogien und harmonische Verhältnisse wieder verbunden werden. Er verlegt in sie die wirksamen Prinzipien der Figuren, das Gerade und das Krumme, und läßt die Kreise in ihr sich in erkennbarer Weise bewegen. Alles Mathematische ist zuerst in der Seele, vor den Zahlen die sich selbst bewegenden Zahlen, vor den sichtbaren Figuren die lebendigen, vor dem harmonisch Geordneten die harmonischen Verhältnisse. Vor den Körpern, die sich im Kreise bewegen, waren die unsichtbaren Kreise geschaffen. Die Seele ist die Fülle von alledem. Es offenbart sich hier ein anderer Kosmos, der sich selber verwirklicht und von seinem eigenen Prinzip verwirklicht wird, der sich selber mit Leben füllt und von dem Schöpfer her in unkörperlicher und unräumlicher Art erfüllt wird. Wenn die Seele den geistigen Inhalt daraus hervorhebt, deckt sie alle Wissenschaft und alle Tugend auf. In diesen Formen begründet die Seele ihr Wesen. Die Zahl in ihr darf man nicht als eine Vielheit von Einheiten auffassen und die Idee des Ausgedehnten nicht als etwas Körperliches. Alles ist lebendig und geistig zu denken: die Urbilder der Zahlen, Figuren, Verhältnisse und Bewegungen, indem man dem Timäus folgt, der die ganze Erzeugung und Erschaffung der Seele von den mathematischen Ideen vollendet werden läßt und aller Dinge Ursachen in sie verlegt.“ — A. SPEISER kommentiert dieses dritte Argument des PROKLUS (s. Anm. 1, S. 66/67) so: „Als drittes, wichtigstes Argument heißt es: wer das Mathematische durch Abstraktion entstehen läßt, erniedrigt die Seele noch unter die Materie. Denn wenn die Materie das, was wesentlich und wirklicher und bestimmter ist, von der Natur empfangen hat, während die Seele erst aus zweiter Hand von den materiellen Formen Spiegelbilder und Abdrücke zweiten Ranges in sich aufnimmt, indem sie diese abstrahiert aus der (ihr an Wert untergeordneten) Materie, wobei die Formen selber ihrer Natur nach sich nicht einmal loslösen lassen von der Materie, — wie sollte da die Seele nicht trüber und kraftloser als die Materie sein? Hiermit treten alle Beweise für die Existenz der Seele in Funktion und PROKLUS geht nicht mehr näher darauf ein. — Also ist die Seele die Schöpferin der mathematischen Formen und ihres Zusammenhanges. Weil sie die Urbilder besitzt (durch die geistige Schau), vermag sie das Mathematische seinem Sein nach aufzustellen, und ihre Schöpfungen sind Projektionen der schon vorher in ihr vorhandenen Ideen. ‘Wenn die Seele ohne den Besitz der Ideen einen so herrlichen Ornat (= geistigen Kosmos) sich gewoben und eine solche Theorie (= Schau geistiger Realitäten) geschaffen hätte, wie könnte sie diese Schöpfungen prüfen, ob sie Bestand haben, oder ob der Wind sie verweht und sie bloße Spiegelbilder ohne Wahrheit sind? Welcher Normen könnte sie sich bedienen, um ihre Wahrheit zu messen? So sind die mathematischen Gebilde Schöpfungen der Seele und ihre Gesetzmäßigkeiten, aus denen die Seele besteht, bekommen sie nicht vom Sinnlichen; vielmehr wird dieses von jenen projiziert.’ — Nun wird das Wesen der Seele näher beschrieben. Danach existiert das Mathematische sowohl in der Seele als im Geist. Was erstere zerteilt erblickt in Gestalt einer diskursiven Darstellung, besitzt der Geist urbildartig und zusammengefaßt. Daher besteht die Seele aus den mathematischen Ideen; sie ist ihre Fülle, ihr Inbegriff (*Pleroma*), und die mathematische Welt hat im Gegensatz zum äußeren Kosmos die Eigenschaft, sich selbst zu be-

wegen. 'Und wenn sie ihre *Logoi* projiziert, dann läßt sie die Wissenschaften erscheinen und die Tugenden, und nimmer hört sie auf, zu schaffen und Neues zu finden, indem sie die zusammengefalteten *Logoi* in ihr zur Entfaltung bringt. Denn sie besitzt alles ursprungsartig im vorhinein, und gemäß ihrer unbegrenzten Kraft baut sie aus diesem Besitz die Bollwerke mannigfacher Theoreme.' — Für PROKLUS ist also die wahre Psychologie Mathematik, die Natur der Seele durch Mathematik gekennzeichnet. Sie ist nicht passiv, wie die heutige Psychologie annimmt, und allenfalls befähigt, Eindrücke, die ihr von außen kommen, zu verarbeiten, sondern sie ist eine aktive Kraft, welche in die konfuse Sinnenwelt ihre Formen projiziert, ähnlich wie der Mensch in eine wüste Gegend eindringt und dort Wege, Straßen, Häuser baut, den Boden kultiviert und ihn hierdurch fruchtbar macht. Dazu muß sie sich zuerst eine geistige Welt erbauen und dann das dort befindliche auf die Materie übertragen. Andererseits begegnen ihr in der Wahrnehmung unausgesetzt schon geformte Dinge, ja, wir könnten sagen, daß niemand jemals absolut ungeformten Wahrnehmungen begegnet ist. Also scheint es, daß sie doch aus der Wahrnehmung Formen übernehmen könnte. Nun ist aber nach der von PROKLUS zu Grunde gelegten PLATONISCHEN Lehre, die insbesondere im Menon ausgeführt wird, die Seele nicht von den Sinnendingen aus mit Erkenntnissen anzufüllen. Die Kraft ist einseitig und geht nur von der Seele auf die Wahrnehmungen. PLATO führt zur Lösung dieser Schwierigkeit den Begriff des Weckens ein: der Wecker ist nur Anlaß zum Aufwachen, er gibt nicht selber das wache Leben. Ebenso weckt eine schöne Gestalt die Erinnerung an die Idee der Schönheit, welche im Herzen wunderbar schlief. Nach PROKLUS gibt es nun für den Verstand zwei Wege, die er durchlaufen kann, einen aufsteigenden und einen absteigenden. Beide verbinden die beiden Grenzen des Verstandes, nämlich die Sinnlichkeit unten und den Geist oben miteinander. Der aufsteigende Weg hat die Vereinheitlichung zum Ziel und faßt das Mannigfaltige zusammen, der absteigende beginnt bei den Urbildern und vervielfältigt sie zur ganzen Buntheit der Außenwelt. Auf dem letzteren Weg projiziert der Verstand die angewandten Wissenschaften. — Die geistige Einordnung dieser Standorte des PROKLUS in den Ideenkreis „*Mathematik und Kunst*“ hat im Anschluß an A. SPEISER der Schweizer Forscher W. UEBERWASSER in seinem tiefgehenden Werk „*Von Maß und Macht der alten Kunst*“ (Leipzig-Straßburg-Zürich 1933) vorgenommen. Es heißt dort als Anm. 24, S. 17: „Andreas SPEISER definiert, künstlerisches Schaffen und die Philosophie in die 'mathematische Denkweise' miteinbeziehend, ihr Verhältnis 'am besten in der triadischen Form des PROKLUS': 'die Mathematik bildet mit der Philosophie und der Kunst zusammen eine Triade, wobei die Philosophie dem beharrenden Zentrum, die Mathematik als fortschreitende Forschung der *Prohodos*, die Kunst als die begrenzende und bildende Tätigkeit der *Epistrophé* entspricht'.“ (SPEISER, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932.) — Im Zeichen dieser Triade steht auch meine Schrift: M. STECK, *Mathematik und Kunst*, Berlin 1943; 2. Ausgabe 1944 in erweiterter Form. — Wertvolle Beiträge zu diesem, geistesgeschichtlich gesehen hochwichtigen und bedeutsamen Ideenkreis bieten die folgenden Werke: W. UEBERWASSER, *Spätgotische Bau-Geometrie, Untersuchungen an den Basler Goldschmiedrissen* (Jahresberichte der öffentlichen Kunstsammlung, Basel 1928/30); E. MÖSSEL, *Die Proportion in Antike und Mittelalter* (München 1926); E. MÖSSEL, *Urformen des Raumes als Grundlagen der Form-*

gestaltung (München 1931); E. MÜSSEL, *Vom Geheimnis der Form und der Urform des Seins* (Stuttgart-Berlin 1938); W. UEBERWASSER, *Nach rechtem Maß, Aussagen über den Begriff des Maßes in der Kunst des 13.—16. Jahrhunderts* (Jahrbuch der Preuß. Kunstsammlungen 1936); M. STECK, *Geometrie und Kunst* (Geistige Arbeit Nr. 5, Jhg. 1942); A. HILDEBRAND, *Das Problem der Form in der bildenden Kunst* (Straßburg 1893; 9. Aufl. Straßburg 1918); W. LIETZMANN, *Mathematik und bildende Kunst* (Breslau 1931; Neuaufl. in Vorber.); W. LIETZMANN, *Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden* (Breslau 1940).

⁵⁾ Die jetzt noch folgende Partie hat KEPLER ebenfalls übernommen und CASPAR übersetzt sie (s. Anm. 1, S. 212) so: „Von allen Zahlenbegriffen existieren von Anfang an die sieben Zahlenbegriffe (nämlich 1, 2, 4, 8; 3, 9, 27) ursächlich in ihr. Die Urformen der Figuren sind zu schöpferischer Tätigkeit in sie gelegt. Von den Bewegungen die erste, die alle übrigen umfaßt und antreibt, ist ihr eingeboren. Denn von allem, was bewegt wird, ist der Kreis und die Kreisbewegung Anfang und Ursprung. Es sind also wesentlich und sich selbst bewegend die Begriffe der mathematischen Dinge, die die Seele erfüllen. Indem der Verstand sie hervorholt und entwickelt, begründet er die ganze Mannigfaltigkeit der mathematischen Wissenschaften. Er hört nie auf dabei, sondern erzeugt und erfindet immer Neues, indem er seine unteilbaren Begriffe entfaltet. Alles hat die Seele in elementarischer Form von Anfang an erhalten und in ihrer unbegrenzten Kraft bildet und produziert sie aus dem, was sie zuvor empfangen hat, Sätze und Systeme jeglicher Art.“ — Über den Kreis als „*raumaufspannende Kraft*“ (A. SPEISER) siehe Anm. 132 unten.

⁶⁾ Unter „*Katoptrik*“ verstand man zu Zeiten der Griechen die Wissenschaft von den Spiegeln, also im wesentlichen die Lehre von der *Reflexion des Lichtes*, während die Griechen unter „*Optik*“ hauptsächlich *Perspektive* und die Anfänge der heutigen *geometrischen Optik* zusammenfaßten. (Siehe Anm. 21 unten, wo dies von PROKLUS selbst erklärt wird.)

⁷⁾ Im Mittelpunkt dieser Entwicklungen des PROKLUS steht ein Kernstück der PLATONISCHEN Philosophie, das sich um das „*Höhlengleichnis*“ aus dem VII. Buch der „*Politeia*“ gruppiert. A. SPEISER bespricht diese Stelle des PROKLEISCHEN Werkes (s. Anm. 1, S. 69/70) so: „PROKLUS geht nicht noch einmal auf den Nutzen der Mathematik ein, sondern er benützt den Einwand nur, um dem zentralen Gedanken der platonischen Philosophie umsomehr Wucht zu geben. *Man muß die Mathematik um ihrer selbst willen treiben und nicht um der menschlichen Notdurft willen.* Denn sie reinigt das Auge der Seele und löst die Seele von den Fesseln der Sinne. Auch ARISTOTELES sage, daß die Mathematiker ihre Wissenschaft um ihrer selber willen treiben, denn sonst hätte sie nicht in kurzer Zeit eine so gewaltige Entwicklung nehmen können, ohne daß irgendeine Besoldung dafür ausgesetzt war. Und wer auch nur wenig von ihrem Nutzen gespürt hat, wünscht in ihr zu weilen und alles andere zu lassen. *Wer verächtlich von der Mathematik spricht, hat nie von ihrer Süßigkeit gekostet.* — Die Quelle dieser Lehren des PROKLUS ist PLATOS Staat, und zwar die Partie vom Ende des sechsten Buches bis zur Mitte des siebenten. Ihr Zentrum wird von dem bekannten *Höhlengleichnis* gebildet. Man denke sich Menschen in eine finstere Höhle eingeschlossen und so gefesselt, daß sie nur gegen eine Wand blicken können; hier sehen sie Schattenbilder, die sich bewegen. Da sie nie

etwas anderes gesehen haben, werden sie diese für die Wirklichkeit ansehen. Nun denke man sich einen von ihnen von den Fesseln befreit und in die Außenwelt gebracht. Er wird zuerst geblendet und erst nach einiger Zeit die Herrlichkeit dieser Welt erkennen. Kehrt er nun zurück in die Höhle, so wird er Mühe haben, sich wieder zurecht zu finden und zum Gespött der Mitgefangenen werden. Diese Höhle ist die *sichtbare Welt*; der Gefangene, der sich befreit hat, ist die *Seele*, welche sich zur geistigen Welt erhebt. Und nun fragt PLATO: Welche Wissenschaft ist imstande, die Seele aus dem Dunkel ins Licht der wahren Wirklichkeit zu erheben? Er findet sie in der *Mathematik*. 'Aber niemand bedient sich ihrer in richtiger Weise.' Man soll sie um ihrer selbst willen und zum Aufstieg in die geistige Region betreiben. Dies ist die „*Befreiung von den Fesseln*“, von der PROKLUS und IAMBlich sprechen. — *Man kann nicht gerade sagen, daß in der neueren Zeit die Mathematik in diesem Sinne verwendet wird.* Der tiefere Grund liegt darin, daß durch das Christentum in allen die Seele betreffenden Fragen die mathematischen und überhaupt die philosophischen Kräfte durch die viel mächtigeren religiösen ersetzt worden sind.“ (Siehe den Nachweis für diese Auffassung bei: E. FUETER, *Geschichte der exakten Wissenschaften* [Aarau-Leipzig 1941]). „*Die Weltweisheit ist zurückgedrängt worden.* Trotzdem behalten diese Lehren ihren Wert und es ist kein Zweifel, daß die Philosophie, wenn sie autonom sein will, der Mathematik als ihres Rechtsgrundes bedarf. Denn die Ethik und die Künste lassen sich mit einiger Plausibilität an anderes anknüpfen, erstere etwa als Resultat der Abschleifung im menschlichen Zusammenleben, letztere etwa als Abbilder sinnlicher Erlebnisse. Einzig bei der Mathematik ist eine solche Abhängigkeit einwandfrei auszuschließen — das leistet z. B. der erste der PROKLischen Beweise — und erst dadurch ist der Grund zu einer autenergischen Philosophie gelegt.“ — Soweit A. SPEISER. (Vgl. M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942; 2. Aufl. 1943.) — Von E. HOFFMANN, wohl dem besten lebenden PLATON-Interpreten und CUSANUS-Forscher, haben wir in seiner Schrift „*Die griechische Philosophie von Thales bis Platon*“ (Leipzig-Berlin 1921) eine glänzende Darstellung der unvergänglichen denkerischen Leistungen PLATONS, in die auch das „*Höhlengleichnis*“ kurz aufgenommen ist, während Herr Prof. HOFFMANN in seinen unveröffentlichten Vorlesungen uns darüber noch viel mehr gesagt hat. Wir zitieren aus dem gedruckten Werke von S. 107 an, wo es heißt: „Trägt man die vier Erkenntnisgrade (*Aisthesis*, Wahrnehmung; *Dianoëtik*, wissenschaftliches, Ideelles und Empirisches verknüpfendes Denken; *Dialektik*, Erkenntnis der Ideen; unterste Stufe vor der *Aisthesis* die *Eikasia*, das abbildliche Erfassen) als Abschnitte auf einer Geraden auf“ (sog. „*Liniengleichnis*“ PLATONS), „so verhalten sich die beiden oberen Abschnitte insgesamt zu den beiden unteren insgesamt wie Denken zum Wahrnehmen; der erste und dritte aber zum zweiten und vierten, wie originales Erfassen zu kopierendem Nachbilden. Das Geistige und das Originale sind die höheren Merkmale, das Körperliche und Kopierende die niederen; die Vorzüge vereint machen den Wert der höchsten Stufe aus. Oder in dem klassisch gewordenen Bilde ausgedrückt: der wahrnehmende Mensch befindet sich in einer Höhle“ (Höhlengleichnis PLATONS), „der denkende hat sie verlassen. Drinnen ist eine gewisse Helligkeit, aber die Helligkeit kommt von einem künstlich angezündeten Feuer; draußen ist es wirklich hell, denn es leuchtet das

Licht der Sonne. Die *Empiriker* drinnen glauben, daß die Helligkeit ihrer Sinnesanschauung von der wahren, letzten Lichtquelle ausgeht; der *wissenschaftliche Mensch* draußen aber weiß, daß das künstliche Feuer nur ein Ableger der Sonne ist. Aber drinnen wie draußen gibt es zwei Stufen. Drinnen sind die einen gefesselt und dem künstlichen Feuer abgewandt; sie nehmen nicht einmal Originales wahr, sondern Schattenbilder von dem, was hinter ihnen vorgeht, auf der ihnen zugekehrten Rückwand der Höhle; es sind die Menschen, bei denen selbst die Wahrnehmung noch ungeschult ist; die anderen haben sich entfesselt und sehen, was in der Wahrnehmungswelt der Höhle wirklich geschieht, immerhin unmittelbar und können sogar ihre Wahrnehmung auf ihre Bedingung zurückführen; sie sind in der Schule bis zu den *empirischen Wissenschaften* vorgedrungen. Draußen aber, im wahren Lichte, stehen die einen am Ufer und sehen die Bilder der himmlischen, wahrhaftigen Dinge, der Sterne und ihres Wandels, abgespiegelt im Wasser, den Kreis des Mondes und all die mathematischen Figuren der Gestirne; es sind die *Dianoëtiker* mit ihrem schon vom wahren Lichte erleuchteten, aber noch *auf die Begrifflichkeit beschränkten Denken*. Die anderen aber, ganz wenige, die die höchste Stufe der Erkenntnis erreicht haben, die rein *noëtische*“ (die *Dialektiker*) „sehen hinauf zu den leuchtenden Gestalten selber und schauen, als höchste Vollendung, den Urquell des Lichts von Angesicht zu Angesicht: die Sonne im Reich der Ideen.“

⁸⁾ Auch diese Partie hat KEPLER in seine „*Harmonice mundi*“ als Motto des 3. Buches, seiner Mathematik der Musik, aufgenommen und M. CASPAR übersetzt sie (Anm. 1, S. 85) so: „Für die Theologie arbeitet die Mathematik dem gedanklichen Aufbau vor. Denn was für die Erkenntnis der Wahrheit über das Göttliche den Uneingeweihten schwierig und hoch erscheint, das legen die mathematischen Begriffe mit Hilfe von Bildern als überzeugend, offenkundig und unwiderleglich dar. Sie zeigen die Offenbarungen der überwesentlichen Eigenschaften in den Zahlen auf und lassen die Kräfte der intelligiblen Formen in den intellektuellen hervortreten. Daher gibt uns PLATO viele wunderbare Lehren über das Göttliche mit Hilfe der mathematischen Begriffe, und die Philosophie des PYTHAGORAS verbirgt hinter diesen wie hinter einem Vorhang die Einführung in die Mysterien der göttlichen Lehren. Dieser Art ist auch die ganze „*Heilige Rede*“ sowie das, was PHILOLAUS in den „*Bakchen*“ vorträgt, und der ganze Lehrvortrag des PYTHAGORAS über die Götter.“ — Über die hier erscheinenden Schriften „*Heilige Lehre*“ und „*Bakchen*“ sagt CASPAR in der zugehörigen Anmerkung auf S. 375: „Der von PROKLUS erwähnte *ιερός λόγος* ist ein dem PYTHAGORAS zugeschriebenes orphisches Gedicht. Die „*Bakchen*“ ist der Titel, der in späterer Zeit einem zum größten Teil verlorengegangenen Werk des Pythagoreers PHILOLAUS gegeben wurde. Dieses Werk, das über Harmonik und Kosmologie, Zahlen- und Seelenlehre handelte, sollte mit diesem Namen als Erzeugnis heiliger Begeisterung bezeichnet werden.“

⁹⁾ Auch diese Stelle hat KEPLER in seine „*Harmonice mundi*“ als Motto des 1. Buches aufgenommen und CASPAR übersetzt sie (Anm. 1, S. 11) so: „Für die Betrachtung der Natur leistet die Mathematik den größten Beitrag, indem sie das wohlgeordnete Gefüge der Gedanken enthüllt, nach dem das All gebildet ist... und die einfachen Urelemente in ihrem ganzen harmonischen und gleichmäßigen Aufbau darlegt, mit denen auch der ganze Himmel begründet wurde,

indem er in seinen einzelnen Teilen die ihm zukommenden Formen annahm.“ — Diese Stelle wird noch ausführlicher von KEPLER als Motto des 4. Buches der „*Harmonice mundi*“ wiedergegeben und lautet in der Übersetzung von CASPAR so: „Für die Betrachtung der Natur leistet die Mathematik den größten Beitrag, indem sie das wohlgeordnete Gefüge der Gedanken enthüllt, nach dem das All gebildet ist, und die Analogie aufzeigt, die, wie Timäus einmal sagt, alles in der Welt miteinander verbindet, Widerstreitendes aussöhnt und Fernliegendes in Zusammenhang und Sympathie bringt... So ist es auch möglich, günstige Winkelstellungen zu erschließen. Dies wollte auch, so glaube ich, Timäus zeigen, wenn er allenthalben mit mathematischen Bezeichnungen seine Betrachtung der Natur des Alls darlegt, die Entstehung der Elemente durch Zahlen und Figuren erklärt, und ihre Kräfte im Erleiden und Handeln auf diese zurückführt, indem er von den Winkeln die Spitzwinkligkeit und Stumpfwinkligkeit, von den Seiten die Geradlinigkeit und die Gegenteile davon, die Fülle oder Dürftigkeit der Elemente als Ursache bezeichnet für die Mannigfaltigkeit der Veränderungen. — Was die sogenannte *Staatslehre* anlangt, wie könnte man leugnen, daß hier die Mathematik viel Wunderbares ausrichtet, indem sie die rechte Zeit zum Handeln, die verschiedenen Perioden des Alls... sowie die Zahlen bemißt, die entweder zu einem harmonischen Leben hinführen oder zu einem unharmonischen verleiten und allgemein entweder reiche Saat oder kärglichen Mangel bringen.“ (Anm. 1, S. 197). — Bei A. SPEISER („*Über die Zahlen und den Raum bei den Neuplatonikern*“, Die mathematische Denkweise, Zürich 1932, S. 76 ff.) heißt es in diesem Zusammenhang (S. 81/82): „Jede staatliche Institution setzt *gezählte Menschen* voraus. Diese Erkenntnis läßt sich noch in vorpythagoreischer Zeit nachweisen. Im Alten Testament (2. Sam. Kap. 24) wird berichtet, daß David von Gott bestraft wurde, weil er sein Volk zählen ließ. Hier wird offenbar die Zählung als Gründung eines weltlichen Reiches angesehen. *Vielleicht ist die Idee der Gerechtigkeit unter der allgemeinen Idee der Symmetrie zu subsumieren*. So setzt die Beurteilung eines Kaufvertrages voraus, daß man sich in die Lage des Käufers und des Verkäufers versetzen kann kraft der Zahl, und daß man die Symmetrie, das Gleichgewicht, beurteilen kann. Der Kauf ist so nach eine Relation mit zwei symmetrischen Leerstellen. — Eine interessante Bestätigung, daß es sich in der Jurisprudenz um Symmetrien handelt, liefert die bekannte Forderung: ‘Sei nicht allzu gerecht’ (*Prediger Sal. Kap. 7,16*), im römischen Recht: ‘*Summum ius summa iniuria*’ (worüber J. STROUX in der Festschrift für meinen Vater eine schöne Abhandlung geschrieben hat, die auch separat bei B. G. Teubner erschienen ist.) Wenn das Recht nur aus den Lebensgewohnheiten der Menschen entstände, so wäre ein solches Urteil unverständlich. Denn für die materiellen Gegenstände gilt die Regel, daß sie um so besser funktionieren, je genauer sie verfertigt sind, und die Ungenauigkeit läßt sich nur durch die praktische Notwendigkeit, durch die Ökonomie rechtfertigen, die nicht gestattet, daß man zu viel Zeit und Arbeit auf einen Gegenstand verwendet. Ebenso müßte es mit dem Recht sein. Aber der Satz behauptet gerade im Gegenteil, wenn man die Präzision allzuweit treibe, so fliehe die Gerechtigkeit und an ihre Stelle trete das Unrecht. Genau dasselbe Phänomen haben wir auch in der *Musik* beobachtet: wenn die Präzision in der Wiedergabe übertrieben wird, so flieht die Schönheit. Aber auch in der Geometrie pflegt man die Figuren

nicht allzu genau zu machen; man will nicht den Anschein erwecken, als könne man durch Steigerung der Präzision sich der mathematischen Genauigkeit nähern. Die sogenannte Exaktheit in der Mathematik ist etwas Grundverschiedenes von der Präzision einer Näherung. Wir haben das schon früher an der Irrationalität deutlich zu machen gesucht. *Eine gute Annäherung von $\sqrt{2}$ durch eine rationale Zahl ist nicht irrationaler als eine schlechte; die Lehre von den quadratischen Zahlkörpern kann im Gebiet der Annäherungen gar nicht erscheinen.* So liegen die Dinge auch im Recht. Durch mechanische Präzision in der Anwendung der Vorschriften wird man sich nicht der Gerechtigkeit nähern, sondern man wird sie vertreiben und an ihre Stelle eine bloße Geschicklichkeit setzen. Das alles läßt sich in einer Vorschrift zusammenfassen, die ungefähr so lautet: *man soll die Abgrenzungen im geistigen Gebiet nicht so erstarren lassen, daß die Prohodos abgetötet wird. Jede Epistrophé — und ein Gesetzbuch gehört unter diesen Titel — ist bloß eine Stufe und dazu bestimmt, in einer höheren aufgehoben zu werden“* (s. Anm. 4 oben).

^{9a)} Auch diese Stelle über die Ethik hat KEPLER als Motto des 3. Buches der „*Harmonice mundi*“ aufgenommen. Sie lautet in der CASPARschen Übersetzung (Anm. 1, S. 85): „In ethischer Hinsicht vervollkommenet uns die Mathematik, indem sie unseren Sitten Ordnung und Harmonie in der Lebensführung einpflanzt. Sie gibt Körperhaltungen, wie sie zur Tugend passen, und Melodien und Bewegungen an die Hand, wie auch jener Gastfreund aus Athen will, daß hierdurch alle die, die von Jugend an nach Tugend streben, zur Vollkommenheit gelangen sollen. Die Wohlordnung der Tugenden breitet sie vor uns aus und zwar anders in Zahlen, anders in Figuren, anders in musikalischen Harmonien; sie zeigt uns auch, was die Laster zuviel oder zuwenig an sich haben. Durch all das verleiht sie uns Ebenmaß des Charakters und sittliche Anmut.“ — CASPAR führt in der zugehörigen Anmerkung (S. 375) aus: „Der ‘Gastfreund aus Athen’ ist die führende Person in PLATOS Dialog ‘Gesetze’. PLATO läßt das Gespräch auf Kreta sich abspielen und durch den Gastfreund aus Athen seine eigenen Gedanken aussprechen. Die hier angezogenen Ausführungen finden sich in den ‘Gesetzen’ am Anfang des II. Buches (654 ff.)“ (s. Anm. 9).

¹⁰⁾ Dieser Zusammenhang der Mathematik mit den Künsten (Anm. 4 oben) ist erkenntnistheoretisch und geistesgeschichtlich außerordentlich wichtig. Da er hier durch PROKLUS erneut als Kernstück PLATONISCHER Gedanken belegt wird, ist er als altes klassisches Gedankengut ausgewiesen. Siehe dazu: A. SPEISER, *Klassische Stücke der Mathematik*, Zürich-Leipzig 1925; A. SPEISER, *Die mathematische Denkweise*, Zürich 1932; W. UEBERWASSER, *Spätgotische Bau-Geometrie, Untersuchungen an den Basler Goldschmiedrissen* (Jahresberichte der öffentl. Kunstsammlung, Basel 1928/30); W. UEBERWASSER, *Von Maß und Macht der alten Kunst*, Leipzig-Straßburg-Zürich 1933; E. MÜSSEL, *Die Proportion in Antike und Mittelalter*, München 1926; E. MÜSSEL, *Urformen des Raumes als Grundlagen der Formgestaltung*, München 1931; E. MÜSSEL, *Vom Geheimnis der Form und der Urform des Seins*, Stuttgart-Berlin 1938; W. UEBERWASSER, *Nach rechtem Maß, Aussagen über den Begriff des Maßes in der Kunst des 13. bis 16. Jahrhunderts* (Jahrbuch der Preußischen Kunstsammlungen 1936); M. STECK, *Geometrie und Kunst* (Geist. Arbeit Nr. 5, Jhg. 1942, S. 1 ff.); M. STECK, *Mathematik und Kunst*, Berlin 1943, 2. erw. Ausg. 1944; A. HILDEBRAND, *Das Problem der*

Form in der bildenden Kunst, 9. Aufl. Straßburg 1918; H. RIEMANN, *L. van Beethovens sämtliche Klavier-Solosonaten*, Berlin o. J. (5. Aufl.), 3 Bde.; F. CASSIRER, *Beethoven und die Gestalt*, Berlin-Leipzig 1925; E. SCHWEBSCH, *Joh. Seb. Bach und die Kunst der Fuge*, Stuttgart-Den Haag-London 1931; A. SCHWEITZER, *J. S. Bach*, Leipzig 1922, 4. u. 5. Aufl.

¹¹⁾ Siehe die zu Beginn der obigen Anmerkung 7 angeführten Formulierungen von A. SPEISER, die direkt auf diese Stellen des PROKLUS gehen.

¹²⁾ Siehe die Abhandlung von E. HOFFMANN über PLATONS „Symposion“: „Über Platons Symposion“ (Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 1941, S. 36 bis 58). Man wird daraus für die philosophische Erschließung des „Gastmahls“ lernen müssen. HOFFMANN sagt selbst in der Anm. 27 auf S. 53: „Die richtige Gliederung der Reden ist, so viel ich weiß, bisher nicht gesehen worden, auch der Zusammenhang zwischen Seele und (*nicht zählender, sondern sich bewegend*) Zahl im Symposion nicht erkannt... Eine Art Geschichte der Symposioninterpretation im letzten Jahrhundert gibt GUIDO CALOGERO in der Einführung zu seiner italienischen Übersetzung, Bari 1928.“ — Uns interessiert hier besonders die nicht zählende, sondern *sich bewegend* Zahl, von der auch bei PROKLUS viel die Rede ist. Es heißt bei HOFFMANN in dieser Hinsicht auf S. 44: „... es handelt sich *nicht um Aufzählung*, sondern um PLATONISCHE Zahlen *als Symbole einer sich entfaltenden Gestaltung der Erkenntnis*“ und damit sind eben die sich bewegenden Zahlen gemeint. HOFFMANN fügt gerade dieser Stelle die bedeutsame Erklärung in der Fußnote 14 (S. 44) bei: „ATHANASIUS KIRCHER hat für die Zahlensymbolik im Sinne PLATONS den zutreffenden Ausdruck „Arithmologie“ (man beachte den symbolischen Titelpuffer seines gleichnamigen Werkes, *Arithmologia sive de abditis numerorum mysteriis*, Rom 1665). PLATONS Prinzip ist in den Sätzen Parmen. 144a und 153a enthalten.“ Und S. 54 führt HOFFMANN zur Arithmologie PLATONS noch folgendes, auch für unseren Zusammenhang zentral Wichtige (s. insb. Anm. 7 oben) aus: „Das Mittel aber, durch das PLATON seinen Stoff so gliedert, daß dieser zur Aufnahme der Form empfänglich wird und sie geradezu aus dem Stoffe heraus melodisch gestaltet, liegt im arithmologischen Gefüge des Ganzen (ebenso wie beim Linien- und Höhlengleichnis der *Politeia*, beim Seelenreigen des *Phaidros* und der Weltseele des *Timaios*). ‘Seele ist eine sich selbst bewegend Zahl’, so lehrte PLATONS Schüler XENOKRATES, der aber hiermit nur die Auffassung seines Lehrers formulierte. Ist das wahre Leben der Seele unräumliche Bewegung vom stofflich Wandelbaren zur unvergänglichen Form, also Sehnsucht eines ‘Werden zum Sein’ hin, so hat dies Leben sein absolutes Vorbild in der unräumlichen, *harmonischen Bewegung der Ideen selber als der reinen Formen des wahren Seins*. Auf dieser unräumlichen Bewegung der Ideen aber, d.h. auf ihren notwendigen logischen Beziehungen zueinander, beruht PLATONS Zahlensymbolik.“

Aus dieser klaren PLATON-Interpretation heraus wird man auch viele, bis heute bei PROKLUS als abstrus und „mystisch“ bezeichneten Partien verstehen müssen. Sie bekommen im Rahmen der PLATONischen *Arithmologie*, wie sie insbesondere auch im „*Timaios*“ explizit niedergelegt ist, ihren klaren und wohlbegründeten Sinn und verlieren alle abstrusen und rein spekulativen Beigaben, mit denen belastet man sie bislang auffassen zu müssen glaubte. Bei HOFFMANN heißt es dann S. 55/56 in diesem Zusammenhang weiter: „Auch der Zusammenhang

in welchem die *Ideen der Einheit, Andersheit, Ganzheit, Harmonie* zu einander stehen als Glieder einer proportionalen Vierheit, ist für PLATON wirkliche '*unräumliche Bewegung*', die in der Welt der Phänomene ihr Abbild haben soll, ihre Heimat aber in der Ideenwelt hat. Wie wir den Ursprung nicht ohne das *Symbol der Eins* denken können, aus der die Zahlenreihe sich entfaltet, das Verschiedene nicht ohne die *Zwei*, die das Sinnbild jeder Andersheit ist, die Verknüpfung von Einheit und Andersheit zu neuer Ganzheit nicht ohne die *Drei* als das Prinzip der Synthesis, so können wir, wo wir *Harmonien stiften sollen*, nur Maß nehmen an jener Vier (Über die Vier als Prinzip bei PLATON vgl. besonders *Tim.* 32 a), die keine bloße Anzahl ist, sondern Modell aller Proportion, *ideelle Selbstbewegung reiner Zahlformen*, deren Bewußtwerden in unserer Seele die Vorbedingung für ihr Richtungnehmen auf absolute Harmonie hin ausmacht... und dies leistet die Zahlensymbolik, die in lebensvollster Bewegtheit strenges Ebenmaß bewahrt und aus grundlegenden Prinzipien symphonische Mannigfaltigkeit hervorgehen läßt. Hieraus irgendeinen *Schematismus* zu machen“, wie dies in der modernen Logistik und im mathematischen Formalismus geschehen ist, „lag PLATON ganz fern. Die Zahlen '*rufen das Denken auf zum Verständnis des Seins*, und da sie dies leisten, sind sie 'eine Gabe der Götter an die Menschen, von irgendwelchem Göttersitz durch einen Prometheus herabgebracht, umstrahlt vom hellsten Feuerglanz'. (*Phileb.* 16 c)“ Hier ist also die Funktion des „Weckers“ deutlich, von dem wir oben in der Anm. 7 gehandelt haben. HOFFMANN fährt fort: „Hierin liegt dasjenige Moment, das bei PLATON den Begriff der Zahl mit dem des Schönen aufs engste verknüpft“, also die Verbindung von *Mathematik und Kunst* (s. oben Anm. 4 und 9). „Denn eben jenes 'Aufrufen' ist, wie das Symposium zeigt, die besondere Mission des Schönen. Wie uns die reinen Zahlenverhältnisse zur Einsicht in die Struktur der Ideenwelt aufrufen, so ruft uns das Schöne überhaupt auf zum Verlangen nach dem Wahren und Guten. Es ist ein und derselbe Begriff des *gestalteten Maßes*, der dem Schönen und der Zahl ihren parakletischen Charakter gibt und sie beide zu Symbolen, ja im Grunde zu einem einzigen *identischen Symbol des Absoluten* macht. Die Schönheit des kosmischen Kunstwerks im Timaios beruht ebenso auf dem *mathematischen* Gefüge der Weltseele, wie die Schönheit des Symposions auf der Arithmologie seiner Komposition beruht, in der PLATONS Seele sich selbst bewegt... Die philosophische Zahlensymbolik des Symposions ist... pythagoreischen Lehren verwandt“, — wie dies auch PROKLUS bezeugt — „und dennoch in ihrer Aesthetik ganz selbständig, weil sich ihr Sinn erst im Zusammenhang mit PLATONS Dialektik und Ideenlehre ergibt. — Arithmetik und Geometrie entsprechen einander. Wie das Sein aller räumlichen Gebilde (*Tim.* 56 a) von geometrischen Urformen bedingt ist, so alles zeitliche Werden von zahlenmäßiger Entfaltung (37 d). Sie macht im Dienst des Guten Weltall und Staat, Einzelwesen und so auch PLATONS Kunstwerk lebendig, das, *nicht obgleich sondern weil es logische Wahrheit entwickeln will, ästhetisch nach Analogie der Musik oder Architektur wirkt, deren Strukturen mathematisch sind*. Die Symbolik des Symposions verlangt vom Leser, daß er sie findet; aber 'ein Kunstwerk', sagt GOETHE, 'besonders ein Gedicht, das nichts zu erraten übrig läßt, ist kein wahres, vollwürdiges'.“ — Ergänzen wir diese Darlegungen der PLATON-Interpretation durch die Formulierungen von A. SPEISER, so wird man

erkennen, welche Bedeutung PLATONS Arithmologie auch für die Seinsgründung der Mathematik besitzt. Bei SPEISER heißt es in seiner Studie „Über die Zahlen und den Raum bei den Neuplatonikern“ (Die mathematische Denkweise, Zürich 1932) auf S. 76 ff.: „Von den Platonischen Lehren bietet uns wohl seine *Auffassung von den Zahlen* am meisten Schwierigkeit. Wir fragen uns, wie es möglich ist, daß so nüchterne und rationale Denker wie die Neuplatoniker an dem befremdlichen pythagoreischen Satz '*Alles ist Zahl*' mit solcher Zähigkeit festhalten konnten. ... Die These sagt aus, daß die Zahlen das *Wesen der Dinge*, nicht ihnen zukommende Akzidenzen oder Attribute sind. — Wenn wir heute von Zahlen sprechen, so verstehen wir darunter etwas Abstraktes, ein von allem Wirklichen losgelöstes formales Schema, das erst durch Ausfüllung seiner Leerstellen Inhalt bekommt. Für diese Zahlen hat der pythagoreische Satz keinen Sinn, er behauptet vielmehr das genaue Gegenteil, nämlich die Zahlen seien das Wesentliche von allem. Was für eine Wirklichkeit kann aber durch die Zahlen gesetzt werden oder, vorsichtiger ausgedrückt, von was für einer Realität konnten logisch denkende Menschen behaupten, sie sei zahlartig? Wenn uns irgend etwas auf die Spur führen kann, so ist es die Analogie. Denn nach *Proportionen haben die Griechen stets gedacht*“; (das ist genau die gleiche Auffassung, die oben bei HOFFMANN ausgesprochen wird) „aber auch KEPLER rühmt ihre Kraft, Geheimnisse aufzudecken... Nun sind in der Zahl mehrere Einheiten gleichzeitig und gleichberechtigt gesetzt; die *Kraft der Zahl* muß also darin bestehen, daß verschiedene Dinge gleichgesetzt werden, daß von verschiedenen Wesen ihre prinzipielle Gleichberechtigung ausgesagt werden kann.“ (Dies ist in der Tat das für die Mathematik bedeutsame Wesen der PLATONischen Arithmologie.) „Diese Kraft macht in der Tat die Realität überhaupt erst möglich. Denn beginnt man mit der Setzung der momentanen Vorstellung, der Kogitation, als dem *Geltenden*, so findet ein unaufhörlicher Wechsel statt, der keinen Bestand zuläßt... Nun projiziere ich das Schema des geometrischen Raumes und verlege diese Vorstellungen hinein. Gemäß der Eigenschaft, daß *alle* Objekte im Raum gleichumgeben und gleichberechtigt sind, wird jetzt die gewesene Vorstellung nicht mehr verschwinden, sondern im Raum aufgehoben und mit der jeweiligen aktuellen Vorstellung gleichgestellt sein. Ich erhalte also einen mit Gegenständen angefüllten Raum. Aber für die Existenz dieser Außenwelt erhalte ich keine Gewähr, denn alles könnte bloß meine Vorstellung sein, eine irrealen Traumwelt. Das Raumschema hat nicht die Kraft Existenz zu setzen; das haben die Philosophen des 18. Jahrhunderts klar gesehen und als Aporie empfunden. — Nun verwende ich aber das *Schema der Zahl* und entschieße mich, den Nächsten mit mir zu zählen, ihn als mit mir gleichgestellten anzusehen und als gleichumgeben, gleichberechtigt, wie ich selbst, anzuerkennen. Offenbar kann er nun nicht mehr als bloße Vorstellung von mir gelten, denn dies würde unmittelbar reziprok auf mich zurückwirken und ich selbst wäre bloß seine Vorstellung; die Vorstellung, die bisher meine Vorstellung war, würde sich nun als Vorstellung der Vorstellung eines anderen ausweisen, und dies müßte in infinitum fortgesetzt werden, es ergäbe sich die logische Absurdität des sogenannten 'dritten Menschen'.“ Dieser Gedankengang stellt den *rationalen Beweis für die Existenz setzende Kraft der Zahl*, d. h. für das, was PLATON und PROKLUS als sich selbst bewegende Zahl bezeichnen, also, für die Arithmologie dar. „Der Zahlbegriff besitzt dem-

nach die Kraft, Existenz zu setzen, er ist also dem Raum übergeordnet in demselben Maße, als das Subjekt über dem Objekt steht. Freilich folgt aus dieser Priorität noch nicht, daß die Zahl den Raum erzeugen kann, daß also die Geometrie arithmetisiert werden muß. Aber die Raumdinge erhalten erst durch die Zahl Existenz.“ (Siehe auch: J. STENZEL, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, 2. Aufl., Leipzig-Berlin 1933 und A. SPEISER, *Ein Parmenides-Kommentar, Studien zur Platonischen Dialektik*, Leipzig 1937.) Vgl. auch Anm. 15 unten.

¹³⁾ „Winkelsumme der“ ist zu ergänzen.

¹⁴⁾ Sind α , β , γ die Innenwinkel eines Dreiecks und α' , β' , γ' die bezüglichen Außenwinkel, so, daß gilt:

$$\alpha + \alpha' = 2 R, \quad \beta + \beta' = 2 R, \quad \gamma + \gamma' = 2 R,$$

so folgt durch Addition und Berücksichtigung, daß $\alpha + \beta + \gamma = 2 R$ (Satz von der Winkelsumme): $\alpha' + \beta' + \gamma' = 4 R$. Analog weist man dies für jedes geradlinige Vieleck durch Zerlegung in Teildreiecke nach.

¹⁵⁾ Siehe die Stelle bei ARCHYTAS von Tarent (400 v. Chr.) etwa bei DIELS (*Fragm. d. Vorsokratiker*, 35 B 1): „Treffliche Einsichten scheinen mir die Mathematiker sich erworben zu haben, und es kann daher nicht auffallen, daß sie die Beschaffenheit der einzelnen Dinge richtig zu beurteilen wissen. Denn da sie sich über die Natur des Alls treffliche Einsichten erworben haben, mußten sie auch für die Beschaffenheit des Einzelnen einen trefflichen Blick gewinnen. So haben sie denn auch über die Geschwindigkeit der Gestirne und über ihren Auf- und Untergang eine klare Einsicht überliefert und über Geometrie, Arithmetik und Sphärik und nicht zumindest auch über Musik. Denn diese Wissenschaften scheinen verschwistert zu sein. Denn die beschäftigen sich mit den beiden verschwisterten *Urgestalten des Seienden* (nämlich Zahl und Raum-Größe).“ In diesen Zusammenhang gehören auch die folgenden Darlegungen von A. SPEISER, die die Formulierungen der Anm. 12 oben über die Arithmologie trefflich ergänzen und wieder den Zusammenhang mit dem Ideenkreis „Mathematik und Kunst“ (Anm. 4 und 9 oben) herstellen. Bei SPEISER heißt es (S. 81): „Schon die *Musik* ist erst auf Grund der *arithmetisierten Tonskala* möglich. Ein einzelner Ton ist noch nicht sehr bedeutungsvoll; erst in der gegenseitigen Beziehung, welche *schön proportionierte Klangfolgen* bewirken, kommt der Einzelton zur Geltung.“

¹⁶⁾ Die voranstehende *pythagoreische Einteilung der Wissenschaften* behandelt auch A. SPEISER (Anm. 1, S. 70). Sie ist in der Tat mit Rücksicht auf die spätere Einteilung der Universitäten in Fakultäten besonders wichtig. A. SPEISER sagt von ihr: „Der Rest des Prologes befaßt sich mit spezielleren Fragen. Die Einteilung der Mathematik nach dem *Quadrivium*: Arithmetik, Musik, Geometrie und Sphärik (Astronomie) wird nach PLATO (6. Buch der Republik) gegeben. Das erste Paar behandelt die *Quantität*, das zweite die *Qualität*. Anders teilt GEMINOS: die Mathematik zerfällt in die beiden Geisteswissenschaften Arithmetik und Geometrie und in die sechs Naturwissenschaften (*peri aistheta*) Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie, Kanonik, Logistik!“

¹⁷⁾ Siehe Anm. 16. Die Bedeutung, die diese Begriffe bei den Alten haben, teilt PROKLUS nachfolgend ebenfalls mit. (Siehe die folgenden Anmerkungen.)

¹⁸⁾ Siehe oben nach Anm. 4 im Text des PROKLUS. (S. 174 dieser Edition.)

¹⁹⁾ Siehe oben Anm. 6 und Anm. 17. Die „Optik“ im antiken Sinne ist also im wesentlichen *Perspektive*, die sich „der Sehlinien und der von ihnen gebildeten Winkel bedient“. Sie gliedert sich in die „*eigentliche Optik*“, die es mit den perspektivischen Verkürzungen zu tun hat (*Linearperspektive*) und mit dem *Gesetz des Fluchtpunktes*, denn nur dies kann mit der PROKLUSschen Formulierung des „Zusammentreffens der Parallelen“ gemeint sein (s. folgende Anmerkung und Anm. 21).

²⁰⁾ Was PROKLUS mit dem Phänomen, „daß Vierecke wie Kreise erscheinen“, meint, hängt vielleicht mit der Bildkrümmung zusammen. Es ist jedenfalls diese Stelle im Rahmen des Werkes des PROKLUS allein nicht sicher zu deuten. Andere Stellen aus dem antiken Schrifttum, die diese Stelle klären könnten, sind mir nicht bekannt.

²¹⁾ Die „Optik“ zerfällt weiter in die „*Katoptrik*“ (s. Anm. 6 oben), die im wesentlichen mit einer Lehre von der Reflexion des Lichtes identisch ist und mit dem, was wir heute *geometrische Optik* nennen, denn dieses will offenbar die Formulierung des PROKLUS besagen, wenn er den Inhalt der Katoptrik angibt als: „die sich mit den mannigfachen Möglichkeiten der Lichtreflexion befaßt und mit der bildhaften Erkenntnis zusammenhängt.“ Schließlich ist der dritte Teil, in den die „Optik“ im antiken Sinne noch zerfällt, *Theaterperspektive*, wie dies deutlich in den Formulierungen des PROKLUS zum Ausdruck kommt (vgl. Anm. 19). Siehe meine ausführlichen Darlegungen zur Kenntnis der Griechen in der Perspektive in den Anmerkungen zu LAMBERTS Geschichte der Perspektive im II. Teil seiner „*Freyen Perspektive*“ (Zürich 1774) in: *Johann Heinrich LAMBERT, Schriften zur Perspektive*, herausgegeben von M. STECK (Berlin 1943). Dort habe ich auch diese Stelle des PROKLUS und die philosophischen Bezüge, deren Aufhellung insbesondere E. FRANK (*Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle (S.) 1923) zu danken sind, im einzelnen dargelegt, die es rechtfertigen, von einer „*Philosophie der Perspektive*“ zu sprechen (bei DEMOKRIT und ANAXAGORAS). Es hängt dies unmittelbar mit dem *mathematischen Raumproblem* als solchem zusammen, wie dort ebenfalls gezeigt worden ist (Entdeckung der *Stereometrie* als Lehre vom Raum überhaupt).

²²⁾ Unter „*Kanonik*“ (s. Anm. 17 oben) wird also insbesondere eine *mathematische Theorie der Harmonielehre der Musik* verstanden. Diese Bedeutung hatte sie schon bei den Pythagoreern und auch noch später etwa bei PTOLEMÄUS. Siehe dazu: P. L. SCHÖNBERGER, *Studien zum 1. Buch der Harmonik des Claudius Ptolemaeus (Ein Beitrag zur griechischen Ton- und Musiklehre)*, Augsburg 1914.

²³⁾ Das Original hat hier, ed. FRIEDLEIN, S. 41, 18, den Terminus *ἔλξης κινή- τω*, den man wohl mit „*kinetische Energie*“ übersetzen darf.

²⁴⁾ Hier klingt nochmals das „*Höhlengleichnis*“ PLATONS an (s. oben die Anm. 7 und 12).

B. Anmerkungen des Herausgebers zum 2. Teil der Vorrede

²⁵⁾ Siehe die obige ähnliche Stelle bei KEPLER in der Übersetzung von M. CASPAR (Anm. 5 oben). — Die Einleitung zu diesem 2. Teil der Vorrede gibt A. SPEISER mit eigenen Worten (Anm. 1, S. 71) so wieder: „Nach diesem Prolog folgt die eigentliche Einleitung in die Elemente EUKLIDS, nämlich eine Unter-

suchung über das Wesen der Geometrie. Daß sie ein Teil der Mathematik ist und an zweiter Stelle, unterhalb der Arithmetik, steht, bedarf nicht mehr vieler Worte. Das Neue, was hinzukommt, ist die *Phantasie*, welche, geringer als der Verstand, den Raum liefert. Freilich handelt es sich nicht um die Ausdehnung der Materie, sondern um den *geometrischen Raum*. PROKLUS unterscheidet scharf zwischen diesen beiden Dingen. Eine geometrische Figur ist noch nichts Körperliches, sondern sie gehört der Phantasie an“ (s. folgende Anmerkung).

²⁰⁾ Gerade diesen Sachverhalt gibt A. SPEISER wieder, indem er diese Stelle (Anm. 1, S. 71/72) so übersetzt: „Unser Verstand, unfähig, die geometrischen Gebilde zusammengefaßt zu schauen, entfaltet sie (spannt sie räumlich aus), bringt sie aus sich heraus und führt sie in die Phantasie hinein, die vor seiner Tür liegt. In dieser Phantasie sowie mit ihrer Hilfe breitet er das, was er an Geometrie kennt, aus. Weil er gern vom Sinnlichen getrennt bleibt, paßt ihm der Phantasieraum gut als Magazin für seine Formen (Ideen)“, und fährt fort: „Der *geometrische Raum* ist also ein Phantasiegebilde, das dem Verstand gestattet, den Übergang vom mathematischen Urbild zum Sinnlichen zu vollziehen und die ihm eigentümlichen diskursiven Methoden anzuwenden . . . Aber daß der Verstand sich der Phantasie bedienen muß, ist ein Mangel, und so fährt denn PROKLUS fort: 'Wenn es jemals dem Verstand gelänge, die Ausspannungen der Figuren im geometrischen Raum zusammenzufalten und die Gestalten und ihre Vielheit gestaltlos und *eins-artig* zu schauen, dann würde er freilich ganz anders die ungeteilten, unausgedehnten, wesenhaften *geometrischen Urbilder* erblicken können, deren Fülle er ist. Diese Kraft des Verstandes zur Herrschaft zu bringen, wäre allerdings das höchste Ziel für die geometrische Wissenschaft und dies könnte in Wahrheit das Werk einer Gottesgabe (wörtlich einer Hermesgabe) genannt werden. Denn dadurch würde die Geometrie gleichsam aus den Armen der Kalypso befreit und emporgezogen in eine vollkommenere und geistigere Erkenntnisweise, sie wäre erlöst von dem Zwang, räumliche Form anzunehmen, dem sie in der Phantasie unterworfen ist. Hierauf muß man all sein Streben richten, wenn man ein *echter Geometer* ist: Man muß die Geometrie wecken und sie aus der Phantasie in die *Monè* zurückführen, damit der Verstand ganz auf sich selbst gestellt ist. Hierzu muß der Geometer sich selber von den räumlichen Distanzen und dem 'passiven Geist' (ein von den Neuplatonikern gerügter Terminus technicus des ARISTOTELES) losreißen und zur Verstandeskraft zurückkehren, vermöge deren er alles raumlos und unzerteilt erblickt, den Kreis, den Durchmesser, die eingeschriebenen Polygone, Alles in Allem und doch Jedes für sich.“ — Interessant sind die Bemerkungen, die SPEISER als Mathematiker und erster Kenner dieses Ideenkreises an diese Stellen des PROKLUS über das Wesen der Geometrie und den geometrischen Raum knüpft. Es heißt dort S. 72/73: „Die geometrischen Figuren, welche wir uns im Raum, den die Phantasie bereithält, vorstellen, vergleicht er (PROKLUS) mit dem Dulder Odysseus, der fern von Menschen auf eine Insel verschlagen ist. Er fordert die Mathematiker auf, die Rolle des Hermes zu übernehmen und die Geometrie in ihre wahre Heimat, den diskursiven Verstand, zurückzuführen. Über diese Herausforderung der Mathematiker kann man freilich verschiedene Vermutungen haben . . . Interessant ist eine Vergleichung mit der KANTischen Raumlehre. Dort ist der Raum die Form der äußeren Anschauung, welche allen äußeren Wahrnehmungen zu-

grunde liegt, und gerade er verbürgt der Geometrie die Wahrheit ihrer Sätze. Bei PROKLUS dagegen bedeutet er einen Mangel, die wahren geometrischen Gebilde werden seinetwegen in große Nähe der sinnlichen Dinge gebracht und unterliegen dadurch gewissen Unvollkommenheiten. Beide Anschauungen sind durch die immanente Forschung der Mathematik widerlegt worden. *Der euklidische Raum hat sich selber als ein geometrisches Gebilde erwiesen, das mit den übrigen prinzipiell gleichgestellt ist.* Er ist nicht ein fernes Eiland, auf dem die Kreise, Kugeln usw. in der Verbannung schmachten, sondern *er selber ist der geometrischen Behandlung fähig, man kann ihn in seiner ganzen Ausdehnung aufheben und ihm andere Raumformen zur Seite stellen.* Dadurch sind nicht nur seine Gefangenen, sondern er ist selber mit ihnen befreit worden und die Hermetat ist von DESCARTES, RIEMANN u. a. geleistet worden. *Hierin erkennen wir die schönste Bestätigung der Grundthese des PROKLUS, daß nämlich die Mathematik nicht eine Abstraktion aus dem sinnlich Wahrgenommenen ist, sondern daß ihre wahre Quelle anderswo liegt. Denn die Entdeckung, daß man auch nicht-euklidisch Geometrie treiben kann, war gar nicht möglich auf Grund äußerer Erfahrung, und der Ausbau der neuen Raumformen kann nur durch eine „anschauende Urteilskraft“ erfolgen.“* — Siehe auch die interessante Studie von A. SPEISER, Die räumliche Deutung der Außenwelt (Verhandl. der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft, Basel 1941, S. 38—51). — Vgl. zum Raumproblem auch Anm. 12 und 15 oben und: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. erw. Aufl. 1943.

²⁷⁾ Zu dem griechischen Fachausdruck „*Parabole*“ (einfache Flächenanlegung, wie er gewöhnlich übersetzt wird) ist schon hier das Wesentliche zu sagen. HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874), der für solche Fragen außerordentlich zuverlässig ist, führt S. 98/99 folgendes aus: „Es wird uns ferner berichtet, daß die Pythagoriker sich bereits mit der Aufgabe beschäftigten, einen gegebenen Flächenraum an einer gegebenen Strecke zu entwerfen *παράβállειν*, *applicare*), d. h. in ein Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite jene gegebene Strecke ist (s. EUKLID, Elem. I, 44). Das Entwerfen an einer gegebenen Strecke (*παράβολή*) hatte aber im Altertum als Aufgabe des Zusammenstellens noch einen allgemeinen Sinn, indem man darunter die Aufgabe verstand, an eine gegebene Strecke AB einen gegebenen Flächenraum als Rechteck AY so anzulegen, daß ein Quadrat BY übrig bleibt (*ἔλλειψις*, *Ellipse*) oder überschieß (*ὑπερβολή*, *Hyperbole*). Diese von EUKLID, VI, 28, 29 behandelten Aufgaben, welche, wenn man $AB = a$, $BX = x$ und den gegebenen Flächenraum $= b$ setzt, unserer *Auflösung der quadratischen Gleichungen*

$$ax \mp x^2 = b$$

entsprechen, hatten ebendeshalb für das Altertum eine hohe Bedeutung, besonders nachdem man die *Kegelschnitte* zu betrachten anfang und bemerkte, daß die Aufgabe, aus einer gegebenen Ordinate y derselben die zugehörige Abscisse x zu finden, auf eine der drei vorstehenden Aufgaben zurückführte, wie der moderne Leser sogleich aus den Gleichungen

$$ax = y^2, \quad ax - x^2 = y^2, \quad ax + x^2 = y^2$$

erkennt. Höchst interessant ist nun die Nachricht des EUDEMOS (PROKLUS *ad prop.* 44; s. dort und unsere Anmerkung 329, wonach die Pythagoriker bereits jene drei Aufgaben gekannt und mit den Namen der *Parabel*, *Ellipse*, *Hyperbel* gekennzeichnet haben. Diese wenigen, von einem unverdächtigen Zeugen überlieferten Worte geben uns einen hohen Begriff von den gewaltigen Leistungen dieser Schule . . .“ — Die Begriffe *Parabole*, *Ellipse* und *Hyperbole* siehe auch bei M. CANTOR, Vorles. über die Geschichte der Math. Bd. I (Leipzig 1894), S. 159/60. — In der neuesten deutschen, nach HEIBERGS Text besorgten EUKLID-Ausgabe von C. THAER (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 235, Leipzig 1933) schreibt THAER in den Anmerkungen zu EUKLID, Elem. I. 44: „Die *Theorie der Flächenanlegung*, von der hier der einfachste Fall vorliegt, ist nach EUDEMOS, den PROKLUS zitiert, eine der wichtigsten Leistungen der Pythagoreer . . .“ Und als Anmerkung zu EUKLID, Elem. VI, 28/29 (*ibid.* Nr. 236, Leipzig 1933) führt THAER aus: „PROKLUS berichtet in seinem Kommentar zu I, 44 unter Berufung auf EUDEMOS, daß nicht nur die dort behandelte einfache Flächenanlegung (*Parabole*), sondern auch die hier vorliegende Aufgabe der ‚*Flächenanlegung mit Fehlen*‘ (*Ellipse*) und ‚*mit Überschuß*‘ (*Hyperbole*) zuerst von den Pythagoreern gelöst worden sei. Diese Aufgaben sind das geometrische Äquivalent der quadratischen Gleichung mit allgemeinen Koeffizienten. — Man weiß heute durch neuere Arbeiten, insbesondere von O. NEUGEBAUER, daß das algebraische Lösungsverfahren den Babyloniern schon zur Zeit HAMMURAPIS (um 2000 v. Chr.) bekannt war.“ Siehe auch: APOLLONIUS, Die Kegelschnitte, deutsche Ausgabe von A. CZWALINA (München-Berlin 1926) und die dort in den §§ 11, 12, 13 des 1. Buches abgeleiteten „*Scheitelgleichungen*“ der Kegelschnitte.

²⁸⁾ Nach dem ersten Teil der Vorrede ist diese „*übergeordnete Wissenschaft*“ eindeutig die Dialektik, „das Kranzgesimse der Mathematik“, wie sie A. SPEISER nennt.

²⁹⁾ Siehe zu den Termini *Parabole*, *Ellipse* und *Hyperbole* und ihrer Bedeutung die ausführliche Anmerkung 27 oben.

³⁰⁾ Es ist das erste Postulat des EUKLID, das in der Übersetzung bei THAER (s. Anm. 27 oben) so lautet: „Gefordert soll sein: 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann“ (s. bei PROKLUS, S. 296 ff.). Es ist also im wesentlichen die Forderung des *begrenzten Lineals*, die in diesem ersten Postulat des EUKLID steht.

³¹⁾ Es ist dies das 3. Axiom des EUKLID, das in der Übersetzung bei THAER (s. Anm. 27 oben) so lautet: „3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich“ (s. bei PROKLUS, S. 302 ff.). Dabei wird natürlich implizit mitgedacht, daß es sich um „*gleichartige Größen*“ handelt, von denen Gleiches weggenommen wird.

³²⁾ Dieser Satz des PROKLUS greift an das *Problem des Irrationalen*, also an die Entdeckung und Beherrschung des *reellen Kontinuums* im Griechentum durch THEÄTET und EUDOXUS. Man findet diese Entwicklung in mustergültiger Weise dargestellt, aufbauend auf den dazu grundlegenden Forschungen von P. TANNERY bei E. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle (S.) 1923. — Einen Querschnitt durch diese Entwicklung habe ich gegeben in: *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943 (s. Anm. 33, 34).

³³⁾ „Denn in der Geometrie gibt es eine kleinste Größe überhaupt nicht.“ Dieser Satz des PROKLUS hängt unmittelbar mit dem vorhergehenden, in der Anm. 32 Besprochenen, zusammen und belegt das *infinitesimale Bewußtsein der Griechen*. Der Satz erinnert direkt an die älteste Formulierung, die wir in dieser Hinsicht besitzen, und die von ANAXAGORAS (500?—428) stammt und lautet: „Im Kleinen gibt es kein Kleinstes, sondern es gibt immer noch ein Kleineres. Denn was ist, kann durch keine noch so weit getriebene Teilung je aufhören zu sein. Aber auch im Großen gibt es immer noch etwas, was größer ist.“ (Text und Übersetzung aus einem Fragment des ANAXAGORAS bei E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle (S.) 1923, S. 46 ff.) — (s. Anm. 34.)

³⁴⁾ Auch diese Stelle: „... denn wo die Teilung bis ins Unbegrenzte geht, da hat auch das Irrationale seinen Platz“ gehört unmittelbar mit den Stellen aus den Anm. 32 und 33 zusammen. Als Prinzip tritt hier bei PROKLUS explizit „das Unbegrenzte“ (*Apeiron*) auf, das mit dem Prinzip *Peras* die Entstehung der Mannigfaltigkeiten der Mathematik gewährleistet (siehe meine allgemeine Einleitung). — Die philosophischen Bezüge dieser wichtigen Stellen habe ich in der allgemeinen Einleitung dargelegt. Hier noch die bezügliche Stelle bei HANKEL (*Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 109/10) mit der bekannten, aus Gegensätzen bestehenden Kategorientafel der Pythagoreer: „An der Hand der Zahlen ging man vor: Alle Zahlen zerfallen in gerade und ungerade, das Ungerade aber ist zugleich *begrenzt*, das Gerade *unbegrenzt*“ (s. ARISTOTELES, *Met.* I, 5, 986, a. 17; *Phys.* III, 4, 203, a. 10; *Nikom. Intr. arith.* II, 20). So mochte man weiter in ziemlich loser Gedankenfolge zu dem Schema folgender 10 Gegensätze kommen: 1. *Grenze und Unbegrenztheit*, 2. Ungerades und Gerades, 3. Eins und Vieles, 4. Rechtes und Linkes, 5. Männliches und Weibliches, 6. Ruhendes und Bewegtes, 7. Gerades und Krummes, 8. Licht und Finsternis, 9. Gutes und Böses, 10. *Quadrat und Heteromekes* . . . Am auffälligsten in der Reihe der Kategorien ist das letzte Paar. Man hat dasselbe aus jenen Summationen (s. oben S. 104, wo auch die besonderen Zahlen, die man „*Heteromeken*“ [die ungleichseitigen] nannte, erklärt sind) ableiten wollen und sich auch sonst vielfach bemüht, dessen Bedeutung zu ermitteln, ohne indessen zu einer nur leidlichen Erklärung gelangt zu sein. Vielleicht findet meine Erklärung einigen Beifall. Wenn die Pythagoriker die *Theorie des Irrationalen* entdeckt und deren hohe Bedeutung erkannt haben, so muß es, wie man sofort zugeben wird, sehr auffällig erscheinen, daß die so naheliegenden Gegensätze von Rational und Irrational in ihrer Tafel keinen Platz haben. Sollten diese nicht unter dem Bilde Quadrat und Rechteck enthalten sein, welche bei der Quadratwurzelausziehung eben auf jene Begriffe geführt hatten?“

³⁵⁾ Im 2. Buch der „Elemente“ entwickelt EUKLID bekanntlich in geometrischer Einkleidung das, was wir heute als „*geometrische Algebra*“ bezeichnen. Die Fortführung findet sich dann im 5. Buch der „Elemente“.

³⁶⁾ Gerade im 2. Buch der „Elemente“ wird die quadratische Gleichung $a(a-x) = x^2$ in II, 11 mit Hilfe von II, 6 konstruktiv gelöst und die gleiche Aufgabe als *stetige Teilung* in VI, 30 nochmals behandelt. (VI, 30: Eine gegebene begrenzte gerade Linie stetig zu teilen.) — THAER schreibt als Anmerkung in seiner EUKLID-Ausgabe zu II, 11: „Da die Konstruktion des *regelmäßigen Fünfecks* (IV, 11) den Pythagoreern wohl mit Recht zugeschrieben wird, müssen sie

die Lösung unserer Aufgabe gekannt haben. Hiergegen ist allerdings eingewandt worden, daß noch EUDOXUS (um 370) über den „Schnitt“ geschrieben hat; und dieser Schnitt sei der „goldene“ gewesen“. — Die Bedeutung der Konstruktion des *Goldenen Schnitts*, der *Divina proportione* der Renaissance, in den bildenden Künsten (hauptsächlich in der Architektur, Plastik und Malerei) ist hinlänglich bekannt und darüber schon so oft von den verschiedensten Autoren gehandelt worden, daß sich hier ein weiteres Eingehen darauf erübrigt. (Siehe dazu auch die textkritische Stelle bei BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie u. d. Geometer vor EUKLID*, Leipzig 1870, S. 168; s. auch CANTOR, I, S. 228.)

³⁷⁾ Die *Lehre von den Proportionen* entwickelt EUKLID in strenger Begründung bekanntlich im 5. Buch der „Elemente“. — THAER schreibt in seiner Übersetzung dazu einleitend: „Die Sätze selbst sind dabei meist alter Besitz, teilweise wahrscheinlich vorgriechischen Ursprungs. Für die im V. Buch gegebene Darstellung hat EUKLID nach Angabe von Scholien eine Vorlage des EUDOXUS von Knidos (um 370) benutzt. — Nach der jetzt herrschenden, wesentlich auf P. TANNERY zurückgehenden Meinung war der historische Vorgang folgender: Seit PYTHAGORAS, der das Wesen der Dinge in den Zahlen sah, behandelten die Griechen geometrische Probleme vorzugsweise mit Hilfe von Proportionen; diese wurden als Übereinstimmungen von Verhältnissen, die sich als Verhältnisse ganzer Zahlen darstellen ließen, aufgefaßt und begründet, wie es der Elementarunterricht auch heute zu tun pflegt. Die nach der Überlieferung innerhalb der pythagoreischen Schule selbst erfolgte *Entdeckung des Irrationalen* entzog diesem Verfahren die wissenschaftliche Grundlage. Nach einer PROKLOS-Stelle allerdings zweifelhafter Lesung (s. Anm. 38 unten) wäre PYTHAGORAS persönlich der Entdecker; nach G. JUNGE, H. VOGT, EVA SACHS und E. FRANK lägen die Anfänge erst um 400; doch führt ZEUTHEN gewichtige Gründe für eine längere Dauer der Entwicklung an . . .“

³⁸⁾ Diese Stelle bezieht sich auf den alten *Beweis der Irrationalität* von $\sqrt{2}$, d. h. der Diagonale des Einheitsquadrats. H. HANKEL (a. a. O. S. 102) legt dies so dar: „Der alte Beweis von der Inkommensurabilität der Diagonale eines Quadrats gegen die Seite bestand in einer *deductio ad absurdum*, die zeigte, daß, wenn man den Durchmesser (die Diagonale) als kommensurabel annimmt, gerade und ungerade Zahlen einander gleich sein müssen“. (ARISTOTELES, *An. prior.* I, 23, 41, a, 26 und c. 44, 55, a, 37. EUKLID hat uns diesen Beweis EL. X, 117 wohl nur aus historischem Interesse aufbewahrt, da die Irrationalität aus X, 9 schon von selbst hervorgeht . . .) Verhalten sich nämlich Diagonale und Seite wie zwei ganze zueinander prime Zahlen $p:q$, so muß

$$p^2 = 2q^2,$$

folglich p^2 und somit auch p eine gerade Zahl sein; dann aber ist q jedenfalls keine gerade Zahl, weil sie sonst mit p den gemeinschaftlichen Teiler 2 hätte. Da nun p gerade ist, so kann $p = 2r$ gesetzt werden, also ist

$$2r^2 = q^2,$$

also q^2 und somit auch q eine gerade Zahl, was dem zuvor Bewiesenen widerspricht.“ — CANTOR (a. a. O. S. 211) bespricht diese Stelle des PROKLOS so: „PROKLOS sagt uns ausdrücklich, es gebe keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl anders als nahezu sei; so sei das Quadrat von 7 das

Doppelte des Quadrats von 5, an welchem nur 1 fehle.“ Dies hängt natürlich unmittelbar mit der später auch von PROKLUS beschriebenen, *systematischen Methode der Konstruktion rationaler rechtwinkliger Dreiecke* zusammen, worauf wir an der bezüglichen Stelle (Anm. 332 unten) näher eingehen wollen (s. bei CANTOR, S. 211/12).

³⁹⁾ Siehe dazu die inhaltlich parallelen Ausführungen im 1. Teil der Vorrede des Werkes des PROKLUS.

⁴⁰⁾ Das jetzt folgende bekannte „*Mathematikerverzeichnis*“ des PROKLUS ist in allen Einzelheiten bei BRETSCHNEIDER (a. a. O. Anm. 36) mit dem Originaltext ausgewertet, bei CANTOR (a. a. O. S. 124—136) nicht minder umfangreich referiert, bedeutet es doch eine ganz entscheidende Quelle für die historische Erforschung der Leistungen der griechischen Mathematiker des Altertums. — Die hier bezeichnete Stelle bespricht auch CANTOR (a. a. O. S. 311) und knüpft seine Vermutungen daran.

⁴¹⁾ Siehe diese Stelle bei BRETSCHNEIDER, CANTOR, HANKEL und eigentlich in jeder Geschichte der Mathematik.

⁴²⁾ Hier beginnt jetzt das eigentliche „*Mathematiker-Verzeichnis*“ des PROKLUS (s. Anm. 40 oben).

⁴³⁾ Die Leistungen von EUDOXUS in der *Grundlegung der Theorie des reellen Kontinuums* sind wiederholt dargelegt worden, am besten wohl mit von E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle (S.) 1923. — Man vergleiche auch M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942; 2. Aufl. 1943 (s. Anm. 32—34 oben).

⁴⁴⁾ Demnach fanden die großen Leistungen THEATETS und EUDOXUS' schon im Altertum eine Weiterführung, von der allerdings nichts auf uns gekommen ist (s. Anm. 32—34 oben und Anm. 43).

^{44a)} Die Besprechung dieser Stelle bei HANKEL (a. a. O. Anhang I, S. 381/82) und fast in jeder Geschichte der Mathematik, etwa bei CANTOR, S. 246—48.

⁴⁵⁾ Krönung und Abschluß der EUKLIDischen „*Elemente*“ bildet bekanntlich die Theorie der PLATONischen Körper im XIII. Buch.

⁴⁶⁾ Siehe die Editionen von HEIBERG und in der deutschen Ausgabe von THAER. Über EUKLIDS Buch „*Über die Teilung der Figuren*“ siehe auch CANTOR (a. a. O. S. 272), sowie bei HANKEL (a. a. O. Anhang I, S. 382) u. a.

⁴⁷⁾ Über diese *dialektischen Methoden* siehe den 1. Teil der Vorrede des PROKLUS, sowie unsere allgemeine Einleitung. — Über die Methodenlehre des PROKLUS handelt auch kurz CANTOR (a. a. O. S. 207/08).

⁴⁸⁾ Es ist das systematische Bestreben EUKLIDS in den „*Elementen*“, von jedem Satz die Umkehrung oder die Umkehrungen (im Sinne des PROKLUS, s. unsere Einleitung) zu suchen und nach ihren Beweismöglichkeiten bzw. ihrer Unmöglichkeit zu forschen. — Auch hierin drückt sich eine Art Symmetrie aus, die für den Aufbau des EUKLIDischen Werkes so besonders charakteristisch ist.

⁴⁹⁾ Gemeint sind hier offenbar vor allen Dingen die sog. *Unmöglichkeitsbeweise*, deren klassische Schule bekanntlich das X. Buch der EUKLIDischen „*Elemente*“ darstellt, in dem die Gesamtleistung der griechischen Mathematik in bezug auf das Irrationale und seine Bewältigung dargelegt wird (s. oben Anm. 32—34, Anm. 43 u. a.).

⁵⁰⁾ Über dieses Werk „*Fehlschlüsse*“ des EUKLID berichten HANKEL (a. a. O. S. 382), CANTOR (a. a. O. S. 263), THAER in seiner deutschen EUKLID-Ausgabe und fast alle Autoren, die über EUKLID und seine mathematischen Leistungen handeln.

⁵¹⁾ Gemeint sind hier wieder die regulären, PLATONISCHEN Körper (s. Anm. 45 oben). Vgl. was die historischen Belange betrifft, die bekannten Arbeiten von EVA SACHS, die hier vollständige Klarheit gebracht hat, E. FRANK (a. a. O.) und viele andere. — Wichtig ist hier der Hinweis auf den Zusammenhang dieser Stellen mit KEPLER, insbesondere mit seinem *Mysterium cosmographicum* und mit seiner *Harmonice mundi*, wie ich ihn bereits in der allgemeinen Einleitung auseinandergesetzt habe. Seine geistesgeschichtliche Wichtigkeit und Bedeutung ist damit zur Gewißheit gebracht.

^{51a)} Diese Schrift des ARCHIMEDES in Ostwalds Klass. d. exakt. Wiss. Nr. 202.

⁵²⁾ Siehe den 1. Teil der Vorrede, wo diese Aufgabe schon als Beispiel herangezogen wird (s. Anm. 14 oben).

⁵³⁾ Über das Beweisverfahren der *deductio ad absurdum*, den sog. indirekten Beweis, handelt PROKLUS noch öfters (s. unsere Einleitung und die Anm. unten).

⁵⁴⁾ Der griechische Terminus *κοινὰ ἔρροια* wird heute allgemein als „Axiom“ wiedergegeben. Siehe etwa H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* im „Handbuch der Philosophie“, München-Berlin 1927, S. 17.

⁵⁵⁾ Hier wird wieder, wie schon mehrfach im 1. Teil der Vorrede (vgl. Anm. 28 oben) auf die Dialektik als *übergreifende Wissenschaft* hingewiesen, die alle die Prinzipien bereitstellt, die am Anfang der Mathematik stehen (s. meine Einleitung und: M. STECK, *Proklus Diadochus und seine Gestaltlehre der Mathematik* (Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd. 13, Nr. 93, Jhg. 1943, S. 131—149).

⁵⁶⁾ Dieses Axiom, das die *Transitivität der Gleichheitsidee* zum Ausdruck bringt, ist das 1. EUKLIDISCHE Axiom und lautet in der Übersetzung bei THAER: „1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.“ — Auf die Tragweite dieses Axioms beim Gesamtaufbau der Mathematik habe ich ausführlich hingewiesen in: *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942.

⁵⁷⁾ Die Kreisdefinition bei EUKLID als 15. Definition des 1. Buches der „Elemente“.

⁵⁸⁾ Diese Forderung der *Gleichheit aller rechten Winkel* ist bei EUKLID das 4. Postulat. — In diesen Stellen des PROKLUS kommt der Unterschied zwischen *Definitionen*, *Axiomen* und *Postulaten* ganz klar zum Ausdruck. Siehe: M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942 und die dort in den Hinweisen zitierte Abhandlung von G. VAILATI, die auf diese Herausarbeitung des logischen Unterschiedes der EUKLIDISCHEN „Annahmen“ im einzelnen eingeht. — Siehe auch M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942; 2. Aufl. 1943.

⁵⁹⁾ Diese Konstruktionsaufgabe bildet bekanntlich den Inhalt des 1. Satzes des 1. Buches der EUKLIDISCHEN „Elemente“: „Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.“ — Siehe die Behandlung dieser Konstruktionsaufgabe im Kommentar des PROKLUS, wo insbesondere auf den (von EUKLID als selbstverständlich angenommenen) Fall hingewiesen wird, daß die Kreise sich schneiden, aber auch die Fälle des Nichtschneidens und der Berührung abgehandelt werden.

⁶⁰⁾ Diese Konstruktionsaufgabe macht bekanntlich den 46. Satz des 1. Buches der „Elemente“ aus. EUKLID hätte sie aber auch gleich im Anschluß an die 1. Aufgabe (s. Anm. 59) lösen können.

⁶¹⁾ Wahrscheinlich geht diese Aufgabe des PROKLUS auf den Satz 31 des 1. Buches der EUKLIDischen „Elemente“ innerhalb der Parallelenlehre, der in der Übersetzung bei THAER so lautet: „Durch einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen geraden Linie parallele gerade Linie zu ziehen.“ Vielleicht ist hier auch die Diskussion aller möglichen Fälle der Lage eines Punktes und einer Geraden gemeint, die dann bekanntlich gerade den Ansatzpunkt für die *Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie* bei GAUSS bildet.

⁶²⁾ Diese Aufgabe geht auf die Sätze 1, 2, 3 des 4. Buchs der EUKLIDischen „Elemente“ und bedeutet den ersten Schritt in der Konstruktion der regulären Vielecke, die EUKLID teils im IV., teils im XIII. Buch der „Elemente“ behandelt.

⁶³⁾ Siehe Anm. 59 oben.

⁶⁴⁾ Der *Basiswinkelsatz* im gleichschenkeligen Dreieck ist bekanntlich der 5. des 1. Buches der „Elemente“ und insbesondere auch für die Axiomatik von großer Wichtigkeit. Seine eigentliche Struktur hat HILBERT bloßgelegt. (Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930, Anhang II.) — (s. Anm. 241 bis 244 unten.)

⁶⁵⁾ Der Satz des THALES macht bei EUKLID den ersten Teil des Satzes 31 im III. Buch der „Elemente“ aus.

⁶⁶⁾ Das *Problem der Streckenhalbierung* wird bei EUKLID bekanntlich im 10. Satz des 1. Buches der „Elemente“ gelöst. Siehe auch die Behandlung bei PROKLUS im Kommentar. (S. 359 ff. dieser Edition).

⁶⁷⁾ Das *Problem der Winkelhalbierung* wird bei EUKLID im 9. Satz des 1. Buches der „Elemente“ gelöst. Siehe auch seine Behandlung bei PROKLUS im Kommentar (S. 354 ff.).

⁶⁸⁾ Siehe Anm. 60 oben.

⁶⁹⁾ Dieser Satz folgt leicht aus EUKLID I, 17 und I, 32.

⁷⁰⁾ Siehe Anm. 64 oben.

⁷¹⁾ Dieses Problem wird bei EUKLID im 12. Satz des 1. Buches der „Elemente“ behandelt. — Man sehe auch die Darstellung bei PROKLUS im Kommentar (S. 363 ff.).

⁷²⁾ Im 4. Buch der „Elemente“ behandelt EUKLID bekanntlich die *Lehre von den regulären Polygonen* (s. Anm. 62 oben).

⁷³⁾ Das 5. Buch der „Elemente“ gibt bekanntlich die strenge Begründung der *Proportionenlehre* allgemeiner Größen (s. Anm. 37 oben).

C. Anmerkungen des Herausgebers zu den Definitionen

⁷⁴⁾ So übersetzt auch THAER in seiner EUKLID-Ausgabe. — Eine erste Übersetzung der Definitionen 1—7 samt dem Kommentar des PROKLUS und einigen Erläuterungen dazu gab L. MAJER in: *Proklos über die Definitionen bei Euklid, I. Teil, Definition 1—7*, Stuttgart 1881 (Programmschrift). Ein II. Teil dieser Arbeit ist offenbar nicht erschienen, wenigstens konnte ich keinen solchen in der Literatur finden. Wir zitieren diese Schrift im folgenden kurz als „MAJER“ unter Angabe der Seitenzahl. — MAJER übersetzt (S. 5): „Punkt ist, was keinen Teil hat.“ Diese erste EUKLIDISCHE Definition ist den meisten Autoren, die über EUKLID

und die „Elemente“ geschrieben haben, als die problematischste erschienen. Viele Autoren können mit ihr überhaupt nichts anfangen. Erst in der neueren Zeit, als man mindestens verstanden hat, daß ein volles Verständnis des EUKLIDischen Werkes nur möglich ist, wenn man die gesamte PLATONISCHE Philosophie, aus der dieses Werk gleichsam als erste und wichtigste Anwendung herauswächst, heranzieht und sich die EUKLIDischen Formulierungen gerade in den „*dialektischen Grundannahmen*“, die bei EUKLID als „Definitionen“, „Postulate“ und „Axiome“ unterschieden sind, klarmacht und in den geistesgeschichtlichen Zusammenhang der Gedanken der Vorsokratiker und PLATONS einordnet, gewinnen die EUKLIDischen „Annahmen“ die Bedeutung, die ihnen zukommt. — Ein erstes tieferes Verständnis gerade für diese grundlegende *Gestaltdefinition des Punktes* bahnte, wenn er auch dabei am rein Formalen hängen blieb, J. STENZEL in „*Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*“ (2. Aufl. Leipzig 1933) an. Eine Vertiefung erfuhr STENZELS Auffassung nach der materialen Seite hin durch das Werk von E. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer* (Halle [S.] 1923). J. WELLSTEIN bezeichnete in seiner Kritik des mathematischen Empirismus und Formalismus genau die Stelle, wo der Hebel zum Verständnis der EUKLIDischen apriorischen Annahmen hätte angesetzt werden sollen, nämlich an dieser ersten Definition EUKLIDS, in: *Grundlagen der Geometrie* (2. Aufl. Leipzig 1907 in Encyclopädie der Elementarmathematik, Bd. 2, insbesondere „Einleitung“ und „Kritik der Grundbegriffe“). — Unter Heranziehung der gesamten geistesgeschichtlichen Stellung der EUKLIDischen apriorischen Annahmen habe ich ein erstes, vom Formalen zum Materialen hinweisendes Verständnis in meinem „*Hauptproblem der Mathematik*“ (Berlin 1942, 2. Aufl. 1943) geboten und diese Gedankenreihen wesentlich, besonders mit Rücksicht auf EUKLID, ergänzt in „*Mathematik als Begriff und Gestalt*“ („Die Gestalt“, Heft 12, Halle [S.] 1942) und weitergeführt in meiner Abhandlung über „*Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik*“ (Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd. 13, Nr. 93, Jhg. 1943, S. 131—149) sowie in meinem Vortrag „*Mathematischer Idealismus*“ (Kant-Studien, Neue Folge, Bd. 43 [Jhg. 1943], S. 210 ff. In der Einleitung zum vorliegenden Werk habe ich diese Gedanken alle zusammengefaßt. — Der dieser Definition beigegebene Kommentar des PROKLUS ist immer noch eine Fundgrube der wichtigsten Aspekte, die zu dieser Definition und ihren geistigen Standorten in der Philosophie PLATONS gehören und als solche für die fernere geistesgeschichtliche Entwicklung bei CUSANUS, KEPLER und LEIBNIZ bedeutsam sind (s. meine Einleitung). Wichtig ist dabei, daß man sich darüber klar wird, daß alle diese Grundgestalten der Mathematik ihrerseits an *höheren Prinzipien* verankert sind, die ihrerseits ihre Geltung aus einer *übergreifenden Wissenschaft*, der *Dialektik*, beziehen, und daß diese Prinzipien, bei PROKLUS wie bei den Pythagoreern *Peras* und *Apeiron*, *ontologische* Prinzipien sind, die also als solche beweisen und belegen, daß am Anfang der Mathematik als Ideenwissenschaft die Ontologie und eine Seinsauffassung steht, die vollständig materialer Art ist und deren Wesen man wohl am zutreffendsten mit GOETHE als „*mathematische Urphänomene*“ bezeichnet, als welche die ersten Grundgebilde der Mathematik erscheinen. *Die Idee und das Urphänomen in diesem Sinne sind äußerste Konkretion*; ein formales Sein haftet ihnen nur noch gleichsam als „logisches“ Korrelat an. Und diesen formalen Charakter der Idee hat vor allen Dingen STENZEL klar herauspräpariert und der

Formalismus glaubte dann seine Auffassung dadurch auch philosophisch begründet und gesichert. STENZEL aber ist zum Materialen überhaupt nicht vorgedrungen und insofern ist seine Auffassung einseitig und wird vor allen Dingen dem Wesen dessen, was PLATON und die Antike, bis hinauf zu LEIBNIZ und KANT unter Idee verstanden haben, in keiner Weise gerecht. Idee im antiken Sinne ist in erster Linie materialiter zu nehmen, nicht formaliter, in erster Linie *eigenständige Gestalt* und nicht bloß *sinnfreie Form*, in erster Linie also Sinn und Bedeutung, nicht Zeichen, nicht Leerform, nicht *nomen*. Wenn man dies bei PLATON verstanden hat, dann wird man auch das EUKLIDISCHE Werk in Zukunft tiefer werten und seine eigentliche Größe erkennen können, die nicht nur mathematischer, sondern mehr noch erkenntniskritischer Art ist. Daß dies so ist, hat man bis ins 19. Jahrhundert gewußt, aber zu dessen Ausgang eigentlich schlagartig vergessen. — PROKLUS gibt in den zugehörigen Kommentaren zu den EUKLIDISCHEN apriorischen Annahmen wohl als erster die entscheidenden Hauptgedanken für die Auffassung, der wir das Wort reden, und dies ist auch mit ein Grund gewesen, weshalb wir es unternommen haben, das alte Werk dieses bedeutendsten Philosophen der Spätantike in einer deutschen textkritischen Ausgabe herauszubringen, die schon A. SPEISER in seinem wiederholt genannten Aufsatz verlangt und auch andere einsichtige Forscher, die noch die ganze Entwicklung des Geistes überschauten, gefordert haben.

⁷⁵⁾ Siehe dazu, was ich oben nach E. HOFFMANN zur PLATONISCHEN Arithmologie an Hand des *Symposion* ausgeführt habe (Anm. 12) und die folgende Stelle bei A. SPEISER, *Die räumliche Deutung der Außenwelt* (Verhandl. der Schweizer. Naturforsch. Gesellschaft, Basel 1941, S. 38—51): „Die Entdeckung des Raumes verdanken wir unbestreitbar den Griechen, und er heißt darum mit Recht: EUKLIDISCH . . . *Der Raum ist das schönste Gebilde, das die Mathematik bisher entdeckt hat, der vollkommenste Kristall.* Während in der Kugel ein Punkt ausgezeichnet ist, nämlich der Mittelpunkt, ist im unendlichen Raum jeder Punkt mit jedem anderen gleichwertig, jeder ist Mittelpunkt, jede Ebene ist Spiegelebene, jede Gerade ist Rotationsachse. Seine Entdeckung fällt in das sechste vorchristliche Jahrhundert. Wie es zu gehen pflegt, wurde seine Bedeutung zunächst überschätzt. DEMOKRIT, später EPIKUR, zogen die entscheidenden Folgerungen und schufen den sogenannten Materialismus, d. h. die Lehre, daß nur das Räumliche Existenz hat, alles andere eine Täuschung ist . . . Der endgültige Sieg des Raumes setzte freilich erst in der neueren Zeit ein. Denn an Kritik des Materialismus fehlte es nicht . . . Dasjenige Volk, das zum erstenmal wieder EUKLID studierte und damit die Außenwelt gestaltete, war das Volk von Italien, vor allem von Florenz. Der Weg dazu führte über die Beobachtung der Sterne und die *sphärische Trigonometrie*. DANTE konstruierte mit diesen Hilfsmitteln das ganze Weltall, mit bloßen Winkeln, ohne Strecken, und dies gibt seinem Werk für uns den plastisch-wirklichen Doppelanblick, der uns mächtig ergreift — soweit wir fähig sind, seinen geometrischen Angaben zu folgen. Aber in diesem Stadium konnte nicht haltgemacht werden, man mußte den letzten Schritt zum dreidimensionalen Raum tun, und dies gab der sogenannten Renaissance den Auftrieb. Die Welt, die man jetzt entdeckte, erfaßte die Gelehrten und die Künstler gleichzeitig. Man erkannte die Schönheit des menschlichen Körpers und begann mit den anatomischen Studien. Bezeichnend ist, was der Maler PAOLO UCCELLO sagte:

‘Ich freue mich jeden Abend auf das Erwachen am andern Morgen, weil ich die göttliche Perspektive studieren darf’“ (s. auch Anm. 21, 36 oben).

⁷⁶⁾ Hier die wichtige Parallele von „*Punkt*“ in der Geometrie und „*Einheit*“ (Zahleneinheit) in der Arithmetik und weiter unten die Erklärung des Punktes im rein Logischen durch lauter Negationen (siehe unsere Einleitung und was wir dort über diese *kategorialen Erklärungen* ausgeführt haben).

⁷⁷⁾ Siehe Anm. 76 und die *ontologische* Auffassung des Mathematischen (s. Anm. 74 oben).

⁷⁸⁾ Diese Definition der *Kurve* scheint uns in der Formulierung wesentlich bedeutsamer zu sein als die Übersetzung bei THAER: „Eine Linie (ist) breitenlose Länge.“ Sie bringt nämlich auch im Deutschen zum Ausdruck, daß wir es hier wieder mit einer *kategorialen Erklärung* (s. unsere Einleitung) zu tun haben, die wesentlich im Zusammenhang mit den Auffassungen der PLATONischen Philosophie betrachtet werden muß.

⁷⁹⁾ Hier ist auch direkt in die Definition das seinsgründende Prinzip, hier *Peras*, aufgenommen. — Dieselbe Übersetzung gibt auch MAJER (S. 10), während THAER weniger glücklich übersetzt: „Die Enden einer Linie sind Punkte.“

⁸⁰⁾ Es ist dies der 1. Satz des 1. Buches der „*Elemente*“ (s. Anm. 59 oben).

⁸¹⁾ Die genannte Aufgabe ist der Satz 22 des 1. Buches der „*Elemente*“, die Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten. Siehe die Behandlung dieser Aufgabe bei PROKLUS im Kommentar (s. Anm. 285 unten).

⁸²⁾ Es handelt sich hier um die *Konstruktionsaufgabe des Lotefällens*, die 12. Aufgabe des 1. Buches von EUKLIDES „*Elementen*“. Siehe ihre Behandlung bei PROKLUS im Kommentar (s. Anm. 226, 267 unten).

⁸³⁾ Diese Definition der Geraden gibt THAER so: „Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.“ — Diese Definition ist den meisten Kritikern EUKLIDES immer als höchst problematisch erschienen und hat zu langen Diskussionen Anlaß gegeben. Man hat dabei meist nicht beachtet, daß man auch diese Definition im Zusammenhang der PLATONischen Philosophie zu betrachten hat. Insbesondere muß sie als *kategoriale Erklärung* im Sinne unserer Einleitung aufgefaßt werden; insofern erscheinen uns auch die vorliegenden deutschen Formulierungen glücklicher, als die THAERsche. MAJER übersetzt (S. 12): „Eine gerade Linie ist eine solche, welche mit den Punkten auf ihr in gleicher Weise liegt.“ — Es ist interessant zu sehen, wie die Kritik von seiten der Mathematiker auch an dieser Definition im Grunde immer vorbeigegangen ist. Ein so kenntnisreicher Forscher wie etwa G. LORIA schreibt doch in seinen „*Speziellen algebraischen und transzendenten ebenen Kurven*“ (dtsh. von SCHÜTTE, Leipzig 1902) auf S. 2: „Was nun diejenige (die Definition der Geraden) angeht, die EUKLIDES vorschlägt oder annimmt, so kann diese keineswegs als genügend oder brauchbar bezeichnet werden.“ Sieht man aber diese Erklärung im Rahmen der PLATONischen Philosophie als *kategoriale Erklärung* an, so gibt sie tatsächlich das Wesentliche wieder, nämlich ein *Symmetriengesetz*, das die gerade Linie in dieser Hinsicht kennzeichnet. Siehe unsere Darlegungen dazu in der Einleitung und in: *Mathematik als Begriff und Gestalt* („Die Gestalt“, Heft 12, Halle [S.] 1942), sowie die Kommentare des PROKLUS, die an diese Definition EUKLIDES geknüpft werden. Siehe auch die Stelle unten, wo auf PLATONS „*Parmenides*“ (137 c) verwiesen und gesagt wird: „PLATON definiert die Gerade

als eine Linie, deren Mitte den Enden symmetrisch gegenüberliegt!“ (S. 242 im Text des PROKLUS.) Gerade daß es sich bei der *Definition der Geraden*, wie bei allen anderen Definitionen EUKLIDS um *kategoriale Erklärungen* im Sinne unserer Einleitung handelt, spricht auch H. RICKERT mit aller nur wünschbaren Deutlichkeit in „*Zur Lehre von der Definition*“ (Freiburg i. Br. 1888) unter Nr. 4 „*Mathematische Definitionen*“, S. 40 aus: „Der Mathematik liegt beim Beginne ihrer Untersuchungen kein gegebenes Material vor . . .; sie schafft sich vielmehr ihr Material selbst . . . Von einer Begriffsbildung durch Abstraktion kann also hier keine Rede sein.“ Siehe auch Nr. 2 „Die Gattung in der Mathematik“, wo es S. 59 heißt: „Wie man einen mathematischen Begriff definieren soll, darüber kann man im allgemeinen nie im Zweifel sein. Man braucht nur anzugeben, was man getan hat, als man ihn bildete . . . Diese Bemerkung wird zunächst vielleicht auf Widerspruch stoßen, weil der Ausdruck Definition wohl nirgends mehr gemäßbraucht worden ist, als in der Mathematik. Hier scheint man niemals versucht zu haben, was sprachliche Formulierung und was wirklich Begriffsbildung ist. Einzelne mathematische Begriffe haben bekanntlich bisher jedem Versuch, sie zu ‚definieren‘, widerstanden, soviel Mühe man sich mit ihnen auch gegeben hat, z. B. die ‚gerade Linie‘ (oder ‚Punkt‘ oder ‚Funktion‘). . . . Sollte die Mathematik die Vorstellung einer Geraden zerlegen können, d. h. sollte sie nachweisen können, welcher Synthesis diese Vorstellung ihre Entstehung verdankt, so wäre damit zugleich ihre Definition gegeben. Die Frage ist eine rein mathematische, und die Logik wird die mathematische Methode dort besser verstehen, wo die Mathematik mit sich selbst im Reinen ist, als auf Gebieten, die von manchem Mathematiker als ganz nutzlose Spielereien angesehen werden. Die Versuche, den Begriff ‚Gerade‘ zu definieren, stehen für die Logik vorläufig in einer Linie mit den Versuchen, blau oder rot definieren zu wollen. Das absolut Einfache läßt eben keine Definition zu und bis jetzt erscheint ‚Gerade‘ als ein solches einfaches Vorstellungselement. Sie ist noch kein Begriff und wird vielleicht nie einer werden.“ — Vgl. auch: M. STECK, *Mathematik und Erkenntnis*, Geistige Arbeit Nr. 19 (Jhg. 1942), S. 1 ff. — Zur vierten Definition des EUKLID und zum zugehörigen Kommentar des PROKLUS vergleiche man auch: J. H. KNOCH und F. J. MAERKER, *Ex Procli Succesoris in Euclidis elementa commentarius definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et sectionibus spiricis*, Herford 1856 (Schulprogramm).

⁸⁴⁾ Gemeint ist hier die gemeine *zylindrische Schraubenlinie*, wie aus dem Text weiter unten hervorgeht.

⁸⁵⁾ Siehe den bisher besten und für den Mathematiker verständlichsten PARMENIDES-Kommentar von A. SPEISER, *Ein Parmenides-Kommentar (Studien zur Platonischen Dialektik)*, Leipzig 1937.

⁸⁶⁾ Gemeint sind hier die *konische Schraubenlinie* und vermutlich die *Loxodrome auf der Kugel* (s. unten Anm. 93).

⁸⁷⁾ Hier der Satz vom *Bewegungsparallelogramm im Spezialfall*. Siehe auch bei MAJER (S. 13, Anm. 1) und bei CANTOR (a. a. O. S. 241). — Vgl. E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (9. Aufl., Leipzig 1933), wo in diesem Zusammenhang PROKLUS nicht genannt wird.

⁸⁸⁾ Diese Erzeugung beruht auf dem Satz des THALES (s. oben Anm. 65).

⁸⁹⁾ Hier ist im wesentlichen schon das *Prinzip des Ellipsenzirkels* („Papierstreifenkonstruktion“ der Ellipse) ausgesprochen, was bisher wohl nicht bemerkt worden ist.

⁹⁰⁾ Diese Erzeugung des Kreises durch Bewegung einer Strecke stützt auch die in Anm. 89 ausgesprochene, bisher als so alt übersehene Konstruktion der Ellipse.

⁹¹⁾ Diese letztere Partie ist direkt Vorbild für Formulierungen, die sich in KEPLERS „*Harmonice mundi*“ finden. Siehe: M. STECK, *Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler* („Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941).

⁹²⁾ Hier wird zum ersten Male die *Cissoide* des DIOKLES genannt. Siehe ihre Herleitung und ihre wesentlichsten Eigenschaften, wie auch ihre Gestalt im Figurenbild bei G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (Leipzig 1902, S. 36 ff.) — Zu den Schnitten des rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels und damit zu dieser antiken Erzeugung der Kegelschnitte siehe CANTOR (a. a. O. S. 232). — Als „*Muschellinie*“ ist hier wohl die *Konchoide* des NIKOMEDES gemeint. Siehe ihre Herleitung und wesentlichsten Eigenschaften sowie ihr Figurenbild bei LORIA (s. oben diese Anm.), S. 128 ff. (auch bei CANTOR, S. 337 die *Muschellinie* zur Lösung der *trisectio anguli*).

⁹³⁾ Siehe oben Anm. 86.

⁹⁴⁾ Die sog. „*spirischen Linien*“ entstehen als ebene Schnitte des Kreiswulstes (*Torus*). Die Alten unterschieden drei verschiedene Arten von Spiren, je nachdem der Radius des den Wulst durch Rotation erzeugenden Kreises kleiner, gleich oder größer war, als der Abstand seines Mittelpunktes von der Drehachse. Ihre Eigenschaften, Bilder usw. sind abgeleitet und dargestellt bei G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (Leipzig 1902, S. 117 ff.). — Auch BRETSCHNEIDER geht auf sie besonders ein, ebenso CANTOR (a. a. O. S. 340), MAJER und KNOCH-MAERKER in der in der Anm. 83 am Schluß genannten Abhandlung, woselbst sich auch Figuren finden, wie übrigens auch bei MAJER.

⁹⁵⁾ Über die *Hippopede* als spirische Linie siehe CANTOR (a. a. O. S. 229/30) und BRETSCHNEIDER, dessen Übersetzung in diesem Zusammenhang aber falsch ist, worauf MAJER besonders hinweist (S. 16).

⁹⁶⁾ Über den „*hornförmigen Winkel*“ siehe bei CANTOR (a. a. O. S. 250) u. a.

⁹⁷⁾ THAER und MAJER übersetzen genau so. — Wieder handelt es sich um eine *kategoriale Erklärung* (s. unsere Einleitung), wie auch aus dem Kommentar des PROKLUS hervorgeht.

⁹⁸⁾ MAJER übersetzt gleichlautend, während THAER wieder übersetzt: „Die Enden einer Fläche sind Linien“, eine Übersetzung, die wir, weil sie das seinsgründende Prinzip, hier *Peras*, nicht aufnimmt, als weniger gut ansehen müssen.

⁹⁹⁾ Zu dieser *Definition der Ebene* ist Ähnliches zu sagen, wie oben zur Definition der Geraden (s. Anm. 83). THAER übersetzt: „Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt“, MAJER (S. 18) so: „Ebene ist eine Fläche, welche gleich liegt mit den Geraden auf ihr.“ — Auch diese Erklärung ist *kategorial* zu nehmen und in den Zusammenhang der PLATONISCHEN Philosophie einzuordnen. Sie bringt dann wieder ein „*symmetrisches Prinzip*“ zum Ausdruck dadurch, daß man *nur in der Ebene in jeder beliebigen Weise*

eine Gerade herumführen kann, so, daß sie immer in der Fläche liegt. Keine andere Fläche hat diese Eigenschaft.

¹⁰⁰⁾ PROKLUS meint also hier stets einen „geraden Kreiskegel“. Siehe auch bei CANTOR (a. a. O. S. 232).

¹⁰¹⁾ Die „spirische Fläche“ ist der heute sog. *Kreiswulst* (Torus); s. oben Anm. 94 und bei BRETSCHNEIDER, CANTOR, MAJER und KNOCH-MAERKER.

¹⁰²⁾ Siehe Anm. 94 oben.

¹⁰³⁾ Als „Konoide“ bezeichnet das Altertum einfach die *Rotationsflächen der Kegelschnitte* um eine ihrer Achsen. — Dies ist bekannt, etwa auch durch HEIBERG, und darf nicht Veranlassung zu Verwechslungen mit den Flächen geben, die wir heute „Konoid“ nennen (vgl. I. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912).

¹⁰⁴⁾ Sollte PROKLUS die Eigenschaft des Zylinders, (in die Ebene) abwickelbar zu sein, nicht gekannt haben? — Es ist aber offenbar hier eine *Verschiebung der Fläche in sich* gemeint. Tatsächlich ist es dann so, daß ein begrenztes Stück einer Ebene oder einer Kugel sich beliebig in der Ebene bzw. auf der Kugel herumführen läßt und immer in die Fläche hineinfällt (in seiner ganzen Ausdehnung), daß dies aber bei einem Stück einer Zylinderfläche nur bedingt und für bestimmte Bewegungsrichtungen der Fall ist (s. Anm. 99).

¹⁰⁵⁾ Es handelt sich auch hier wieder um eine *kategoriale Erklärung* (siehe meine Einleitung). THAER übersetzt: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.“

¹⁰⁶⁾ Dieser Ausdruck, der dann in der *Proportionen- und Ähnlichkeitslehre* EUKLIDS so bedeutsam wird, kommt hier zum ersten Male bei PROKLUS vor (s. oben die Anm. 37 und unsere Einleitung).

¹⁰⁷⁾ Über den „hornförmigen Winkel“ s. die Anm. 96 oben.

¹⁰⁸⁾ Hier zum ersten Male bei PROKLUS das *Axiom des EUDOXUS*, das Stetigkeitsaxiom der Geometrie. — Siehe dazu: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942; 2. Aufl. 1943; M. STECK, *Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik*, Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd. 13, Jhg. 1943, S. 131—149. — E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle (S.) 1923. — Siehe auch bei CANTOR (a. a. O. S. 191).

¹⁰⁹⁾ Siehe oben unter *Cissoide* des DIOKLES und die angeführte Literatur bei LORIA (Anm. 92).

¹¹⁰⁾ Über die *Hippopede* s. oben Anm. 95 und bei MAJER (S. 21 ff.) unter „Geschichtliche Resultate“, wo EUDOXUS (S. 25) als Erfinder der Hippopede genannt wird.

¹¹¹⁾ Hier wird zum ersten Male bei PROKLUS auf das „Möndchen“ des HIPPOKRATES hingewiesen. Siehe auch bei H. HANKEL (a. a. O. S. 127) und den dortigen Hinweis auf BRETSCHNEIDER und auf eine Arbeit von CLAUSEN. — Dort auch die Beschreibung der *Möndchenquadratur*, die dann fast in jede Geschichte der Mathematik aufgenommen wurde. Siehe die Möndchenquadratur auch bei HEIBERG in der am Schluß der Anm. 103 genannten Schrift.

¹¹²⁾ THAER übersetzt: „Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig.“ — Die vorliegende Übersetzung ist wegen der expliziten Aufnahme des seinsgründenden Prinzips, hier *Peras*, besser.

^{112a)} Diese Stelle bezieht sich auf PLATONS *Timaios* (53 c. ff.).

¹¹³⁾ Die Einteilung der Winkel und ihre Verankerung am rechten Winkel ist im Rahmen des Kommentars des PROKLUS besonders bedeutsam und gibt auch den Einteilungsgrund für die geradlinigen Figuren (s. dort) ab. THAER übersetzt diese Erklärungen so: „Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu (Lot auf) der, auf der sie steht. — Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist, spitz, wenn kleiner als ein Rechter.“

¹¹⁴⁾ Über den „hornförmigen Winkel“ s. die Anm. 96 und 107 oben.

¹¹⁵⁾ Man muß die Definition des rechten Winkels bei EUKLID (s. Anm. 113 oben) zusammenhalten mit dem 4. Postulat des EUKLID: „Gefördert soll sein, daß alle rechten Winkel einander gleich sind.“ — Die Forderungen bei EUKLID sind hauptsächlich für die gedankliche Konstruktion bestimmt und gehen insofern auf das Tun in der Mathematik. Dies kommt auch deutlich in dem vorliegenden Text des PROKLUS und an vielen anderen Stellen seines Kommentars zum Ausdruck.

¹¹⁶⁾ Hier wird also die sog. stereometrische Senkrechte, das Raumlot, definiert.

¹¹⁷⁾ Diese Definition ist als kategoriale Erklärung wieder besonders bedeutsam und bringt direkt das seinsgründende Prinzip mit herein (s. unsere Einleitung und meine Abhandlung über PROKLUS und seine Gestaltlehre der Mathematik in den *Nova Acta Leopoldina* (a. a. O. Anm. 108). — THAER formuliert diese Erklärung so: „Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.“ Damit ist *Peras* unmittelbar als Gestaltprinzip der Mathematik gefaßt (s. meine Einleitung).

¹¹⁸⁾ Auch diese Definition ist im Rahmen der EUKLIDischen apriorischen Annahmen zu einer Gestaltlehre der Mathematik hochbedeutsam. Ich habe sie in meiner Einleitung geistesgeschichtlich eingeordnet und auch schon in meiner Arbeit in den *Nova Acta Leopoldina* (a. a. O. Anm. 108). THAER übersetzt gleichlautend bis auf das Verbum, wo er an Stelle von „umschlossen“ „umfaßt“ sagt.

¹¹⁹⁾ Dies entspricht ganz der originären pythagoreischen Auffassung, wie ich dies in meiner Einleitung und auch in den Anmerkungen zum 1. Teil der Vorrede des PROKLEISchen Werkes wiederholt dargelegt habe. — Siehe auch, was unter „*Arithmologie*“ bei PLATON, hauptsächlich im „*Symposion*“ in der Anm. 12 oben gesagt worden ist.

¹²⁰⁾ Siehe dazu die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede des Werkes und unsere zugehörigen Anmerkungen, sowie meine Einleitung und die Bezüge dieser Stellen zu KEPLER und zu seiner „*Harmonice mundi*“ (vgl. M. STECK, *Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler*, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941).

¹²¹⁾ Siehe dazu wieder die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede des Werkes und ihre tiefe Deutung und Darstellung bei SPEISER, die wir in unsere zugehörigen Anmerkungen aufgenommen haben.

¹²²⁾ Siehe Anm. 121. Ganz besonders plastisch im Zusammenhang unseres allgemeinen *Symmetriepinzips des Geistes* ist hier die Formulierung, wo direkt der Vergleich mit den Spiegeln kommt und die ganz modern anmutende Formulierung „zugleich Subjekt und Objekt des Sehens“. Das ist der Hinweis der

Antike auf die neue idealistische Erkenntnistheorie, wie sie insbesondere CUSANUS als erster ausgebaut hat (s. unsere Einleitung).

¹²³) Siehe die Anm. 121 und 122. — Hier klingt nochmals das „*Höhlen-
gleichnis*“ bei PROKLUS an (s. Anm. 7 oben).

^{123a}) Diese Stelle dürfte auf die „*Mütter*“ der *Orphik* weisen und reicht in ihrem Sinngehalt zu GOETHE hinauf.

¹²⁴) Siehe die Anm. 120—123 und unsere Einleitung in bezug auf die ontologischen Prinzipien des PROKLUS.

¹²⁵) Diese Stelle ist im Rahmen meines „*Hauptproblems der Mathematik*“ (Berlin 1942; 2. Aufl. 1943) besonders gegen Formalismus und Logistik wichtig und entscheidend, daß diese Auffassung schon bei PROKLUS und damit schon bei PLATON belegt werden kann.

¹²⁶) Der Hinweis des PROKLUS auf dieses Werk des EUKLID ist mathematikgeschichtlich von Interesse (s. oben Anm. 46).

¹²⁷) Siehe A. SPEISER, *Ein Parmenides-Kommentar, Studien zur Platonischen Dialektik*, Leipzig 1937.

¹²⁸) Siehe die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede des Werkes und die Anm. 120—124 oben, sowie unsere Einleitung.

¹²⁹) THAER gibt diese Definitionen so wieder: „Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie (die Umfang [Bogen] heißt) umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie (zum Umfang des Kreises) laufenden Strecken einander gleich sind; und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.“

¹³⁰) Die ins Unendliche gehenden Zweige der *Cissoide* des DIOKLES hat das Altertum nach den Forschungen und Angaben von LORIA nicht betrachtet (s. oben Anm. 92 und Anm. 109).

¹³¹) Die Stelle, die mathematisch zunächst etwas unklar bleibt, klärt sich durch die anschließenden Ergänzungen des PROKLUS vollständig. — Wichtig ist hier auch der Zusammenhang mit dem „*Gnomon*“. Siehe dazu auch CANTOR (a. a. O. S. 150).

^{131a}) In diesen Partien wird sehr schön klar, welche *symbolische* Rolle die Mathematik bei PROKLUS spielt: In der Mathematik zeigen Mittelpunkt, Radius und Kreislinie *das Absolute* in der Form der Erscheinung; diese Trias symbolisiert mit phänomenalen Mitteln den absoluten Prozeß.

^{131b}) Hier der Grundgedanke der *unio mystica* in symbolischer Form (s. Anm. 132).

¹³²) Die Übersetzung dieser zentral wichtigen Stelle des PROKLUS bei A. SPEISER (a. a. O. 1, S. 74 ff.) lautet: „Wenn ich aber die erste Ursache nennen soll, durch welche die Kreisfigur erschienen und zur Vollendung gekommen ist, so muß ich die *höchste Ordnung des Geistigen* nennen. Das Zentrum nämlich gleicht der wirkenden Ursache, welche durch die Grenze, das *Peras*, gebildet wird. Die Radien, welche vom Zentrum ausgehen und sowohl an Zahl als Größe unbegrenzt sind — soweit es nämlich auf sie ankommt und nicht auf den Kreis — tragen den Stempel des Unbegrenzten, des *Apeiron*. Die Linie aber, welche die unbegrenzte Ausdehnung der Radien begrenzt und sie wieder zum Zentrum zurückführt, entspricht dem *unsichtbaren Kosmos*, der durch das *Peras* und das

Apeiron errichtet wird, und der auch nach der orphischen Lehre im Kreise bewegt wird:

„Das Unermeßliche bewegt sich reibungslos im Kreise herum.“

Denn mit Recht nennt man ‚kreisförmig tätig sein‘, was sich in geistiger Weise um den Geist bewegt und diesen als Zentrum seiner Bahn festhält. Daher tritt auch aus dem Kreise der dreifache Gott hervor, welcher in sich den Ursprung der Prozession der geradlinigen Figuren (der Polygone) umfaßt. Wegen dieser Kraft haben ihm die Weisen und die Mystiker unter den Theologen seinen Namen (TRISMEGISTOS) gegeben, denn das erste Polygon ist das Dreieck. So erscheinen also die geometrischen Figuren zuerst in der Götterwelt, aber ihre feste Unterlage besitzen sie in den geheimnisvollen alles beherrschenden *Urgründen der geistigen Welt*.“ — Soweit die Übersetzung von SPEISER. Er fügt ihr dann noch folgende bedeutsamen eigenen Formulierungen an: „An dieser für das *antike und mittelalterliche Denken* besonders charakteristischen Stelle sieht man die doppelte Bedeutung des Kreises als *raumaufspannende Form* und als *geistige Kraft*. So denkt auch DANTE, ja, wir werden sehen, daß GOETHE seine *Farbenlehre* so denkt. *Keine Naturwissenschaft kann aber so etwas entbehren*. Denn der Materialismus braucht den leeren Raum, welcher der Materie ihren Behälter und damit die Form gibt, die antike Philosophie braucht die gewaltige Kugel des Weltalls, und die LEIBNIZ-RIEMANN-WEYLSche Weltlehre, welche für uns maßgebend ist, braucht die infinitesimalen Kugeln, die metrischen Linienelemente zum Aufbau des Raumes. Daß die Weltmetrik der Gravitation zugrunde liegt, das ist eine Anschauung, welcher auch PROKLUS zugestimmt hätte.“ — Siehe auch das tiefgründige Werk von D. MAHNKE, *Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt*, Halle (S.) 1937, das gerade auf diese entscheidende Stelle des Zusammenstoßens antiker und mittelalterlicher Lehren grundsätzlich und mit unzähligen Belegen eingeht (s. Anm. 5 oben). Zu der Auffassung SPEISERS, der wir zustimmen, daß auch GOETHE seine *Farbenlehre* so denkt, zitieren wir einige Partien aus der SPEISERSchen Studie „*Goethes Farbenlehre*“ (Die mathematische Denkweise, Zürich 1932), wo es S. 90 heißt: „Erinnern wir uns an die beiden Wege, welche die *Dianoia* nach PROKLUS zurücklegen kann, so wird man bei PLOTIN“ (dem GOETHE weitgehend gefolgt ist, wofür SPEISER vorher die Belege beibringt) „stets den absteigenden Weg bevorzugt finden, der von den Ideen nach dem Sinnlichen führt. PLOTIN denkt dialektisch, bei GOETHE dagegen stets den aufsteigenden, der von der empirisch gegebenen Wirklichkeit nach der Idee zu führt. Die Methode GOETHES ist daher diejenige der *Epistrophè*, der Zusammenfassung und Zurückführung auf ein letztes, auf das *Urphänomen*.“ (Siehe auch: M. STECK, *Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik*, Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd. 13, Jhg. 1943, und M. STECK, *Mathematischer Idealismus*, Kant-Studien, Neue Folge, Bd. 43, Jhg. 1943.) SPEISER fährt fort: „Der Übergang vom Sinnlichen zum Gedanklichen wird nie eigentlich ausgeführt, denn auch das Urphänomen ist noch ein sinnlich Wahrnehmbares, ob es gleich von Gedanklichem gänzlich durchtränkt ist, wie wir nachher sehen werden . . . Das Urphänomen ist für ihn das Farbensechseck und ,die Urphänomene lasse der Naturforscher in ihrer ewigen Ruhe und Herrlichkeit dastehen, der Philosoph nehme sie in seine Region auf‘ (§ 177). „Das Urphänomen steht unmittelbar an der Idee und erkennt nichts Irdisches über sich.“ . . . Der Gang der wissenschaftlichen Untersuchung ist dagegen eine *Anodos*.

Auch sie wird in einer Weise beschrieben, die mit der Darstellung von PROKLUS übereinstimmt und die Hierarchie der Erscheinungen klar zum Ausdruck bringt: „Das was wir in den Erscheinungen gewahr werden, sind meistens nur Fälle, welche sich mit einiger Aufmerksamkeit unter allgemeine empirische Rubriken bringen lassen. Diese subordinieren sich abermals unter wissenschaftliche Rubriken, welche weiter hinaufdeuten, wobei uns gewisse unerläßliche Bedingungen des Erscheinenden näher bekannt werden. Von nun an fügt sich alles nach und nach unter höhere Regeln und Gesetze, *die sich aber nicht durch Worte und Hypothesen dem Verstande, sondern gleichfalls durch Phänomene dem Anschauen offenbaren*. Wir nennen sie Urphänomene, weil nichts in der Erscheinung über ihnen liegt, sie aber dagegen völlig geeignet sind, daß man stufenweise, wie wir vorhin hinaufgestiegen, von ihnen herab bis zu dem gemeinsten Falle der täglichen Erfahrung niedersteigen kann“ (§ 175). . . . Das Schema des (Farben-)Sechsecks deutet nach GOETHE *Urverhältnisse* an, die sowohl der menschlichen Anschauung als der Natur angehören (§ 918) . . . Diese Anordnung ist keinesfalls bloß dichterischem Schönheitssinn zuzuschreiben, *sondern sie ist der eigentliche Gehalt der Goetheschen Farbenlehre. Um sie geht es, nicht um Experimente*. Nur wenn man das erfaßt hat, kann man die hartnäckige Fehde gegen NEWTON verstehen. . . . Nun ergibt sich die Einordnung der Farbenlehre von selbst. Sie ist eine Geisteswissenschaft, welche zur Kunst gehört, analog der Harmonielehre. . . . Aus den formalen Symmetrien werden farbige, phantasieerregende Figuren; die Kreise und Sechsecke werden durch die Zurückwendung selber farbenhaltig. Ihre Wandelbarkeit, ihre Eignung zur Metamorphose ist erstaunlich. . . . Ein und dasselbe mathematische Gebilde erstrahlt in unzähligen Individualisierungen.“ — Man vergleiche auch die tiefgehende Abhandlung: H. GLOCKNER, *Das philosophische Problem in Goethes Farbenlehre*, Beiträge zur Philosophie Nr. 11, Heidelberg 1924.

¹³³⁾ THAER übersetzt diese Definition so: „Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.“

¹³⁴⁾ Diese Stelle bei PROKLUS ist mit Rücksicht auf die Mengenlehre und die Konstruktion der sog. *transfiniten Zahlen* hochwichtig. — Sie hängt auch mit dem antiken — auch in der modernen Mengenlehre wieder aufgekommenen und aufgenommenen — Urgegensatz der *Aktualität* und *Potentialität*, der besonders mit Rücksicht auf das *Unendliche* gebraucht wird, zusammen. — Lassen wir dazu einen so tiefen Autor wie H. HANKEL (a. a. O. S. 119 ff.) sprechen: „Auch über den Begriff des Unendlichen (*ἄπειρον*) selbst hat ARISTOTELES die ersten tieferen Untersuchungen angestellt. Er findet, daß das Unendliche nur der Möglichkeit, der Potenz nach (*δυνάμει*) existiert, jedoch nicht so, daß es einmal eine Verwirklichung als ein bestimmtes Unendliches fände, welches *aktuell* (*ἐνσυνετα*) unendlich wäre; sondern es existiert nur immer in einem Entstehen und Vergehen, und wenn auch jedesmal begrenzt, ist es doch immer und immer wieder ein Verschiedenes (*Arist. Phys. III. c. 6. 206, a, 18*).“ — Siehe dazu die Entwicklung dieser Gedanken in: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943.

¹³⁵⁾ Vgl. dazu die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede des Werkes, die Anm. 134 und unsere allgemeine Einleitung.

¹³⁶⁾ THAER gibt diese Definitionen so wieder: „Ein Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur; und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise“ (Änderung der Zählung bei THAER).

¹³⁷⁾ Über die *lunulae* des HIPPOKRATES siehe die Anm. 111 oben und: I. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912, S. 22/23.

¹³⁸⁾ Unter „*konische Linien*“ sind hier wohl allgemeine, auf dem Kegel verlaufende Kurven gemeint, nicht nur die Kegelschnitte.

¹³⁹⁾ THAER gibt diese Definitionen in seiner Übersetzung sinngemäß genau so wieder.

¹⁴⁰⁾ Auf diese Stellung der Zahl 2 und ihre konstruktive Erzeugung durch die Gleichung

$$x^2 = x + x = 2x$$

ist schon bei den Pythagoreern hingewiesen worden; s. HANKEL (a. a. O.) u. a.

¹⁴¹⁾ Diese Lehren werden bekanntlich gerade im 1. Buch der „Elemente“ des EUKLID entwickelt.

¹⁴²⁾ Der Terminus „*Krone*“ für zwei konzentrische, im Endlichen gelegene Kreise, tritt hier zum ersten Male bei PROKLUS auf.

¹⁴³⁾ Diese Synthese großartig bei KEPLER in seiner „*Harmonice mundi*“.

¹⁴⁴⁾ Diese Einteilungsdefinitionen gibt THAER dem Sinne nach vollständig gleich wieder. — Sie sind bei EUKLID ein *Bestandteil seiner apriorischen Annahmen* und als solche für seinen Aufbau durchaus wesentlich und sinnvoll. Dies ist unbedingt zu beachten, wenn man die Kommentare und die späteren Entwicklungen des PROKLUS, die daran anknüpfen, verstehen und werten will.

¹⁴⁵⁾ Dabei ist natürlich implizit die Kenntnis des Satzes von der Winkelsumme (s. unten Anm. 307) vorausgesetzt.

¹⁴⁶⁾ Was PROKLUS mit seinem „*vierseitigen Dreieck*“ meint, macht er später selbst durch eine Figur (Fig. 75 dieser Ausgabe, S. 393) klar. Mit dem vorliegenden Text, der vielleicht auch verdorben ist, wäre auf den ersten Anblick mathematisch nicht sehr viel anzufangen (s. Anm. 284 unten).

¹⁴⁷⁾ Man zeichne sich der Übung halber und zum besseren Verständnis auch der späteren Ausführungen des PROKLUS diese 7 verschiedenen Arten von Dreiecken auf. Die Einteilung ist bei EUKLID und PROKLUS durchaus wesentlich (s. Anm. 144 oben).

¹⁴⁸⁾ THAER übersetzt dem Sinne nach gleich.

¹⁴⁹⁾ Auch diese Art der Auffassung des Geometrischen, die uns heute ganz geläufig ist, kannte also die Antike schon, wofür gerade dieses Beispiel, das PROKLUS hier nennt, besonders charakteristisch ist.

¹⁵⁰⁾ Dieser Zusammenhang ist wieder außerordentlich bezeichnend für die alten, im Neuplatonismus gleichsam wie in einem Brennpunkt sich vereinigenden Lehren. Sollte diese Stelle auch mit dem babylonischen Kulturkreise zusammenhängen?

¹⁵¹⁾ Die Definition des *Parallelismus zweier Geraden* auch bei THAER in dieser Form.

¹⁵²⁾ Hier werden also *windschiefe Geraden* (also Geraden des Raumes) als Gegenbeispiel benutzt.

¹⁵³⁾ Die Eigenschaft, daß die Äquidistante einer Geraden wieder eine Gerade ist, ist bekanntlich gleichwertig mit dem Parallelenaxiom. Die Gerade als Äquidistante einer Geraden charakterisiert also die EUKLIDISCHE Geometrie im Gegensatz zu den Nichteuclidischen Geometrien (s. Anm. 61, 167).

¹⁵⁴⁾ Gemeint sind die „*zylindrischen Schraubenlinien*“ (s. oben Anm. 84), die den Erzeugenden des Zylinders („Geraden“) „umschrieben sind“.

¹⁵⁵⁾ Siehe die Anm. 92 oben über die *Muschellinie*.

D. Anmerkungen des Herausgebers zu den Postulaten und Axiomen

¹⁵⁶⁾ Siehe dazu die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede und unsere Anmerkungen, sowie Anm. 54, 58 oben. — Die erste deutsche Übersetzung der *Petita* und *Axiomata* samt den Kommentaren des PROKLUS hat wohl L. MAJER in dem Schulprogramm: *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*, Tübingen 1875, geliefert und einige erklärende Bemerkungen dazu gemacht. Wir zitieren diese Schrift in diesem Abschnitt unserer Anmerkungen wieder kurz als „MAJER“ unter Angabe der Seitenzahl.

¹⁵⁷⁾ Siehe die bereits oben (Anm. 58) angeführten Darlegungen von VAILATI über diesen wichtigen Punkt der Unterscheidung der Forderungen und Axiome und: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943. Nr. 19.

¹⁵⁸⁾ Es ist das erste Postulat des EUKLID, das auch THAER in ähnlicher Weise faßt. — Es ist die Forderung des Habens eines *ideellen begrenzten Lineals* zur Konstruktion geometrischer Figuren. — Ich habe darauf besonders aufmerksam gemacht in: M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1943. — Siehe auch unsere Einleitung und Anm. 30, 115 oben.

¹⁵⁹⁾ Es ist dies bekanntlich die 1. Konstruktionsaufgabe des EUKLID, Elemente I, 1.

¹⁶⁰⁾ Siehe oben Anm. 157 bei VAILATI und früher über den fundamentalen *logischen* Unterschied zwischen Forderung und Axiom. Beide Begriffe kommen hier an dieser Stelle bei PROKLUS nochmals ganz klar heraus und man sieht auch, daß es sich keineswegs um Zusammenhänge mit der sog. „*impliziten Definition*“ dreht, die man den Alten von seiten des Formalismus und der Logistik gerne untergeschoben hätte. — Hinsichtlich dieser letzteren, entscheidenden Frage siehe: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943.

¹⁶¹⁾ Hier der „*Hebelsatz*“ als Postulat bei ARCHIMEDES. — Siehe die immer noch beste Darstellung dieser Entwicklung bei E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, 9. Aufl., Leipzig 1933.

¹⁶²⁾ Es handelt sich hier bekanntlich um das 4. Postulat des EUKLID über die Gleichheit *aller* rechten Winkel. Das Postulat ist im Rahmen des EUKLIDISCHEN Aufbaus der Geometrie unentbehrlich und keine logische Folge des Satzes der Identität. Es bringt eine *konstruktive*, auf die *Gestalt* gehende Forderung zum Ausdruck, die nicht umgangen werden kann. Man hat darauf bislang nicht geachtet, und die Diskussion gerade über dieses Postulat des EUKLID schoß meist am Ziele vorbei. Im Rahmen dieser Edition des PROKLUS und unserer Einleitung, II. Teil über die Gestaltlehre der Mathematik, wird man das Postulat unschwer in den Zusammenhang einfügen können.

¹⁶³⁾ Es handelt sich hier bekanntlich um das 2. EUKLIDISCHE Postulat. — Es ist die Forderung des Habens eines *ideellen unbegrenzten* Lineals zur Konstruktion geometrischer Figuren. Zusammen mit der 1. Forderung EUKLIDS (s. Anm. 158 oben) kommt in beiden Forderungen wieder die ontologische Auffassung der Mathematik zum Ausdruck, die PROKLUS systematisch begründet hat. *Peras* und *Apeiron* treten hier in den beiden ersten Postulaten des EUKLID ganz klar in Erscheinung als Gestaltprinzipien, die nicht umgangen werden können (s. unsere Einleitung). Als solche *übergreifende Prinzipien* regieren sie insbesondere die Gebiete der *ideellen mathematischen Konstruktion*. — Nach KANT ist aber gerade Mathematik mit Konstruktion der Begriffe gleichbedeutend. Es ergibt sich somit die Forderung einer Gestaltlehre der Mathematik als eine unumgängliche, will man das Ganze des Mathematischen und nicht nur die halbe Wahrheit (wie beim Formalismus und in der Logistik) in Händen haben. — Siehe: M. STECK, *Mathematischer Idealismus*, Kant-Studien, Neue Folge, Bd. 43, Jhg. 1943.

¹⁶⁴⁾ Es handelt sich hier um das hochbedeutsame 1. Axiom des EUKLID, auf das ich schon ausführlich an anderer Stelle eingegangen bin (M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle [S.] 1942). — Siehe auch die Einleitung zu diesem Werke.

¹⁶⁵⁾ Siehe die ähnliche Stelle oben, S. 293 im Text dieser Edition. Diese Auffassung des ARISTOTELES, wonach die Forderung beweisbar, das Axiom aber unbeweisbar sei, vergißt zunächst die Angabe der Mittel, mit denen der Beweis bzw. die Nichtbeweisbarkeit erbracht wird. Darüber hinaus aber scheint diese Auffassung bis in den modernen Formalismus hinein nachzuwirken, der sich ja auch sonst vielfach an aristotelische Lehren hält und ARISTOTELES als Kronzeugen für seine Auffassung anführt. Die moderne Axiomatik ist aber im Verlauf ihrer Entwicklung immer mehr dazu übergegangen, den Unterschied zwischen Postulat und Axiom zu verwischen, wodurch alle Schärfe der Unterscheidung, wie sie noch hier bei PROKLUS mehrfach deutlich herauskommt, dahingefallen ist (s. oben bei VAILATI, Anm. 157 und 160).

¹⁶⁶⁾ PROKLUS erkennt also die Forderung 4 des EUKLID (s. oben Anm. 162) nicht als solche an, hierin ARISTOTELES folgend, was aber durchaus abwegig ist.

¹⁶⁷⁾ Hier wird zum ersten Male im Text des PROKLUS das 5. EUKLIDISCHE Postulat, das *Parallelenpostulat*, genannt, auf das später wiederholt eingegangen und ein Beweis desselben — hierin wieder ARISTOTELES folgend — versucht wird. Fast alle Autoren, die über PROKLUS bislang gearbeitet haben, weisen auf diese Stellen zur Vorgeschichte der *Nichteuklidischen Geometrie* hin. Die beste Darstellung dieser Sachverhalte gibt immer noch: BONOLA-LIEBMANN, *Die Nichteuklidische Geometrie* (Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung), 3. Aufl., Leipzig-Berlin 1921, S. 2, 3—6 u. a. (siehe die Anm. 185, 189 u. a. unten). — Siehe auch das 9. Axiom des EUKLID.

¹⁶⁸⁾ Die 2. EUKLIDISCHE Definition lautet bekanntlich: „Eine Linie ist breitenlose Länge“ (Übers. nach THAER).

¹⁶⁹⁾ Siehe Anm. 166 über das 4. EUKLIDISCHE Postulat oben.

¹⁷⁰⁾ Siehe die Anm. über das 1. Axiom des EUKLID oben (Anm. 164).

¹⁷¹⁾ Siehe die Anm. 166 und 167 oben.

¹⁷²⁾ Bekanntlich ist die *Umkehrung des Parallelenpostulats* beweisbar: EUKLID, *Elemente* I, 28.

¹⁷³⁾ Es ist dies bekanntlich der 17. Satz des I. Buches der „Elemente“.

¹⁷⁴⁾ Siehe unten Anm. 184 und bei CANTOR, S. 414, und auch oben die Anm. über die rechten Winkel.

¹⁷⁵⁾ Siehe oben die Anm. 34, 164 zum 1. Axiom des EUKLID und 1. Teil der Vorrede.

¹⁷⁶⁾ Vgl. Anm. 175, sowie unsere Einleitung.

¹⁷⁷⁾ Die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren bei EUKLID im VII. Buch der „Elemente“. Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen bei EUKLID im IX. Buch der „Elemente“, Satz 20.

¹⁷⁸⁾ Siehe oben die Anm. 158, 163 über die Forderung des Habens eines begrenzten und eines unbegrenzten ideellen Lineals zu Konstruktionszwecken.

¹⁷⁹⁾ In diesen drei Postulaten des EUKLID stehen die klassischen Konstruktionsmittel der Geometrie: das begrenzte Lineal, das unbegrenzte Lineal und der (endliche) Zirkel. Sie sind ideelle Forderungen zum Zwecke der Erzeugung der Gestalt der geometrischen Gebilde. Mit ihnen arbeitet der Geist des Menschen in idealer Weise, um die gesamte Mannigfaltigkeit des geometrischen Formenreichtums entstehend hervorzubringen. Diese drei ideellen Hilfsmittel sind die Werkzeuge des Geometers, mit deren Hilfe er den gegebenen ideellen Stoff formt und ihm die Gestalt aufprägt. So verstanden, sind diese drei EUKLIDischen Postulate die *Grundlage einer jeden umfassenden Gestaltlehre der Mathematik*. — Es handelt sich hier nicht um Zeicheninstrumente im üblichen Sinne dieses Wortes, sondern um *ideelle Konstruktionswerkzeuge* zur Erzeugung der geometrischen Figuren (Gestalten, s. THAER in der Anmerkung zum 19. Satz des VI. Buches von EUKLID „Elementen“) und der Gebildemannigfaltigkeit der Geometrie überhaupt. — Dies zu erwähnen scheint heute, nach den Entwicklungen des mathematischen Formalismus und der Logistik, nicht unangebracht, da gerade diese Geistesrichtungen diesen — eigentlich selbstverständlichen — Fundamentalpunkt vergessen und unterdrückt haben. Alles ist bei ihnen logische Konstruktion, für die es keine eigentlichen Konstruktionsmittel gibt. Es handelt sich aber bei „*Geometrie*“ immer um eine *anschaulich-logische* Konstruktion, die der ideellen Konstruktionswerkzeuge bedarf. Man sollte darauf eigentlich nicht aufmerksam machen müssen. Dies zeigt aber, daß es an der Zeit ist, daß eigentliche „*Grundlagen der Geometrie*“ geschrieben werden, die sich etwa von den HILBERTschen gerade in diesen Bezügen fundamental unterscheiden und abheben.

¹⁸⁰⁾ Zur Forderung des *ideellen Zirkels mit endlicher Zirkelöffnung* siehe die Anm. 179.

¹⁸¹⁾ Hier wird deutlich, daß die Alten nur den ganz im Endlichen gelegenen Teil der Cissoide des DIOKLES betrachtet haben, wie LORIA ausführlich darlegt (s. oben Anm. 92, 109, 130).

¹⁸²⁾ Zu diesem 4. Postulat des EUKLID siehe die Anm. 166 oben.

¹⁸³⁾ Es ist bekanntlich die 10. Definition des EUKLID (s. oben Anm. 113, 115).

¹⁸⁴⁾ Siehe oben Anm. 174, wo dies schon erwähnt wird und bei CANTOR, S. 414, woselbst sich auch diese Figur 7 findet.

¹⁸⁵⁾ Hier also die Formulierung des *Parallelenpostulats*. THAER übersetzt (S. 3): „Gefordert soll sein, daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Ver-

längerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ THAER fügt in den Anmerkungen bei: „Die Notwendigkeit eines Parallelenpostulats zur sicheren Fundierung der damals anerkannten Geometrie klar erfaßt zu haben, ist wahrscheinlich EUKLIDS persönliches Verdienst. Die *nichteuklidischen Geometrien* sind entstanden aus der durch vergebliche Beweisversuche vorbereiteten Erkenntnis der Unbeweisbarkeit des EUKLIDischen Postulats.“ Siehe oben Anm. 61, 153, 167 und insbesondere die ausführliche Darstellung bei BONOLA-LIEBMANN (a. a. O.).

¹⁸⁶⁾ Siehe oben die Anm. 167 und Anm. 185.

¹⁸⁷⁾ Siehe Anm. 172 oben bezüglich der *Umkehrung des Parallelenpostulats* und ihrer Beweisbarkeit. Siehe auch: R. BALDUS, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin 1927, 2. Aufl. 1943 (Slg. Göschen).

¹⁸⁸⁾ Hier wird also deutlich auf die allgemeine Eigenschaft einer *Asymptote* einer Kurve hingewiesen. Die Alten konnten sie bereits bei der Hyperbel studieren, wenngleich sie dort auch nur immer einen einzigen Hyperbelast untersuchten. Es muß freilich die Frage offen bleiben, weshalb sie dann etwa bei der Cissoide des DIOKLES (s. oben die Anm. 130, 181) auf die Frage des asymptotischen Verhaltens der Kurve nicht eingegangen sind. Diese Stelle des PROKLUS ist zu allgemein, um daraus sichere diesbezügliche Schlüsse ziehen zu können.

¹⁸⁹⁾ Die Erkenntnis der Unmöglichkeit des Beweises des Parallelenpostulats, das hier PROKLUS als „Lehrsatz“ bezeichnet, ist dann bekanntlich die Entdeckungsgeschichte der *Nichteuklidischen Geometrie*, und ihr ist auch die Entdeckung selbst durch C. F. GAUSS (1777—1855) zu danken (s. oben die Anm. 61, 153, 167, 185).

¹⁹⁰⁾ Die Formulierung der Übersetzung der Axiome des EUKLID bei THAER lautet: „1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich; 2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich; 3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich; 8. Das Ganze ist größer als der Teil; 7. Was einander deckt, ist einander gleich.“ — Die Axiome tragen wieder wesentliches zur Gestalt der geometrischen Figuren bei. Ich habe darüber ausführlich gehandelt in: M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, „Die Gestalt“, Heft 12, Halle (S.) 1942. — Siehe auch die Anm. 54, 58, 132, 156, 192 oben und unsere Einleitung, insbesondere II. Teil.

^{190a)} Vgl. die nachfolgende Bibliographie unter „*Quellenwerke*“: APOLLONIOS.

¹⁹¹⁾ Es ist also im wesentlichen „*Kongruenz*“ (Gleichheit und Ähnlichkeit; diese Formulierung sogar noch bei LAMBERT), also „*Gestaltgleichheit*“, die hier exemplifiziert wird (s. Anm. 196 unten).

¹⁹²⁾ Siehe die Parallelstellen im 1. Teil der Vorrede und was dort über die Bedeutung des antiken Begriffes „*Axiom*“ gesagt ist. — Es ist hier wieder das PLATONISCHE Lehrstück von der *Anamnese* verarbeitet.

¹⁹³⁾ Dieser Abschnitt ergänzt die einschlägigen Stellen der 1. Vorrede ganz schlagend und beleuchtet die Auffassung, die wir in unserer Einleitung dargelegt haben. Wir brauchen um so weniger darauf näher einzugehen, als die ontologische Auffassung der Mathematik in Verbindung mit einem *allgemeinen Symmetrieprinzip des Geistes* als Leitlinie durch unsere gesamte Einleitung des Werkes hindurchgeht.

¹⁹⁴) Die Forderung einer Minimalzahl von Axiomen ist aber doch außerordentlich bedeutsam, wie die modernen axiomatischen Untersuchungen zeigen. Sie gibt zusammen mit anderen Forderungen methodischer Art einen Prüfstein und ein Kriterium für die „Einfachheit“ eines Axiomensystems ab, die sich auf diese Weise exakt fassen läßt.

¹⁹⁵) Es ist das 8. EUKLIDISCHE Axiom und im Hinblick auf die Entwicklungen der Mengenlehre hochbedeutsam. Siehe: M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943.

¹⁹⁶) Siehe Anm. 191 oben.

¹⁹⁷) Die 4. Proposition des 1. Buches der EUKLIDISCHEN „Elemente“ bringt bekanntlich den 1. Kongruenzsatz für Dreiecke (2 Seiten, eingeschlossener Winkel), der in der modernen Axiomatik im wesentlichen als „Axiom“ verwendet wird. EUKLID ist hierin viel vorbildlicher, da er die einfachsten Sinn- und Gestaltträger des Geometrischen als „Axiome“ wählt. Und seine Wahl ist keine willkürliche, wie in der modernen Axiomatik, sondern eine notwendige. Die Notwendigkeit erwächst aus der gesamten ontologischen Auffassung des Mathematischen, die bei EUKLID zweifellos vorhanden ist, in allen EUKLID-Interpretationen aber immer — in neuerer Zeit sogar geflissentlich — übersehen wurde.

¹⁹⁸) Es ist das Axiom 9 des EUKLID. Siehe dazu die Anm. 167 oben.

¹⁹⁹) Gemeint ist hier wohl das 5. Axiom des EUKLID, das THAER so übersetzt: „Die Doppelten von demselben sind einander gleich.“

²⁰⁰) Es ist das 2. EUKLIDISCHE Axiom (s. oben Anm. 190).

²⁰¹) Gemeint ist hier wohl das 4. Axiom des EUKLID, das in der Formulierung bei THAER lautet: „Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.“ — In der vorliegenden Fassung des PROKLUS steht noch etwas mehr, wie man bemerkt.

²⁰²) Bekanntlich läßt EUKLID solche und ähnliche Folgerungen, die sich ihm unmittelbar aus seinen Definitionen und Axiomen ergeben, weg. Sie können aber unter Umständen für einen systematischen, lückenlosen Aufbau sehr bedeutsam sein und dann nicht entbehrt werden.

²⁰³) Diese Stelle bringt wieder uraltes antikes Gedankengut der Vorsokratiker und insbesondere der Pythagoreer herauf. Man wird auch an ein Fragment des ZENON (Diels, Fragm. 19 B) gemahnt wo fast dieselbe Formulierung steht. — Auch der Zusammenhang mit „Potentialität“ und „Aktualität“ leuchtet hier nochmals klar auf (s. Anm. 134 oben).

E. Anmerkungen des Herausgebers zu den Propositionen

²⁰⁴) Auf diese erste Aufgabe des EUKLID ist von PROKLUS bereits wiederholt hingewiesen worden (Anm. 59 u. a.). THAER hat statt „konstruieren“ die Übersetzung „errichten“.

²⁰⁵) Diese, mit Rücksicht auf die heutige geistige Situation der Mathematik hochwichtige Stelle scheint bisher bei PROKLUS überhaupt nicht beachtet worden zu sein. Sie bringt mit aller nur wünschbaren Deutlichkeit und Genauigkeit das zum Ausdruck, was ich als die beiden Fragenkreise des „Hauptproblems der Mathematik“ (Berlin 1942; 2. Aufl. 1943) unterschieden habe.

²⁰⁶⁾ Diese Stelle ergänzt die Parallelstellen aus dem 1. und 2. Teil der Vorrede in vollständiger Weise.

²⁰⁷⁾ Erneut wird also hier auf die PLATONISCHEN Körper hingewiesen. Siehe die PLATONISCHEN Körper bei EUKLID und PROKLUS in der Darstellung bei CANTOR (S. 259) und Anm. 45, 51 oben.

²⁰⁸⁾ Auf diese Aufgabe kommt PROKLUS später noch einmal zu sprechen (s. Anm. 227 unten). Sie ist in ihrer einfachen Problemstellung geeignet, ein wirklich einleuchtendes methodisches Beispiel abzugeben, als welches PROKLUS die Aufgabe auch verwendet.

²⁰⁹⁾ Die *Streckenhalbierung* bei EUKLID in „Elemente“ I, 10 unter Benützung des gleichseitigen Dreiecks (s. oben Anm. 66).

²¹⁰⁾ Das 10. Buch der EUKLIDISCHEN „Elemente“ gilt und ist wohl auch das schwierigste des ganzen Werkes. Es ist nach dem Zeugnis von THAER die „klassische Schule der Unmöglichkeitbeweise“, wobei nicht unerwähnt bleiben soll, daß der erste Unmöglichkeitbeweis bei EUKLID bereits im I. Buch als Satz 7 vorkommt.

²¹¹⁾ Der Terminus „*Peripheriewinkel*“ hat hier natürlich eine andere Bedeutung als bei uns. Gemeint ist hier offenbar der Winkel, der von zwei Kreisperipherien gebildet wird, wobei die Alten ihn nicht als Winkel der zugehörigen Kreistangenten erklärten, sondern eben als „krummlinigen“ Winkel auffaßten.

²¹²⁾ Es ist dies der Satz 3 des I. Buches von EUKLIDS „Elementen“.

²¹³⁾ Dieser und ähnliche Sätze werden im V. Buch der „Elemente“ behandelt (insbesondere V, 16), und auf diese Vertauschungsaussage bei Proportionen wird auch in beiden Teilen der Vorrede wiederholt hingewiesen, um gewisse methodologische Positionen zu exemplifizieren, wie es auch hier geschieht.

²¹⁴⁾ Es ist dies der 2. Satz des I. Buches von EUKLIDS „Elementen“.

²¹⁵⁾ Siehe zu dieser wichtigen Stelle auch die Parallelstellen in beiden Teilen der Vorrede (Anm. oben) und unsere Einleitung. — Zu den Beweismethoden vergleiche auch die Darlegungen über die Schlußweisen bei PROKLUS und EUKLID bei CANTOR (S. 261).

²¹⁶⁾ Die Sätze vom *Außenwinkel* und von der *Winkelsumme im Dreieck* sind bei EUKLID als 32. Proposition des I. Buches der „Elemente“ gefaßt.

²¹⁷⁾ Siehe Anm. 216.

²¹⁸⁾ Hier wird also auf die 1. Proposition des EUKLID im I. Buch zurückverwiesen (s. Anm. 204 oben).

^{218a)} Die Existenz des Schnittpunktes beider Kreise wird weder bei EUKLID noch bei PROKLUS bewiesen, sondern der Anschauung der ideellen Figur entnommen.

²¹⁹⁾ Diese methodisch wichtigen Unterscheidungen erlauben auch die geistesgeschichtliche Einordnung des Werkes. Siehe auch „*Lemma*“ bei CANTOR (S. 229), ebenso „*Porisma*“ (S. 264/65).

²²⁰⁾ Diese Beweisart des sog. *indirekten Beweises* wird methodisch von PROKLUS besonders eingehend abgehandelt (siehe unsere Einleitung, Teil II).

²²¹⁾ Zu „*Porisma*“ (Zusatz) siehe den Verweis auf CANTOR in Anm. 219. — Siehe für diese ganzen methodischen Unterscheidungen auch die Anmerkungen bei THAER, wo es z. B. bei den „*Propositionen*“ des EUKLID heißt: „Die wesentlichen Glieder einer Proposition sind nach PROKLOS: 1. die allgemeine Vorlage

selbst (*Protasis*), Lehrsatz oder Aufgabe; 2. das speziell Gegebene (*Ekthesis*), die Voraussetzung; 3. das speziell Geforderte (*Diorismos*), die Behauptung; 4. die Konstruktion (*Kataskheue*); 5. der Beweis (*Apodeixis*); 6. die auf die Vorlage zurückgreifende Schlußzusammenfassung (*Symperasma*).“ — Zum *Diorismos* vergleiche auch CANTOR (S. 224/25).

²²²⁾ Zum *Delischen Problem* vergleiche man I. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912, S. 21/22.

²²³⁾ EUKLID behandelt diese und ähnliche Probleme bekanntlich im VI. Buch der „Elemente“. Siehe insbesondere VI, 13 u. a. — Daß man das *Problem der Würfelverdoppelung* darauf reduzieren kann, zwei mittlere Proportionale zu finden, zeigt HEIBERG (a. a. O. Anm. 222, S. 22) in modernem Ansatz und verweist auf HIPPOKRATES von Chios.

²²⁴⁾ Zur *Möndchenquadratur* des HIPPOKRATES siehe die Anm. 111, 137 oben.

^{224a)} s. Anm. 218a oben.

²²⁵⁾ Siehe die Beweisführung des PROKLUS für diesen Satz oben (Anm. 133). Fig. 1 bei PROKLUS.

²²⁶⁾ Das Problem des *Lotefüllens* behandelt EUKLID im Satz 12 des I. Buches der „Elemente“ (s. Anm. 82 oben).

²²⁷⁾ Bezüglich der Konstruktion eines gleichschenkeligen Dreiecks vergleiche man den *Basiswinkelsatz* bei EUKLID, Elemente I, 5 (Anm. 64 oben).

²²⁸⁾ Hinsichtlich der Konstruktion eines ungleichseitigen Dreiecks bei EUKLID vergleiche man die Konstruktionsaufgabe der „Elemente“ I, 22, wo dies explizit durchgeführt wird.

²²⁹⁾ Diese Einteilung der *Problemata* ist außerordentlich interessant und auch methodisch sehr bedeutsam (siehe unsere Einleitung).

²³⁰⁾ Hinsichtlich der *Anlegungsprobleme* bei EUKLID vergleiche man unsere ausführliche Anmerkung 27 oben.

²³¹⁾ THAER übersetzt die 2. Proposition so: „An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.“

^{231a)} Ob der mathematische und der grammatische Terminus „Fall“ auf dieselbe Vorstellung (nämlich auf $\pi\acute{\omega}\sigma\iota\varsigma$ beim Würfelspiel) zurückgehen, ist schwer zu sagen. Ich habe in der mir gegenwärtig zugänglichen Literatur nichts darüber finden können.

²³²⁾ Die Übersetzung bei THAER ist sinngemäß gleich.

^{232a)} Hier sind die Strecken gleich gezeichnet worden; man denke sich D noch näher an der Peripherie des Kreises liegend.

²³³⁾ Es ist dies bekanntlich der 1. *Kongruenzsatz* (s. Anm. 197 oben). — In der modernen Axiomatik, etwa bei HILBERT, wird er direkt als „Axiom“ genommen (s. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930).

²³⁴⁾ Über den *hornförmigen Winkel* siehe die Anm. 96, 107, 114 oben und bei CANTOR (S. 250).

²³⁵⁾ Das „je“ zu Beginn des Textes ist von uns eingefügt. Es handelt sich dabei um zwei rechtwinkelige Dreiecke, deren Flächeninhalte verglichen werden. Die Messung des Flächeninhaltes ist PROKLUS zwar durchaus bekannt; er gibt aber die Einheit des Maßes nicht an.

²³⁶⁾ Hier wird von PROKLUS versucht, die Begriffe „*Flächeninhalt*“ und „*Umfang einer Figur*“ durch *kategoriale Begriffe* definitorisch zu umreißen (siehe unsere Einleitung).

²³⁷⁾ Die Kenntnis der Lehre von der Flächenmessung wird hier von PROKLUS vorausgesetzt (siehe auch Anm. 235 oben).

²³⁸⁾ „*striegelförmiger Winkel*“ ist bei PROKLUS sonst nirgends erklärt. Wir haben die Auffassung „*doppelt-konkav*“ dafür in bewußtem Gegensatz zu „*doppelt-konvex*“ gestellt, was ja wohl auch gemeint ist.

²³⁹⁾ Es ist bekanntlich das 9. Axiom des EUKLID (s. oben Anm. 167, 191).

²⁴⁰⁾ Dieses astronomische Werk des KARPOS, das hier von PROKLUS genannt wird, konnten wir nicht weiter feststellen. Auch CANTOR gibt dieserhalb keinen Hinweis.

²⁴¹⁾ Es ist dies bekanntlich der *Basiswinkelsatz* bei gleichschenkeligen Dreiecken (s. Anm. 64, 227 oben), der auch in der modernen Axiomatik eine große Rolle spielt (siehe D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930, Anhang II).

²⁴²⁾ Siehe dazu EUKLID, Elemente XII, 1, 2 und bei APOLLONIOS „*Kegelschnitte*“, Deutsche Ausgabe von CZWALINA, München-Berlin 1926.

²⁴³⁾ Die 6. Proposition des EUKLID, Elemente I, ist bekanntlich die Umkehrung des Basiswinkelsatzes.

²⁴⁴⁾ Es handelt sich hier um die Proposition EUKLID, Elemente I, 17 und I, 32 (s. Anm. 14, 173 oben). — Über GEMINOS und seine mathematischen Entdeckungen siehe CANTOR (S. 382).

²⁴⁵⁾ Es ist dies die *Umkehrung des Basiswinkelsatzes* (s. Anm. 243 oben).

²⁴⁶⁾ Zur *Deductio ad absurdum* siehe oben Anm. 220 und unsere Einleitung.

²⁴⁷⁾ Die Erklärung des Terminus „*Umkehrung eines Lehrsatzes*“ sehr deutlich und klar hier und auch schon früher (s. Anm. 48 oben). Vgl. auch unsere Einleitung.

²⁴⁸⁾ Die 7. Proposition bringt den ersten *Unmöglichkeitbeweis* im Werk des EUKLID. Siehe die Anm. 210 oben.

²⁴⁹⁾ Der 8. Lehrsatz des EUKLID ist bekanntlich der 2. *Kongruenzsatz* (3 Seiten).

²⁵⁰⁾ Hier die explizite Formulierung des 2. Kongruenzsatzes. Bei THAER ist die Übersetzung sinngemäß gleich.

²⁵¹⁾ Siehe dazu: I. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912.

²⁵²⁾ Die Konstruktion des regulären 15Ecks bei EUKLID, Elemente IV, 16.

²⁵³⁾ Siehe dazu: R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, München 1877.

²⁵⁴⁾ Die *Winkelhalbierung* wird wiederholt von PROKLUS als *Fundamentalproblem* genannt (s. Anm. 67).

²⁵⁵⁾ Über den „*hornförmigen Winkel*“ siehe die Anmerkungen 96, 107, 114, 234 oben.

²⁵⁶⁾ Hier wird zum ersten Male bei PROKLUS u. a. auch das klassische Problem der *trisectio anguli* genannt, auf die er wiederholt zu sprechen kommt (s. Anm. 257, 262 unten).

²⁵⁷⁾ Hier wird die *klassische Lösung der Winkeldreiteilung* mittels höherer Kurven (Konchoide etc.) bereits angedeutet. — Siehe die Darstellung bei HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912 und die explizite Darlegung bei G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig 1902.

²⁵⁸) Siehe Anm. 257.

²⁵⁹) Über die „*quadrierenden Linien*“ oder „*Quadratrixkurven*“ des HIPPIAS u. a. siehe bei LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig 1902, S. 410 ff. und bei CANTOR (S. 181/83).

²⁶⁰) Zur ARCHIMEDISCHEN Spirale siehe bei LORIA (a. a. O. 259), S. 426 ff. Sie ist eine *Quadratrix*.

²⁶¹) Im 3. Buch der „*Elemente*“ behandelt EUKLID bekanntlich die elementare Kreislehre. Die erwähnte Aufgabe macht den 30. Satz dieses Buches aus: „Einen gegebenen (Kreis-)Bogen zu halbieren“ (Übersetzung nach THAER).

²⁶²) Würde die Lösung dieser Aufgabe mit Lineal und Zirkel gelingen, so wäre auch die *trisection anguli* (Anm. 256, 257) mit denselben Mitteln zu lösen, was bekanntlich unmöglich ist.

²⁶³) Hier also die wichtige Aufgabe der *Streckenhalbierung* (s. Anm. 66, 209 oben).

²⁶⁴) Hier tritt also die ganze *Problematik des Irrationalen* bei PROKLUS erneut auf. Man vergleiche dazu insbesondere: E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle (S.) 1923 und M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942, 2. Aufl. 1943 (s. die Anm. 34 u. a. oben).

^{264a}) Die Existenz dieser Schnittpunkte wird der Anschauung entnommen (cf. Anm. 218a).

²⁶⁵) Das Problem des *Loteziehens* wird von dem des *Lotefällens* bei EUKLID scharf unterschieden (s. Anm. 82, 226 oben).

^{265a}) Hinsichtlich der Existenz des Schnittpunktes beider Kreise in F vgl. 264a).

²⁶⁶) Welcher Beweis hier als „Beweis mit Hilfe des Halbkreises“ gemeint ist, wird weder hier noch später bei PROKLUS klar.

²⁶⁷) Hier die Aufgabe des *Lotefällens* (s. oben Anm. 82, 226 und 265).

²⁶⁸) Diese Stelle ist zur Genesis und Geistesgeschichte des *Irrationalen* und *Infinitesimalen* im Griechentum besonders wichtig (siehe unsere Einleitung und die Darlegungen bei CUSANUS).

²⁶⁹) Die Charakteristik der *rechten Winkel und Nebenwinkel* knüpft an frühere Entwicklungen des PROKLUS an (s. Anm. 58, 113, 115 oben).

²⁷⁰) Die „*sphärischen Winkel*“ oder die Winkel auf der Kugel sind also der Antike bekannt und PROKLUS kommt auf sie auch noch in anderem Zusammenhang zu sprechen.

²⁷¹) Dieser Satz ist die Umkehrung des 13. Satzes (s. Anm. 269).

²⁷²) Der Satz von den *Scheitelwinkeln* wird meist als selbstverständlich ohne Beweis hingenommen. Daß er eines Beweises bedarf, darauf macht schon hier PROKLUS ausdrücklich aufmerksam.

²⁷³) Siehe die Anmerkungen 219, 221 oben über „*Porisma*“ (Zusatz).

²⁷⁴) Das *Porisma* im 7. Buch, auf das hier verwiesen wird, ist das folgende: „*Zusatz*: Hiernach ist klar, daß eine Zahl, die zwei Zahlen mißt, auch ihr größtes gemeinsames Maß messen muß — q. e. d.“ (Übersetzung nach THAER).

²⁷⁵) THAER übersetzt: „An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.“

²⁷⁶⁾ Damit wird auf den ersten Teil der Proposition 32 des I. Buches der „Elemente“ hingewiesen, wo der Satz vom Außenwinkel erscheint (s. Anm. 216 oben).

²⁷⁷⁾ Dies ist gerade der Inhalt der 32. Proposition (s. Anm. 276).

²⁷⁸⁾ Diese „Abschätzungen“ drängen also alle auf die exakte Aussage des 32. Satzes, des Satzes von der Winkelsumme, hin (s. Anm. 276).

²⁷⁹⁾ Der Satz von der Winkelsumme wird also erläuternd bereits vorausgesetzt (s. Anm. 276—278).

²⁸⁰⁾ THAER übersetzt so: „In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.“

²⁸¹⁾ THAER übersetzt genau so.

²⁸²⁾ THAER übersetzt genau so.

²⁸³⁾ THAER übersetzt dieses Theorem so: „Sind in einem Dreieck über einer seiner Seiten von ihren Enden aus zwei Strecken innerhalb zusammengebracht, so müssen die zusammengebrachten Strecken kleiner sein als die beiden übrigen Dreiecksseiten zusammen, dabei aber den größeren Winkel umfassen.“

²⁸⁴⁾ Was oben (Anm. 146) mit „vierseitiges Dreieck“ gemeint ist, wird also hier erst ganz klar. PROKLUS spricht nur „innere Winkel“ als solche an.

²⁸⁵⁾ Diese Hauptkonstruktionsaufgabe eines Dreiecks aus drei Seiten wird ja oben schon erwähnt (s. Anm. 81, 249).

²⁸⁶⁾ Die Winkelantragung ist natürlich wie die Streckenübertragung konstruktionsmäßig außerordentlich wichtig und gleichsam wieder ein eigentliches ideelles Tun in der Geometrie.

²⁸⁷⁾ Der Terminus „beilförmiger Winkel“ tritt hier zum ersten und letzten Male bei PROKLUS auf (s. auch Anm. 238). Seine Erklärung folgt anschließend im Text.

²⁸⁸⁾ Im 3. Buch der „Elemente“ wird die elementare Kreislehre behandelt.

²⁸⁹⁾ THAER übersetzt dem Sinne nach gleich.

²⁹⁰⁾ Hier erfolgt erstmals ein klarer Hinweis auf die Parallelen-theorie EUKLIDS. EUKLID schiebt bekanntlich den Gebrauch und die Anwendung seines Parallelenpostulats innerhalb seines Aufbaues der Geometrie möglichst weit hinaus, nämlich bis zur Proposition I, 29, um hier die Existenz eines Schnittpunktes zu sichern. — Daß das Parallelenpostulat unbeweisbar ist, hat EUKLID vermutlich gewußt; daß seine Umkehrung aber beweisbar ist (Prop. I, 28), ist ebenfalls eine Erkenntnis, die EUKLID zu danken ist (s. Anm. 172, 187; 167, 185, 189 oben über die Genesis der Nichteuklidischen Geometrie).

²⁹¹⁾ Die Wechselwinkel an Parallelen bei EUKLID in „Elemente“ I, 27.

²⁹²⁾ Dies ist die 37. Proposition im I. Buch der „Elemente“.

²⁹³⁾ THAER übersetzt dem Sinne nach gleich.

²⁹⁴⁾ Dies ist der 3. Kongruenzsatz (s. Anm. 250 oben).

^{294a)} Es ist echt platonisch gedacht (vgl. *Philebos* und *Timaios*), die Elemente der Existenz immer im Mathematischen versinnbildlicht zu sehen. Nur durch Aufweisung mathematischer Elemente kann eine Existenz gerechtfertigt und für die Erkenntnis gerettet werden. Die primären Elemente der Existenz (*Usia*, *Isotés*, *Anisotés*, . . .) erschließen sich für PLATON nur aus dem Mathematischen. Sie sind sogar primär mathematisch zu verstehen, denn ihr *Urphänomen* ist die Zahlenreihe (Briefl. Mitteilung von Herrn Prof. HOFFMANN).

²⁹⁵⁾ In den Handschriften ist nur hier die Gliederung vollständig zu ersehen. BAROCIUS hat sie wahrscheinlich richtig rekonstruiert und in seine Übersetzung aufgenommen.

²⁹⁶⁾ Die Winkelbeziehungen an Parallelen faßt bekanntlich der Satz 29 des I. Buches der „Elemente“ zusammen.

²⁹⁷⁾ Bezüglich der „quadrierenden Linien“ des HIPPIAS vergleiche man die Anm. 259 oben.

²⁹⁸⁾ Bezüglich der „spirischen Linien“ des PERSEUS vergleiche man die Anm. 94, 101 oben und: KNOCHE-MAERKER, *Ex Procli Successoris in Euclidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem quae de rectae est linea et sec-*
commentariis definitionis quartae expositionem quae de recta est linea et sec-
tionibus spiricis (Schulprogramm), Herford 1856.

²⁹⁹⁾ Der Satz von den Wechselwinkeln wird auch schon oben (Anm. 291) erwähnt.

³⁰⁰⁾ Unter den „arithmetischen Büchern“ von EUKLIDS „Elementen“ versteht man bekanntlich die Bücher VII—X.

³⁰¹⁾ Dies ist die bekannte beweisbare Umkehrung des Parallelenpostulats (s. Anm. 290 oben). — Vgl. auch: R. BALDUS, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin 1927; 2. Aufl. 1943 (Sg. Göschen).

³⁰²⁾ Dieser Satz faßt die Winkelbeziehungen an Parallelen zusammen (s. oben Anm. 291, 296, 299).

³⁰³⁾ Hier wird also im EUKLIDISCHEN Aufbau der Geometrie zum ersten Male das Parallelenpostulat herangezogen, um die Existenz eines Schnittpunktes zu sichern (s. oben Anm. 290).

³⁰⁴⁾ Es folgt jetzt der PTOLÉMÄISCHE Beweisversuch des Parallelenpostulats. Siehe bei: BONOLA-LIEBMANN, *Die Nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl., Berlin 1921, S. 3 und auch: ENGEL-STÄCKEL, *Theorie der Parallellinien von EUKLID bis GAUSS*, Leipzig-Berlin 1899 (siehe auch CANTOR, S. 395).

³⁰⁵⁾ Diese Proposition bringt die bekannte Transitivitätseigenschaft des Parallelismus zum Ausdruck (s. unsere Einleitung und den Zusammenhang mit unserem allgemeinen Symmetrieprinzip).

³⁰⁶⁾ Hier die Konstruktion einer Parallelen.

³⁰⁷⁾ Auf diese Sätze vom Außenwinkel und von der Winkelsumme eines Dreiecks ist PROKLUS bereits früher wiederholt eingegangen (s. Anm. 14, 145, 216 oben).

³⁰⁸⁾ Diesen Satz hat PROKLUS bereits in der Vorrede erwähnt (s. oben Anm. 14).

³⁰⁹⁾ Gemeint sind hier die an den Quadratecken als Scheitel durch die Seiten und Diagonalen gebildeten Winkel.

³¹⁰⁾ Die Übersetzung bei THAER ist genau so.

³¹¹⁾ Auch THAER übersetzt so.

³¹²⁾ Dies ist das 41. Theorem des I. Buches der „Elemente“ (s. Anm. 326).

³¹³⁾ Die Übersetzung bei THAER lautet genau so.

³¹⁴⁾ Dieser Satz wohl zuerst bei APOLLONIOS, „Kegelschnitte“ (Deutsche Ausgabe von CZWALINA, München-Berlin 1926), §§ 11, 12 des II. Buches.

³¹⁵⁾ Das sind die Sätze 21 und der Satz des THALES, Prop. 31 (1. Teil) des 3. Buches der „Elemente“.

³¹⁶⁾ Der Peripheriewinkelsatz ist die 21. Prop. des 3. Buches der „Elemente“.

³¹⁷⁾ Hier werden durch PROKLUS also bereits *Maximum-Minimum-Aufgaben* gestellt und ihre (richtige) Lösung angegeben. Wie und mit welchen Mitteln die Antike diese Aufgaben beherrscht hat, ob mit oder ohne *Exhaustion*, scheint bisher von der Forschung noch nicht aufgeklärt worden zu sein.

³¹⁸⁾ Siehe Anm. 317.

³¹⁹⁾ Im 2. Buch der „Elemente“ behandelt EUKLID bekanntlich die heute sog. „*Geometrische Algebra*“.

³²⁰⁾ Siehe oben, wo PROKLUS nach EUKLID die Vierecke einteilt (s. Anm. 148).

³²¹⁾ THAER übersetzt sinngemäß gleich.

³²²⁾ Auch THAER übersetzt dem Sinne nach so.

³²³⁾ Die Übersetzung bei THAER ist sinngemäß dieselbe.

³²⁴⁾ Auch diese Umkehrung übersetzt THAER dem Sinne nach gleich.

³²⁵⁾ In der THAERSchen deutschen EUKLID-Ausgabe ist dieser Satz lediglich dem Texte nach angeführt, ohne daß ein Beweis für ihn gegeben würde.

³²⁶⁾ Siehe die Erwähnung dieses Satzes, der den Vergleich der Flächeninhalte der zwischen denselben Parallelen liegenden und auf derselben Basis stehenden Parallelogramme und Dreiecke bringt, schon oben (Anm. 312).

³²⁷⁾ Den Beweis dieses Theorems sehe man bei EUKLID nach.

³²⁸⁾ Der Satz von den *Ergänzungsparallelogrammen* ist bekanntlich außerordentlich wichtig und für die Begründung der Flächenmessung überhaupt bedeutsam.

³²⁹⁾ THAER übersetzt dem Sinne nach gleich.

³³⁰⁾ Die Übersetzung bei THAER ist dem Sinne nach dieselbe.

³³¹⁾ Die *Konstruktion des Quadrats* wird von PROKLUS schon früher erwähnt (s. Anm. 60 oben).

³³²⁾ Der *Lehrsatz des Pythagoras*. Siehe dazu bei CANTOR (S. 142 und 168). Siehe ferner Anm. 38 oben über die *Konstruktion rationaler rechtwinkliger Dreiecke auf Grund dieses Satzes*. — Siehe auch die im Kommentar des PROKLUS gegebene Lösung der Aufgabe, Zahlen zu finden, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet werden können, bei CANTOR (S. 173).

³³³⁾ Die Umkehrung des Pythagoreischen Lehrsatzes beschließt das I. Buch der EUKLIDischen „Elemente“.

F. Nachtrag

Zu S. 441, Zeile 14 ff.: Hier ist uns durch PROKLUS eine Auffassung des CHRYSIPPOS über das Wesen der „*Ideen*“ erhalten, die zu den besten gehört, die der antike Platonismus aufzuweisen hat. Sie hat sich, nicht zufällig, in *mathematischer* Tradition erhalten (Briefl. Mitteilung von Herrn Prof. HOFFMANN).

■

*

*

BIBLIOGRAPHIE

zum
Euklid-Kommentar des

PROKLUS DIADOCHUS

Bearbeitet von
MAX STECK

Übersicht über den Aufbau der Bibliographie

	Seite
I. Ausgaben der EUKLIDischen „ <i>Elemente</i> “	519
II. Bibliographie zum EUKLID-Kommentar des PROKLUS DIADOCHUS . . .	520
III. Weiteres Schrifttum	527
IV. Quellenwerke	534
V. Nachträge	544

* * *

Die Büchertitel der Bibliographie müßten
z. T. noch überprüft werden, was aber
augenblicklich aus bekannten Gründen
nicht möglich ist. M. St.

I. Ausgaben der EUKLIDischen „Elemente“

1. Die erste gedruckte Ausgabe von EUKLIDS „Elementen“ (*Stoicheia*) ist lateinisch und 1482 in Venedig erschienen nach der auf arabischen Bearbeitungen fußenden Übersetzung des CAMPANUS. (Vgl. auch: I. L. HEIBERG, Literargeschichtliche Studien über EUKLID, Leipzig 1882; H. HANKEL, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, insbesondere „Anhang I: EUKLID“ (S. 381 ff.); M. CANTOR, EUKLID und sein Jahrhundert, Schlömilch Zeitschr. 12, Supplem. 1 ff.; M. CANTOR, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863.) — Eine weitere, alte Ausgabe der „Elemente“ ist diejenige von B. ZAMBERTI, Venedig 1505.

2. Die erste griechische Ausgabe von EUKLIDS „Elementen“ ist die von SIMON GRYNAEUS besorgte, 1533 in Basel erschienene Ausgabe, nach dem Drucker „Hervagiana“ genannt. (Siehe Titelblatt in Faksimile als Tafel I. a dieser Ausgabe.) Ihr ist der Kommentar des PROKLUS zum I. Buch der „Elemente“, ebenfalls in griechischer Ausgabe, nachgebunden. (Zwischentitelblatt als Tafel I. b in Faksimile in vorliegender Ausgabe.) (Siehe unter II dieser bibliographischen Zusammenstellung, Nr. 13.) — Wohl die älteste deutsche Übersetzung von EUKLIDS „Elementen“ ist diejenige von W. HOLTZMANN, Basel 1562.

3. Eine viel benutzte EUKLID-Ausgabe ist die lateinische von COMMANDINUS, 1572 zu Pesaro erschienene, die den Titel führt: *Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis antiquis a Federico Commandino Urbinato nuper in latinum conversi commentariisque quibusdam illustrati, Pisauri MDLXXII apud Camillum FRANCISCHINUM*. (Vgl. unten Nr. 25.)

4. Die verbreitetste deutsche Übersetzung (s. Nr. 2) der „Elemente“ EUKLIDS ist die von J. F. LORENZ (1738—1807), die in zahlreichen (teilweise allerdings nicht alle Bücher umfassenden) Auflagen in Halle (S.) in den Jahren 1781—1840 erschienen ist. Die letzte Ausgabe ist aus dem Jahre 1840 und von DIPPE besorgt worden. Am leichtesten zugänglich ist wohl die 2. Auflage: Joh. Fr. LORENZ, *Euclidis Elemente, Fünfzehn Bücher*, aus dem Griechischen übersetzt. Halle 1798. (1. Aufl. 1781.)

5. Eine genauere deutsche Übersetzung als Nr. 4 ist die von J. K. F. HAUFF besorgte (2. Aufl. Marburg 1807), die aber nur die Bücher I—VI, XI und XII umfaßt.

6. Eine sehr gute, historisch auch besonders wichtige Ausgabe des EUKLIDischen Originals ist die von E. F. AUGUST des Titels: *EYKAEIAOY ETOIXEIA edita ab E. F. AUGUST*, Berolini MDCCCXXVI.

7. Die heute wissenschaftlich allein maßgebende, griechisch-lateinische Parallelausgabe der „Elemente“ EUKLIDS ist die von I. L. HEIBERG besorgte, zu Leipzig (Teubner) 1883—88 erschienene, des Titels: *Euclidis elementa*, ed. I. L. HEIBERG, 5 Bände, Leipzig (Teubner) 1883—88.

8. Eine bereits den HEIBERGSchen Text (Nr. 7) benützende deutsche Ausgabe ist die von M. SIMON des Titels: *EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig (Teubner) 1901. (Die Beweise dieser Ausgabe sind stark gekürzt. Vgl. auch: H. G. ZEUTHEN, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, ein Werk, das immer noch die beste Einführung in die Euklidischen „Elemente“ und

in sein gesamtes Denken bringt. Wegen ihrer besonders wertvollen, geschichtlichen Einleitung vgl. man die folgende holländische Ausgabe. Vgl. auch: K. FLADT, *Euklid*, Berlin 1927.)

9. Die in Nr. 8 genannte holländische Ausgabe, die die Beweise allerdings gekürzt wiedergibt, ist die folgende: E. J. DIJKSTERHUIS, *De elementen van Euclides*, Groningen 1929—30.

10. Als maßgebende, englische Übersetzung der „Elemente“ EUKLIDS mit Einführung und Kommentar gilt: TH. L. HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*, 2. ed. Cambridge 1926.

11. Noch nicht vollständig erschienen ist die folgende italienische Ausgabe: F. ENRIQUES, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, Rom-Bologna, 1925 ff.

12. Die neueste deutsche, vollständige, nach HEIBERGS Text (Nr. 7) herausgebrachte Übersetzung der „Elemente“ EUKLIDS, auf die wir uns in der vorliegenden Ausgabe unter „THAER“ immer beziehen, ist die von: CL. THAER, EUKLID, *Die Elemente*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften: Nr. 235, I. Teil (Bücher I—III), Leipzig 1933; Nr. 236, II. Teil (Bücher IV—VI), Leipzig 1933; Nr. 240, III. Teil (Bücher VII—IX), Leipzig 1935; Nr. 241, IV. Teil (Buch X), Leipzig 1936; Nr. 243, V. Teil (Bücher XI—XIII), Leipzig 1937. (Vgl. auch die Nr. 26, 31, 32, 33 dieser Bibliographie, die weitere Euklid-Ausgaben nennen.)

II. Bibliographie zum EUKLID-Kommentar des PROKLUS DIADOCHUS

13. Die erste Originalausgabe des EUKLID-Kommentars des PROKLUS zum I. Buch der EUKLIDischen „Elemente“ ist von GRYNÆUS besorgt worden, seiner EUKLID-Ausgabe (Basel 1533) angefügt (s. oben Nr. 2) und führt den Titel: (s. Titelblatt in Faksimile als Tafel I. b dieser Ausgabe) *Commentariorum Procli editio prima, quae Simonis Grynaei opera addita est Euclidis elementis graecae editis*, Basileae apud IOAN. HERVAGIUM anno M.D.XXXIII. Diese erste, fast $3\frac{1}{2}$ Jahrhunderte lang einzige griechische Ausgabe des EUKLID-Kommentars des PROKLUS zum I. Buch der EUKLIDischen „Elemente“ von GRYNÆUS, die seiner EUKLID-Ausgabe angefügt ist, wird in der Literatur allgemein nach dem Drucker als „Hervagiana“ bezeichnet (s. Nr. 2). Ausgedehnte textkritische Studien der Hervagiana hat J. H. KNOCHE in „*Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen*“ (Schulprogramm), Herford 1862, unternommen, dem überhaupt, zusammen mit den Arbeiten von WACHSMUTH und HULTSCH (s. unten Nr. 42—44) im wesentlichen die textkritische Aufhellung zu danken ist. Die Hervagiana umfaßt 112 Folioseiten und ist, nach KNOCHE, durch eine „Masse von Druckfehlern gestört“; ferner „fehlen sämtliche mathematischen Figuren“. — „Der Text ist nicht nur fast auf jeder Seite vielfach verdorben, sondern auch lückenhaft.“ Für die Ausgabe hat GRYNÆUS nur einen einzigen Codex herangezogen. (Weitere Angaben, die sich auf die Textkritik beziehen, siehe unten Nr. 16, 39—45.) L. MAJER faßt in seiner Abhandlung „*Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*“ (Schulprogramm), Tübingen 1875, die Verdienste von KNOCHE so zusammen: „Ein Hauptverdienst um Herstellung des Textes und Erklärung mancher Stellen hat sich KNOCHE erworben, der selbst als seinen einsichtsvollsten Vorarbeiter HAUBER nennt.“ Außer der bereits genannten textkritischen Abhandlung von KNOCHE kommen hier noch die Untersuchungen in

Frage: KNOCHE und MAERKER, *Ex Procli Successoris in Euclidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et sectionibus spiricis* (Schulprogramm), Herford 1856, und: J. H. KNOCHE, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euclids Elementen*, (Schulprogramm), Herford 1865. — Die von HAUBER geleistete Vorarbeit in: *Chrestomathia geometrica* mit Scholien des PROCLUS und SAVILIUS u. a. sowie PFLEIDERERSchen Notizen, Tübingen 1820. — MAJER führt weiter aus: „So wurde der Wunsch, eine brauchbare griechische Ausgabe des PROKLUS auf Grund erneuter Handschriften-Forschungen zu bekommen, immer dringender. Den Abschnitt, der die Übersicht über die Geschichte der Geometrie enthält, hat schon FABRICIUS in seiner *Bibliotheca graeca* (ed. HARLESS. tom. VI, p. 82ff.) mit einem *index laudatorum a Proclo scriptorum* gegeben; derselbe steht auch in der AUGUSTSchen Ausgabe des EUKLID (s. oben Nr. 6) am Schluß des 1. Bandes als *Appendix II*... Ebenso hat NESSELMANN in seiner leider unvollendet gebliebenen Geschichte der Algebra (NESSELMANN, Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, Berlin 1842) manche Stellen behandelt und emendiert, und BRETSCHNEIDER (Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870) hat in seiner Geschichte der Geometrie, um falsche Angaben, die sich aus MONTUCLAS Geschichte der Mathematik und seinen Nachbetern überall hin verirrt hatten, endgültig zu beseitigen, die geschichtlichen Stellen des PROKLOS, den MONTUCLA jedenfalls nicht durchaus gelesen zu haben scheint, vollständig im griechischen Text mit einer deutschen Übersetzung wiedergegeben. Das Resultat aller dieser Arbeiten und seiner eigenen Handschriften-Forschungen hat FRIEDLEIN in seiner griechischen Ausgabe des PROKLOS vom Jahr 1873 niedergelegt...“ (s. Nr. 16). Bevor wir zur FRIEDLEINSchen Ausgabe des Originals übergehen, vorher noch die lateinische Ausgabe des BAROCIUS (Nr. 14) und die englische Ausgabe von T. TAYLOR (Nr. 15).

14. Die lateinische Ausgabe des EUKLID-Kommentars des PROKLUS von FRANCISCUS BAROCIUS hat folgenden Titel (s. Titelblätter in Faksimile-Wiedergabe als Tafeln II und III dieser Ausgabe): *Procli in primum Euclidis elementorum librum commentariorum libri IIII a Francisco Barocio patritio veneto editi*, Patavii 1560. — Über die textkritische Stellung dieser Ausgabe findet man das Wichtigste bei KNOCHE in „*Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen*“ (Schulprogramm), Herford 1862, allerdings in einem Urteil, das KNOCHE selbst später revidiert und berichtigt hat in: „*Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen*“ (Schulprogramm), Herford 1865. — Die Ausgabe des BAROCIUS hat den Text begleitende Figuren und BAROCIUS gibt, nach KNOCHE, in einem Brief an Daniele BARBARO selbst die Hilfsmittel an, die er zu seiner Übersetzung und Edition benutzt hat, nämlich: a) Auf Kreta hat er eine sehr alte Handschrift gefunden, die Andreas DONUS gehört hat, aber an mehreren Stellen unvollständig war; b) In Bologna hat er zwei Manuskripte gefunden, eines in der Bibliothek S. Salvatoris, ein zweites in der Bibliothek des gelehrten Arztes Fabricius GARZONIUS, dieses von großer Bedeutung; c) Im Verlauf seiner Übersetzungsarbeit erhielt BAROCIUS noch zwei weitere Handschriften. Im Ganzen haben also BAROCIUS für seine lateinische Bearbeitung des Textes des PROKLUS 5 Handschriften vorgelegen. Das Urteil KNOCHES anzugeben ist überflüssig, da er es selbst revidiert hat. — Eine klarere Darstellung der Ausgabe des BAROCIUS gibt L. MAJER in „*Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*“ (Schulprogramm), Tübingen 1875, wo es heißt: „... ein Werk der eifrigsten Forschung und tiefsten Gelehrsamkeit, aus dem seither

fast alle, die sich mit PROKLOS beschäftigten, geschöpft haben“. (Dazu die Anmerkung: „Daß BAROCIUS griechische Handschriften nicht bloß vor sich gehabt, sondern wirklich benutzt hat, hat gegen KNOCHE außer WACHSMUTH (s. Nr. 42) noch HULTSCH (s. Nr. 43, 44) nachgewiesen, siehe Rheinisches Museum XIX, S. 450 ff. Über die Handschriften des GRYNÆUS (s. oben Nr. 13) siehe seine Vorrede und WACHSMUTH (Rhein. Museum XVIII, S. 132)“ . . . „Er hat ohne Zweifel außer der Ausgabe des GRYNÆUS auch griechische Originalhandschriften vor sich gehabt und seine Übersetzung mit der eingehendsten Kenntnis der Proklischen Diktion, aber mit solch peinlicher Genauigkeit in Wiedergabe des Originals verfaßt, daß sie auf der einen Seite das Original fast ersetzt, auf der anderen Seite aber über die Auffassung schwieriger Stellen von Seiten des BAROCIUS uns ganz im Unklaren läßt. Sie ist also mehr in mittelbarer Weise durch ihren Beitrag zur Erforschung des echten griechischen Textes ein Hilfsmittel für das Verständnis des Proklos. Diese Übersetzung haben die meisten Übersetzer und Bearbeiter des EUKLID benutzt, vor allem der gelehrte Jesuit Christophorus CLAVIUS“ [1537—1612] aus Bamberg (Editio prima: *Euclidis elementorum libri XV*, Romae 1574; *editio secunda*: Coloniae 1590; *editio quarta*: Francofurti 1654), „dessen Kommentarien KAESTNER die Pandekten der Elementargeometrie nennt, der Oxford Professor Henricus SAVILIUS (Praelectiones tresdecim in principium elem. Eucl. Oxonii 1621), dessen Nachfolger auf dem Lehrstuhl der Geometrie *professores Saviliani* heißen, und eine Menge anderer, teils mit, teils ohne Angabe der Quelle, vielleicht auch ohne es zu wissen . . . bis herab auf die neuesten Bearbeiter der Parallelentheorie. In England, wo die Euklid'sche Geometrie bis auf den heutigen Tag noch allein gültig ist, erschien sodann 1792 eine Übersetzung von TAYLOR (s. Nr. 15) . . .“ Dieser englischen Ausgabe wollen wir uns jetzt zuwenden.

15. Die englische Ausgabe, die nur in einem einzigen Exemplar in Deutschland, nämlich auf der Staats- und Universitätsbibliothek in Breslau, vorhanden ist, ist selbst reich kommentiert und führt den Titel (Titelblätter in Faksimile-Wiedergabe als Tafeln IV und V dieser Edition): *The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's elements*. In two volumes, London, printed for the author (T. Taylor) 1792.

16. Unter Benützung aller erreichbaren Handschriften und der Textkritik hat dann G. FRIEDLEIN eine bis jetzt letzte griechische Ausgabe des Originals veranstaltet (s. oben Nr. 13 und Nr. 14), nach der die vorliegende deutsche Übersetzung und Bearbeitung erarbeitet worden sind. Sie trägt den Titel (Titelblatt in Faksimile als Tafel VI, S. 154 dieser Edition); *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*. Ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiae M.DCCC.LXXIII. FRIEDLEIN hat dabei nach seinen eigenen Angaben in der Vorrede sowohl die Editio prima des GRYNÆUS, als auch die lateinische Ausgabe des BAROCIUS (s. oben Nr. 13 und Nr. 14) verglichen und gibt deren Paginierungen als lebende Kolumnentitel an. Außerdem aber hat er über die bereits genannten Handschriften hinaus insgesamt die folgenden für seine Edition herangezogen: a) den *Münchener Codex: Codex Monacensis* 427 (nähere Angaben bei FRIEDLEIN in seiner Literaturzusammenstellung, hier im Siglenverzeichnis, S. 162); b) Korrekturen in einem alten Exemplar einer Schrift, vorhanden in der Staatsbibliothek München unter der Signatur A.Gr.1060 (siehe bei FRIEDLEIN); c) ein Manuskript der Staatsbibliothek München, Signatur: *cod. lat. 6*; d) den *Codex Bononiensis bibliothecae S. Salvatoris* 223 (s. oben Nr. 13 und 14 bei KNOCHE); e) den *Codex 101 bibliothecae Barberinae*; f) den *Codex 145 biblio-*

thecae Barberinae. Wie weit FRIEDLEIN noch die *Basler Codices* und *Handschriften* herangezogen hat, ist nicht bekannt. — Über die FRIEDLEINSche Ausgabe urteilt L. MAJER in: „*Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*“ (Schulprogramm), Tübingen 1875, so: „Er (Friedlein) hat mit großem Fleiß unter Zugrundelegung einer Münchner Handschrift, die Korrekturen von verschiedener Hand“ (hierzu die Anmerkung: „In einer anerkennenden Recension der FRIEDLEINSchen Ausgabe (BURSIAN, Jahresbericht etc. 1873, 3) erklärt Max HEINSE, daß in einem *Basler codex* so ziemlich die gleichen Korrekturen stehen, wie in dem von FRIEDLEIN zugrunde gelegten Münchner“) „zeigt, und Beiziehung von Varianten aus einer Bologneser und zwei Römischen Handschriften, sowie mit gewissenhafter Benützung aller oben genannten und anderer Vorarbeiten einen guten Text hergestellt, der zwar noch manche zweifelhafte Stellen bietet, aber die Hervagiana, die nicht einmal Figuren hat, an Brauchbarkeit und Sicherheit des Textes weit hinter sich läßt.“ Daß auch die Ausgabe von FRIEDLEIN noch sehr verbesserungsbedürftig ist und auch verbessert werden kann, hat der Herr Übersetzer in seinen textkritischen Anmerkungen zu der vorliegenden deutschen Ausgabe mehrfach gezeigt und bewiesen. (Siehe auch seine Vorrede zur Übersetzung, S. 155 dieser Edition.)

* * *

Wir wenden uns jetzt zu den deutschen Teilübersetzungen des Euklid-Kommentars des PROKLUS, soweit sie uns bekannt geworden sind. In chronologischer Folge wären sie so zu nennen:

17. Eine erste deutsche Übersetzung der rein historischen und für die Geschichte der Mathematik wichtigen Stellen des PROKLUS unter Beigabe des griechischen Originaltextes gibt: C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig 1870 (Teubner).

18. Einige Stellen, besonders diejenigen, die sich auf EUKLID beziehen, hat H. HANKEL, unter Wahrung seiner bekannten kritischen Sicht, übersetzt in: H. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter* (Anhang I, Euklid) Leipzig 1874.

19. Wohl die erste deutsche Übersetzung der Euklidischen Forderungen und Axiome auf Grund des FRIEDLEINSchen Textes (Nr. 16) samt der dazugehörigen Kommentare des PROKLUS gibt: L. MAJER, *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*, Tübingen 1875 (Schulprogramm).

20. An Nr. 19 anschließend hat L. MAJER auch eine deutsche Übersetzung unter Zugrundelegung des FRIEDLEINSchen Textes (Nr. 16) der Euklidischen Definitionen 1—7 samt der dazugehörigen Kommentare des PROKLUS gegeben in: L. MAJER, *Proklos über die Definitionen bei Euklid*. 1. Theil. Definition 1—7. Stuttgart 1881. (Schulprogramm). — (Hinweis: Ein 2. Teil dieser Arbeit scheint nicht erschienen zu sein.)

21. Die für die Geschichte der Mathematik wichtigen und besonders exponierten Stellen des PROKLUS hat M. CANTOR unter Benützung der Übersetzungen von BRETSCHNEIDER (Nr. 17) übernommen in: M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 1, 2. Aufl., Leipzig 1894, S. 124ff.

22. Die wichtigsten philosophischen Termini des PROKLUS, wie sie insbesondere in den beiden „Vorreden“ niedergelegt sind und den systematischen Aufbau der

Prokleischen „Philosophie der Mathematik“ unter Heranziehung des Originals (Nr. 16) hat N. HARTMANN gegeben in: N. HARTMANN, *Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklidkommentars* (Philosophische Arbeiten, herausg. von H. COHEN und P. NATORP), Bd. 4 (1909—1912), Gießen 1909.

23. Teile der beiden „Vorreden“ des PROKLUS hat in einzigartiger Einordnung in den geistesgeschichtlichen Zusammenhang A. SPEISER übersetzt in: A. SPEISER, *Proklus Diadochus über die Mathematik*, in: *Die mathematische Denkweise*, Zürich 1932. (S. 65—75.) — (Hinweis: Siehe auch die schöne Studie: „Über die Zahlen und den Raum bei den Neuplatonikern“, *ibid.* p. 76—87.)

24. Die ontologische Auffassung der Mathematik, die PROKLUS als erster in der Geistesgeschichte systematisch dargelegt und begründet hat, und die in den beiden „Vorreden“ seines Euklid-Kommentars niedergelegt ist, hat J. KEPLER in seine „*Harmonice Mundi*“ (Linz 1619) aufgenommen (lateinische Übertragung des Originals) und M. CASPAR in deutscher Übersetzung geboten in: M. CASPAR, *Weltharmonik des Johannes Kepler*, München-Berlin 1939. — (Hinweis: Siehe auch: M. STECK, Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler, „Die Gestalt“, Heft 5, Leipzig 1941.)

* * *

Nach den Übertragungen und Teilübertragungen des Originals in andere Sprachen stellen wir jetzt die für die *Textkritik des Originals* wichtigen Arbeiten in chronologischer Folge zusammen.

25. In älterer Zeit ist das Werk des PROKLUS unter Beigabe von Scholien zu seiner Euklid-Ausgabe besonders von COMMANDINUS (s. Nr. 3) herangezogen worden. Die dort mitgeteilten Scholien sind nach den folgenden Untersuchungen von WACHSMUTH, HULTSCH und insbesondere von KNOCHE mit größter Wahrscheinlichkeit solche, die man PROKLUS zuschreiben darf (s. Nr. 42—45).

26. Am vollständigsten und mit Hinweisen hat der gelehrte Jesuit CLAVIUS das Werk des PROKLUS excerpiert in (s. Nr. 14): Christophorus CLAVIUS: *Euclidis Elementorum libri XV. Accessit liber XVI* . . . 4. Aufl. Frankfurt 1654. (1. Aufl. s. Nr. 14.)

27. SAVILIUS, Henricus: *Praelectiones tresdecim in principium elem. Eucl.* Oxonii 1621.

28. FABRICIUS, *Index scriptorum in IV libros Procli ad Euclidem laudatorum compositus ad editionem Graecam Basiliensem*, Bibliotheca Graeca I, III, c. XIV.

29. Eine kritische Verbesserung der Übersicht über die Geschichte der Geometrie und der bedeutendsten Mathematiker bei PROKLUS findet sich auch wieder bei FABRICIUS, *Bibl. Graeca* hinter dem in Nr. 20 genannten Index,

30. die später E. F. AUGUST als Appendix II im ersten Teile seiner EUKLID-Ausgabe (s. oben Nr. 6) p. 289 bearbeitet hat.

31. Claudius RICHARDUS fügt am Schluß seiner Euklid-Ausgabe die Abhandlung bei: *Commentarius in Procli geometricas propositiones decerptas ex libris suis tertio et quarto in lib. prim. Elem. geometr. Euclidis* p. 533 ff.

32. Andreas TACQUET (1612—1660) hat in seiner Euklid-Ausgabe (*Elem. Euclidea Geom.*) das Werk von PROKLUS herangezogen.

33. Vielfach benützt sind die von PROKLUS angeführten Sätze in der Euklid-Ausgabe von CAMERER und HAUBER.

34. Weitere Benützung und Textverbesserung des Prokleischen Werkes bei (s. Nr. 13): F. HAUBER, *Chrestomathia geometrica continens Euclidis Elementorum principium graece usque ad libri primi propositionem XXVI, et ad illud Graeca Procli, Latina Savilii aliorumque scholia cum noticiis historicis*, Tübingen 1820.

35. Auch J. C. GARZ hat in seiner Monographie: *De interpretibus et explanatoribus Euclidis Arabicis* die Schrift des PROKLUS herangezogen.

36. Die Benützung des PROKLUS in der Übersetzung des BAROCIUS (Nr. 14 oben) findet sich bei: F. A. FINGER, *De primordiis geometriae apud Graecos*, Heidelberg 1831.

37. Ferner ist hier wichtig: M. CHASLES, *Geschichte der Geometrie*, deutsch von L. A. SOHNCKE, Halle (S.) 1839.

38. NESSELMANN hat in seiner „Algebra der Griechen“ manche Stellen des PROKLUS behandelt und emendiert: G. H. F. NESSELMANN, *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra der Griechen*, Berlin 1842. — Weitere Teile dieses Werkes sind nicht erschienen.

Dann folgen die textkritisch entscheidenden Arbeiten von:

39. J. H. KNOCHE und F. J. MAERKER, *Ex Procli Successoris in Euclidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et sectionibus spiricis*, Herford 1856 (Schulprogramm).

40. J. H. T. MÜLLER, *Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker*, Wiesbaden 1860 (Schulprogramm), auch: Leipzig 1860 (Teubner).

41. J. H. KNOCHE, *Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen*, Herford 1862 (Schulprogramm).

42. C. WACHSMUTH in: *Rheinisches Museum*, Jhg. 18 (1863), p. 132, bringt Excerpte aus italienischen Handschriften, die Scholien des PROKLUS betreffend, die später (s. Nr. 45) KNOCHE verglichen und publiziert hat. Sie beweisen, daß PROKLUS auch weitere Bücher der Euklidischen „Elemente“ kommentiert hat. — Die weiteren mathematischen Arbeiten des PROKLUS nennt L. MAJER in der Anmerkung 6, S. 1 seiner Abhandlung Nr. 19.

43. F. HULTSCH, *Zu Proklos* (Dresden). *Rheinisches Museum für Philologie*. Neue Folge. Jhg. 19 (1864), p. 450—455. Bringt Varianten von Excerpten eines Anonymus bei HERO *Alexandrinus* nach zwei Pariser Handschriften, die die Echtheit der Scholien des PROKLUS nahelegen (s. Nr. 42, 44, 45).

44. F. HULTSCH, *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae*, Berlin 1864, insbes. p. 252—272. Bringt Excerpte eines Anonymus bei HERO *Alexandrinus*, die PROKLUS betreffen (s. Nr. 42, 43, 45).

45. J. H. KNOCHE, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen*, Herford 1865 (Schulprogramm). Betrifft weitere Kommentare des PROKLUS zu den übrigen Büchern der Euklidischen „Elemente“ auf Grund der Forschungen von WACHSMUTH (Nr. 42) (z. Teil briefliche Mitteilungen) und HULTSCH (Nr. 43, 44). — Textkritik und Angabe sämtlicher, PROKLUS zugeschriebener Scholien zu Euklids „Elementen“.

An diese textkritischen Arbeiten schließt sich die griechische Edition von FRIEDLEIN (Nr. 16) an.

Wir geben des weiteren eine Literaturzusammenstellung von Schriften, die sich auf PROKLUS, sein Leben und insbesondere auf Dinge beziehen, die mit dem Prokleischen Euklid-Kommentar in mehr oder weniger engem oder losem Zusammenhang stehen. Zuerst die biographischen Werke:

46. *Procli Successoris Platonici, In Platonis theologiam Libri Sex. — Accessit MARINI NEAPOLITANI Libellus de Vita Procli* ... Hamburgi, et prostant Francofurti, Apud Rulandios, MDCXVIII. Diese PROKLUS-Biographie von MARINUS, einem Schüler des PROKLUS und seinem Nachfolger als Vorsteher der PLATONischen Akademie, ist in verschiedenen Ausgaben auf uns gekommen. Die älteste, mir zugänglich gewesene ist die angegebene. Sie liegt in einer weiteren, von FABRICIUS besorgten Ausgabe, die ich ebenfalls noch einsehen konnte, aus dem Jahre 1703 vor. (Nr. 47.)

47. *Procli, Philosophi Platonici, Vita. Scriptore MARINO NEAPOLITANO. ed. FABRICIUS.* Londini MDCCIII. Diese Ausgabe der Biographie enthält auch die Nativität des PROKLUS in Form eines Horoskopes (s. Abb. 1*, S. 10 dieser Edition).

Neuere Ausgaben sind die folgenden:

48. MARINUS: *Procli Vita, graec. et latin. ad fidem libror. manuscriptor. recens. adnotationesque et indd. add. J. F. BOISSONNADE,* Leipzig 1814.

49. V. COUSIN, *Procli philosophi Platonici Opera*, Paris 1820—27 (6 Bde.); 2. Aufl. Paris 1864. — Vgl. H. KIRCHNER, *De Procli metaphysica*, Berlin 1846.

50. Die neueste Ausgabe der PROKLUS-Biographie des MARINUS in deutscher Übersetzung auf Grund des Textes von COUSIN (Nr. 49) ist enthalten in: A. R. NOE, *Proklos und seine Philosophie*, Phil.-Diss. Heidelberg 1937 (ungedruckt). Auszug: *Die Proklosbiographie des Marinos*, Heidelberg 1938 (Dissertationsdruck). — Siehe auch: K. PRAECHTER, *Richtungen und Schulen im Neuplatonismus*, Genethliaka 1910.

* * *

An weiteren biographischen Darstellungen sind die zu nennen, die in selbständige Darlegungen der Geschichte der Mathematik und der Philosophie übergegangen sind. Wir geben jetzt anschließend eine Zusammenstellung von Schrifttum, die keineswegs den Anspruch der Vollständigkeit erhebt, das mit dem Werke des PROKLUS in Zusammenhang steht. Zunächst seien einige mathematikhistorische Werke genannt:

51. Man vergleiche zunächst die in den Nr. 17, 18, 21, 37 genannten Werke von CHASLES (-SOHNCKE), H. HANKEL und M. CANTOR, sowie von BRETSCHNEIDER. Darüber hinaus nennen wir noch: H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896.

52. J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, Berlin-Leipzig 1921 ff. (7 Bde.) 2. verm. Aufl.

53. S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis Cartesius*, Leipzig-Berlin 1927 (Slg. Schubert).

54. H. WIELEITNER, *Geschichte der Mathematik*, Leipzig-Berlin 1922 ff. (3 Bde.) (Slg. Göschen).

55. H. SUTER, *Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Zürich 1871.

56. I. L. HEIBERG, *Geschichte der Mathematik des Altertums*, Leipzig 1925.

57. I. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig 1912. — (Hinweis: Siehe auch Nr. 65 und 77.)

Jetzt die philosophiegeschichtlichen Werke. Die beste und umfassendste Darstellung des Gesamtwerkes des PROKLUS gibt immer noch:

58. E. ZELLER, *Philosophie der Griechen*, Leipzig 1923 ff. (7. Aufl.).

59. UEBERWEG, *Grundriß der Geschichte der Philosophie*, Leipzig 1926 (12. Aufl.).

60. W. WINDELBAND, *Lehrbuch der Geschichte der Philosophie*, Tübingen 1928 (12. Aufl.).

61. J. E. ERDMANN, *Grundriß der Geschichte der Philosophie*, Berlin-Zürich 1930.

III. Weiteres Schrifttum

In nicht systematisch, aber chronologisch geordneter Folge nennen wir jetzt noch die folgenden Schriften:

62. DOPPELMAYR, *Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730.

63. HEILBRONNER, *Historia matheseos universae* . . . , Leipzig 1742.

64. KAESTNER, *Geschichte der Mathematik*, 4 Bde., Göttingen 1796 ff.

65. BOSSUT, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 2 Bde., Paris 1802. Deutsch von REIMER, 2 Bde., Hamburg 1804.

66. RÖTH, *Geschichte unserer abendländischen Philosophie*, 2 Bde.

67. D. BREWSTER, *Sir Isaak Newton's Leben nebst einer Darstellung seiner Entdeckungen* (deutsch von GOLDBERG, herausgeg. von H. W. BRANDES), Leipzig 1833.

68. BERGER, *Proclus, Exposition de sa doctrine*, (Thèse) Paris 1840.

69. A. BÖCKH, *Untersuchungen über das kosmische System des Platon*, Sendeschreiben an Alexander von HUMBOLDT, Berlin 1852.

70. ARNETH, *Geschichte der reinen Mathematik*, Stuttgart 1852.

71. H. MARTIN, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, Paris 1854.

72. G. FRIEDLEIN, Gerbert, *Die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern*, Erlangen 1861.

73. FREYER, *Über die philosophische Bedeutung der Postulate und Axiome in Euklids Elementen*, Langbeins Pädagog. Archiv. V (1863), S. 81.

74. M. CANTOR, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik*, Halle (S.) 1863.

75. POU德拉, *Histoire de la perspective*, Paris 1864.

74. M. CANTOR, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik*, Halle (S.) 1863.

75. POU德拉, *Histoire de la perspective*, Paris 1864.

76. M. CANTOR, *Euklid und sein Jahrhundert*, Leipzig 1867.

77. BERGER, *Die geographischen Fragmente des HIPPARCH*, Leipzig 1870.

78. SCHANZ, *Der Kardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker*, Rottweil 1872 (Schulprogramm).

79. DÜHRING, *Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik*, Berlin 1873.

80. G. V. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico nell' Antichità* (1873) deutsch als: *Die Vorläufer des Kopernikus im Altertum*, von M. CURTZE, Altpreuss. Monatschrift, Bd. 13, Leipzig 1876.

81. TREUTLEIN, *Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwicklung der Ansichten über dieselben*, Karlsruhe 1875.
82. M. CANTOR, *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst*, Leipzig 1875.
83. USENER, *Ad historiam astronomiae symbola*, Bonn 1876.
84. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, München 1877. (Neudruck Leipzig bei Koehlers Antiquarium).
85. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877.
86. S. GÜNTHER, *Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik*, Prag 1878.
87. WEISSENBORN, *Zur Boethiusfrage*, Eisenach 1880.
88. F. ROSENBERGER, *Geschichte der Physik*, 3 Bde., Braunschweig 1882.
89. BLASS, *Dissertatio de GEMINO et POSIDONIO*, Kiel 1883.
90. ZEUTHEN-VON FISCHER-BENZON, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen 1886.
91. H. SUTER, *Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters*, Zürich 1887.
92. S. GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525*, Berlin 1887.
93. P. TANNERY, *La géométrie gr.*, Paris 1887; *Mémoires scientifiques*, tom. I—IV, Paris 1911 ff.; *Pour l'histoire de la science hellène*, Paris 1887 (siehe auch Nr. 103).
94. WAPPLER, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert*, Zwickau 1887.
95. H. RICKERT, *Zur Lehre von der Definition*, Diss. Freiburg 1888.
96. UNGER, *Die Methoden der praktischen Arithmetik in ihrer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart*, Leipzig 1888.
97. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin 1889.
98. KÜNSSBERG, *Der Astronom, Mathematiker und Geograph EUDOXUS von Knidos*, 2 Teile, Dinkelsbühl 1889—1890.
99. K. LASSWITZ, *Geschichte der Atomistik*, 2 Bde., Hamburg-Leipzig 1890.
100. H. STAIGMÜLLER, *Albrecht Dürer als Mathematiker*, Stuttgart 1891 (Schulprogramm).
101. A. VON BRAUNMÜHL, *Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom*, Bamberg 1891.
102. F. RUDIO, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung*, Leipzig 1892.
103. P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris 1893. (Siehe auch Nr. 93.)
104. W. M. KUTTA, *Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung*, Nova Acta, Abh. d. Leopoldina, Halle (S.) 1897, Bd. 71, Nr. 3, S. 71 ff.
105. F. ENGEL, P. STÄCKEL, *Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss*, Leipzig-Berlin 1899.
106. BOUCHÉ-LECLERCKQ, *L'astrologie grecque*, Paris 1899.
107. J. G. VAN PESCH, *De Procli fontibus*, Leiden 1900.
108. „Proclus“ in: *Biographie universelle*, Bd. 34, S. 385—390. (D-N-U gezeichnet.) Paris o. J.
109. A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 1. Teil, Leipzig 1900; 2. Teil, Leipzig 1903; Ergänzungen in den „Nova Acta Leopoldina“.

110. FROBENIUS, *Die Mathematik der Ozeanier*, Berlin 1900.
111. ZEUTHEN-R. MEYER, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903.
112. P. DUHEM, *Les origines de la statique*, 1. Bd., Paris 1905.
113. F. STRUNZ, *Vorgeschichte und Anfänge der Chemie*, Leipzig-Wien 1906.
114. G. JUNGE, *Wann haben die Griechen das Irrrationale entdeckt*, Halle (S.) 1907 (Aus den *Symbola Joachimica*).
115. F. A. LANGE, *Geschichte des Materialismus*, 2 Bde., 8. Aufl., Leipzig 1908.
116. IBEL, *Die Wage im Altertum und Mittelalter*, Diss. Erlangen 1908.
117. L. ROBIN, *La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote*, Paris 1908.
118. ENESTRÖM, *Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elemente des EUKLIDES entnommen?* Bibl. Mathem. (3), Bd. 7, S. 321 ff.
119. J. E. BÖTTCHER, *Beweise für die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden*, Leipzig 1909.
120. M. BERTHELOT, *Die Chemie im Altertum und Mittelalter*, deutsch von E. KALLIWODA und F. STRUNZ, Leipzig-Wien 1909.
121. F. STRUNZ, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*, Leipzig und Hamburg 1909.
122. P. NATORP, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig-Berlin 1910.
123. F. STRUNZ, *Geschichte der Naturwissenschaften im Mittelalter*, Stuttgart 1910.
124. E. HOPPE, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*, Heidelberg 1911.
125. M. BERTHELOT, *Die sieben Metalle und die sieben Planeten*, deutsch von E. KALLIWODA, Pharmaceutische Post, Bd. 45, Nr. 96, Wien 1912.
126. F. STRUNZ, *Die Vergangenheit der Naturforschung* (Ein Beitrag zur Geschichte des menschlichen Geistes), Jena 1913.
127. P. DUHEM, *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, tome I^{er}, Paris 1913.
128. A. VOSS, *Ueber das Wesen der Mathematik*, 2. Aufl. Leipzig-Berlin 1913.
129. A. VOSS, *Ueber die mathematische Erkenntnis*, Leipzig-Berlin 1914.
130. A. VOSS, *Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart*, Leipzig-Berlin 1914.
131. E. BECHER, *Naturphilosophie*, Leipzig-Berlin 1914.
132. G. CARDANO, *Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung*, übertragen und eingeleitet von H. HEFELE, Jena 1914.
133. EVA SACHS, *Die fünf platonischen Körper*, Berlin 1917. — BURNET, *Early Greek Philosophy*, Deutsche Ausgabe.
134. E. HOFFMANN, *Die griechische Philosophie von Thales bis Platon*, Leipzig-Berlin 1921. (Slg. „Aus Natur- und Geisteswelt“.)
135. E. CASSIRER, *Kants Leben und Lehre*, Berlin 1921.
136. H. RICKERT, *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung*, 3. und 4. Aufl., Tübingen 1921; 5. Aufl. 1929.
137. F. MAUTHNER, *Aristoteles*, Berlin o. J.
138. W. WINDELBAND, *Platon*, Stuttgart 1923.
139. Th. L. HAERING, *Philosophie der Naturwissenschaft*, München 1923.

140. R. BONOLA, H. LIEBMANN, *Die Nichteuklidische Geometrie*, Berlin-Leipzig, 3. Aufl. 1923 (Slg. Wissenschaft und Hypothese).
141. E. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle (S.) 1923.
142. J. VON KRIES, *Immanuel Kant und seine Bedeutung für die Naturforschung der Gegenwart*, Berlin 1924.
143. H. RICKERT, *Kant als Philosoph der modernen Kultur*, Tübingen 1924.
144. H. RICKERT, *Das Eine, die Einheit und die Eins*, 2. Aufl. Tübingen 1924.
145. D. MAHNKE, *Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik*, 1. Teil, Halle (S.) 1925.
146. A. SPEISER, *Klassische Stücke der Mathematik*, Zürich-Leipzig 1925.
147. A. BRUNSWIG, *Leibniz*, Wien und Leipzig 1925.
148. E. HOFFMANN, *Die Sprache und die archaische Logik*, Tübingen 1925.
149. E. GOLDBECK, *Plato und Kopernikus* in: „Der Mensch und sein Weltbild im Wandel vom Altertum zur Neuzeit, Gesammelte kosmologische Abhandlungen“, 1925, S. 61—83. — Ders.: *Der Untergang des kosmischen Weltbildes der Antike*, „Die Antike“, Bd. 1, Jhg. 1925, S. 61—79.
150. O. TOEPLITZ, *Mathematik und Antike*, „Die Antike“, Bd. 1, Jhg. 1925 (formalistisch orientiert).
151. E. MÖSSEL, *Die Proportion in Antike und Mittelalter*, München 1926.
152. E. CASSIRER, *Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance*, Leipzig 1927.
153. H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft im Handbuch der Philosophie*, München-Berlin 1927.
154. O. BECKER, *Mathematische Existenz*, Berlin 1927 (formalistisch orientiert).
155. HASSE-SCHOLZ, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928 (formalistisch orientiert).
156. W. UEBERWASSER, *Spätgotische Bau-Geometrie, Untersuchungen an den Basler Goldschmiedrissen*, Jahresber. d. öffentl. Kunstsammlung, Basel 1928/30.
157. K. FLADT, *Quellenhefte zur Elementarmathematik*, Bd. I (Elementargeometrie), Leipzig-Berlin 1928.
158. H. KNITTERMEYER, *Schelling und die romantische Schule*, München 1929.
159. O. SPIESS, *Leonhard Euler, Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des 18. Jahrhunderts*, Frauenfeld-Leipzig 1929.
160. O. TOEPLITZ, *Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abt. B., Bd. 1, Heft 1, S. 3—33, Berlin 1929.
161. E. HOFFMANN, *Das Universum des Nikolaus von Cues* (Cusanus-Studien I), Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. (phil.-hist. Kl.) Jhg. 1929/30. 3. Abhandl.
162. K. STÖCKL, *Kepler-Festschrift. I. Teil*, Regensburg 1930.
163. E. HOFFMANN, *Kepler als Philosoph*, Die Pädagog. Hochschule, 2. Jhg. 1930 (herausg. von A. FAUST), Bühl/Baden, S. 241—261.
164. E. HOFFMANN, *Die Aufklärung im 5. Jahrhundert vor Chr.*, 3. Aufl. Leipzig o. J. (Teubner) (Quellensammlung f. d. geschichtl. Unterr. II: 2).
165. M. CASPAR und W. von DYCK, *Johannes Kepler in seinen Briefen*, 2 Bde., München 1930.
166. G. STAMMLER, *Leibniz*, München 1930.

167. H. SCHIMANK, *Epochen der Naturforschung*, Berlin 1930. (LEONARDO-KEPLER-FARADAY.)
168. A. FAUST, *Der Möglichkeitsgedanke, Systemgeschichtliche Untersuchungen*, Heidelberg 1931.
169. E. MÖSSEL, *Urformen des Raumes als Grundlagen der Formgestaltung*, München 1931.
170. H. GLOCKNER, *Hegel-Monographie*, (2 Bde.), Stuttgart 1931.
171. J. STENZEL, *Anschauung und Denken in der klassischen Theorie der griechischen Mathematik*, Verhandl. d. internat. Math. Kongresses, Zürich 1932, Bd. 1, S. 324—355 (formalistisch orientiert).
172. H. DINGLER, *Geschichte der Naturphilosophie*, Berlin 1932.
173. „Notizen (Platon: *Das Gleiche an sich-Höhlengleichnis*)“ in: *Die Pädagog. Hochschule* (herausg. von A. FAUST), IV. Jhg. 1932 (Bühl/Baden), S. 92—96.
174. E. MACH, *Mechanik*, 9. Aufl. Leipzig 1933. [Sie nennt PROKLUS überhaupt nicht als Quelle, obwohl sie sonst so gründlich ist.]
175. J. STENZEL, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Leipzig-Berlin 1933. (2. Aufl.)
176. K. HILDEBRANDT, *Platon*, Bonn 1933.
177. W. UEBERWASSER, *Von Mass und Macht der alten Kunst*, Leipzig-Straßburg-Zürich 1933.
178. M. STECK, *Mathematische Existenz*, Geist. Arbeit Nr. 20, Jhg. 1934.
179. K. MENNINGER, *Zahlwort und Ziffer, Kulturgeschichte der Zahlen*, Breslau 1934.
180. H. KÜCKELHAUS, *Urzahl und Gebärde*, Berlin 1934.
181. E. HOFFMANN, *Nikolaus von Kues*, Biographie in: „Die großen Deutschen“, Bd. 1, Nr. 16, S. 246ff., Berlin 1935.
182. K. L. WOLF und R. RAMSAUER, *Zur Geschichte der Naturanschauung in Deutschland*, Zschr. f. d. ges. Naturwiss. 1 (1935), 129.
183. M. STECK, *Vom Sinn der Mathematik*, Zeitschr. f. d. ges. Naturwiss. 1 (1935), S. 330—334.
184. E. BRACHVOGEL, *Nikolaus Kopernikus und Aristarch von Samos*, Zeitschr. f. Gesch. u. f. Altertumskunde Ermlands Bd. 25 (1935).
185. F. KUBACH, *Kepler als Mathematiker*, Karlsruhe 1935. (Dissertation Heidelberg.)
186. SCHMIDT, *Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter*, Neustadt a. d. Haardt 1935.
187. PAULY-WISSOWA, *Realencyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft*.
188. H. DIELS, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, herausg. von W. KRANZ, 5. Aufl. 1935 (griechischer und deutscher Paralleltext).
189. W. UEBERWASSER, *Nach rechtem Mass, Aussagen über den Begriff des Masses in der Kunst des 13.—16. Jahrhunderts*, Jahrbuch d. Preuss. Kunstsammlungen 1936.
190. J. KEPLER, *Mysterium Cosmographicum. Das Weltgeheimnis*. Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, München-Berlin 1936.
191. A. SPEISER, *Ein Parmenides-Kommentar. Studien zur Platonischen Dialektik*, Leipzig 1937. (Bester Parmenides-Kommentar.)
192. E. BRACHVOGEL, *Kopernikus und die neuplatonische Lichtmetaphysik*, Zeitschr. f. Gesch. u. Altertumskunde Ermlands, Bd. 26 (1937), S. 451—457.

193. B. VON FREYTAG-LÖRINGHOFF, *Die ontologischen Grundlagen der Mathematik*, Halle (S.) 1937.
194. H. ROGNER, *Die Bewegung des Erkennens und das Sein in der Philosophie des Nikolaus von Cues*, Berliner Diss., Heidelberg 1937. (Vgl. besonders die Ausführungen über das Mathematische.)
195. D. MAHNKE, *Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt*, Halle (S.) 1937.
196. E. GILSON und Ph. BÖHNER, *Die Geschichte der christlichen Philosophie von ihren Anfängen bis Nikolaus von Cues*, 1937.
197. E. HOFFMANN, *Die Vorgeschichte der Cusanischen Coincidentia oppositorum*, Einführung in die deutsche Ausgabe von: Nikolaus von KUES, „Über den Beryll“, Leipzig 1938 (Philos. Bibl. Bd. 217).
198. G. KOWALEWSKI, *Große Mathematiker*, München-Berlin 1938.
199. L. BIEBERBACH, *Carl Friedr. Gauss, Ein deutsches Gelehrtenleben*, Berlin 1938.
200. H. L. MATZAT, *Die metaphysischen Grundlagen der Leibnizschen Zeichenkunst*. Neue Deutsche Forschungen, Abt. Philosophie, Bd. 29, Berlin 1938.
201. M. STECK, *Zum Problem der mathematischen Existenz*, Deutsche Math. **3** (1938), S. 467—473.
202. E. MÖSSEL, *Vom Geheimnis der Form und der Urform des Seins*, Stuttgart-Berlin 1938.
203. H. KNITTERMEYER, *Immanuel Kant*, Bremen 1939 (wohl beste Darstellung von Leben und Werk Kants).
204. K. SCHEFFLER, *Form als Schicksal*, Erlenbach-Zürich und Leipzig 1939.
205. H. GLOCKNER, *Hegel-Lexikon* (4 Bde.), Stuttgart 1939 ff.
206. L. BIEBERBACH, *Galilei und die Inquisition*, Berlin 1939.
207. B. VON FREYTAG-LÖRINGHOFF, *Zur Seinsweise der mathematischen Gegenstände*, Deutsche Math. **4** (1939), S. 238—240. (Im Anschluß an Nr. 193 und 201.)
208. E. FUETER, *Große Schweizer Forscher*, Zürich 1939; 2. Aufl. 1940.
209. Th. PETERS, *Jo. Kepleri Harmonices Mundi Liber I. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik*. Diss. Berlin 1940. (= Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 5, Leipzig, Teubner 1940.)
210. Th. PETERS, *Ueber Näherungskonstruktionen und Mechanismen im ersten Buch der Harmonik Keplers und seine Forderung nach Beschränkung der Konstruktionsmittel allein auf Zirkel und Lineal*. — Deutsche Mathematik, Bd. 6, Heft 1, S. 110—132. (Sonderabdruck aus Nr. 209.)
211. W. LIETZMANN, *Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden*, Breslau 1940.
212. E. HOFFMANN, *Nikolaus von Cues und die deutsche Philosophie*, Neue Heidelberger Jahrbücher, Jhg. 1940, S. 35 ff.
213. E. HOFFMANN, *Nikolaus von Cues und seine Zeit*, Mitteil. des Altlandheimer Bundes, Schondorf am Ammersee, 20. Jhg. (Sonderheft), November 1940.
214. A. SPEISER, *Die räumliche Deutung der Aussenwelt*, Verhandl. d. Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft. Basel 1941, S. 38—51.
215. M. STECK, *Wissenschaftliche Grundlagenforschung und die Gestaltkrise der exakten Wissenschaften*, „Die Gestalt“, Heft 3, Leipzig 1941.
216. M. STECK, *Zur Geschichte der Zahlen und der Null*, Geistige Arbeit Jhg. 1941, S. 5—7.

217. K. L. WOLF, *Theoretische Chemie, Eine Einführung vom Standpunkt einer gestalthaften Atomlehre*, Teile 1—3, Leipzig 1941—43.
218. E. FUETER, *Geschichte der exakten Wissenschaften in der schweizerischen Aufklärung (1680—1780)*, Aarau-Leipzig 1941. — 2. erw. Aufl. Berlin 1945. —
219. P. NIGGLI, *Von der Symmetrie und von den Baugesetzen der Kristalle*, „Die Gestalt“, Heft 4, Leipzig 1941.
220. M. STECK, *Über das Wesen des Mathematischen und die mathematische Erkenntnis bei Kepler*, Leipzig 1941. („Die Gestalt“, Heft 5.)
221. M. STECK, *Geometrie und Kunst*, Geist. Arbeit Nr. 5, Jhg. 1942, S. 1 ff.
222. K. L. WOLF und W. TROLL, *Goethes morphologischer Auftrag, Versuch einer naturwissenschaftlichen Morphologie*, „Die Gestalt“, Heft 1, 2. Aufl., Halle (S.) 1942.
223. W. TROLL, *Gestalt und Urbild, Gesammelte Aufsätze zu Grundfragen der organischen Morphologie*, „Die Gestalt“, Heft 2, 2. Aufl., Halle (S.) 1942.
224. W. TROLL, *Goethes morphologische Schriften*, Jena o. J.
225. C. WEYGAND, *Deutsche Chemie als Lehre vom Stoff*, „Die Gestalt“, Heft 10, Halle (S.) 1942.
226. M. STECK, *Mathematik und Erkenntnis*, Geistige Arbeit Nr. 19, Jhg. 1942, S. 1 ff.
227. E. A. ROLOFF, *Carl Friedrich Gauss*, Osnabrück o. J. (1942).
228. K. REIDEMEISTER, *Die Arithmetik der Griechen*, Leipzig-Berlin 1940 und: *Mathematik und Logik bei Plato*, Leipzig-Berlin 1942 (formalistisch orientiert).
229. M. STECK, *Mathematik als Begriff und Gestalt*, Halle (S.) 1942. („Die Gestalt“, Heft 12).
230. M. STECK, *Das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin 1942. (2. erw. Aufl. Berlin 1943.)
231. G. J. RHETIKUS, *Erster Bericht über die sechs Bücher des Kopernikus von den Kreisbewegungen der Himmelsbahnen*, übersetzt und eingeleitet von K. ZELLER, München-Berlin 1943.
232. Nikolaus Kopernikus, *Persönlichkeit und Werk*, (Sammelwerk) (Kulturpolitische Schriftenreihe für den Reichsgau Danzig-Westpreußen, Bd. 4), Danzig 1943.
233. M. STECK, *Mathematik und Kunst*, Berlin 1943; 2. erweiterte Ausgabe 1944.
234. M. STECK, *Johann Heinrich Lambert, Schriften zur Perspektive*, Berlin 1943.
235. M. STECK, *Bibliographia Lambertiana*, Ein Führer durch das gedruckte und ungedruckte Schrifttum von Johann Heinrich Lambert, Berlin 1943 (Sonderdruck aus Nr. 234, der aber neu eingeleitet ist). — Siehe für PROKLUS insbesondere das Vorwort dieser Schrift.
236. W. E. PEUKERT, *Nikolaus Kopernikus*, Leipzig 1943.
237. A. FAUST, „Die philosophiegeschichtliche Stellung des Kopernikus“ in: Nikolaus Kopernikus, *Bildnis eines großen Deutschen*, herausg. von F. KUBACH, München-Berlin 1943, S. 96—211 mit den Anmerkungen S. 318—370.
238. M. CASPAR, *Kopernikus und Kepler, Zwei Vorträge*. München-Berlin 1943.
239. M. STECK, *Proklus Diadochos und seine Gestaltlehre der Mathematik*, Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd. 13, Nr. 93, S. 131—149. Halle (S.) 1943. (Mit Literaturhinweisen.)
240. R. BALDUS, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin-Leipzig 1927, 2. Aufl. 1943 (Slg. Göschen).

Nachträge:

241. E. HOFFMANN, *Montaignes Zweifel*, Logos XIV, 1926.
242. A. HILDEBRAND, *Das Problem der Form in der bildenden Kunst*, 9. Aufl. Straßburg 1918.
243. W. LIETZMANN, *Mathematik und bildende Kunst*, Breslau 1931.
244. G. WOLFF, *Mathematik und Malerei*, Leipzig, 2. Aufl. 1925.
245. KIRCHER, ATHANASIOS, *Arithmologia sive de abditis numerorum mysteris*, Rom 1665.
246. L. SCHÖNBERGER, *Studien zum 1. Buch der Harmonik des Claudius Ptolemaeus*. Ein Beitrag zur griechischen Ton- und Musiklehre, Augsburg 1914.

IV. Quellenwerke

247. Aegypter (4000 v. Chr.—300 v. Chr.):

1. *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* („Rechenbuch des AHMES“, 1900 oder 1800 v. Chr.) = *Papyrus Rhind* des British Museum, übersetzt und erläutert (teilweise in Faksimile-Ausgabe) von EISENLOHR, Leipzig 1877.
2. RODET, *Les prétendus problèmes d'Algèbre du manuel du calculateur Égyptien*, Paris 1892.
3. Weitere Quellenangaben bei BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklid*, Leipzig 1870, sowie bei HANKEL und M. CANTOR (s. dort).

248. ANARITUS (um 900 nach Chr. † 922/23):

1. *Anaritii in X libros priores elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. CURTZE, Leipzig 1899. (Wichtiger Euklid-Kommentar.)

249. APOLLONIUS von Perge (265?—170):

1. *Apollonii Pergaei Quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, ed. I. L. HEIBERG, 2 Bde, Leipzig 1891—1893.
2. *Die Kegelschnitte des APOLLONIOS*, deutsch von A. CZWALINA, München-Berlin 1926.

250. ARCHIMEDES (287—212):

1. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. I. L. HEIBERG (griechisch-lateinischer Paralleltext), 3 Bde, Leipzig 1910—1915.
2. *Archimedes von Syrakus sämtliche Werke*. übers. v. NIZZE, Stralsund 1824.
3. *Eine neue Schrift des ARCHIMEDES (Parabelquadratur)*, ed. I. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN, *Bibliotheca mathematica* 7 (1906/07), S. 302; neu ediert in gekürzter Fassung bei: A. SPEISER, *Klassische Stücke der Mathematik*, Zürich-Leipzig 1925, S. 45—52.
4. *Über schwimmende Körper und die Sandzahl*, Deutsch von A. CZWALINA, Leipzig 1925 (Ostwalds Klassiker d. exakten Wiss. Nr. 213).
5. *Die ARCHIMEDISCHE Schrift über „Kugel und Zylinder“*, übersetzt von A. CZWALINA, (Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. Nr. 202.)

(Hinweis: An Schriften über ARCHIMEDES seien genannt: a) F. KLIEM und G. WOLFF, *Archimedes*, Berlin 1927; b) A. CZWALINA, *Archimedes*, Leipzig-Berlin 1925 (math.-phys. Bibl.); Th. L. HEATH, *Archimedes Werke*, deutsch herausg. von F. KLIEM, Berlin 1914.)

251. ARISTARCH von Samos (um 310—250):

1. „Über Grössen und Abstände von Sonne und Mond“ (lateinische Übersetzung schon vor 1500 im Druck erschienen). Siehe: Th. HEATH, *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus*, Oxford 1913. — Siehe auch: E. NITZE, *Programm des Stralsunder Gymnasiums*, Stralsund 1856.

252. ARISTOTELES (384—322):

1. Originalausgaben einzelner Werke in der „Bibliotheca Teubneriana“. — Neu-editionen in Vorbereitung.
2. *Philosophische Werke*, herausg. von E. ROLFES, 3 Bde, Leipzig bei F. Meiner.
3. Aus 2. auch einzeln: a) *Metaphysik* (2 Bde); b) *Politik*; c) *Organon*; d) *Nikomachische Ethik*; e) *Über die Seele*.

253. Babylonier (5000 v. Chr.—1000 v. Chr.):

1. F. X. KUGLER, *Die babylonische Mondrechnung*, Freiburg/Br. 1900.
2. EPPING-STRASSMAIER, *Astronomisches aus Babylon*, Stimmen von Maria-Laach, 44. Ergänzungsheft, 1889.
3. HILPRECHT, *Die Ausgrabungen der Universität von Pennsylvanien im Bél-Tempel zu Nippur*, Leipzig 1904.
4. O. NEUGEBAUER, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 1, (Springer), Berlin 1934ff.

254. BACON (of Verulam, 1561—1626):

1. *Opera* (ed. SPEDDING and HEATH, London 1857ff.).

255. BERNOULLI, Johann I. (1667—1748):

1. *Opera*, ed. G. CRAMER, 1742. (Neue große Bernoulli-Ausgabe unter Leitung von O. SPIESS/Basel in Vorbereitung).

256. BOEHME, Jakob (1575—1624):

1. Werke, ediert von A. FAUST, Stuttgart 1940ff. (Neudruck in Vorbereitung).
2. Ges. Werke, ed. SCHIEBLER, Leipzig 1862, Neudruck 1922.

257. BOETHIUS (480—524):

1. *De Consolatione Philosophiae* — *Trost der Philosophie* —. (Lateinisch-deutsche Parallelausgabe von E. GOTHEIN), Berlin 1932.

258. BOLZANO, Bernhard (1781—1848):

1. *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851. (Neudruck: Philos. Bibl. Nr. 99, Leipzig 1920).
2. *Wissenschaftslehre von 1837*, Neudruck Leipzig 1929—1931 (4 Bde).

259. BRAHE, Tycho (1546—1601):

1. *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmeticae*, Faksimile-Ausgabe von F. J. STUDNÍČKA, Prag 1886.

260. BRUNO, Giordano (1548—1600):

1. Lateinische Werke, 3 Bde, Neapel 1880—91.
2. Italienische Schriften, ed. von A. WAGNER, Leipzig 1829; neue Ausgabe von P. de LAGARDE, 2 Bde, Göttingen 1888—90.

261. CARDANO, Geronimo (1501—1576):

1. *Opera*, Lugd. 1663.
2. *Practicae arithmeticae generalis et mensurandi singularis*, Mediolani 1539.

3. *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, Nürnberg 1545, editio secunda 1570.

262. Chinesen (2000 v. Chr.—10. Jhd. n. Chr.):

1. BIERNATZKI, *Die Arithmetik der Chinesen*, Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, Bd. 52, S. 79 ff.
2. THIBAUT, *Astronomie, Astrologie und Mathematik*, Grundriß der indisch-arischen Philologie von BÜHLER-KIELHORN, Straßburg 1899.
3. *Le Tcheou Ly ou rites du Tcheou*, traduit par E. BIOT, Paris 1851.
4. BÜRK, *Die Apastamba-Sulba-Sutras*, Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellschaft, Bd. 55, S. 543 ff.; Bd. 56, S. 327 ff.

263. CLEMENS, Romanus (um 150 n. Chr.):

1. *Rekognitionen*, ed. GERSDORF, Leipzig 1838.

264. DESCARTES, René (1596—1650):

1. *Opera*, Paris 1897—1911 (Pariser Akademie-Ausgabe).
2. Besonders wichtige Einzelschriften:
 - a) *Regulae ad directionem ingenii*.
 - b) *Meditationes de prima philosophia* (1641).
 - c) *Géométrie* (1637).
 - d) *Discours de la méthode* (1637).
 - e) *Principia philosophiae* (1644).
 - f) *Dioptrica* (1637).
 - g) *Passions de l'âme* (1650).
 - h) *Le monde ou traité de la lumière* (erst posthum 1664 und im Original 1677 gedruckt).

265. DIONYSIOS AREOPAGITA (5. Jhd. n. Chr.):

1. *Schriften in der Sammlung von MIGNE*; deutsch von ENGELHARDT, Sulzbach 1823. — Neue Übers. von STIGLMAYR (Bibl. d. Kirchenväter).

266. DIOPHANTOS (von Alexandria, 2. Hälfte des 3. Jhds. n. Chr.):

1. *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis*, ed. P. TANNERY, Leipzig 1893, 2 Bde.

(Hinweis: Siehe Th. HEATH, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge 1885.)

267. DÜRER, Albrecht (1471—1528):

1. *Underweysung der messung mit dem zirckel uñ richtscheyt in Linien ebenen und gantz corporen . . .*, Nürnberg 1525 (2. Aufl. 1528).
2. Das Werk 1. in einer gekürzten, von H. THOMA angeregten Neuausgabe von A. PELTZER, München 1908, die aber unbefriedigend ist.
3. In Vorbereitung: Faksimile-Ausgabe von 1. mit hochdeutschem Text, Anmerkungen usw. von M. STECK, Berlin 1946.

268. ECKHART, Meister (1260—1329):

1. *Erhaltene Schriften*: In der Sammlung von PFEIFFER, II., Leipzig 1857; neu herausgegeben von H. BÜTTNER, Jena 1909.
2. P. A. DANIELS, *Eine lateinische Rechtfertigungsschrift des Meister Eckhart* (Beiträge XXIV, 1923). — Übersetzung von O. KARRER und H. PIESCH, Erfurt 1927.
3. Neue ECKHART-Ausgabe in Vorbereitung (Deutsche Forschungsgemeinschaft).

269. EPIKUR (von Samos, 341—270 v. Chr.):

1. *Epicurea*, ed. H. USENER, Leipzig 1887.

270. EUDEMOS (von Rhodos, um 334 v. Chr.):

1. *Eudemi Fragmenta quae supersunt*, ed. L. SPENGLER, 1. Aufl. Berlin 1866; 2. Aufl. ibid. 1870.

271. EUDOXUS (von Knidos, um 410—356 v. Chr.):

1. *Eudoxos-Studien* von O. BECKER in: „Quellen und Studien zur Geschichte der Math.“, Springer, Berlin 1930 ff.

272. EUKLID (* 365 ?; „Elemente“ verfaßt um 325 v. Chr.):

1. *Euclidis elementa*. Ed. I. L. HEIBERG, 5 Bde, Leipzig 1883—1888.
2. *Euclidis opera omnia*. Ed. I. L. HEIBERG und K. MENGE, Bd. VII, Leipzig 1896. — (Siehe auch die italienische Ausgabe von OVIO: *L'ottica di Euclide*, Milano 1918). — An früheren und späteren Ausgaben vgl. man die Nr. 1—12 der Bibliographie.

273. EULER, Leonhard (1707—1783):

1. *Opera omnia*, ed. RUDIO, SPEISER u. a. — Ausgabe noch nicht abgeschlossen, Teubner, Leipzig.

274. EUTOKIOS (von Askalon, 6. Jhd. n. Chr.):

(Siehe: Nr. 250, ARCHIMEDES.)

275. FICHTE, Johann Gottlieb (1762—1814):

1. *Werke*, herausgegeben von F. MEDICUS (6 Bde und 1 Ergänzt.-Bd.), Leipzig bei F. Meiner.
2. Aus 1. auch separat:
 - a) *Begriff der Wissenschaftslehre* 1794.
 - b) *Vorlesungen über die Bestimmung des Gelehrten* (1794). — (Auch in der Inselbändchen-Ausgabe.)
 - c) *Erste und zweite Einleitung in die Wissenschaftslehre*.
 - d) *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre* (1794).
 - e) *Wissenschaftslehre* von 1801.
 - f) *Wissenschaftslehre* von 1804.

276. FICINUS, Marsilius (1433—1499):

1. *Theologia Platonica*, Florenz 1482.
2. Übersetzungen der Werke PLATONS und PLOTINS.

277. GALILEI, Galileo (1564—1642):

1. *Galileis sämtliche Werke*, ed. FAVARO, 19 Bde, Florenz 1890—1907.
2. Die Hauptwerke auch in „*Classici Italiani*“.

278. GAUSS, Carl Friedrich (1777—1855):

1. *Sämtliche Werke*, Teubner, Leipzig. (Edition der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.)

279. GEMINOS (1. Jhd. n. Chr.):

1. *Elementa astronomiae*, ed. K. MANITIUS, Leipzig 1898.

280. Germanen (5000 v. Chr.—800 n. Chr.):

1. O. S. REUTER, *Germanische Himmelskunde*, Untersuchungen zur Geschichte des Geistes, München 1934.
2. W. LIETZMANN, *Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden*, Breslau 1940.

231. HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich (1770—1831):

1. *Gesamtausgabe* (Jubiläumsausgabe) ed. H. GLOCKNER, Stuttgart 1931 ff.
2. *Sämtliche Werke. Erste kritische Gesamtausgabe* von G. LASSON und J. HOFFMEISTER (20 Bde), Leipzig (Meiner).
3. Aus 2. auch separat:
 - a) *Phänomenologie des Geistes*.
 - b) *Logik* (2 Bde).
 - c) *Encyclopädie*.
 - d) *Philosophie der Weltgeschichte* (I, II, III, IV).
 - e) *Ästhetik I, 1. Idee und Ideal*.
 - f) *Jenenser Logik, Metaphysik und Naturphilosophie*.
 - g) *Jenenser Realphilosophie* (Vorlesungen 1803/04 und 1805/06).

232. HERAKLIT (von Ephesos, 536—470 v. Chr.):

1. „*Schriften*“, Edition in griechisch-deutschem Paralleltext von H. DIELS, 2. Aufl. 1909.

233. HERON von Alexandrien (200 n. Chr. nach HEIBERG; 100 v. Chr. nach TROPFKE; 50 n. Chr. nach D. E. SMITH):

1. *Heroni Alexandrini opera quae supersunt omnia*. 5 Bde, Leipzig 1903—1914.
2. Aus 1. ist für das Verständnis der Angaben des PROKLUS besonders wichtig:
 - a) Vol. III: *Vermessungslehre („Metrik“) und Dioptra („Dioptrik“)* erschienen als *Heronis Alexandrini rationes dimetiendi et commentatio dioptrica*, Rec. H. SCHOENE, Leipzig 1903.
 - b) Vol. IV: *Heronis definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur geometrica*. Ausgabe von W. SCHMIDT und I. L. HEIBERG, Leipzig 1912.
 - c) Vol. V: *Heronis quae feruntur stereometrica et de mensuris*, Ausgabe von W. SCHMIDT und I. L. HEIBERG, Leipzig 1914.
3. Man vergleiche ferner die Nr. 43, 44 der Bibliographie, oben.

234. HIPPOKRATES (von Chios, um 440 v. Chr.):

1. „*Fragment*“, s. TOEPLITZ, *Mathematik und Antike*, „*Die Antike*“ 1925.
2. s. ARISTOTELES, *Eth. ad Eud.*, lib. VII, c. 14.
3. s. SIMPLIKIOS.

235. IAMBlichOS (um 325 n. Chr.):

1. *Jamblichi in Nicomachi Geraseni arithmeticae introductionem liber*, ed. PISTELLI, Leipzig 1894.

236. Inder (8.—6. Jhd. v. Chr.):

1. RODET, *Leçons sur le calcul d'ARYABHATTA*, Journal Asiatique, 1871, S. 8 ff.
2. *Algebra of the Hindus with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of BRAHMA-GUPTA and BHASCARA*. Translated by COLEBROOKE, London 1817.
3. HUNRATH, *Das Ausziehen der Quadratwurzel bei den Griechen und Indern*, Hadersleben 1883.
4. F. BUCHNER, *De Algebra Indorum*, Elbing 1821.

237. KANT, Immanuel (1724—1804):

1. *Kants gesammelte Schriften* (einschließlich des Briefwechsels, Bd. X, XI, XII). Herausgegeben von der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin.
2. *Immanuel Kants sämtliche Werke in sechs Bänden*. (Dünndruckausgabe), Leipzig (Inselverlag) 1921 ff. (Großherzog-Wilhelm-Ernst-Ausgabe).

3. Sonderausgaben bei Reclam:

- a) *Kritik der reinen Vernunft*, ed. R. SCHMIDT.
- b) *Kritik der praktischen Vernunft*, ed. K. KEHRBACH.
- c) *Kritik der Urteilskraft*, ed. K. KEHRBACH.
- d) *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, ed. K. SCHULZ.
- e) *Grundlegung zur Metaphysik der Sitten*, ed. Th. FRITZSCH.
- f) *Die Religion innerhalb der Grenzen der bloßen Vernunft*, ed. K. KEHRBACH.
- g) *Der Streit der Fakultäten*, ed. K. KEHRBACH.

4. *Immanuel Kants Briefe (1756—1803)* in Auswahl. Ed. F. OHMANN, Leipzig 1911 (Inselverlag).

5. *Kant. Sämtliche Werke*, herausg. von K. VORLÄNDER, 10 Bde, Leipzig (Meiner).

6. Aus 5. auch separat:

- a) *Kritik der reinen Vernunft*.
- b) *Kritik der praktischen Vernunft*.
- c) *Kritik der Urteilskraft*.
- d) *1. Einleitung in die Kritik der Urteilskraft*.
- e) *Prolegomena*.
- f) *Grundlegung zur Metaphysik der Sitten*.
- g) *Metaphysik der Sitten*.
- h) *Logik*.
- i) *Anthropologie*.
- k) *Religion*.
- l) *Kleine Schriften zur Logik und Metaphysik*.
- m) *Schriften zur Geschichtsphilosophie, Ethik und Politik*.
- n) *Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes*.
- o) *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*.

288. KEPLER, Johannes (1571—1630):

1. *Gesammelte Werke*, Ausgabe von M. CASPAR, München 1937 ff.

- a) Band I: *Mysterium Cosmographicum. De Stella Nova*, ed. M. CASPAR.
 - b) Band II: *Astronomiae pars Optica*, ed. F. HAMMER.
 - c) Band III: *Astronomia Nova*, ed. M. CASPAR.
 - d) Band IV: *Kleinere Schriften 1602/1611. Dioptrice*, ed. M. CASPAR und F. HAMMER.
 - e) Band VI: *Harmonice Mundi*, ed. M. CASPAR.
- (Band V und die folgenden Bände sind noch nicht erschienen.)

2. Eine ältere Gesamtausgabe ist die von FRISCH in den Jahren 1851—1871 (Erlangen) veranstaltete.

3. Auf Grund der Texte der Editionen der neuen CASPARschen Ausgabe 1. hat M. CASPAR vortreffliche Übersetzungen der Hauptwerke geliefert:

- a) *Mysterium Cosmographicum. Das Weltgeheimnis*. — Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, München-Berlin 1936.
- b) *Astronomia Nova. Neue Astronomie*. — Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, München-Berlin 1929.
- c) *Harmonice Mundi. Weltharmonik*. — Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, München-Berlin 1939.

4. *Bibliographia Kepleriana. Ein Führer durch das gedruckte Schrifttum von Johannes Kepler.* Unter Mitarbeit von L. ROTHENFELDER herausgegeben von M. CASPAR, München 1936.

289. KOPERNIKUS, Nikolaus (1473—1543):

1. *De revolutionibus orbium caelestium* (1543), Neuausgabe Thorn 1873.
2. *Commentariolus* (Teilübersetzung von E. ZELLER in dem Sammelwerk „Nikolaus Kopernikus“, herausg. v. F. KUBACH, München-Berlin 1943).
3. Deutsche Übersetzung des Hauptwerks I. als „Nikolaus Kopernikus, Kreisbewegungen“, Leipzig, Akad. Verl.-Ges., 1933 (?).
4. Gesamtausgabe der Werke des KOPERNIKUS, herausgeg. von F. KUBACH (in Vorbereitung). (München-Berlin 1944ff.)

290. LAMBERT, Johann Heinrich (1728—1777):

1. *Schriften zur Perspektive*, ed. M. STECK, Berlin 1943. (Hierin der Plan für eine Gesamtausgabe der Werke Lamberts.)
2. *Bibliographia Lambertiana*, bearbeitet und eingeleitet von M. STECK, Berlin 1943.
3. *Kosmologische Briefe* (Augsburg 1761).
4. *Photometria* (Augsburg 1760).
5. *Beiträge zur Mathematik* (Berlin 1765—72, 4 Bde).
6. *Neues Organon* (Leipzig 1764).
7. *Architektonik* (Riga 1771, 2 Bde).
8. *Criterium veritatis* (ed. BOPP, 1915).
9. Gesamtausgabe in Vorbereitung.

291. LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646—1716):

1. G. W. LEIBNIZ, *Philosophische Werke*, herausg. von A. BUCHENAU und E. CASIRER, Leipzig (Meiner) 1924ff. (5 Bde).
2. Aus 1. auch separat:
 - a) *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie I.*
 - b) *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie II.*
 - c) *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand.*
 - d) *Theodicee.*
 - e) *Deutsche Schriften.*
 - f) *Ausgewählte philosophische Schriften im Originaltext I, II.*
3. G. W. LEIBNIZ, *Sämtliche Schriften und Briefe*, herausg. v. d. Preuß. Akademie der Wissenschaften, Darmstadt 1923ff. (Dritter Versuch einer Gesamtausgabe; noch im Erscheinen; gegenwärtig herausg. von J. E. HOFFMANN.)
4. *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, herausg. von C. I. GERHARDT, Berlin 1875—1890. (Bisher vollständigste Ausgabe der philosophischen Schriften.)
5. *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*, éd. par L. COUTURAT, Paris 1903.
6. *Leibnizens mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, Berlin 1849, Halle 1855ff.

292. LEONARDO DA VINCI (1542—1619):

1. *Il trattato della pittura*, erstmalig aufgelegt Paris 1651; 8. Aufl. von A. AMORETTI, Mailand 1804 in den „Classici Italiani“; deutsch als: „Das Buch von der Malerei“, ed. H. LUDWIG, Wien 1882.
2. „Leonardo da Vinci“, Großes Standart-Prachtwerk mit vielen Faksimile-Wiedergaben aus den Handschriften, Berlin o. J. (1940; weitere Auflagen: 1941, 1943).
3. „Tagebücher und Aufzeichnungen“, deutsch hrsg. v. Th. LÜCKE, Leipzig o. J. (1940).

293. LULLUS, Raimundus (1235—1315):

1. *Ars magna*. Auszüge bei: J. E. ERDMANN, Grundriß I, § 206.

294. MONTAIGNE, M. E. de (1533—1592):

1. *Essais*, Bordeaux 1580; neue Editionen: Paris 1865 und Bordeaux 1870.

295. NEMORARIUS, Jordanus († 1237):

1. *Geometria vel de triangulis libri IV*, ed. M. CURTZE, Thorn 1887.

296. NEWTON, Isaak (1642—1727):

1. *Opuscula*, ed. CASTILLON 1744.
2. *Philosophiae naturalis Principia mathematica*, Cambridge 1686. — 2. Aufl. von COTES (1713).
3. Deutsche Ausgabe von 2. als „*Mathematische Prinzipien der Naturlehre*“, herausg. von J. Ph. WOLFERS, 1. Aufl. (1872), Neudruck Leipzig (Koehler) 1932.

297. NIKOLAUS VON KUES (1401—1464):

1. *Opera Omnia*. Heidelberger Akademieausgabe von E. HOFFMANN, Leipzig bei F. Meiner. Bisher 7 Teile erschienen.
2. Daraus auch separat und für das PROKLUS-Verständnis besonders wichtig:
 - a) *Docta ignorantia* (1440), ed. E. HOFFMANN und R. KLIBANSKY, Leipzig 1932.
 - b) *Idiota de Staticis Experimentis* (ed. L. BAUR), Leipzig 1937. (Deutsche Übersetzung als „*Versuche mit der Wage*“ von H. MENZEL-ROGNER (Philos. Bibl. Nr. 220).
3. Eine ältere CUSANUS-Ausgabe ist diejenige, die 1514 zu Paris erschienen ist; früher erschienen die Renaissance-Ausgaben: Strassburg 1488; Mailand 1502; nach der Pariser Ausgabe noch: Basel 1565.
4. An deutschen Übersetzungen der Werke des CUSANUS nach der Heidelberger Akademieausgabe, herausg. von E. HOFFMANN, sind für PROKLUS wichtig:
 - a) *Der Laie über die Weisheit (Idiota)* von E. BOHNENSTADT mit Geleitwort von E. HOFFMANN („*Nikolaus von Cues als Philosoph*“), Leipzig 1936 (Heft 1) = Philos. Bibl. Nr. 216a.
 - b) *Über den Beryll (De Beryllo)* von K. FLEISCHMANN mit einer Einführung von E. HOFFMANN („*Die Vorgeschichte der Cusanischen Coincidentia oppositorum*“), Leipzig 1938 (Heft 2) = Philos. Bibl. Nr. 217.
5. Frühere deutsche Ausgaben der Hauptschriften mit der „*Docta ignorantia*“ von F. A. SCHARPFF, Freiburg (Br.) 1882, herausg. und A. SCHMIDT, Hellerau 1919.
6. Sonderausgaben in den Sitz. Ber. d. Heidelberger Akademie. (Cusanus-Texte: Predigten, Traktate, Marginalien, Briefe.)

298. ORESMUS, Nikolaus (um 1313—1382):

1. *Traicté de la Sphère*.
2. *Traicté du Ciel et du Monde* (1377).
(Hinweis: Siehe P. DUHEM, *Le système du Monde*, Tome IV, Paris 1916).
3. *Die mathematischen Schriften des NICOLE ORESME*, ed. M. CURTZE, Berlin 1870.

299. PAPPUS von Alexandrien (um 300 n. Chr.):

1. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, ed. F. HULTSCH, Berlin 1876—1878.

300. PARACELSUS, B. Th. (1493—1541):

1. *Sämtliche Werke*, ed. K. SUDHOFF und MATTHIESSEN, 14 Bde. München-Berlin 1922ff (Oldenbourg).
2. *Opus Paramirum* (1528—31).
3. *De natura rerum*.

301. PARMENIDES (* um 515 zu Elea):

1. *Fragment eines Lehrgedichts*, ed. DIELS, Berlin 1897; Neuaufl. 1916 (s. Vorsokratiker).

302. PASCAL, Blaise (1623—1662):

1. *Oeuvres*, éd. BOSSUT, 1779; éd. FAUGÈRE, 1882; éd. L. BRUNSCHVIG et BOUTROUX, 1908.
2. *Gedanken*, deutsche Ausgabe der „*Pensées*“ von W. RÜTTENAUER, Leipzig o. J. (1939?).
3. *Vermächtnis eines großen Herzens* (Die kleineren Schriften), deutsche Ausgabe von W. RÜTTENAUER, Leipzig 1938.

303. PHILOLAUS (5. Jhd. v. Chr.):

1. *Fragmentarische Originale* gesammelt von BOECKH, Berlin 1819; vgl. C. SCHAAR-SCHMIDT, Bonn 1864.

304. PICO della Mirandola (1463—1494):

1. s. A. LEVY, *Biographie Picos*, Berlin 1908. — Philosophie- und geistesgeschichtlich wichtig durch den sog. „Picoschen Zweifel“.

305. PLATON (429—348):

1. Originalausgaben in der „*Bibliotheca Teubneriana*“.
2. *Sämtliche Dialoge*. Herausgegeben von O. APALT, 7 Bde, Leipzig (Meiner).
3. Aus 2. auch separat:
 - a) *Protagoras*.
 - b) *Laches* <über die Tapferkeit> und *Eutyphron*.
 - c) *Apologie des Sokrates und Kriton*.
 - d) *Gorgias*.
 - e) *Menon* <Lehre von der Anamnesis>.
 - f) *Kratylos*.
 - g) *Phaidon* <Tod des SOKRATES; über die Unsterblichkeit der Seele>.
 - h) *Phaidros* <Ideenlehre>.
 - i) *Euthydemos*.
 - k) *Hippias I, II und Ion*.
 - l) *Alkibiades I, II*.
 - m) *Gastmahl (Symposion)*, <von der Liebe zu den Ideen>.
 - n) *Charmides, Lysis* <über Liebe und Freundschaft>, *Menechos*.
 - o) *Theätet (Theaitetos)*, <über die Ontologie der Mathematik>.
 - p) *Parmenides* <über das Verhältnis der Ideen zur Mathematik und zur Erscheinungswelt>.
 - q) *Philebos* <über das höchste Gut>.
 - r) *Der Staat (Politeia)*, <Staatslehre; Könige die Philosophen>.
 - s) *Timaios* <Naturphilosophie> und *Kritias*.
 - t) *Sophistes* <über das gegenseitige Verhältnis der Ideen>.
 - u) *Politikos*.
 - v) *Gesetze (Nomoi)*, 2 Bde, <Gesetzgebung von Staaten>.
 - w) *Briefe*.
4. *Gesamtausgabe der Werke PLATONS* in deutschen Übertragungen von O. KIEFER, R. KASSNER, K. PREISDANZ u. a. in der DIEDERICHSSCHEN Ausgabe, Jena 1908 ff.

306. PLOTIN (204—269):

1. *Schriften*. In chronologischer Folge herausg. von R. HARDER, Leipzig (Meiner), 5 Bde.
2. *Enneas*. Texte établi et traduit par É. BRÉHIER, Paris 1924.
3. Ausgaben mit deutscher Übersetzung von A. KIRCHHOFF (Leipzig 1856) und H. MÜLLER (Leipzig 1878—80).

307. PLUTARCHOS (um 50—120 n. Chr.):

1. „*Moralia*“ ed. DÜBNER, Paris, Didot, Bd. III, IV, 1855.

308. PROKLUS DIADOCHUS (410—485):

1. *Procli philosophi Platonici Opera*, éd. par V. COUSIN, Paris 1820—27, 6 Bde;
2. vermehrte Aufl. Paris 1864.
2. *Euklid-Kommentar*, ed. FRIEDLEIN, Leipzig 1873 (griech. Ausgabe).
3. Erste vollständige deutsche Ausgabe von 2. übers. von P. L. SCHÖNBERGER, ed. M. STECK, Halle (S.) 1944.
4. *Hypotyposis*, ed. MANITIUS, Leipzig Teubner.

309. PTOLEMÄUS, Claudius (um 140 n. Chr.):

1. *Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie* („*Almagest*“), deutsch herausgegeben von K. MANITIUS, Leipzig 1912/13 (2 Bde).
2. *Syntaxis mathematica, Opera quae extant omnia*, ed. I. L. HEIBERG, Bd. I, Leipzig 1898; 2. Aufl. 1903. Bd. II, Leipzig 1907.

310. RIEMANN, Bernhard (1826—1866):

1. *Werke*, ed. DEDEKIND und WEBER.
2. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (Habilitationsschrift), ed. H. WEYL, Berlin-Wien 1923.

311. SCHELLING, F. W. J. von (1775—1854):

1. *Schellings Werke*. Auswahl in drei Bänden, Leipzig (Meiner).
2. *Bruno oder über das göttliche und natürliche Prinzip der Dinge*, herausg. von O. WEISS, Leipzig 1911.
3. *Einleitung zu dem Entwurf eines Systems der Naturphilosophie | Allgemeine Deduktion des dynamischen Prozesses*, herausg. von O. WEISS, Leipzig 1911.
4. Neue SCHELLING-Ausgabe von M. SCHRÖTER, München bei C. H. BECK (Nachdruck).

312. SCHLEIERMACHER, Friedrich (1768—1834):

1. *Werke*. Herausg. von O. BRAUN, Bd. I—III, Leipzig (Meiner).
2. *Über die Religion. Reden an die Gebildeten unter ihren Verächtern*, herausg. von R. OTTO, 4. Aufl. Göttingen 1920.

313. SEXTUS EMPIRIKUS (200 n. Chr.):

1. *Adversus mathematicos*, ed. H. MUTSCHMANN, 1911 ff.
2. *Pyrrhoneische Grundzüge* (übersetzt von E. PAPPENHEIM, Leipzig, 2 Bde, o. J. (F. Meiner). (Beziehen sich besonders auf den sog. „PYRRHONischen Zweifel“.)

314. SIMPLICIUS (6. Jhd. n. Chr.):

1. *In Aristotelis de caelo commentaria*, ed. I. L. HEIBERG; *Commentaria in Aristotelem Graeca*, Vol. VII, Berlin 1894.
2. *In Aristotelis Physicorum Libros commentaria*, ed. H. DIELS; *Commentaria in Aristotelem Graeca*, Vol. IX, Berlin 1882.

3. *Simplicii comment. in octo Aristotelis physicae auscultationis libros*, Venetiis 1526. — (Hierin auf fol. 12a sqq. Hinweise auf die mathematischen Leistungen des HIPPOKRATES von Chios (s. dort) in der Reduktion des Problems der Würfelverdoppelung (Delisches Problem) und bei der Mönchchenquadratur. — Ausführlicher griechisch-deutscher Paralleltext bei BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLID*, Leipzig 1870, S. 100—121.

315. THOMAS von Aquino (1225—1274):

1. *Scriptum super libros Sententiarum*, ed. MANDONNET, Tomus II, Paris 1929.
2. *Philosophie in Auszügen*. Leipzig (Meiner).
3. *Fünf Fragen über die intellektuelle Erkenntnis*, Leipzig (Meiner).

316. VORSOKRATIKER:

1. *Fragmente der Vorsokratiker*, ed. DIELS, neuere Aufl. von KRANZ, (griechisch-deutscher Paralleltext), letzte (5.) Ausgabe 1935.

317. WEIGEL, Valentin (1553—1588):

1. *Libellus de vita beata* (1606).
2. *Der guldne Griff* (1613).
3. *Vom Ort der Welt* (1613).

(Für weitere Schrifttumshinweise vergleiche man auch die Anmerkungen (Kommentare) des Herausgebers.)

V. Nachträge

318. J. ÜBINGER, *Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus*, Jahrb. d. Görres-Ges. 8, Fulda 1895, S. 305—306.
319. M. SIMON, *Geschichte der Mathematik im Altertum*, Berlin 1909.
320. E. HOPPE, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*, Heidelberg 1911.
321. B. BAUCH, *Studien zur Philosophie der exakten Wissenschaften*, Heidelberg 1911.
322. M. SIMON, *Cusanus als Mathematiker*, Heinrich-Weber-Festschrift, Leipzig-Berlin 1912, S. 298—337.
323. R. HÖNIGSWALD, *Zum Streit über die Grundlagen der Mathematik*, Heidelberg 1912.
324. A. WIEDEMANN, *Das alte Aegypten*, Heidelberg 1920. (cf. Abschn. P.)
325. R. KLIBANSKY, *Ein Proklos-Fund und seine Bedeutung*, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. (Phil.-hist. Kl.), Jg. 1928/29, 5. Abh. — (Bezieht sich auf bisher verloren geglaubte Stellen des „Parmenides-Kommentars“ des PROKLUS. — Sein „Euklid-Kommentar“ wird in seiner geistesgeschichtlichen Stellung mit besonderer Beziehung auf KEPLER auf S. 24/25 berücksichtigt. — Es wird auch das Schrifttum früher Zeit angegeben, das sich auf PROKLUS bezieht.)
326. H. LIEBMANN, *Über drei neu gefundene mathematische Schriften des Nikolaus von Cues und deren Bedeutung*, Forschg. u. Fortschr. 5, Nr. 22 (v. I. 8. 1929), Jhg. 1929, S. 261.
327. A. FAUST, *Der Möglichkeitsgedanke* (Systemgeschichtliche Untersuchungen, I. Teil: Antike Philosophie (1931); II. Teil: Christliche Philosophie (1932). Heidelberg 1931/32.

- 328.** W. THOMAE, *Das Proportionenwesen in der Geschichte der gotischen Baukunst und die Frage der Triangulation*, Heidelberg 1933.
- 329.** O. NEUGEBAUER, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, 1. Bd.: Vorgriechische Mathematik, Berlin 1934.
- 330.** H. ROGNER, *Die Bewegung des Erkennens und das Sein in der Philosophie des Nikolaus von Cues*, Heidelberg 1937.
- 331.** M. BILLINGER, *Das Philosophische in den Excitationen des Nikolaus von Cues*, Heidelberg 1938. (cf. Abschn. III, IV.)
- 332.** J. E. HOFMANN, *Die Quellen der Cusanischen Mathematik I: Ramon Lulls Kreisquadratur* (Cusanus-Studien VII), Sitz.-Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. (Phil.-hist. Kl.), Jhg. 1941/42, 4. Abh.
- 333.** K. HILDEBRANDT, *Kopernikus und Kepler in der Deutschen Geistesgeschichte*, „Die Gestalt“, Heft 14, Halle (S.) 1944.



REGISTER
und
VERZEICHNISSE

Verzeichnis der Abbildungen und Tafeln

A. Abbildungen

	Seite		Seite
Abb. 1* (Horoskop des PROKLUS)	10	Fig. 54	373
Fig. 1	275	Fig. 55	374
Fig. 2, Fig. 3	277	Fig. 56	375
Fig. 4, Fig. 5	284	Fig. 57	376
Fig. 6, a), b)	298	Fig. 58	380
Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9	300	Fig. 59	381
Fig. 10	303	Fig. 60, Fig. 61, Fig. 62	382
Fig. 11	305	Fig. 63	383
Fig. 12	317	Fig. 64	385
Fig. 13	318	Fig. 65, Fig. 66	386
Fig. 14, Fig. 15	319	Fig. 67, Fig. 68	388
Fig. 16	320	Fig. 69, Fig. 70	390
Fig. 17, Fig. 18, Fig. 19	324	Fig. 71, Fig. 72	391
Fig. 20, Fig. 21 a), b)	325	Fig. 73	392
Fig. 22, Fig. 23, Fig. 24, Fig. 25	327	Fig. 74, Fig. 75	393
Fig. 26, Fig. 27	328	Fig. 76 a), b), Fig. 77	395
Fig. 28, Fig. 29	329	Fig. 78	396
Fig. 30	334	Fig. 79 a), b)	397
Fig. 31	340	Fig. 80 a), b)	398
Fig. 32	341	Fig. 81 a), b), Fig. 82 a), b)	400
Fig. 33	345	Fig. 83 a), b)	401
Fig. 34	346	Fig. 84 a), b)	402
Fig. 35	349	Fig. 85 a), b)	403
Fig. 36	350	Fig. 86 a), b)	405
Fig. 37 a), b), Fig. 38, Fig. 39	352	Fig. 87 a), b)	406
Fig. 40	356	Fig. 88	407
Fig. 41, Fig. 42	357	Fig. 89	408
Fig. 43, Fig. 44	358	Fig. 90	409
Fig. 45	360	Fig. 91	415
Fig. 46	361	Fig. 92	416
Fig. 47	362	Fig. 93	417
Fig. 48	365	Fig. 94	419
Fig. 49, Fig. 50	366	Fig. 95	421
Fig. 51	367	Fig. 96	422
Fig. 52	368	Fig. 97	423
Fig. 53	372	Fig. 98	424

	Seite		Seite
Fig. 99, Fig. 100	425	Fig. 116	445
Fig. 101	427	Fig. 117	446
Fig. 102, Fig. 103	430	Fig. 118	450
Fig. 104, Fig. 105	431	Fig. 119	452
Fig. 106	432	Fig. 120	453
Fig. 107, Fig. 108	434	Fig. 121, Fig. 122, Fig. 123	455
Fig. 109, Fig. 110	437	Fig. 124, Fig. 125	457
Fig. 111	439	Fig. 126	458
Fig. 112	440	Fig. 127 a), b)	461
Fig. 113	443	Fig. 128	462
Fig. 114, Fig. 115	444	Fig. 129	465

B. Tafeln (Bilder)

	Seite
Tafel I: Titelblatt der GRYNÆUS-Ausgabe, 1533 (Tafeln Ia, Ib)	8
Tafel II: Vortitel der BAROCIUS-Ausgabe, 1560	8
Tafel III: Haupttitel der BAROCIUS-Ausgabe	8
Tafel IV: Titelblatt des 1. Bandes der TAYLOR-Ausgabe, 1792	16
Tafel V: Titelblatt des 2. Bandes der TAYLOR-Ausgabe	16
Tafel VI: Titelblatt der FRIEDLEIN-Ausgabe, 1873	154

C. Zeit-Tafeln

(Als Ausschlagtafeln am Schluß des Werkes)

- Zeit-Tafel I: Die geistigen und seelischen Formungen der Kulturvölker von den ältesten Zeiten bis zur Entdeckung der Wissenschaft durch die Griechen.
- Zeit-Tafel II: Die ersten wissenschaftlichen Formungen und Ordnungen zur Ergreifung des Seins von den Vorsokratikern und Pythagoreern bis SOKRATES.
- Zeit-Tafel III: Das universelle System des metaphysischen Idealismus PLATONS und seine unmittelbaren kulturmorphologischen Wirkungen in der mathematischen Systembildung des EUKLID.
- Zeit-Tafel IV: Die Ideensynthese des deutschen Idealismus in Mathematik, Philosophie, Naturwissenschaften und den Künsten von den Nachfolgern PLATONS bis PROKLUS und schematisch bis 1900.

Quellen-Register

Die gewöhnlichen Ziffern sind Seitenzahlen. Kursiv-Ziffern sind die Nummern der Anmerkungen, Fett-Ziffern die Nummern der Bibliographie.

AEGYPTER: 210, 211, 261; 247.

AHMES

1. „Rechenbuch des A.“: 247.

ANARITUS

1. „Euklid-Kommentar des A.“: 248.

ANAXAGORAS

1. „Fragment ‚Über die Natur‘“: 87; 21, 33.
2. „Über die Quadratur des Kreises“ (nach PLUTARCH „de exilio“ c. 17 im Gefängnis geschrieben).

ANAXIMANDROS

1. „Über die Natur“ (Fragment): 18.

ANSELM VON CANTERBURY

1. „Proslogium“: 26.
2. „Monologium“.

APOLLONIOS

1. „Conica“: 414; 27, 190 a, 242, 314; 249.
2. „Über die Schraubenlinie“: 239.

ARCHIMEDES

1. „Über Kugel und Zylinder“ (Epitaph): 216; 51 a; 250.
2. „Quadratur der Parabel“ (Exhaustionsmethode): 250.
3. „Über schwimmende Körper und die Sandzahl“: 250.
4. „Kreismessung“ (π -Berechnung): 250.
5. „Methodenlehre“: 250.
6. „Vom Gleichgewicht“: 293; 161; 250.

ARCHYTAS

1. Fragment (ed. DIELS): 90, 175, 212; 15.

ARISTARCHOS

1. „Über die Größe und Entfernung von Sonne und Mond“: 138; 184, 251.

ARISTOTELES

1. „Analyt. post.“: 206, 210, 219; 252.
2. „De caelo“: 233, 238, 425; 252.
3. „De part. anima“: 185, 201; 252.
4. „Metaphysik“: 170, 181; 34; 252.
5. „Meteor.“: 210; 252.
6. „Nikomachische Ethik“: 186, 301; 252.
7. „Organon“ (Logik), s. Namenverzeichnis.
8. „Physik“: 389; 34, 134; 252.
9. „Traktate über den Beweis“: 434; 252.
10. „Nikom. Intr. arith.“: 34; 252.
11. „Analyt. prior.“: 38; 252.

ATHENAIOS (=KYZIKINOS)

1. „Deipnosophistae“, ed. G. KAIBEL, Leipzig 1888/90: 213.

BABYLONIER: 253.

BACON (of Verulam)

1. Opera: 102; 254.
2. „Novum Organon“.
3. „Essays“.

BAROCIUS

1. Latein. Übertragung des „Euklid-Kommentars“ des PROKLUS: 7, 158, 159, 166, 189, 201, 203, 207, 222, 224, 234, 237, 242, 246, 248, 249, 253, 255, 256, 258, 260, 261, 266, 269, 275, 277, 281, 282, 295, 298, 299, 302, 306, 309, 312, 321, 326, 329, 332, 333, 335, 336, 337, 339, 348, 349, 354, 355, 357, 367, 368, 370, 371, 376, 377, 379, 381, 384, 385, 388, 394, 396, 397, 399, 402, 403, 404, 405, 407, 414, 416, 427, 436, 437, 441, 442, 445, 446, 447, 449, 450, 451, 456, 458, 460, 461, 463, 464, 466; 295; 13, 14, 16, 36.

- BERNOULLI, Johann I.
1. *Opera*: 112, 113; 255.
- BOEHME
1. „*Aurora oder Morgenröte im Aufgang*“: 146; 256.
2. *Werke*: 256.
- BOETHIUS
1. „*Geometria*“: 72, 87, 257.
2. „*De Consolatione philosophiae*“: 257.
- BOLZANO
1. „*Paradoxien des Unendlichen*“: 24; 258.
2. „*Wissenschaftslehre von 1837*“: 258.
- BONOLA-LIEBMANN
1. „*Nichteuklidische Geometrie*“: 167, 185, 304; 140.
- BRAHE, Tycho
1. *Werke*.
2. „*Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmeticae*“: 31, 133; 259.
- BRAUNMÜHL, A. VON
1. „*Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie*“: 101, 109.
- BRETSCHNEIDER
1. „*Die Geometrie und die Geometer vor Euklid*“: 8, 159, 211, 212, 213, 462; 36, 40, 41, 94, 95, 101, 111; 13, 17, 21, 51, 247, 314.
- BRUNO, Giordano
1. *Lateinische Werke*: 260.
2. *Italienische Schriften*: 260.
3. „*De Immenso*“ (Lehrgedicht): 134, 135; 260.
4. cf. SCHELLING: 311.
- CANTOR, Moritz
1. „*Geschichte der Mathematik*“: 8, 159, 160, 211, 212, 213; 27, 36, 38, 40, 41, 44 a, 46, 47, 50, 87, 92, 94, 95, 96, 100, 101, 108, 131, 174, 184, 207, 215, 219, 221, 234, 240, 244, 259, 304, 332; 1, 21, 51, 74, 76, 82, 247.
- CARDANO
1. *Opera*: 261.
2. „*Practicae arithmeticae*“: 261.
3. „*Ars Magna*“: 261.
4. Lebensbeschreibung: 132.
- CARTESIUS (s. DESCARTES)
- CASPAR, Max
Herausgeber von KEPLERS Werken (s. bei KEPLER).
- CHASLES
1. „*Aperçue historique*“: 37, 51.
- CHINESEN: 262.
- CLEMENS ROMANUS
1. „*Rekognitionen*“: 137; 263.
- CUSANUS (s. NIKOLAUS VON KUES).
- DEINOSTRATOS
1. *Kurven-Mechanismen zur Kreisquadratur* (Nachweise bei PAPPOS): 213; 299.
- DESCARTES
1. „*Regulae ad directionem ingenii*“: 8, 14, 149, 150; 264.
2. „*Meditationes de prima philosophia*“: 8, 14, 149, 150; 264.
3. „*Géométrie*“: 8, 14, 149, 150; 26; 264.
4. „*Discours de la méthode*“: 149, 150; 264.
5. „*Principia philosophiae*“: 150; 264.
6. *Opera*: 8, 14, 149, 150; 53, 264.
- DIELS, H.
1. „*Fragmente der Vorsokratiker*“: 211, 212; 12, 15; 188, 282, 301, 314, 316.
- DIOKLES
1. „*Cissoide*“: 243; 92, 109, 130, 181, 188.
- DIONYSIOS AREOPAGITA
1. *Schriften*: 138; 265.
- DIOPHANTOS
1. *Opera*: 266.
- DÜRER, Albrecht
1. „*Underweysung der messung...*“: 51; 100, 267.
- ECKHART, Meister
1. *Schriften*: 138; 268.

EISENLOHR

(Herausgeber des Rechenbuchs des AHMES): 247.

EPIKUR

1. *Epicurea*: 306, 318, 319; 75; 269.

EUEDEMOS

1. *Schriften*: 270.

2. „Geschichte der Geometrie“: 211, 253, 374, 396, 409, 430, 458; 27; 270.

3. „Über die Winkel“: 253; 270.

EUDOXOS

1. *Schriften*: 271.

13, 24, 68, 87, 88, 89, 143, 212, 213, 244; 32, 36, 37, 43, 44, 108, 110; 98.

2. „Über den (goldenen) Schnitt“: 36.

EUKLEIDES

1. „Elemente“ (*Stoicheia*): 4, 13, 14, 15, 23, 56, 68, 69—72, 111, 155, 213—217, 219, 238, 241, 242, 247, 252, 253, 255, 259, 260, 265—267, 271, 272, 275, 276, 279, 280, 281, 284—287, 294, 295, 301—307, 309, 310, 312, 313, 319, 322, 326, 329, 330, 331, 334, 337, 339—341, 345, 350, 351, 353, 356, 360—363, 376—378, 381, 382, 385, 389, 390, 392, 395, 397, 400, 402, 404, 407, 410, 414, 418, 420, 426, 428, 439, 462, 463, 465, 466; 25, 27, 30, 31, 35, 36—38, 45, 48, 49, 56—59, 60—62, 64—67, 69, 71—74, 80—82, 115, 141, 158, 159, 162—164, 166—170, 172, 173, 175, 177, 179, 182, 183, 185, 190, 195, 197, 198, 200, 201, 204, 209, 210, 212—214, 216, 218, 221, 223, 226—228, 230, 239, 242—244, 248, 249, 252, 261, 271, 274, 276, 278, 288, 290—292, 296, 300, 303, 312, 315, 316, 319, 320, 327, 333; 1—14, 16—23, 25, 28, 30—33, 42, 45, 73, 76, 97, 105, 118, 248, 272.

a) I. Buch: 12, 13, 78—83, 86, 88, 92, 93, 95—98, 104—108, 110—124, 155, 156, 159, 216, 222, 223, 259,

260, 275, 276, 284, 285, 301, 302, 304, 307, 309, 312, 322, 326, 329—331, 334, 337, 339—341, 345, 350, 351, 353, 356, 360—363, 381, 382, 385, 389, 390, 392, 395, 397, 400, 402, 404, 407, 410, 414, 418, 420, 426, 439, 466; 27, 30, 31, 56—61, 64, 66, 67, 69, 71, 74, 80—82, 115, 141, 158, 159, 162—164, 166—170, 172, 173, 175, 177, 179, 182, 183, 185, 190, 195, 197—199, 201, 204, 209, 210, 212, 214, 216, 218, 221, 226—228, 239, 243, 244, 249, 276—279, 290—292, 296, 303, 312, 320, 327, 333.

b) II. Buch: 67, 207, 208, 216, 443; 35, 36, 319.

c) III. Buch: 355, 377, 398, 442; 65, 261, 288, 315, 316.

d) IV. Buch: 216, 222, 353; 36, 62, 72, 252.

e) V. Buch: 88, 89, 122, 216, 222, 415, 426; 35, 37, 73, 213.

f) VI. Buch: 122, 208, 426, 448, 458, 462, 463, 465; 27, 36, 223.

g) VII. Buch: 377, 415; 274, 300.

h) VIII. Buch: 415; 300.

i) IX. Buch: 415; 300.

k) X. Buch: 87, 122, 310, 415; 38, 49, 300.

l) XI. Buch: 88, 122.

m) XII. Buch: 242.

n) XIII. Buch: 89, 90; 45, 62.

2. „Elementenlehre der Musik“: 68, 214; 272.

3. „Fehlschlüsse“: 69, 215; 50; 272.

4. „Katoptrik“: 68, 214; 272.

5. „Optik“ (Perspektive): 68, 214; 272.
 6. „Porismen“: 77, 315, 376; 272.
 7. „Über die Teilung der Figuren“: 68, 214, 267; 46; 272.
- EULER, L.
1. *Opera*: 32, 51; 159, 273.
- EUTOKIOS
1. Kommentar zu ARCHIMEDES: 244; 250, 274.
2. Kommentar zu APOLLONIOS: 249.
- FICHTE
1. *Werke*: 275.
2. „Wissenschaftslehre“: XI, 18, 32, 42, 66, 101, 138, 151; 275.
3. „Über die Bestimmung des Gelehrten“: XI; 275.
4. „Reden an die deutsche Nation“: XI; 275.
- FICINUS
1. *Werke*: 98, 139, 140; 276.
- FRANK, E.
1. „Plato und die sogenannten Pythagoreer“: 87; 21, 32, 33, 37, 43, 51, 74, 108, 264; 141.
- FRIEDLEIN, G.
1. Griechische Ausgabe des „Euklid-Kommentars“ des PROKLUS: XVIII, 7, 21, 154, 157, 158, 160, 162, 165, 172, 179, 183, 186, 201, 203, 204, 206, 207, 218, 220, 221, 222, 224, 226, 227, 234, 237, 242, 246, 248, 249, 253, 261, 263, 264, 266, 269, 270, 272, 273, 274, 282, 288, 294, 295, 296, 302, 305, 312, 321, 326, 329, 333, 335, 336, 337, 338, 339, 343, 348, 349, 350, 355, 356, 357, 358, 367, 370, 371, 377, 379, 380, 381, 384, 388, 397, 402, 403, 413, 427, 432, 437, 441, 444, 446, 447, 450, 454, 458, 463, 465, 466; 23; 13, 16, 19, 20, 45, 72, 308.
- FUETER, E.
1. „Geschichte der exakten Wissenschaften...“: XXIV; 7; 208, 218.
- GALILEI
1. *Opera*: 31, 132, 145; 206, 277.
- GAUSS
1. *Werke*: XI, 27, 33, 56, 85, 121; 61, 189, 304; 105, 199, 227, 278.
- GEMINOS
1. „*Elementa astronomiae*“: 61, 189, 239, 243, 244, 248, 288, 293, 294, 295, 296, 298, 301, 308, 336, 337, 342, 359, 439; 16, 244; 89, 279.
- GERMANEN: 280.
- GLOCKNER, H.
(Herausgeber von HEGELS Werken, s. dort.)
1. *Hegel-Lexikon*: XIX, XXIII.
- GOETHE
1. *Weimarer Sophienausgabe*: XXII, 14, 18, 21, 32, 44, 49, 60, 65, 91, 103, 125, 134, 135, 147, 150, 151; 12, 74, 123 a, 132; 222.
2. „*Farbenlehre*“: 132.
- GRYNAEUS
1. Erste griechische Ausgabe des „Euklid-Kommentars“ des PROKLUS: 7, 13, 158, 182, 201, 208, 230, 233, 234, 241, 242, 258, 260, 261, 264, 266, 282, 297, 299, 316, 326, 329, 335, 348, 357, 363, 364, 384, 385, 397, 403, 405, 407, 427, 442, 446, 462; 2, 13, 14, 16.
- HANKEL, H.
1. „*Geschichte der Mathematik*“: 8, 159; 27, 34, 38, 41, 44a, 46, 50, 111, 134, 140; 1, 18, 51, 247.
- HARTMANN, N.
1. „*Euklid-Kommentar des Proklus*“: XVII, 4, 5, 6, 7, 82, 155, 163, 166, 176; 22.
- HEGEL
1. *Werke*: XI, XIX, 42; 170, 205, 281.
- HEIBERG, I. L.
(Herausgeber der Werke EUKLIDS, ARCHIMEDES' etc.; s. dort.)
- HERAKLIT
1. *Schriften*: 18, 135; 282.

HERON

1. *Opera*: 162, 191, 211, 304, 378, 390, 405, 465; 43, 44, 71, 119, 283.

HIPPOKRATES

1. *Fragmente* (Möndchenquadratur): 190, 212, 315; 111, 137, 223, 224; 284, 314.

HOFFMANN, Ernst

Herausgeber der Werke des NIKOLAUS VON KUES (s. dort).

HOMER

1. *Odyssee*: 184, 288, 306.

HULTSCH, F.

(Herausgeber der Werke HERONS etc.; s. dort.)

IAMBlichOS

1. *Werke*: 7; 285.

INDER: 286.

KAESTNER, A. G.

1. „*Geschichte der Mathematik*“: 14; 14, 64.

KANT

1. *Werke*: XI, XIX, 17, 18, 27, 31, 32, 42, 50, 85, 98, 101, 118, 131, 138, 147, 150, 151; 26, 74, 132, 163; 135, 142, 143, 203, 287.
2. „*Kritik der reinen Vernunft*“: 26, 163.
3. „*Kritik der Urteilskraft*“: 118, 147.

KEPLER

1. *Werke*: XI, XIX, XX, XXIV, 14, 16, 18, 21, 22, 27, 31, 32, 33, 44, 46, 48, 50, 51, 68, 85, 87, 98, 117, 129, 131, 132, 136, 138, 142, 143, 144, 145, 146, 149, 151, 159, 163; 1, 4, 5, 8, 9, 9 a, 12, 25, 51, 74, 91, 120, 143; 24, 162, 163, 165, 167, 185, 190, 209, 210, 220, 238, 288, 325, 333.
2. „*Mysterium Cosmographicum*“: 51; 190, 288.
3. „*Astronomia Nova*“: 87, 145; 288.
4. „*Harmonice Mundi*“: 44, 50, 51, 144, 145, 159, 163; 1, 4, 5, 8, 9, 9 a, 25, 51, 91, 120, 143; 24, 209, 288.

KOPERNIKUS

1. *Werke*: XI, XIX, 16, 18, 21, 27, 31, 46, 85, 98, 117, 129, 132, 136, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 149; 80, 127, 149, 184, 192, 231, 232, 236, 237, 238, 251, 289, 333.
2. „*Commentariolus*“: 140, 141; 289.
3. „*Revoluciones*“: 98, 141, 142; 289.

LAMBERT

1. *Schriften*: XI, 8, 32, 50, 56, 85; 21, 191; 102, 234, 235, 290.
2. „*Freye Perspektive*“: XI, 8, 32, 50, 56, 85; 21; 290.

LEIBNIZ

1. *Werke*: XI, XIX, 16, 18, 21, 26, 27, 32, 33, 42, 46, 48, 50, 52, 85, 87, 89, 97, 98, 131, 134, 138, 145, 146, 147, 149, 150, 151; 74, 132; 145, 147, 166, 200, 291.
2. „*Monadologie*“: 32, 150, 151; 291.
3. „*Theodicée*“: 32, 150; 291.

LEONARDO DA VINCI

1. *Schriften*: 51, 140, 149; 167, 292.

LULLUS

1. *Schriften*: 149; 293, 332.

MAHNKE, D.

1. „*Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt*“: 16, 25, 98, 138, 145, 146, 147; 132; 145, 195.

MANITIUS, K.

(Herausgeber von PTOLEMAIOS, PROKLUS etc.; s. dort.)

MARINOS (Neapolitanus)

1. *Biographie des PROKLUS*: 9, 10, 11, 136; 46, 47, 48, 50.

MEISTER ECKHART (s. ECKHART).

MONTAIGNE

1. „*Essais*“: 150; 241, 294.

NEUPLATONIKER: 24, 25, 29, 38, 55, 98, 108, 139, 140, 141, 142, 145, 146, 156, 157, 170, 234, 368; 9, 12, 26, 150; 23, 50, 192.

NEWTON

1. „*Principia*“: 14, 145, 146; 132; 67, 296.

NIKOLAUS VON KUES

1. *Werke*: XI, XIX, XXIV, 15, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 40, 42, 46, 48, 50, 68, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 89, 91, 96, 97, 98, 110, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 143, 145, 146, 148, 149, 150, 151; 7, 74, 122, 268; 78, 161, 181, 194, 196, 197, 212, 213, 297, 318, 322, 326, 331, 332.
2. „*De Docta ignorantia*“: 91, 128, 129; 297.
3. „*De beryllo*“: 16, 135; 297.
4. „*De possest*“: 17; 297.
5. „*Compl. theol.*“: 25; 297.
6. „*Liber de mente*“: 91; 297.
7. „*De venatione sapientiae*“: 127, 134, 136; 297.
8. „*Idiota. — De staticis experimentis*“: 297.
9. „*De genesi*“: 134; 297.
10. „*De Ign.*“: 135; 297.
11. „*Visio Dei*“: 136; 297.
12. Predigten, Traktate, Marginalien, Briefe: 297.

ORESMUS

1. *Schriften*: 298.

PAPPUS

1. *Schriften*: 299, 305, 341, 465; 299.

PARACELSUS

1. *Werke*: 98, 140, 149; 300.
2. „*Opus Paramirum*“: 98, 140; 300.
3. „*De natura rerum*“: 300.

PARMENIDES

1. *Fragment eines Lehrgedichts*: 18, 19, 107, 110, 231, 235, 247; 12, 203; 301.

PASCAL

1. *Oeuvres*: 14; 302.

PAULY-WISSOWA

1. „*Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft*“: 11, 160, 167, 191, 208, 211, 213, 238, 244, 293; 187.

PERSEUS

1. „*Spirische Kurven*“: 244, 414; 298.

PHILOLAOS

1. *Fragmente*: 138, 139, 178, 257, 282, 286; 8; 303.
2. „*Geometrische Fragmente*“: 282, 286; 303.
3. „*Bakchen*“ (Lehrgedicht): 178; 8; 303.

PICO DELLA MIRANDOLA

1. *Opera*: 98, 139; 304.

PLATON

1. *Werke*: XI, XVI, XXIV, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 32, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 62, 63, 68, 82, 85, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 98, 101, 106, 108, 111, 112, 124, 129, 130, 131, 132, 133, 136, 137, 138, 139, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 155, 156, 157, 164, 169, 170, 171, 174, 178, 180, 183, 184, 185, 186, 188, 191, 192, 194, 199, 200, 202, 205, 212, 213, 214, 223, 228, 229, 238, 239, 241, 242, 247, 257, 269, 286, 301, 314, 315, 364, 430, 464; 1, 4, 7, 8, 9 a, 10, 12, 16, 21, 24, 32, 33, 37, 43, 51, 74, 75, 78, 83, 85, 99, 108, 112 a, 119, 123, 125, 127, 192, 207; 46, 47, 49, 69, 117, 127, 133, 134, 138, 141, 149, 160, 173, 175, 176, 191, 228, 276, 305, 308, 325.
2. „*Timaos*“: 17, 47, 49, 59, 136, 137, 157, 174, 177, 178, 179, 186, 202, 223, 229, 241, 262, 269, 281, 286, 368, 430, 434; 4, 9, 12, 112 a, 207; 305.
3. „*Politeia*“ (Staat): 41, 43, 48, 49, 52, 60, 94, 164, 166, 167, 169, 177, 179, 180, 183, 184, 191, 192, 228, 257, 464; 7, 12, 16, 24, 123; 305.
4. „*Parmenides*“: 23, 24, 48, 95, 107, 238, 242; 12, 83, 85, 127; 191, 305, 325.
5. „*Menon*“: 42, 47, 57, 63, 88, 194; 4, 192; 305.

6. „*Phaidon*“: 194, 301, 364; **305**.
 7. „*Phaidros*“: 57, 58, 177, 286; 12; **305**.
 8. „*Sophistes*“: 164, 184; **305**.
 9. „*Philebos*“: 50, 85, 180, 238; 12; **305**.
 10. „*Theaitetos*“ (Theätet): 168, 182; **305**.
 11. „*Symposion*“ (Gastmahl): 19, 48, 58, 184; 12, 74, 119; **305**.
 12. „*Gorgias*“: 180, 184; **305**.
 13. „*Politikos*“ (Staatsmann): 184; **305**.
 14. „*Epinomis*“: 192; **305**.
 15. „*Nomoi*“ (Gesetze): 180, 191; 9 a; **305**.
 16. „*Rivalen*“: 212; **305**.
- PLOTIN**
1. *Werke*: XI, 5, 6, 12, 13, 24, 25, 29, 38, 40, 58, 98, 137, 138, 139, 178; 132; **276, 306**.
- PLUTARCHOS**
1. *Schriften*: 139, 252; **307**.
 2. „*Ansichten der Philosophen*“: 139.
- PORPHYRIOS**
1. „*Vermischte Schriften*“: 80, 205, 344, 373, 385, 390, 409.
- POSEIDONIOS**
1. *Schrift gegen ZENON*: 71, 222, 265, 284, 287, 306, 318, 319; 89.
- PROKLUS DIADOCHUS**
1. „*Euklid - Kommentar*“: 163, 242, 243, 248, 253, 261, 309, 312, 321, 326, 369, 372, 377, 397, 403, 414, 427, 433, 441, 449, 454, 456; 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 47, 48, 53, 55, 59, 61, 66, 67, 74, 81, 82, 83, 97, 100, 104, 106, 108, 111, 113, 115, 117, 123, 124, 125, 126, 131, 132, 134, 142, 144, 146, 147, 149, 156, 160, 162, 163, 165, 166, 167, 188, 189, 201, 204, 205, 207, 208, 215, 220, 221, 225, 235, 236, 237, 238, 240, 254, 256, 264, 266, 269, 270, 272, 284, 287, 307, 308, 317, 320, 331, 332; **2, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 68, 107, 108, 174, 235, 239, 283, 297, 308, 325**.
2. *Werke*: **308**.
 3. „*Hypotyposis*“: 163; **308**.
- PTOLEMAIOS, K.**
1. *Opera*: 31, 51, 133, 143, 301, 418, 420, 422, 423; 22, 304; **246, 309**.
 2. „*Almagest*“: 31, 51, 133, 143, 301; **309**.
 3. „*Harmonik*“ (Musiktheorie): 22.
- PYTHAGORAS**
- 18, 139, 145, 178, 211, 462, 463, 464; 8, 37, 332, 333.
- PYTHAGOREER**: 5, 6, 15, 17, 18, 38, 48, 51, 53, 60, 61, 62, 72, 82, 85, 87, 98, 107, 108, 109, 110, 115, 129, 135, 138, 139, 140, 141, 146, 178, 187, 188, 189, 194, 211, 212, 228, 232, 233, 234, 235, 246, 257, 265, 281, 285, 430, 458, 459; 12, 16, 21, 22, 27, 32, 33, 34, 37, 43, 74, 108, 119, 140, 203; **141**.
- RIEMANN, B.**
1. *Werke*: XI, 85; 26, 132; **310**.
 2. „*Hypothesen der Geometrie*“: 26; **310**.
- SCHEFFLER, J. (Angelus Silesius)**
- 146.
- SCHELLING**
1. *Werke*: 151; **158, 311**.
- SCHLEIERMACHER**
1. *Werke*: 151; **312**.
- SCHÖNBERGER, L.**
- (Übersetzer von PTOLEMAIOS, PROKLUS; s. dort.)
- SEXTUS EMPIRICUS**
1. *Schriften*: **313**.
- SIMPLIKIOS**
1. *Aristoteles-Kommentare*: 284, **314**.
- SOKRATES**
- 13, 32, 42, 49, 50, 58, 63, 88, 167, 168, 170, 177, 180, 182, 184, 257, 269, 270; **305**.

SPEISER, A.

1. „Die mathematische Denkweise“;
2. „Klassische Stücke der Mathematik“; 3. „Ein Parmenides-Kommentar“: XVII, XXIV, 7, 13, 15, 21, 22, 24, 29, 30, 47, 53, 64, 107, 108; 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 25, 26, 28, 74, 75, 85, 121, 127, 132; 23, 146, 191, 214, 250, 273.

„Sprüche“: 274.

STECK, M.

1. „Das Hauptproblem der Mathematik“; 2. „Mathematik und Kunst“; 3. „Lamberts Schriften zur Perspektive“; 4. „Dürers Unterweysung der messung...“: XXVI, 8, 13, 14, 26, 28, 33, 44, 51, 67, 87, 98, 101, 122, 142, 148, 155, 156, 158, 159, 160, 162, 286; 1, 2, 4, 7, 10, 21, 26, 32, 43, 55, 56, 58, 74, 83, 91, 108, 117, 118, 120, 125, 132, 134, 157, 158, 160, 163, 164, 190, 195, 205, 264; 24, 178, 183, 201, 215, 216, 220, 221, 226, 229, 230, 233, 234, 235, 239, 267, 290, 308.

STENZEL, J.

1. „Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles“: 23; 12, 74; 171, 175.

TANNERY, P.

- 32, 37; 93, 103, 266.

TAYLOR, T.

1. Englische Ausgabe des „Euklid-Kommentars“ des PROKLUS: 7, 437; 13, 14, 15.

THAER, C.

1. Deutsche Ausgabe von EUKLIDS „Elementen“: 13, 86, 88; 27, 30,

- 31, 36, 46, 50, 56, 61, 74, 78, 79, 83, 97, 98, 99, 105, 112, 113, 117, 118, 129, 133, 136, 139, 144, 148, 151, 158, 168, 179, 185, 190, 199, 201, 204, 210, 221, 231, 232, 250, 261, 274, 275, 280, 281, 282, 283, 289, 293, 310, 311, 313, 321, 322, 323, 324, 325, 329, 330; 12.

THOMAS VON AQUINO

1. Werke: 136; 315.

TROPFKE, R.

1. „Geschichte der Elementarmathematik“: 8; 52, 283.

TYCHO BRAHE (s. BRAHE)

VITRUVIUS

1. „De Architectura“: 8.

VORSOKRATIKER:

1. Fragmente (ed. DIELS): 5, 13, 15, 18, 38, 42, 49, 53, 55, 107, 108, 211; 74, 203; 188, 316.

WEIGEL, V.

1. Werke: 146; 317.

ZAMBERTO, B.

1. Kommentar zu einigen Teilen des „Euklid-Kommentars“ des PROKLUS: 7, 162, 261, 321, 329, 394, 446, 447.
2. Ausgabe der Euklidischen „Elemente“: 1.

ZELLER, Eduard

1. „Philosophie der Griechen“: 9, 160, 169, 211; 58.

ZENODOROS

1. „Über die isoperimetrischen Figuren“: 281.

Namen-Verzeichnis

Die gewöhnlichen Ziffern sind Seitenzahlen. Kursiv-Ziffern sind die Nummern der Anmerkungen; Fett-Ziffern sind die Nummern der Bibliographie. Fette römische Ziffern beziehen sich auf die Zeit-Tafeln.

ABDERHALDEN, E.: IX, XXIII.
AEGYPTER: 210, 211, 261; **247**.
AGATHARCHOS (um 500 v. Chr.): I.
AHMES (1900—1800 v. Chr.): **247**.
AIGIAS (von Hierapolis): 418.
AISCHYLOS (525—456 v. Chr.): I.
AISOP (6. Jhd. v. Chr.): I.
ALEXANDER d. Gr. (356—323 v. Chr.):
 I, III.
ALLMAN: **97**.
AMERISTOS (= MAMERTIOS, s. dort).
AMPHINOMOS: 78, 220, 308, 320, 343.
AMYNTAS (auch AMYKLAS, von Heraklea):
 213.
AMORETTI, A.: **292**.
ANAKREON (6. Jhd. v. Chr.): I.
ANARITIUS (um 900 n. Chr. † 922/23): **248**.
ANAXAGORAS (von Klazomenä, um 500
 bis 428 v. Chr.): 87, 211, 212; 21,
 33; I, II, III, IV.
ANAXIMANDROS (von Milet, 611 bis um
 550 v. Chr.): 18; II.
ANAXIMENES (570—499 v. Chr.): s. Vor-
 sokratiker: II.
ANDRONIKOS (ANDRON, von Rhodos, um
 60—50 v. Chr.): 71, 222.
ANGELUS SILESII (s. J. SCHEFFLER).
ANSELM (von Canterbury, 1033—1099):
 26.
ANTIPHON (Athen, Sophist, um 430 v. Chr.,
 schrieb über „Kreisquadratur“): II.
APELT, O.: 169; **305**.
APOLLODOROS (um 640 v. Chr.): II.
APOLLONIOS (von Perge, um 265—170
 v. Chr.): 216, 218, 235, 239, 252, 253,
 294, 303, 360, 361, 362, 398, 414; 27,
 190 a, 242, 314; **249**; IV.
ARCHIMEDES (von Syrakus, 287—212 v.
 Chr.): 32, 68, 87, 88, 112, 191, 192, 210,

213, 214, 216, 242, 244, 293, 355, 460;
 51 a, 161, 260; **102**, **250**, **274**; IV.
ARCHYTAS (von Tarent, * um 430—365
 v. Chr.): 90, 175, 212; 15; II, III.
AREOPAGIT (s. DIONYSIOS AREOPAGITA).
ARISTARCHOS (von Samos, um 310—250
 v. Chr.): 138; **184**, **251**; IV.
ARISTOPHANES (450—385 v. Chr.): I.
ARISTOTELES (von Stageira, 384—322 v.
 Chr.): 16, 23, 32, 44, 47, 51, 71, 74, 81,
 93, 96, 131, 136, 137, 143, 156, 157,
 170, 181, 183, 185, 186, 201, 206, 210,
 219, 233, 238, 247, 294, 298, 301, 303,
 308, 309, 347, 364, 389, 425, 426, 434,
 439; I, 3, 4, 7, 12, 26, 34, 38, 74, 134,
 165, 166, 167; **117**, **137**, **175**, **252**, **284**,
314; II, III, IV.
ARNETH: **70**.
ASSYRER: I.
ATHENAIOS (= KYZIKINOS i. d. ält. Lit.,
 2. Jh. v. Chr.): 213; IV.
AUGUST, E. F. (1795—1870): 162; **6**, **13**,
30.
BABYLONIER: **253**; I.
BACH, J. S. (1685—1750): 10; IV.
BACON (of Verulam, 1561—1626): 102;
254; IV.
BALDUS, R.: 187, 301; **240**.
BARBARO, Daniele: **14**.
BARBERINO: **16**.
BAROCIUS, F. (1538—1590?): 7, 158, 159,
 166, 189, 201, 203, 207, 222, 224, 234,
 237, 242, 246, 248, 249, 253, 255, 256, 258,
 260, 261, 266, 269, 275, 277, 281, 282,
 295, 298, 299, 302, 306, 309, 312, 321,
 326, 329, 332, 333, 335, 336, 337, 339,
 348, 349, 354, 355, 357, 367, 368, 370,
 371, 376, 377, 379, 381, 384, 385, 388,
 394, 396, 397, 399, 402, 403, 404, 405,

- 407, 414, 416, 427; 436, 437, 441, 442, 445, 446, 447, 449, 450, 451, 456, 458, 460, 461, 463, 464, 466; 295; 13, 14, 16, 36.
- BAUCH, B.: 321.
- BAUR, L.: 297.
- BECHER, E.: 131.
- BECK, C. H.: 311.
- BECKER, O.: 23; 154, 271.
- BEETHOVEN, L. van (1770—1827): 10; IV.
- BENZON: 90.
- BERGER, M.: 9; 68.
- BERGER: 77.
- BERNOULLI, Jakob I. (1654—1705): IV.
- BERNOULLI, Johann I. (1667—1748): 112, 113; 255; IV.
- BERNOULLI, J. J.: 9.
- BERTHELOT, M.: 120, 125.
- BHASCARA: 286.
- BIEBERBACH, L.: 199, 206.
- BIERNATZKI: 262.
- BILLINGER, M.: 331.
- BIOT, E.: 262.
- BLASS: 89.
- BOECKH, A.: 69, 303.
- BOEHME, J. (1575—1624): 146; 256; IV.
- BOEHME, J. (1575—1624): 146; 256.
- BOEHNER, Ph.: 196.
- BOETHIUS, A. M. T. S. (480?—524): 72, 87, 257; IV.
- BÜTCHER, J. E.: 119.
- BOHNENSTÄDT, E.: 297.
- BOISSONADE, J. F.: 9, 48.
- BOLZANO, B. (1781—1848): 24; 258; IV.
- BONOLA, R.: 167, 185, 304; 140.
- BOPP, K.: 290.
- BOSSUT: 65, 302.
- BOUCHÉ: 106.
- BOUTROUX, E.: 302.
- BRACHVOGEL, E.: 184, 192.
- BRAHE, Tycho (1546—1601): 31, 133; 259; IV.
- BRAHMAGUPTA: 286.
- BRANDES, H. W.: 67.
- BRAUN, O.: 312.
- BRAUNMÜHL, A. von (1853—1908): 101, 109.
- BRÉHIER, É.: 306.
- BRETSCHNEIDER, C. A. (1808—1878): 8, 159, 211, 212, 213, 462; 36, 40, 41, 94, 95, 101, 111; 13, 17, 21, 51, 247, 314.
- BREWSTER, D.: 67.
- BRUNO, Giordano (1548—1600): 134, 135; 260, 311; IV.
- BRUNDSCHVIGG, L.: 302.
- BRUNSWIG, A.: 147.
- BRYSON (Athen, Sophist, Mitte des 5. Jhs. v. Chr., schrieb über „Kreisquadratur“).
- BUCHENAU, A.: 291.
- BUCHNER, F.: 286.
- BÜCHELER: 213.
- BUHLER: 262.
- BURK: 262.
- BÜTTNER, H.: 268.
- BUFF, Charlotte (1753—1828): 14.
- BURCKHARDT, M.: XXV.
- BURNET: 133.
- BURSIA: 16.
- CALOGERO, G.: 12.
- CAMERER: 33.
- CAMPANUS (um 1270): 1.
- CANTOR, M. (1829—1920): 8, 159, 160, 211, 212, 213; 27, 36, 38, 40, 41, 44 a, 46, 47, 50, 87, 92, 94, 95, 96, 100, 101, 108, 131, 174, 184, 207, 215, 219, 221, 234, 240, 244, 259, 304, 332; 1, 21, 51, 74, 76, 82, 247.
- CARDANO, G. (1501—1576): 132, 261; IV.
- CARTESIUS (s. DESCARTES).
- CASPAR, M.: XXIV, 14, 142, 145, 146, 159; 1, 3, 4, 5, 8, 9, 9 a, 25; 24, 165, 190, 238, 288.
- CASSIRER, E.: 91, 137; 135, 152, 291.
- CASSIRER, F.: 10.
- CASTILLON: 296.
- CAVALIERI (1598?—1647): IV.
- CHASLES, M.: 37, 51.
- CHINESEN: 262; I.
- CHRYSIPOSS (282—209 v. Chr.): 441, 516; IV.
- CLAUSEN: 111.
- CLAVIUS, Chr. (1537—1612): 14, 26.

CLEMENS (Romanus, um 150 n. Chr.):
137; 263.
COHEN, H. (1842—1917): 155; 22.
COLEBROOKE: 286.
COMMANDINUS, F. (1509—1575): 3. 25.
COMTE, A. (1798—1857): IV.
CONFUCIUS (s. KONFUCIUS).
COTES: 296.
COUSIN, V.: 4, 9; 49, 50, 308.
COUTURAT, L.: 291.
CRAMER, G. (1704—1752): 255.
CURTZE, M. (1837—1903): 80, 248, 295,
298.
CUSANUS (s. NIKOLAUS VON KUES).
CYRUS (König der Perser [558—529 v.
Chr.): I.
CZWALINA, A.: 27, 242, 314; 249, 250.

DANIELS, P. A.: 268.
DANTE ALIGHIERI (1265—1321): 75, 132.
DARIUS I. (König der Perser [521—485
v. Chr.): I.
DAVID (König, 10. Jh. v. Chr.): 9.
DEDEKIND, R. (1831—1916): 310.
DEINOSTRATOS (um 335 v. Chr.): 213; III.
DEMOKRITOS (um 460—360 v. Chr.): 21,
75; I, II, III.
DEMOSTHENES (383—322 v. Chr.): I.
DESCARTES, R. (1596—1650) 8, 14, 149,
150; 26; 53, 264; IV.
DIEDERICH: 305.
DIDOT: 307.
DIELS, H.: 211, 212; 15; 188, 282, 301,
314, 316; II.
DIJKSTERHUIS, E. J.: 9.
DILTHEY, W. (1833—1911): 150.
DINGLER, H.: 172.
DIODOROS (1. Jhd. v. Chr.): IV.
DIOKLES (um 180 v. Chr.): 243; 92, 109,
130, 181, 188; IV.
DIONYSIOS AREOPAGITA (5. Jh. n. Chr.):
138; 265; IV.
DIOPHANTOS (2. Hälfte d. 3. Jhs. n. Chr.):
266; IV.
DIPPE: 4.
DONUS, A.: 14.
DOPPELMAYR, J. G. (1671—1750): 62.

DÜBNER: 307.
DÜHRING: 79.
DÜRER, A. (1471—1528): 51; 100, 267;
IV.
DUHEM, P. M. M. (1861—1916): 112, 127,
298.
DYCK, W. von: 165.

ECKHART, Meister (1260—1329): 138;
268; IV.
EISENLOHR, A.: 247.
EISSFELDT, O: XXV, 9.
EKPANTOS (Zeitgenosse Platons): 140;
III.
ELEATEN (5. Jh. v. Chr.): 19, 20, 389; II,
III.
ENESTRÖM, G. (1852—1923): 118.
ENGEL, F. (1861—1940): 304; 105.
ENGELHARDT: 265.
ENRIQUES, F. (* 1871): 11.
EPIKUR (von Samos, 341—270 v. Chr.):
306, 318, 319; 75; 269; IV.
EPIKUREER: 306, 389, 390.
EPPING: 253.
ERDMANN, J. E.: 61, 293.
ERATOSTHENES (von Kyrene, 276—194?
v. Chr.): 193, 214, 244; IV.
EUDEMOS (von Rhodos, um 334 v. Chr.):
211, 253, 374, 396, 409, 430, 458; 27;
270; IV.
EUDOXOS (von Knidos, um 410—356):
13, 24, 68, 87, 88, 89, 143, 212, 213,
244; 32, 36, 37, 43, 44, 108, 110; 98,
271; III, IV.
EUKLEIDES (* 365 v. Chr.; Abfassung der
„Elemente“ um 325 v. Chr.): XV,
XVI, XVII, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13,
14, 15, 21, 22, 24, 27, 28, 56, 67, 68,
69, 70, 71, 72, 73, 75, 77, 78, 79, 80,
81, 82, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93,
94, 95, 96, 97, 98, 104, 105, 106, 107,
108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116,
117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124,
125, 155, 156, 159, 162, 207, 208, 213,
216, 217, 219, 221, 222, 231, 236, 237,
238, 241, 242, 247, 252, 253, 255, 259, 260,
265, 266, 267, 271, 272, 275, 276, 279,

- 280, 281, 284, 285, 286, 287, 294, 295,
301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 309,
310, 312, 313, 315, 319, 323, 330, 353,
356, 363, 369, 372, 374, 376, 377, 394,
401, 406, 408, 413, 416, 426, 430, 434,
443, 448, 450, 452, 453, 454, 456, 458,
460, 462, 463, 465; 25, 26, 27, 30, 31,
35, 37, 38, 45, 46, 48, 49, 50, 56, 57, 58,
59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 69, 71,
72, 73, 74, 75, 82, 83, 106, 115, 118,
126, 141, 144, 147, 153, 156, 158, 159,
162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170,
172, 173, 175, 177, 179, 182, 183, 185,
190, 195, 197, 198, 199, 200, 201, 202,
204, 207, 209, 210, 212, 213, 214, 215,
216, 218, 221, 223, 226, 227, 228, 230,
239, 242, 243, 244, 248, 249, 252, 261,
265, 271, 274, 276, 277, 278, 279, 288,
290, 291, 292, 296, 300, 303, 304, 312,
315, 316, 319, 320, 325, 327, 333; 1, 2,
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 28,
30, 31, 32, 33, 42, 45, 73, 76, 97, 105,
118, 248, 272, 308, 314, 325; II, III, IV.
EULER, L. (1707—1783); 32, 51; 159,
273; IV.
EURIPIDES (480—406 v. Chr.): I.
EUTOKIOS (von Askalon, 6. Jh. n. Chr.):
244; 250, 274; IV.
FABRICIUS: 9, 11; 13, 28, 29, 46.
FARADAY, M. (1791—1867): 167.
FAUGÈRE: 302.
FAUST, A.: 31, 50, 139; 163, 168, 173,
237, 256, 327.
FAVARO: 277.
FICHTE, J. G. (1762—1814): XI, 18, 32,
42, 66, 101, 138, 151; 275; IV.
FICINUS, M. (1433—1499): 98, 139; 140;
276.
FINGER, F. A.: 36.
FISCHER, VON: 90.
FLADT, K.: 8, 157.
FLEISCHMANN, K.: 297.
FRANCISCHINUS, C.: 3.
FRANK, E.: 87; 21, 32, 33, 37, 43, 51, 74,
108, 264; 141; II.
FREYER: 73.
FREYTAG, B. VON-LÖRINGHOFF: 193, 207.
FRIEDLEIN, G. (1828—1875): XVIII, 7,
21, 154, 157, 158, 160, 162, 165, 172,
179, 183, 186, 201, 203, 204, 206, 207,
218, 220, 221, 222, 224, 226, 227, 234,
237, 242, 246, 248, 249, 253, 261, 263,
264, 266, 269, 270, 272, 273, 274, 282,
288, 294, 295, 296, 302, 305, 312, 321,
326, 329, 333, 335, 336, 337, 338, 339,
343, 348, 349, 350, 355, 356, 357, 358,
367, 370, 371, 377, 379, 380, 381, 384,
388, 397, 402, 403, 413, 427, 432, 437,
441, 444, 446, 447, 450, 454, 458, 463,
465, 466; 23; 13, 16, 19, 20, 45, 72,
308.
FRIEDRICH II., der Große (1712—1786):
IV.
FRISCH: 288.
FRITZSCH, Th.: 287.
FROBENIUS, L.: 110.
FUETER, E.: XXIV; 7; 208, 218.
GALILEI, G. (1564—1642): 31, 132, 145;
206, 277; IV.
GARZ, J. C.: 35.
GARZONIUS, F.: 14.
GAUSS, C. F. (1777—1855): XI, 27, 33,
56, 85, 121; 61, 189, 304; 105, 199, 227,
278; IV.
GELON (Tyrann von Gela; † 478 v. Chr.):
210.
GEMINOS (1. Jh. n. Chr.): 61, 189, 239,
243, 244, 248, 288, 293, 294, 295, 296,
298, 301, 308, 336, 337, 342, 359, 439;
16, 244; 89, 279; IV.
GERBERT (um 940—1003, seit 999 Papst
Sylvester II): 72.
GERHARDT, C. I. (1816—1899): 291.
GERHARDT: 85.
GERMANEN: 280; I.
GERSDORF: 263.
GIORDANO BRUNO (s. BRUNO).
GILSON, E.: 196.
GLOCKNER, H.: XIX, XXIII; 132; 170,
205, 281.
GÖRRES: 318.

GOETHE, J. W. VON (1749—1832): XXII, 14, 18, 21, 32, 44, 49, 60, 65, 91, 103, 125, 134, 135, 147, 150, 151; 12, 74, 123 a, 132; 222; II, IV.
 GÖSCHEN: 187, 301; 54, 240.
 GÖTTERNAMEN (s. Verzeichnis am Schluß).
 GOLDBECK, E.: 149.
 GOLDBERG: 67.
 GORGAS (483—375 v. Chr.): II.
 GÖTEN: I.
 GÖTHEIN, E.: 257.
 GRYNÆUS, S. (1493—1541): 7, 13, 158, 182, 201, 208, 230, 233, 234, 241, 242, 258, 260, 261, 264, 266, 282, 297, 299, 316, 326, 329, 335, 348, 357, 363, 364, 384, 385, 397, 403, 405, 407, 427, 442, 446, 462; 2, 13, 14, 16.
 GÜNTHER, S. (1848—1922): 8; 53, 86, 92.
 HANDEL, G. F. (1685—1759): IV.
 HAERING, TH. L.: 139.
 HAMMER, F.: 288.
 HAMMURABI (babyl. König, um 2000 v. Chr.): 27; I.
 HANKEL, H. (1839—1873): 8, 159; 27, 34, 38, 41, 44 a, 46, 50, 111, 134, 140; 1, 18, 51, 247.
 HARDER, R.: 306.
 HARDTIUS: 162.
 HARLESS: 13.
 HARTMANN, N.: XVII, 4, 5, 6, 7, 82, 155, 163, 166, 176; 22.
 HASSE, H.: 155.
 HAUBER, F.: 13, 33, 34.
 HAUFF, J. K. F.: 5.
 HAYDN, J. (1732—1809): IV.
 HEATH, TH. L. (* 1861): 10, 250, 251, 254, 266.
 HEFELE, H.: 132.
 HEFTER, A.: XX.
 HEGEL, G. W. F. (1770—1831): XI, XIX, 42; 170, 205, 281; II, IV.
 HEIBERG, I. L. (* 1854): 8, 13, 156, 204, 211, 213, 238, 244, 369, 377; 27, 46, 103, 111, 137, 222, 223, 251, 257; 1, 7, 8, 12, 56, 57, 249, 250, 272, 283, 309, 314.

HEILBRONNER: 63.
 HEINSE, M.: 16.
 HERAKLEIDES (von Pontos, Biograph von Archimedes): 140; IV.
 HERAKLIT (von Ephesos, 536—470 v. Chr.): 18, 135; 282; II.
 HERMOTIMOS (von Kolophon, Platoniker, 30 Jahre vor Euklid): 213; III.
 HERODOT (5. Jhd. v. Chr.): I.
 HERON (von Alexandria, um 100 v. Chr. oder 2. Jh. n. Chr.): 162, 191, 211, 304, 378, 390, 405, 465; 43, 44, 71, 119, 283; IV.
 HERVAGIUS, I.: 7, 162; 2, 13, 16.
 HIERON (König in Syrakus, † 215 v. Chr.): 210.
 HILBERT, D. (1862—1942): 27; 64, 179, 233, 241.
 HILDEBRAND, A. VON: 4, 10; 242.
 HILDEBRANDT, K.: 176, 333.
 HIPPARCHOS (von Nikaia, 2. Jh. v. Chr.): 77; IV.
 HIPPASOS (von Metapont, Zeitgenosse des Philolaos, 4. Jh. v. Chr.): II.
 HIPPIAS (von Elis, * um 460 v. Chr.): 211, 355, 414; 259, 297; II.
 HIPPOKRATES (von Chios, um 440 v. Chr.): 190, 212, 315; 111, 137, 223, 224; 284, 314; II, III.
 HÖNIGSWALD, R.: 323.
 HOFFMANN, E.: XXIII, XXIV, 9, 16, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 31, 50, 58, 85, 128, 129, 136, 137, 148, 150, 516; 7, 12, 75; 134, 148, 161, 163, 164, 181, 197, 212, 213, 241, 297.
 HOFFMANN, J. E.: 291, 332.
 HOFFMEISTER, J.: 281.
 HOLBEIN, d. J. H. (1497—1543): 51; IV.
 HOLTZMANN, W. (1532—1576): 2.
 HOMER (9. Jh. v. Chr.): 184, 288, 306; I.
 HOPPE, E.: 124, 320.
 HULTSCH, F. (1833—1906): 162, 211, 293; 13, 14, 25, 43, 44, 45, 299.
 HUME, D. (1711—1776): IV.
 HUMBOLDT, A. VON (1769—1859): 69.
 HUNRATH: 286.
 HUYGENS, CH. (1629—1695): 102.

IAMBlichos (um 325 n. Chr.): 7; 285;

IV.

IBEL: 116.

INDER: 286; I.

INDoGERMANEN: I.

ISOKRATES (436—338 v. Chr.): I.

JOHANNES (Evangelist, † um 100): II, IV.

JULIANUS APOSTATA (röm. Kaiser 361—363): 10.

JUNGE, G.: 37; 114.

KAESTNER, A. G. (1719—1800): 14; 14, 64.

KAIBEL, G. (s. Quellen-Register unter ATHENAIOS).

KALLIKLES (cf. Platon „Gorgias“ 483 a, 491 c): 180; II.

KALLIMACHOS (um 310—238 v. Chr.): IV.

KALLIWODA, E.: 120, 125.

KANT, I. (1724—1804): XI, XIX, 17, 18, 27, 31, 32, 42, 50, 85, 98, 101, 118, 131, 138, 147, 150, 151; 26, 74, 132, 163; 135, 142, 143, 203, 287; II, IV.

KARPOS (von Antiochien, Zeitgenosse des Nikomedes): 254, 335, 337; 240; IV.

KARRER, O.: 268.

KASSNER, R.: 305.

KEHRBACH, K.: 287.

KEPLER, J. (1571—1630): XI, XIX, XX, XXIV, 14, 16, 18, 21, 22, 27, 31, 32, 33, 44, 46, 48, 50, 51, 68, 85, 87, 98, 117, 129, 131, 132, 136, 138, 142, 143, 144, 145, 146, 149, 151, 159, 163; 1, 4, 5, 8, 9, 9 a, 12, 25, 51, 74, 91, 120, 143; 24, 162, 163, 165, 167, 185, 190, 209, 210, 220, 238, 288, 325, 333; IV.

KIEFER, O.: 305.

KIELHORN: 262.

KIRCHER, ATH. (1601—1680): 12; 245.

KIRCHHOFF, A.: 306.

KIRCHNER, H.: 49.

KLEANTHES (um 350 v. Chr.): IV.

KLIBANSKY, R.: 297, 325.

KLIEM, F.: 250.

KNÖFEL, ERNA: I.

KNITTERMEYER, H.: 32, 147; 158, 203.

KNOCHE, J. H.: 162, 370; 83, 94, 101, 298; 13, 14, 16, 25, 39, 41, 42, 45.

KOEHLER: 84, 296.

KONFUCIUS (5. Jhd. v. Chr.): I.

KOPERNIKUS, N. (1473—1543): XI, XIX, 16, 18, 21, 27, 31, 46, 85, 98, 117, 129, 132, 136, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 149; 80, 127, 149, 184, 192, 231, 232, 236, 237, 238, 251, 289, 333; II, IV.

KOWALEWSKI, G.: 14, 15; 198.

KRANZ, W.: 188, 316.

KRATISTOS (Zeitgenosse des Proklus): 314.

KRIES, J. VON: 142.

KRÜGER: 273.

KUBACH, F.: 139, 141; 185, 237, 289.

KÜCKELHAUS, H.: 180.

KÜNSSBERG: 98.

KUGLER, F. X.: 253.

KUTTA, W. M.: 104.

KTESIBIOS: 191.

KYZIKINOS (s. ATHENAIOS).

LAGARDE, P. DE: 260.

LAGRANGE, J. L. (1736—1813): 14.

LAMBERT, J. H. (1728—1777): XI, 8, 32, 50, 56, 85; 21, 191; 102, 234, 235, 290; IV.

LANGBEIN: 73.

LANGE, F. A. (1828—1875): 115.

LAOTSE (6. Jhd. v. Chr.): I.

LISSON, G.: 281.

LISSWITZ, K.: 99.

LECLERCQ: 106.

LEGENDRE, A. M. (1752—1833): 102.

LEIBNIZ, G. W. (1646—1716): XI, XIX, 16, 18, 21, 26, 27, 32, 33, 42, 46, 48, 50, 52, 85, 87, 89, 97, 98, 131, 134, 138, 145, 146, 147, 149, 150, 151; 74, 132; 145, 147, 166, 200, 291; IV.

LEODAMAS (von Thasos, Zeitgenosse Platons): 212, 314; III.

LEON (um 370 v. Chr., Platoniker, schrieb „Elemente“): 212; III.

- LEONARDO DA VINCI (1542—1619): 51, 140, 149; **167, 292**; IV.
- LESSING, G. E. (1729—1781): IV.
- LEVY, A.: **304**.
- LIEBMANN, H. (1874—1939): 167, 185, 304; **140, 326**.
- LIETZMANN, W. (*1880): 4; **211, 243, 280**.
- LOCKE, J. (1632—1704): IV.
- LONGINOS (213—273 n. Chr.): IV.
- LONGUS (3. Jhd. v. Chr.): IV.
- LORENZ, J. F. (1738—1807): 4.
- LORIA, G. (*1862): 83, 92, 94, 109, 130, 181, 257, 259, 260.
- LUDWIG, H.: **292**.
- LÜCKE, Th.: **292**.
- LUKIAN (2. Jhd. n. Chr.): IV.
- LUKRETIUS CARUS (98—54 v. Chr.): IV.
- LULLUS, R. (1235—1315): 149; **293, 332**; IV.
- LUTHER, M. (1483—1546): IV.
- LYSIPPOS (Mitte d. 4. Jhs. v. Chr.): I.
- MACH, E. (1838—1916): 87, 161; **174**.
- MAERKER, F. I.: 162; 83, 94, 101, 298; **13, 39**.
- MAHNKE, D. (1884—1937): 16, 25, 98, 138, 145, 146, 147; 132; **145, 195**.
- MAJER, L.: 159; 74, 79, 83, 87, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 110, 156; **13, 14, 16, 19, 20, 42**.
- MAMERTIOS (=AMERISTOS, Zeitgenosse des Thales, um 600 v. Chr.): 211; II.
- MANDONNET: **315**.
- MANITIUS, K.: 163; **279, 308, 309**.
- MARINOS (Neapolitanus, Biograph des PROKLUS): 9, 10, 11, 136; **46, 47, 48, 50**; IV.
- MARTIN, H.: **71**.
- MATTHIESSEN: **300**.
- MAUTHNER, F.: **137**.
- MEDICUS, F.: **275**.
- MEINER, F.: **252, 275, 281, 287, 291, 297, 305, 306, 311, 312, 315**.
- MEISTER ECKHART (s. ECKHART).
- MENAICHMOS (4. Jh. v. Chr.): 70, 213, 216, 220, 244, 343; III.
- MENANDER (342—290 v. Chr.): IV.
- MENELAOS (von Alexandria, 98 n. Chr. in Rom): 404, 405.
- MENGE, K.: **272**.
- MENNINGER, K.: **179**.
- MENON (s. Platons Dialog „Menon“): 42, 88.
- MENZEL-ROGNER, H.: **297**.
- METRODOROS (um 300 v. Chr.): IV.
- MEYER, R.: **111**.
- MICHELANGELO, BUONOROTTI (1475—1564): **51**; IV.
- MIGNE: **265**.
- MILL, J. St. (1806—1873): IV.
- MÖSSEL, E.: 4, 10; **151, 169, 202**.
- MONTAIGNE, M. E. DE (1533—1592): 150; **241, 294**; IV.
- MONTUCLA, J. E. (1725—1799): **13**.
- MORELLI, J.: **7**.
- MCZART, W. A. (1756—1791): IV.
- MÜLLER, H.: **306**.
- MÜLLER, J. H. T. (1797—1862): **40**.
- MUTSCHMANN, H.: **313**.
- MYRON (5. Jh. v. Chr.): I.
- NAPOLEON (1769—1821): IV.
- NATORP, P. (1854—1925): 155; **22, 122**.
- NEBUKADNEZAR II (625—561 v. Chr.): I.
- NEMORARIUS, J. (†1237): **295**.
- NEOKLEIDES (Platoniker): 212; IV.
- NESELMANN, G.H.F. (1811—1881): **13, 38**.
- NEUGEBAUER, O.: 27; **253, 329**.
- NEUPLATONIKER: 24, 25, 29, 38, 55, 98, 108, 139, 140, 141, 142, 145, 146, 156, 157, 170, 234, 368; 9, 12, 26, 150; **23, 50, 192**; IV.
- NEWTON, I. (1642—1727): 14, 145, 146; 132; **67, 296**; IV.
- NIETZSCHE, F. (1844—1900): 3, 4; IV.
- NIGGLI, P.: **219**.
- NIKOLAUS VON KUES (1401—1464): XI, XIX, XXIV, 15, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 40, 42, 46, 48, 50, 68, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 89, 91, 96, 97, 98, 110, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 143, 145, 146, 148, 149, 150, 151; 7,

- 74, 122, 268; 78, 161, 181, 194, 196, 197, 212, 213, 297, 318, 322, 326, 331, 332; IV.
- NIKOMEDES (Blüte um 250—150 v. Chr.): 355, 414; 92; IV.
- NIZZE, E. (1788—1872): 250, 251.
- NOË, A. R.: 9; 50.
- NOFRETETE (Königin der Aegypter um 1370 v. Chr.): I.
- OHMANN, F.: 287.
- OINOPIDES (von Chios, um 470—490 v. Chr.): 71, 212, 222, 363, 396; II.
- OLDENBOURG, R.: 300.
- ORESME, N. (um 1313—1382): 298, IV.
- OSTWALD, WILHELM (1853—1925): 13; 27, 51 a; 12, 250.
- OTTO, R.: 312.
- OVIO: 272.
- OZEANIER: 110.
- PAPPENHEIM, E.: 313.
- PAPPOS (von Alexandria, 3. Jh. n. Chr.): 299, 305, 341, 465; 299; III, IV.
- PARACELSUS, B. Th. (1493—1541): 98, 140, 149; 300; IV.
- PARMENIDES (von Elea, * um 515 v. Chr.): 18, 19, 107, 110, 231, 235, 247; 12, 203; 301; II, III.
- PASCAL, B. (1623—1662): 14; 302; IV.
- PAULY (s. auch WISSOWA): 11, 160, 167, 191, 208, 211, 213, 238, 244, 293; 187.
- PELTZER, A.: 267.
- PERIKLES (499—429 v. Chr.): I.
- PERIPATETIKER: 212 u. a.
- PERSER: I.
- PERSEUS (280 bis etwa 120 v. Chr.; Blüte um 130 v. Chr.): 244, 414; 298; IV.
- PESCH, J. G. VAN: 107.
- PETERS, Th.: 209, 210.
- PEUCKERT, W. E.: 139, 141; 236.
- PFEIFFER: 268.
- PFLEIDERER, Ch. F. (1736—1821): 13.
- PHIDIAS (5. Jhd. v. Chr.): I.
- PHILIPPOS (von Medma, Platoniker): 213, 378; IV.
- PHILIPPOS (von Opus, Platoniker, um 378 v. Chr.): III.
- PHILOLAOS (5. Jh. v. Chr.): 138, 139, 178, 257, 282, 286; 8; 303; II, III.
- PHILON (von Larissa, † 87 in Rom): 351, 353.
- PHÖNIKER: 211; I.
- PICO DELLA MIRANDOLA, J. (1463—1494): 98, 139; 304; IV.
- PIESCH, H.: 268.
- PINDAR (522—442 v. Chr.): I.
- PISANO, LEONARDO: 118.
- PISTELLI: 285.
- PLATON (429—348 v. Chr.): XI, XVI, XXIV, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 32, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 62, 63, 68, 82, 85, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 98, 101, 106, 108, 111, 112, 124, 129, 130, 131, 132, 133, 136, 137, 138, 139, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 155, 156, 157, 164, 169, 170, 171, 174, 178, 180, 183, 184, 185, 186, 188, 191, 192, 194, 199, 200, 202, 205, 212, 213, 214, 223, 228, 229, 238, 239, 241, 242, 247, 257, 269, 286, 301, 314, 315, 364, 430, 464, 516; 1, 4, 7, 8, 9 a, 10, 12, 16, 21, 24, 32, 33, 37, 43, 51, 74, 75, 78, 83, 85, 99, 108, 112 a, 119, 123, 125, 127, 192, 207; 46, 47, 49, 69, 117, 127, 133, 134, 138, 141, 149, 160, 173, 175, 176, 191, 228, 276, 305, 308, 325; I, II, III, IV.
- PLOTIN (204—269): XI, 5, 6, 12, 13, 24, 25, 29, 38, 40, 58, 98, 137, 138, 139, 178; 132; 276, 306; III, IV.
- PLUTARCHOS (um 50—120): 139, 252; 307; IV.
- POLYKLET (5. Jhd. v. Chr.): I.
- PORPHYRIOS (232 bis nach 300 n. Chr.): 80, 205, 344, 373, 385, 390, 409.
- PORTA, S. († 1555): 140.
- POSEIDONIOS (von Apameia [Rhodos], 128—44 v. Chr.): 71, 222, 265, 284, 287, 306, 318, 319; 89; IV.
- POUDRA: 75.
- PRAECHTER, K.: 11; 50.

PRAXITELES (4. Jhd. v. Chr.): I.

PREISENDANZ, K.: 305.

PRODIKOS (aus Keos, um 400 v. Chr.): II.

PROKLUS DIADOCHUS (410—485): 163,
242, 243, 248, 253, 261, 309, 312, 321,
326, 369, 372, 377, 397, 403, 414, 427,
433, 441, 449, 454, 456, 516; 1, 3, 4, 6, 7,
8, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26,
27, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40,
42, 47, 48, 53, 55, 59, 61, 66, 67, 74,
81, 82, 83, 97, 100, 104, 106, 108, 111,
113, 115, 117, 123, 124, 125, 126, 131,
132, 134, 142, 144, 146, 147, 149, 156,
160, 162, 163, 165, 166, 167, 188, 189,
201, 204, 205, 207, 208, 215, 220, 221,
225, 235, 236, 237, 238, 240, 254, 256,
264, 266, 269, 270, 272, 284, 287, 307,
308, 317, 320, 331, 332; 2, 13, 14, 16,
17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28,
29, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 42, 43, 44,
45, 46, 47, 48, 49, 50, 68, 107, 108,
174, 235, 239, 283, 297, 308, 325; II,
III, IV.

PROTAGORAS (480—410 v. Chr.): 135; II.

PTOLEMAIOS I. (Soter; König von Ägypten): 68, 210, 213.

PTOLEMAIOS, K. (Alexandria, 2. Jh. n. Chr.): 31, 51, 133, 143, 301, 418, 420, 422, 423; 22, 304; 246, 309; IV.

PYRRHON (von Elis, um 365—275 v. Chr.): 313; III, IV.

PYTHAGORAS (von Samos, um 570 bis um 480 v. Chr.): 18, 139, 145, 178, 211, 462, 463, 464; 8, 37, 332, 333; II.

PYTHAGOREER (um 530 v. Chr.): 5, 6, 15, 17, 18, 38, 48, 51, 53, 60, 61, 62, 72, 82, 85, 87, 98, 107, 108, 109, 110, 115, 129, 135, 138, 139, 140, 141, 146, 178, 187, 188, 189, 194, 211, 212, 228, 232, 233, 234, 235, 246, 257, 265, 281, 285, 430, 458, 459; 12, 16, 21, 22, 27, 32, 33, 34, 37, 43, 74, 108, 119, 140, 203; 141; I, II, III.

RAFFAEL, S. (1483—1520): 51; IV.

RAMSAUER, R.: 182.

RAMSES II (König der Aegypter [um 1292 v. Chr.): I.

RECLAM: 287.

REIDEMEISTER, K.: 14, 23, 106; 228.

REIMER: 65.

REMBRANDT (1606—1669): IV.

REUTER, O. S.: 280.

RHETIKUS, G. J. (1514—1576): 231.

RICHARDUS, C.: 31.

RICKERT, H. (1863—1936): XXIII, 23; 83; 95, 136, 143, 144.

RIEMANN, B. (1826—1866): XI, 85; 26, 132; 310; IV.

RIEMANN, H.: 10.

RIEMER: 150.

ROBIN, L.: 117.

RODET: 247, 286.

RÖTH: 66.

ROGNER, H.: 194, 297, 330.

ROLFES, E.: 252.

ROLOFF, E. A.: 227.

ROSENBERGER, F.: 88.

ROTHENFELDER, L.: 288.

RUDIO, F.: 102, 273.

RÜTTENAUER, W.: 302.

RULANDIUS: 9; 46.

SACHS, EVA: 37, 51; 133.

SAPPHO (600 v. Chr.): I.

SAVILIUS, H.: 13, 14, 27.

SCHAARSCHMIDT: 303.

SCHANZ: 78.

SCHARPFF, F. A.: 297.

SCHEFFLER, K.: 204.

SCHEFFLER, J. (= ANGELUS SILESII, 1624—1677): 146; IV.

SCHNEIDER, CH.: 101.

SCHELLING, F. W. J. VON (1775—1854): 151; 158, 311; II, IV.

SCHIAPARELLI, G. V.: 80.

SCHIEBLER: 256.

SCHILLER, F. (1759—1805): IV.

SCHIMANK, H.: 167.

SCHLEIERMACHER, F. E. D. (1768—1834): 151; 312; IV.

SCHLÖMILCH: 1.

SCHMIDT, A.: 297.

- SCHMIDT, F.: 186.
 SCHMIDT, R.: 287.
 SCHMIDT, W.: 283.
 SCHÖNBERGER, L. (1882—1943): XXI;
 1, 22; 16, 246, 308.
 SCHOENE, H.: 283.
 SCHOLZ, H.: 155.
 SCHOPENHAUER, A. (1788—1860): IV.
 SCHRÖTER, M.: 311.
 SCHUBERT: 53.
 SCHÜTTE: 83.
 SCHULZ, K.: 287.
 SCHWARBER: XXV.
 SCHWEBSCH, E.: 10.
 SCHWEITZER, A.: 10.
 SEXTUS EMPIRIKUS (um 200 n. Chr.): 313;
 IV.
 SHAKESPEARE (1564—1616): IV.
 SIMON, M. (* 1844): 8, 319, 322.
 SIMPLIKIOS (6. Jh. n. Chr.): 284, 314; IV.
 SKEPTIKER: 306 u. a.
 SMITH, D. E.: 283.
 SOHNCKE, L. A. (1842—1897): 37, 51.
 SOKRATES (469—399 v. Chr.): 13, 32, 42,
 49, 50, 58, 63, 88, 167, 168, 170, 177,
 180, 182, 184, 257, 269, 270; 305; I, II,
 III.
 SOLON (um 600 v. Chr.): I.
 SOPHISTEN: II, III.
 SOPHOKLES (496—406 v. Chr.): I.
 SPEDDING: 254.
 SPEISER: 9.
 SPEISER, A.: XVII, XXIV, 7, 13, 15, 21,
 22, 24, 29, 30, 47, 53, 64, 107, 108; 1,
 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 25, 26,
 28, 74, 75, 85, 121, 127, 132; 23, 146, 191,
 214, 250, 273.
 SPENGEL, L.: 270.
 SPEUSIPPOS (4. Jh. v. Chr.): 74, 220, 291;
 III.
 SPRINGER, J.: 253, 271.
 SPIESS, O.: 159, 255.
 STÄCKEL, P. (* 1862): 304; 105.
 STAIGMÜLLER, H. (* 1857): 100.
 STAMMLER, G.: 166.
 STANGLMAYR: 265.
 STECK, M.: XXVI, 8, 13, 14, 26, 28, 33,
 44, 51, 67, 87, 98, 101, 122, 142, 148,
 155, 156, 158, 159, 160, 162, 286; 1, 2,
 4, 7, 10, 21, 26, 32, 43, 55, 56, 58, 74,
 83, 91, 108, 117, 118, 120, 125, 132,
 134, 157, 158, 160, 163, 164, 190, 195,
 205, 264; 24, 178, 183, 201, 215, 216,
 220, 221, 226, 229, 230, 233, 234, 235,
 239, 267, 290, 308.
 STENZEL, J.: 23; 12, 74; 171, 175.
 STESICHOROS (* 645 bis um 560 v. Chr.):
 211; II.
 STÖCKL, K.: 162.
 STOIKER: 219, 228, 302 u. a.; II, IV.
 STRABO (63—19): IV.
 STRASSMAIER: 253.
 STROUX, J.: 9.
 STRUNZ, F.: 113, 120, 121, 123, 126.
 STUDNIČKA, F. J.: 259.
 SUDHOFF, K.: 300.
 SUMERER: I.
 SUTER, H. (1848—1922): 55, 91.
 SYRIANOS (Schüler des Plutarch, Lehrer
 des Proklus): 10; IV.
 TACQUET, A. (1612—1660): 32.
 TANNERY, P. (1843—1904): 32, 37; 93,
 103, 266.
 TAYLOR, T.: 7, 437; 13, 14, 15.
 TEUBNER, B. G.: 244; 9; 7, 40, 164, 209,
 252, 273, 278, 305.
 THAER, C.: 13, 86, 88; 27, 30, 31, 36, 46,
 50, 56, 61, 74, 78, 79, 83, 97, 98, 99,
 105, 112, 113, 117, 118, 129, 133, 136,
 139, 144, 148, 151, 158, 168, 179, 185,
 190, 199, 204, 210, 221, 231, 232,
 250, 261, 274, 275, 280, 281, 282, 283,
 289, 293, 310, 311, 313, 321, 322, 323,
 324, 325, 329, 330; 12.
 THALES (von Milet, um 624—548 v.
 Chr.): 50, 211, 275, 341, 374, 409; 65,
 88; 97, 134; II.
 THEAITETOS (um 410 v. Chr.): 24, 68,
 87, 212, 213; 32, 44; III, IV.
 THEODOROS (von Kyrene, um 410 v.
 Chr.): 212, 248 (?); II.
 THEOKRITOS (3. Jhd. v. Chr.): IV.

- THEUDIOS (von Magnesia, um 340 v. Chr.): 213; III.
- THIBAUT: 262.
- THOMA, H.: 267.
- THOMAE, W.: 328.
- THOMAS (von Aquino, 1225—1274): 136; 315.
- THUKYDIDES (um 460—400 v. Chr.): I.
- TIMAIOS (s. auch den Platonischen Dialog „*Timaios*“): 49, 178, 179, 188, 191, 229, 241, 262, 269, 281, 286, 368; 9.
- TOEPLITZ, O.: 23, 106; 150, 160, 284.
- TORRICELLI, E. (1608—1647): 140; IV.
- TOSCANELLI, P. (Zeitgenosse des Cusanus): 133.
- TREUTLEIN: 81.
- TROLL, W.: XXII, XXIII, 134; 222, 223, 224.
- TROPFKE, R.: 8; 52, 283.
- TYCHO BRAHE (s. BRAHE).
- UCCELO, P.: 75.
- UEBERWASSER, W.: 4, 10; 156, 177, 189.
- UEBERWEG, F. (1826—1871): 11; 59.
- UEBINGER, J.: 318.
- ULFILAS (310—383): I.
- UNGER: 96.
- USENER, H.: 83, 269.
- VAILATI, G.: 73; 58, 157, 160, 165.
- VICTOR, PETRUS († 1321): 162.
- VIETA, F. (1540—1603): IV.
- VITRUVIUS, M. P. (um 15 v. Chr.): 8; IV.
- VOGT, H.: 37.
- VORLÄNDER, K.: 287.
- VORSOKRATIKER: 5, 13, 15, 18, 38, 42, 49, 53, 55, 107, 108, 211; 74, 203; 188, 316; II, III.
- VOSS, A.: 73; 128, 129, 130.
- WACHSMUTH, C.: 13, 14, 25, 42, 45.
- WAGNER, A.: 260.
- WAGNER, R. (1813—1883): IV.
- WAPPLER: 94.
- WEBER, H.: 322.
- WEBER: 310.
- WEIGEL, V. (1553—1588): 146; 317; IV.
- WEISSENBORN: 87.
- WEISS, O.: 311.
- WELLSTEIN, J.: 74.
- WEYGAND, C.: 225.
- WEYL, H.: 96; 54, 132; 153, 310.
- WIEDEMANN, A.: 324.
- WIELEITNER, H. (* 1874): 8; 54.
- WINCKELMANN, J. J. (1717—1768): XXV, 11; IV.
- WINDELBAND, W.: 60, 138.
- WISSOWA (s. PAULY): 187.
- WOLF, K. L.: XXII, XXIII; 182, 217, 222.
- WOLF, R. (1816—1893): 253; 84.
- WOLFERS, J. PH.: 296.
- WOLFF, G.: 244, 250.
- XENOKRATES (397—314 v. Chr.): 360; 12; IV.
- XENOPHANES (570—477 v. Chr.): II.
- XENOPHON (um 430—354 v. Chr.): I.
- XERXES (um 480 v. Chr.): I.
- ZAMBERTO, B. (* um 1473): 7, 162, 261, 321, 329, 394, 446, 447; 1.
- ZELLER, ED.: 9, 160, 169, 211; 58.
- ZELLER, E.: 141; 289.
- ZELLER, K.: 231.
- ZENO (von Kittion, 362—264 v. Chr.): IV.
- ZENO (von Elea, um 490—430 v. Chr.): 306, 316, 317, 318, 319, 389; II.
- ZENODOROS (um 180 v. Chr.): 281; IV.
- ZENODOT: 71, 222.
- ZEUTHEN, H. G. (1839—1920): 37; 8, 51, 90, 111, 250.
- ZOROASTER (Zarathustra [7. Jhd. v. Chr.): I.

Verzeichnis der Götternamen

APOLL: IV.	ISIS: I.
ARES (MARS): 282.	KALYPSO: 65, 204; 26.
ATHENE: I.	KRONOS: 282.
DEMETER: 286.	MARS (s. ARES).
DEMIURGOS: 174, 188.	NIOBE: IV.
DIONYSOS: 282.	ODYSSEUS: 26.
HADES: 282.	ORPHEUS: 274; I.
HENADEN: 265.	POSEIDON: I.
HERAKLES: II.	PROMETHEUS: 12.
HERMES: 65, 81, 184, 204, 375, 377; 26.	RHEA: 228, 286.
HERMES TRISMEGISTOS: 274; 132.	ZEUS: 228, 286.
HESTIA: 286.	

Sachweiser

Die Zahlen sind Seitenzahlen. — Kursiv-Ziffern sind die Nummern der Anmerkungen

Abbild: 20, 25, 65, 93, 95, 106, 111,
169, 170, 172, 173, 174, 200, 209, 227,
236, 246, 264, 267, 274.

Abbildung

— isomorphe: 123.

„Ableitung“: 54.

„Abschätzungen“: 278.

Absolutes: 25, 26, 130, 131, 132, 133,
134, 135, 136; 12.

Abstand: 192, 200, 202, 228, 238, 241,
287, 296.

absteigende Methode: 82.

Abstraktes: 130, 131.

„abstractio“: 135.

Abstraktion: 27, 44, 46, 47, 93, 99, 136,
137, 149, 170, 172, 173, 263.

Absurditätsverfahren (s. *deductio ad
absurdum*): 70, 217.

Achsen.

— des Kegels: 275.

— der Kugel: 275.

— des Zylinders: 239.

— kosmische: 228, 229.

actu ipsum esse: 135.

Adäquation: 148, 149.

Addition: 167, 208, 219, 220.

admiratio: 94, 212.

Ägypter: 210, 211, 261.

„ähnlich“ und „gleich“: 342.

Ähnlichkeit: 115, 116, 120, 121, 122, 136,
167, 186, 252, 257, 258, 271, 273, 301,
311.

Äquator: 254 (s. auch Astronomie).

Äquidistante: 287; 153.

Äquivalenz: 121, 122.

Ästhetik: 51, 144 (s. auch Kunst).

affirmatio: 81, 108, 233, 347.

aisthesis: 82; 7.

Akademie

— Platonische: 213.

Aktivität: 134.

Aktualität: 24, 135; 134, 203.

Akustik: 174 (s. Musik).

Akzidentien: 59, 60, 66, 71, 74, 78, 80,
92, 113, 186, 187, 205, 206, 208, 216,
219, 220, 221, 222, 224, 225, 251, 258,
286, 293, 294, 298, 307, 308.

Alchimie: 140.

Algebra

— geometrische: 35, 319.

All (= Weltall): 170, 177, 178, 179, 182,
185, 188, 210, 215, 227, 229, 235, 241,
257, 258, 262, 263, 264, 268, 269, 270,
286 u. a.

Allgemeines: 200, 201, 202, 203.

Allgemeinwissenschaft: 149.

Alogia: 23.

Analogie (s. Proportion): 174, 178, 193.

Analogieschluß: 70, 217.

Analyse: 52, 62, 66, 80, 81, 344.

Analysis: 48, 90, 96, 192, 193, 205 u. a.; 1.

analytische Methode: 62, 77, 79, 167,
192, 212, 214.

Anamnesis: 42, 44, 47, 57, 62, 63, 74,
95, 173, 175, 178, 194, 195, 202, 205,
267, 297, 304; 192.

Andere

— Das A.: 124, 410.

„Angabe“: 308, 309, 310, 311, 312, 313.

angeborene Idee: 63.

Anmut: 261.

Annäherungswerte: 208.

Anschauung: 11, 23, 25, 28, 29, 33, 39,
40, 44, 55, 83, 84, 85, 87, 91, 100, 101,
108, 109, 147, 148; 132.

„Anschauungsgeometrie“: 100, 102, 103.

Anschauungsreihen: 30, 84, 89, 91.

Antike: 16, 23, 25, 53, 73, 101, 150, 210.

Antinomien: 24 (s. auch Mengenlehre).

„Anwendungsgeometrie“: 102.

- Apagoge*: 77, 78, 314, 315.
Apeiron (s. Unbegrenztes): 17, 19, 24, 72, 83 ff., 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 98, 105, 111, 114, 115, 116, 119, 124, 132, 241; 74, 132.
 Apfelzahlen: 191.
 apodeiktische Methode: 62.
Apodeixis: 76; 221.
Apriori: 18, 27, 32, 93, 106, 108, 111, 112, 144, 145, 147, 148, 150, 151, 218, 229, 236, 240 u. a.
 apriorische Annahmen Euklids: 28, 87, 88 ff., 92, 119, 219 ff., 236 u. a.
 aptotische Probleme: 78 (s. Ptois).
 Arbeitshypothese: 97.
 Archetyp: 146.
 Archimedisches Axiom: 88 (s. Axiom des Eudoxos).
 Archimedische Spirale: 355; 260.
 Aristotelismus: 16.
 Arithmetik: 6, 14, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 74, 81, 83, 84, 86, 90, 104, 106, 109, 142, 166, 179, 181, 187, 188, 189, 190, 191, 199, 206, 207, 208, 210, 212, 230, 293, 295, 310 u. a.
 Arithmologie: 12, 75, 119.
 Artbegriffe (s. Gattungsbegriffe).
 Astrologie: 141, 143.
 Astronomie: 14, 18, 22, 31, 61, 62, 132, 133, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 181, 189, 190, 192, 211, 212, 217, 242, 254, 353, 363.
 Asymptoten: 288, 322, 423, 425, 427, 441; 188.
 Atomismus: 104.
 Atomistik: 6.
 Attribute: 40 u. a. (s. Begriffe).
 „Aufgabe“: 308, 309, 310.
 Aufgaben: 219, 222, 291, 307, 312.
 Aufklärung: 150.
 aufsteigende Methode: 82.
 Auftrieb: 210.
 Auge: 242.
 „Auge der Seele“: 177, 182, 194, 195.
 Ausdehnung: 174, 200, 202, 203, 204, 225, 226, 227, 232, 233, 235, 245, 246, 247, 253, 255, 273, 297, 305 u. a.
- ausgeschlossenes Drittes: 130.
 Außenwelt: 175, 204.
 Außenwinkel: 216, 311.
 Außenwinkelsatz: 186, 429 ff.; 216, 276, 307.
 Automatisches: 150.
 „Axiom“: 54, 192.
 Axiom des Eudoxos: 88, 251.
 Axiome der Mathematik: 43, 56, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 80, 101, 117 ff., 120, 205, 206, 217, 219, 291 ff., 293, 302 ff., 313 u. a.
 Barockzeitalter: 16.
 Basiswinkelsatz: 221, 222, 337 ff.; 64, 227, 241.
 Bauplan der Welt: 143, 144.
 Bausteinprinzip: 111.
 Bedeutung: 138.
 Bedeutungsforschung: 11, 55, 73, 75, 101, 105.
 Begriff: 11, 28, 32, 33, 57, 75, 87, 91, 97, 98, 102, 105, 109, 147, 148, 165, 166, 171, 173, 177, 186, 189, 205, 209, 229, 231, 263, 264, 296, 307 u. a.
 Begriffsbildung: 6, 37, 51, 85, 108.
 „Begriffsgeometrie“: 102, 103.
 Begriffsreihen: 27, 30, 84, 89.
 Begründungsmethodik: 6, 55 (s. auch Beweise).
 beilförmiger Winkel: 396, 397; 287.
 Beleuchtung: 235.
 „Berührung“: 67, 200, 203, 206, 207, 250, 280, 307 u. a.
 Beständigkeit: 40.
 Bestimmtheit: 259, 270 u. a.
 Bewegung: 48, 66, 75, 93, 109, 123, 136, 144, 167, 171, 174, 175, 185, 188, 191, 200, 202, 218, 228, 233, 235, 239, 240, 246, 249, 258, 259, 261, 263, 269, 270, 274, 280, 285, 286, 292, 296, 297, 304, 389, 439 u. a.
 Bewegungsparallelogramm: 239, 285; 37.
 „Beweis“: 308, 310, 311, 312, 434; 3.
 Beweis
 — mathematischer: 46, 59, 60, 62, 66, 70, 71, 76, 77, 80, 81, 97, 113, 147,

- 168, 172, 176, 181, 185, 186, 187, 192,
194, 203, 205, 213, 214, 215, 216, 217,
218, 220, 222, 291, 292, 294, 307, 308,
309, 310, 311, 313 u. a.
- Beweisarten der Mathematik: 187.
- beweisende Methode: 214.
- Bibliographie: 517—545.
- Bibliographisches: 7.
- Bildhauerkunst: 261 (s. Kunst).
- Bildmaterial von Proklus: 9.
- Bildung: 49, 177, 180, 185, 186, 210.
- Biographie des Proklus: 9.
- „Brechung“ (als Kategorie): 253.
- „Breite“: 235, 245, 246.
- Bruchteil: 166.
- Brüche: 167.
- Brunnen: 190, 235.
- Buchstaben: 216.
- Calcül: 103.
- causa*: 67, 106, 107, 134, 135, 149, 165,
171, 174, 179, 184, 188, 207, 208, 229,
230, 231, 233, 236, 256, 260, 262, 263,
264, 265, 266, 267, 271, 274, 282, 286,
287, 297, 308, 311 u. a.
- causa sui*: 93, 225, 262.
- Chemie: 140.
- Cissoide des Diokles: 243, 255, 272, 280,
288, 297; 92, 109, 130, 181.
- Cissoiden: 245, 254.
- clara et distincta perceptio*: 181.
- coincidentia oppositorum*: 16, 17, 23,
25, 26, 27, 30, 87, 97, 129, 136, 148,
150.
- comparatio*: 26, 129, 130, 131, 137.
- complicatio*: 26, 65, 133 ff., 134, 135,
136.
- concordantia*: 136 ff.
- contractio*: 135.
- Copula*: 118.
- Darstellung: 204.
- Da-Sein: 45.
- Dasselbige
— das D. (als Kategorie): 124, 257, 276,
410.
- Datum: 76, 82, 308, 309, 310, 311, 312.
- Deckoperationen: 30.
- deductio ad absurdum*: 70, 77, 80, 81,
342, 344 ff., 377; 53, 220, 246.
- definierende Methode: 214.
- Definition
— Lehre von der D.: 20, 62, 66, 80,
110, 192, 205, 266, 310.
— bei Euklid: 56, 66, 71, 73, 80, 106,
110, 114, 192, 205, 219, 223, 225 ff.,
266, 310.
- Dehnung (s. Spannung): 113.
- Delisches Problem (s. Würfelverdoppe-
lung): 222, 223.
- Demiurgos (s. Weltenschöpfer): 174,
188.
- Denken: 28, 29, 40, 83, 91, 96, 101, 129,
137, 147, 148, 149 u. a.
- Denken und Anschauen: 20, 91, 147 u. a.
- Denkprinzip: 63.
- Denkweise
— mathematische: 22, 29, 49, 116, 126,
128, 143, 148, 203 u. a.
- Denkwerkzeuge
— mathematische: 7, 40 u. a.
- deutscher Geistraum: 25, 124, 125, 132,
148.
- deutsche Geisteslinie: 26, 29, 38, 39, 56,
101, 124, 145, 151.
- „Diagonale“: 275.
- diätetische Methode: 62.
- Dialektik: 6, 13, 19, 23, 24, 42, 43, 49,
52, 53, 56, 57, 58, 62, 66, 68, 70, 79,
86, 89, 124, 166, 167, 168, 169, 175,
178, 185, 192, 193, 205, 209, 214, 218,
302, 336; 7, 28, 47, 55, 74.
- Dianoëtik: 7.
- dianoia*: 169.
- Dichtung (s. Kunst): 50, 180.
- Diese (s. Musik): 175.
- Differential: 32.
- Differentialquotient: 32.
- Dimension: 114, 200, 232, 246 u. a.
- Dioptrik: 192.
- diorismos*: 76, 308, 309; 221.
- direktes Beweisverfahren: 81.

- diskursive Methode: 40, 43, 52, 57, 147, 164, 169, 177, 192.
 Doppeloktav (s. Musik): 174.
doxa: 40, 43, 46, 51, 56.
 Doxologie: 137.
 Drama (s. Kunst): 180.
 Dreidimensionalität: 225.
 Dreieck: 172, 186, 200, 223, 246, 252, 254, 257, 274, 277, 279, 280 ff., 281, 307 ff., 308 u. a.
 Dreimaster: 210.
 Dreizahl: 279.
 Dualität auf der Kugel: 114.
 „Durchmesser“: 275, 276, 278.
 dyadisch: 235.
 Dynamik: 144.
 Ebene: 96, 114 ff., 247 ff., 248, 250, 254, 255, 260, 271, 287, 305 u. a.; 99.
 „ebene Geometrie“: 114, 250.
 Ebenmaß: 21, 268, 269, 270.
eidolon: 25, 149.
eidos: 149, 232.
 „eigenbewegte Zahlen“ (s. Arithmologie): 48, 174.
 Eigenbewegung: 173, 263, 265.
 Eigenschaft: 219.
Eikasia: 7.
 „Einbeschriebensein“: 215.
 Einfachheit: 41, 42, 74, 167, 193, 207, 225, 230, 231, 239, 256, 268, 269, 271, 272, 283, 291, 293; 194.
 eingeborene Idee: 144.
 Einheit: 48, 62, 67, 74, 86, 95, 104, 106, 107, 109, 165, 166, 174, 190, 207, 208, 230, 232, 238, 268, 271, 278, 279, 295, 298 u. a.
 Einheitsprinzipien: 256.
 „Eins“: 23, 48.
 Einteilung der Dreiecke: 282 ff.
 Einteilung der Vierecke: 283 ff.
 Einwand: 77, 78, 80.
 Einzahl: 234.
 Einzelsein: 86.
 Einzelwissenschaften: 31, 54.
Ekthesis: 76, 308, 309; 221.
 eleatische Schule: 19, 20.
 Elementarbücher
 — des Euklid: 213, 214, 215, 217, 222, 224.
 — des Hippokrates: 212.
 — des Leon: 212.
 „elementarhaft“: 216.
 Elementarlehre: 199, 209, 224.
 „Elemente“: 50.
 Elementenlehre: 178, 179, 213, 214, 218, 222, 223, 230, 257, 261, 269, 270, 281, 282, 286.
Elleipsis: 458; 27, 29.
 „Ellipse“: 156, 206, 237, 243, 244, 254, 271, 275, 277, 285, 288.
 Ellipsenkonstruktion: 240.
 Ellipsenzirkel: 89.
 Ellipsoide: 249.
 Emanationen: 29, 137, 138, 170, 171, 220.
 Emanationsprozeß: 1.
 Empirismus: 18, 99, 100, 102, 130, 143, 144, 148, 150 u. a.
 „Ende“: 260, 261.
 Endliches: 27, 31 u. a., 131.
Enstasis: 77, 78, 80, 314, 315, 367.
 Entelechie: 136.
 „Entstehen“: 84 u. a.
 Entwicklungsprinzip: 24, 263.
 Entwurf: 204.
 Epheulinie (s. Cissoide): 254.
 Epikureer: 306.
Epistrophé: 4, 9, 132.
Epochè: 306.
 Erde: 128, 132, 140, 141, 142, 144, 192, 235, 286.
 „Erde“: 223.
 „Erfahrung“ bei Platon: 52, 184.
 Erfahrungswissenschaften: 37, 51, 57, 181.
 Ergänzungsparallelogramm: 456 ff.; 328.
 Erkenntnis: 20, 26, 27, 30, 31, 43, 44, 49, 53, 90, 91, 96, 137, 140, 142, 147, 148, 149, 150, 164, 167, 170, 173, 182, 184, 193, 199, 201, 203, 204, 209, 216, 217, 230, 231, 232, 264, 269, 286, 291, 429 u. a.
 Erkenntnisgrade: 7.

Erkenntnistheorie: 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 53, 56, 91, 96, 105, 106, 122, 128, 133, 136, 149, 151, 163, 169, 176, 177, 181, 202, 217, 230 u. a.

Eros: 177, 228, 269.

„Erscheinung“: 132, 229, 264.

Erziehung: 49, 177, 215.

Ethik: 50, 179; 9 a.

Eudämonie: 181, 195.

Euthygramm: 439.

Evidenzlehre: 55, 71, 73, 74, 80, 291, 293, 302, 303, 304.

Exaktheit (s. Genauigkeit): 41, 42, 44, 47, 52, 59, 93, 166, 167, 170, 171, 187, 193, 199, 203, 214, 260, 263 u. a.

Exhaustionsmethode: 87, 130; 317.

Existenz
— mathematische: 40, 76, 108, 119, 124, 170, 171, 225, 229, 280, 297, 307; 12.

Existenzbeweis für die Idee: 99 ff., 172 ff. u. a.

Experiment: 31, 50, 149; 132.

explicatio: 40, 65, 95, 133, 135, 136, 204, 226.

Fall (s. *Ptois*): 307; 231 a.

„Familien“: 122.

Farbenlehre: 132.

Fehlschlüsse: 69, 206, 215.

„Feld“: 118, 119.

„Feuer“ (s. Wärme): 223, 230, 293.

Figur: 47, 48, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 71, 88, 93, 94, 95, 97, 107, 110, 117, 121, 146, 149, 166, 167, 174, 175, 178, 179, 180, 186, 190, 194, 199, 200, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 215, 217, 219, 220, 222, 223, 225, 229, 231, 232, 235, 237, 238, 240, 243, 246, 247, 252, 256, 259, 261 ff., 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 271, 272, 276, 277, 279, 280, 286, 288, 297, 298, 310, 453 u. a.

figurale Welt der Geometrie: 116, 121.

„Figurengestalt“: 110.

Finalität: 137.

infiniter Standpunkt: 27, 96, 97.

Finites: 131.

Finsternisbestimmung (s. Astronomie): 235, 242.

Finsternisse (s. Astronomie): 353.

Fixsternsystem (s. Astronomie): 132.

Flache
— das F.: 226.

„Fläche“: 64, 88, 92, 93, 105, 108, 113 ff., 133, 135, 168, 180, 190, 225, 226, 227, 229, 232, 233, 234, 235, 238, 243, 244, 245 ff., 247, 250, 251, 252, 253, 260, 280, 287, 304 u. a.

Flächenanlagen: 204, 206, 220, 250, 307, 458; 230.

Flächenfiguren: 245.

Flächeninhalt: 332, 442; 236.

Flächenlinien: 240, 243.

Flächenprodukte: 268.

Flächenwinkel: 254, 256.

Flächenzahlen: 62, 174, 190.

Fluchtpunkt: 191; 19.

Forderung (s. Postulat): 205, 206.

Formalexistenz: 23.

Formalismus
— mathematischer: 26, 27, 46, 55, 61, 66, 78, 93, 94, 96, 99, 100, 101, 102, 103, 116, 121, 132, 143, 147, 148; 125, 160.

Formen: 21, 151.

Formel: 103.

Forschung (s. Wissenschaft): 52, 54, 81, 176, 182, 195, 213, 292, 308.

Fünfeck: 36.

Fünfeckneck: 353; 252.

Fundamentalphilosophie: 6.

fundamenta mathematicae: 56.

Funktion: 96, 106.

Funktionalgesetze: 87, 118, 120 ff., 121, 123.

Ganzheit (als Kategorie): 95, 110, 151, 180, 229, 234, 266, 267.

Ganzton (s. Musik): 175.

Gattungsbegriffe: 108, 109, 110, 112, 114, 115, 116, 163 ff., 177, 193, 205, 221, 255, 266, 283, 285, 298, 303 u. a.

Gebläse: 191.

Gegebenheit: 18, 148.

- Gegenstände: 39, 40, 41, 43, 46, 54, 58, 59, 61, 64, 66, 74, 98 ff., 103, 105, 124, 133, 149, 150, 164, 176, 185, 187, 189, 192, 200, 202, 205, 206, 209, 215, 217, 219, 222, 230, 232, 265, 269, 291, 294, 296, 304, 307, 311 u. a.
- Gegenständlichkeit
- mathematische: 11, 17, 28, 55.
- Genesis der G.: 17, 42.
- Gegenwinkelsatz: 418.
- Geist: 31, 44, 46, 47, 63, 90, 94, 133, 134, 135, 138, 144, 145, 146, 147, 151, 172, 173, 174, 188, 194, 203, 204, 205, 215, 220, 223, 231, 250, 291 u. a.
- Geistesforschung: 31.
- Geistesgeschichte: 37, 38, 50, 53, 61, 85, 97, 103, 104, 125, 126, 133, 135, 142, 147.
- Geisteswissenschaften: 79, 219, 220, 336 u. a.
- Geistgestalt: 5, 32, 33, 39, 125.
- geistiger Seinsinhalt (=Idee): 203.
- Geltung: 52, 53, 54, 69, 94, 96, 101, 102, 103, 193, 214, 216.
- Gemeinbegriff: 217, 219, 298, 303.
- Gemischte
- das G.: 93, 95, 238, 247, 248, 266, 280.
- Genauigkeit: 1.
- Genesis der Mathematik: 84, 85.
- genetische Methode: 74.
- Geodäsie: 62, 142, 181, 189, 190, 331, 332, 447.
- geodätische Linien: 112, 113, 241, 242.
- Geographie: 190, 210, 447.
- Geometrie: 6, 14, 31, 32, 61, 62, 64, 65, 67, 70, 74, 79, 81, 83, 84, 86, 88, 90, 98, 99, 100, 101, 104, 106, 116, 142, 144, 146, 166, 179, 180, 181, 188, 189, 190, 191, 199, 200, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 224, 230, 245, 247, 261, 295, 306, 307, 308 u. a.
- geozentrisches Weltsystem: 133.
- Gerade: 93, 96, 100, 101, 111, 112 ff., 113, 200, 203, 207, 212, 229, 238 ff., 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, 250, 266, 267, 268, 269, 271, 275, 276, 279, 280, 305, 307, 317 u. a.; 83.
- Gerade (kategorial)
- das G.: 47, 112, 174, 188, 240, 241, 247, 248, 250, 258, 273, 280, 286.
- Geradheit (als Kategorie): 253.
- geradlinige Figuren: 278 ff., 275, 280 u. a.
- geradliniger Winkel: 256, 257, 258, 259 u. a.
- Geschichtsschreibung: 189, 213.
- Gesetz: 134, 142, 144.
- Gesetze des Geistes: 84, 85.
- Gestalt: 28, 65, 73, 83, 85, 94, 96, 104, 107, 108, 145, 166, 201, 202, 203, 231, 232, 235, 261, 263, 265, 271; 1, 74, 179, 190.
- Gestaltlehre der Mathematik: 11, 13, 28, 29, 32, 33, 37, 38, 42, 73, 87, 89, 95, 98 ff., 103, 104, 117, 124, 125, 132, 133, 181; 179.
- Gestaltprinzipien: 12, 28, 32, 33, 88, 89.
- Gewicht: 180, 191, 200, 210, 293.
- Gezeiten: 167.
- Glaube: 137.
- gleichartige Gebilde: 335.
- Gleichberechtigung: 12. .
- Gleichgewicht: 191, 293.
- Gleichheit: 20, 21, 45, 50, 64, 75, 79, 85, 87, 88, 98, 113, 115, 116, 117 ff., 118, 120 ff., 121, 122, 123, 124, 131, 133, 135, 136, 166, 167, 170, 178, 180, 199, 200, 206, 210, 221, 223, 251, 252, 257, 258, 260, 272, 274, 280, 283, 284, 286, 294, 298, 300, 301, 302, 304, 311, 317, 330, 370, 384, 413, 441, 453; 56.
- Gleichmäßigkeit: 113.
- gleichschenkeliges Dreieck: 172, 218 u. a.
- gleichseitiges Dreieck: 187 u. a.
- „Gleichung“: 141.
- Gleichzahligkeit: 121.
- Gliederung: 217.
- Gnomon: 363; 131.
- Gnomonik: 192.
- Götterlehre: 178, 262, 263, 264, 265, 268, 269, 282, 286.
- Götterordnungen: 258.
- Gold: 239.
- goldener Schnitt: 208; 36 (s. *sectio aurea*).

Gott: 97, 128, 129, 135, 137, 138, 142, 144, 145, 146, 150, 195.
 — als *monas monadorum*: 146.
 Gravitation
 — bei Kepler: 144, 146.
 — bei Newton: 144, 146.
 Grenze (s. *Peras*): 17, 65, 83 ff., 86, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 105, 109, 112, 114, 115, 117, 120, 124, 165, 166, 176, 205, 206, 209, 225, 226, 227, 229, 234, 236, 237, 238, 240, 241, 245, 246, 251, 258, 259, 260, 261, 262, 264, 265, 266, 268, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 279, 298, 300, 305, 312, 384 u. a.
 — bei Euklid: 86, 113, 114.
 Grenzl意思: 280.
 Grenzwert: 48; 1.
 „Größe“
 — allgemeine mathematische: 61, 76, 88, 89, 90, 96, 188, 189, 203, 207, 250, 260, 276, 294, 295, 304, 305, 310 u. a.
 — gleichartige: 88, 89.
 „Größenaxiome“: 302 ff., 304, 305.
 Grundlagenforschung: 147.
 Gruppeneigenschaft: 30.
 Gute: 180, 185, 286.
 Haben: 136.
 Halbierung des Kreises: 275, 276.
 Halbierung eines Winkels: 311.
 Halbkreis: 276 ff., 277, 278, 279.
 Halbkreiswinkel: 238, 245, 255, 259.
 Halbquadrat: 322.
 Halbtonverhältnis (s. Musik): 175.
 Handel: 211.
 Harmonielehre (s. Musik): 22.
 Harmonieprinzip
 — in der deutschen Linie: 85, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 146, 147, 151.
 — bei Kepler: 22, 31, 144; 4.
 — bei Platon: 21, 47, 48, 58, 177.
 — bei Proklus: 31, 60, 85, 124, 179, 187, 191, 370; 4.
 — bei den Pythagoreern: 18; 31, 51, 85, 135.
 „Harmonik“: 59, 144, 187; 8.
 Hebelsatz: 161.

Heilkunst (s. Medizin): 185.
 heliozentrisches Weltsystem: 139, 141, 142, 143.
 Henaden: 265.
Heteromekes: 34.
 Hierarchie
 — göttliche: 258, 274, 286.
 — intellektuelle: 270.
 hierarchische Logik: 132.
 Hilfssatz (s. *Lemma*): 77, 217, 224, 307.
 Himmel (s. Astronomie): 178, 268, 270, 282.
 Himmelsbewegungen (s. Astronomie): 192.
 Himmelskörper (s. Astronomie): 192, 261, 270.
 Himmelsmechanik (s. Sphärik): 61, 129, 188, 207.
 Himmelspol (s. Astronomie): 228.
 Hippopede: 244, 254, 255; 95, 110.
 „Höhe“: 259, 287.
 Hökensatz: 216.
 Höhlengleichnis: 41, 49, 50, 63, 94, 177, 194, 195, 264; 7, 24, 123.
 „hohlwinkelige Dreiecke“: 281.
 „homogene Größe“: 251, 252.
 horistische Methode: 62.
 hornförmiger Winkel: 238, 245, 251, 255, 259, 330, 355; 96, 107, 114, 234, 255.
 Horoskop des Proklus: 9, 10.
 Humanismus: 16, 126, 128, 138, 151.
 Hyperbel: 243, 244, 288, 441.
 „Hyperbeln“: 206.
Hyperbolé: 458; 27, 29.
 Hyperboloide: 249.
 Hygrometer: 128.
 Hypotenuse: 224.
 hypothetische Methode: 62.
 hypothetischer Schluß: 81.
 Ich
 — „reines“: 151.
 Idealismus
 — allgemeiner: 32, 39, 42, 46, 54, 94, 103, 125, 126, 128, 132, 138 ff., 147, 151; 74, 132.

- deutscher: 18, 32, 38, 42, 46, 54, 94, 103, 125 ff., 126, 128, 132, 138 ff., 142, 147, 148, 151, 152; 74, 132.
- Idee: 22, 23, 27, 32, 39, 44, 47, 48, 57, 63, 64, 65, 86, 92, 94, 95, 97, 99, 100, 101, 102, 107, 114, 117, 118, 124, 132, 133, 136, 137, 142, 143, 147, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 182, 185, 186, 189, 194, 195, 200, 202, 203, 204, 205, 209, 220, 225, 226, 228, 229, 231, 232, 236, 250, 256, 258, 260, 261, 263, 264, 265, 266, 267, 281, 296, 441; 74.
- „Ideengeometrie“: 102.
- Ideenlehre: 6, 11, 15, 19, 23, 32, 111 u. a.
- Ideenphänomen: 11.
- Identität: 59, 60, 86, 87, 115, 120, 150, 165, 166, 187, 188, 258, 273, 316, 426.
- Ikosaeder: 461.
- Immanenz: 136.
- Immaterialität: 41, 164, 170, 171, 177, 178, 183, 193, 201, 209, 225, 226, 232, 233, 236, 256, 262, 263, 268.
- implizite Definition: 160.
- indirektes Beweisverfahren (s. *deductio ad absurdum*): 81.
- Individualprinzip: 151.
- Infinites: 131.
- Infinitesimales: 97, 104, 149; 268.
- infinitesimales Bewußtsein: 27, 87; 33.
- Infinitesimalrechnung: 27, 87, 128, 149, 151.
- Inhärenz: 136.
- Inkommensurabilität (s. Irrationalität): 360.
- innate Ideen: 150.
- Innenwelt: 94, 100, 175.
- Innenwinkel: 216, 295, 311 u. a.
- Integralrechnung: 128.
- „Integration“: 87.
- Intellekt: 56, 127, 133, 164, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 182, 187, 193, 209, 229, 241, 256, 259, 262, 263, 264, 268, 269 u. a.
- intellektuelle Anschauung: 40, 168, 182, 199, 209, 264.
- „intellektueller Wagen“: 262.
- „*intellectus*“: 97.
- Intelligible: 43, 45, 59, 61, 67, 83, 93, 110, 164, 169, 185, 189, 199, 201, 202, 207, 220, 223, 227, 263, 269, 274, 286 u. a.
- „intelligible Materie“: 220, 226, 232, 265.
- intentionales Sein: 170, 201.
- „intrinsek“: 71.
- Intuition: 40, 96, 97, 147, 189.
- Instrumente: 192.
- irdische Welt: 268.
- „irrational“: 48, 86, 129, 166, 207, 211, 218; 1, 9.
- Irrationales: 24, 42, 67, 207; 32, 34, 37, 38, 49, 264, 268.
- Isomorphie: 118, 120, 122 ff., 123.
- Isomorphismus: 123.
- Isotes Platons: 131.
- Jurisprudenz: 9.
- Kälte: 251.
- Kalenderwesen: 209 (s. Astronomie).
- kallokagathia*: 180.
- Kanonik: 62, 189, 191; 22.
- kataskeue*: 76; 221.
- Kategorien: 39, 43, 65, 94, 95, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 119, 120, 124, 125, 137, 138, 163, 169, 185, 187, 188, 199, 201, 209, 225, 229, 250, 251, 252, 253, 257, 310, 434; 76.
- Kategorienlehre: 28, 43, 44, 52, 60, 61, 65, 95, 109, 111, 115, 117, 119, 124, 125, 169.
- Katheten: 224, 257.
- kathetos*: 363.
- Katoptrik: 57, 176, 191, 214; 6, 21.
- Kausalität: 32, 137, 144, 308.
- Kegel: 238, 239, 243, 244, 245, 248, 250, 251, 254, 272, 275, 288; 100.
- Kegelschnitte: 244, 248, 288, 414, 440, 441, 458; 87.
- Keplersche Gesetze: 144.
- kinetische Energie: 191, 192; 23.
- „Klammer der Figuren“: 256.
- klare Bestimmtheit: 181.
- Klassenbegriffe: 120, 122.

- Klassifizierung: 60, 82, 116.
koinai ennoiai: 217.
 Koinzidenzprinzip: 27.
 „Knoten“ (s. Astronomie): 254.
 Königsweg der Geometrie: 214.
 Körper: 64, 65, 66, 88, 92, 93, 110, 113, 133, 135, 174, 179, 180, 190, 200, 205, 226, 227, 228, 229, 233, 235, 238, 243, 245, 246, 247, 250, 252, 253, 260, 271 u. a.
 Körperfiguren: 244, 268, 275.
 Körperlinien: 240, 244.
 Körperschnitte: 238, 244.
 Körperwelt: 188.
 Körperwinkel: 251, 254, 255, 256.
 Körperzahlen: 62, 174, 190.
 Kollektivbegriffe: 173.
 Kommensurabilität: 86, 87, 89, 122, 166, 208, 310 u. a.
 Kommutativität: 121.
 Komplementärwinkel: 238.
 Konchoide (s. Muschellinie): 243, 288, 355; 92.
 Kongruenz: 121, 302, 304, 305; 191.
 Kongruenzsätze
 — erster: 330 ff.; 197, 233.
 — zweiter: 350 ff.; 249.
 — dritter: 406 ff.; 294.
 konische Linien: 244, 249, 278, 288; 138.
 konische Schraubenlinie: 239, 244; 86.
 konkav: 112.
 „konkave Winkel“: 254.
 Konkretes: 96.
 „Konoid“: 249.
 Konoide: 103.
 Konstruktion: 117, 118, 119, 124, 147, 214, 219, 220, 222, 279, 291, 292, 294, 307, 310, 312, 313, 321; 179.
 „Konstruktion“: 308.
 „Konstruktionsfälle“: 224.
 Konstruktionsmittel: 117, 118, 124.
 Konstruktion und Zeichnung: 461.
 kontinuierliche Größen: 207.
 Kontinuität des Geistes: 22, 25.
 Kontinuum: 24, 87, 97; 32, 43.
 Kontraktes: 130, 131.
 konvex: 112.
 „konvexe Winkel“: 254.
 konzentrische Kreise (s. „Krone“): 277, 279, 288.
 Kosmogonie: 19.
 Kosmologie: 8; 128, 136, 137, 145, 149.
 Kosmos
 — allgemeiner: 132, 142.
 — des Intelligiblen: 85, 274.
 — pythagoreischer: 18, 48, 83, 85, 274.
 „Kosmos“: 4, 132.
 Kosmosophie: 146.
 Kraft: 144, 145, 179, 261.
 Kräfte der Mathematik: 13, 117.
 Kreisbahnen: 268.
 Kreisbewegung: 175, 228, 249, 268, 269, 270, 274, 285.
 Kreisbogen am Himmel: 203.
 Kreisdurchmesser (s. Durchmesser).
 Kreisfigur: 83, 93, 95, 111, 129, 130, 174, 175, 187, 188, 200, 202, 203, 223, 229, 237, 238, 239, 240, 241, 243, 244, 245, 246, 250, 254, 255, 256, 266, 267, 268 ff., 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 279, 280, 285, 288, 292, 297, 308 u. a.
 Kreisanze (s. Peripherie): 272.
 Kreiskonstruktion: 240.
 Kreiskonstruktur (s. Quadratur d. K.): 204.
 Kreisrund: 237, 273, 277, 307.
 Kreiswinkel: 299.
 Kriegsmaschinen: 191, 209.
 Kristallstruktur: 30.
 „Krone“: 277, 279; 142.
 „Kronenrechnung“: 210.
 Krumme
 — das K. (als Kategorie): 250.
 Kugel: 139, 146, 215, 216, 238, 239, 244, 246, 247, 248, 249, 250, 254, 275, 308.
 Kulturmorphologie: 3, 125, 142, 151.
 Kunst: 12, 13, 20, 22, 37, 38, 48, 50, 51, 52, 55, 58, 59, 79, 86, 126, 127, 141, 143, 145, 151, 180, 181, 184, 185, 186, 187, 191, 210, 218, 261, 336; 4, 10, 12.
 Kurve (Linie): 64, 92, 93, 105, 108, 109, 110, 111, 133, 135, 199, 218, 225, 226, 227, 229, 232 ff., 234, 235, 236, 237,

- 238, 239, 241, 246, 247, 248, 250, 253, 261; 78.
- Länderverteilungen (s. Geodäsie): 331, 332.
- „Länge“ (als Kategorie): 232, 233, 235, 245, 246.
- „Lage“ (als Kategorie): 66, 67, 76, 104, 107, 204, 205, 207, 220, 221, 232, 255, 273, 297, 307, 310 u. a.
- Leben: 173, 177, 179, 181, 182, 183, 189, 194, 195, 202, 209, 224, 262, 270, 286, 368.
- lebendige Kraft: 191.
- Leerformen des Geistes: 28, 55, 101, 102, 145; 74.
- Lehrsätze: 70, 166, 175, 178, 181, 189, 190, 207, 208, 212, 214, 215, 216, 217, 219, 220, 222, 224, 291, 293, 295, 301, 302, 308, 337, 438, 440 u. a.
- Lehrsatz des Pythagoras (s. pythagor. Satz): 224.
- Leib-Seele: 269.
- Leiden: 201, 205, 261, 296 u. a.
- „Leitsätze“: 80, 344.
- Lemma* (Hilfssatz): 77, 224, 314; 219.
- Licht: 192, 235.
- Lichtreflexion (s. Katoptrik): 191, 214.
- Lied (s. Musik): 179.
- Lineal
- begrenztes: 117, 296 ff.; 158, 178, 179.
- unbegrenztes: 117, 296 ff.; 163, 178, 179.
- Lineargeschwindigkeit: 239.
- Linearzahlen: 62, 174, 190.
- „Linie“ (s. Kurve).
- Liniengleichnis Platons: 7.
- Lösung: 205, 212, 216.
- Logik
- allgemeine: 32, 44, 53, 55, 130, 131, 132, 135, 147, 266.
- bei Aristoteles: 32, 131.
- bei Cusanus: 130 ff., 132, 133, 149.
- bei Platon: 20.
- der Eleaten: 19.
- hierarchische: 132.
- scholastische: 131, 132.
- sokratische: 32.
- Logistik: 26, 46, 55, 66, 67, 93, 94, 99, 101, 102, 116, 132, 147, 148; 125, 160.
- „Logistik“: 62, 189, 190, 191.
- logos*: 159; 4.
- Lot: 216, 222, 237, 257, 259, 260.
- Lotefällen: 82, 226, 267.
- Loteziehen: 265.
- Loxodrome: 239, 244.
- „Luft“: 223.
- lunulae* (des Hippokrates): 137.
- Mäeutik: 42, 171, 195.
- „männliches Prinzip“: 271.
- magia naturalis*: 140.
- Magie: 139, 191.
- Malerei: 30.
- Mannigfaltigkeit: 42, 45, 49, 83, 84, 86, 91, 94, 95, 110, 148, 149, 165, 169, 171, 175, 193, 209, 215, 249, 256, 258, 261, 263, 270, 271, 307 u. a.
- „Mannigfaltigkeiten“: 84.
- Maschinen: 191.
- Maß: 20, 86, 115, 116, 119, 124, 136, 140, 180, 181, 246, 259, 260, 267, 282, 283, 286.
- Materialismus: 75.
- Materie: 46, 47, 64, 93, 144, 165, 172, 173, 181, 199, 200, 201, 202, 203, 209, 225, 226, 227, 232, 252, 261, 263, 265, 283, 310; 4.
- mathema*: 147, 194, 195, 212.
- Mathematik: 18, 20, 22, 27, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 53, 56, 58, 61, 62, 63, 88 ff., 94, 95, 97, 98, 99, 101, 103, 105, 106, 128, 130, 135, 136, 139, 141, 145, 146, 147, 149, 150, 166, 167, 171, 174, 175, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 187, 188, 190, 192, 194, 195, 199, 208, 212, 213, 308; 4.
- formalistische: 23.
- Problem der M.: 6.
- reine: 5.
- ihre Teildisziplinen: 187, 188, 189, 190.
- „Mathematik“ (Name): 62, 63, 194, 195, 213.

mathematische Denkweise: 21, 22.
 mathematische mens: 135.
 Mathematikerverzeichnis
 — des Proklus: 8, 68, 159, 210 ff.; 40, 42.
mathesis pura: 5, 42, 52, 102.
mathesis universalis: 124, 149, 180, 193.
maximum absolutum: 131.
 Maxima-Minima-Probleme: 443 ff.; 317.
 Mechanik: 57, 62, 142, 149, 176, 189,
 191, 207, 209, 219, 220.
 Mechanismus: 39.
 Medizin: 128, 185, 189, 190, 230, 231.
 Meinung (*doxa*): 182.
 Mengenlehre: 24, 95, 96; 134, 195.
 Meßbare: 20.
 Messen: 31, 50, 89, 139, 149, 180, 210, 235.
 Metaphysik: 6, 32, 44, 46, 53, 116, 119,
 144, 145, 146, 147.
 Metamorphosenlehre: 18, 49.
 Meteorologie: 192.
methexis-Lehre (s. Teilhabe): 20, 23, 59,
 84, 86, 91, 92, 133, 136, 189, 201, 202,
 220, 227, 233, 235, 236, 278, 286, 370, 371.
 Methoden:
 — apodeiktische: 62.
 — analytische: 192.
 — bestimmende: 192.
 — beweisende: 192.
 — diäretische: 62.
 — horistische: 62.
 — mathematische: 6, 30, 129, 192, 314,
 315.
 — philosophische: 22, 27, 30, 129, 192.
 — progressive: 57.
 — regressive: 57.
 — trennende: 192.
 Methodenlehre der Mathematik: 11, 38,
 40, 46, 53 ff., 64, 69 ff., 72, 81, 82, 85,
 89, 175, 176 ff., 292, 307.
 Methodik: 7, 129, 135.
methodos: 53, 55.
 Metrik in der Mathematik: 89.
 Mischgattung: 240.
 Mischung: 238, 244, 248.
 Mittelalter: 16, 27, 137, 140, 150, 210.
 „Mittelglieder“: 54, 76, 292, 294, 302,
 309, 310, 311, 333, 375, 396.

Mittelpunkt
 — kosmischer: 229.
 Modell: 20, 41, 55, 85.
 Möglichkeit (s. *potentia*): 76, 117, 251,
 267, 296, 307, 308.
 „Möndchen“ (s. *lunulae*): 277, 278, 279,
 316.
 Möndchenquadratur: 212; 111, 137, 224.
 Möndchenwinkel: 254, 299, 300.
 Monade: 32
 — bei Leibniz: 32, 146, 147.
 — bei Proklus: 32, 286.
 „Monade“: 286.
 Monadologie: 32, 150, 151.
 Mond (s. Astronomie): 192, 235, 242, 261.
 Mondbahn: 141 (s. Astronomie).
monè: 82; 26.
 Monochord (s. Musik): 191.
morphè: 42.
 Morphologie: 95, 98, 103.
 — des Geistes: 19.
 — der Wissenschaften: 12.
 „Mütter“: 60.
 Multiplikation: 278, 279.
mundus intelligibilis: 39, 41, 43, 46,
 50, 60, 61, 64, 93, 96, 100, 146, 164,
 176, 177, 186, 187, 199, 204, 241.
mundus sensibilis: 39, 41, 42, 43, 44,
 46, 48, 60, 61, 64, 72, 93, 96, 100, 164,
 170, 171, 176, 181, 187, 199, 200, 203,
 207, 209, 223, 224, 241, 256, 264.
 Muschellinie (s. Konchoide): 243, 244,
 288, 414; 92, 155.
 Musik: 18, 22, 30, 32, 51, 58, 61, 90, 174,
 177, 179, 180, 188, 206, 207, 211, 212,
 214; 8, 9, 15, 22.
 Musiktheorie: 32, 51, 180.
 Mystik: 128, 130, 137, 138, 140, 146.
 — geometrische: 146, 147.
 — mathematische: 26.
 — neuplatonische: 16.
 Nachwuchs: 167, 179.
 Näherungswerte: 208.
 Nativität des Proklus: 10.
 „Natur“: 31, 46, 57, 84, 93, 94, 110,
 137, 150, 166, 172, 176, 202, 209, 225.

- 226, 229, 235, 246, 261, 263, 264, 270, 282, 283; 9.
- Naturbegriff: 136, 137, 150.
- Naturdinge: 229, 239, 281.
- Naturforschung: 31, 32, 82, 145, 146, 149, 176, 178, 186, 187, 188, 192, 218, 231; 132.
- Naturgesetz: 31, 144 u. a.
- Naturwissenschaften: 12, 13, 16, 26, 31, 32, 49, 50, 57, 60, 61, 62.
- Nautik: 181, 210, 409.
- Nebenwinkel: 257, 259.
- negatio* (generelle): 81, 106, 108, 113, 131, 231, 233, 235, 245, 284 u. a.
- „Neigung“: 115.
- Neigung (kategorial): 250, 251, 252, 253, 255, 260.
- Neuplatonismus: 24, 25, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 145, 146, 156, 157, 170, 234 u. a.
- Neuzeit: 140.
- Nichteuklidische Geometrie: 120; 61, 167, 185, 189, 290, 304.
- Nichts
- das N.: 263.
- Nichtsein: 18.
- noësis*: 25, 82.
- nomina*: 44, 101, 102, 145.
- Nominaldefinition: 108.
- Nominalismus: 18, 33, 44, 49, 55, 101, 103, 137, 143, 145.
- Nomographie des Mathematischen: 11.
- Nus: 24, 40, 51, 52, 90, 164, 173, 174, 175, 181, 182, 183, 189, 191, 192, 193, 195, 201, 204, 205, 225, 226, 229, 246, 256, 263, 268, 269, 270, 296, 297, 313, 317, 368.
- Oberfläche: 199, 235.
- Objekt (s. Gegenstand): 94.
- Objektbereiche: 122, 123.
- octava sphaera*: 132, 143.
- Örter (geometrische): 213, 255, 260, 261 u. a.
- Örtlichkeit: 232, 235, 246, 261.
- Oktaeder: 461.
- Oktav (s. Musik): 174.
- Ontologie: 37, 38, 39, 40, 41, 42, 45, 50, 51, 52, 53, 56, 65, 135, 145, 157; 1, 3, 74, 77, 124, 197.
- opposita*: 129, 130.
- Optik: 57, 62, 142, 176, 189, 191, 207, 209, 214; 6, 19, 21.
- Orakel: 137.
- Ordnung: 20, 37, 49, 50, 51, 54, 68, 70, 83, 84, 85, 86, 87, 93, 94, 110, 115, 133, 134, 135, 136, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 156, 165, 166, 167, 177, 178, 179, 180, 181, 209, 210, 214, 217, 225, 228, 229, 234, 235, 240, 242, 257, 258, 263, 264, 268, 269, 270, 271, 274, 278, 279, 280, 282, 286 u. a.
- objektive: 143.
- Ordnungsschemata: 145.
- ordo rerum*: 31.
- Orientierung des Geistes: 127.
- Ornamentik (s. Kunst): 30.
- Orphik: 5, 137, 274; 8.
- Ort (s. Raum): 297, 302.
- ortsbestimmende Lehrsätze (s. topische Sätze): 440 ff.; 466.
- Parabel: 243, 244.
- „Parabeln“: 206.
- parabolé*: 204, 458; 27, 29.
- Paraboloid: 249.
- Paradoxien der Mathematik: 442, 456.
- Paradoxien der Unendlichen: 96.
- Parallelenpostulat: 120, 294, 295, 301 ff., 420; 153, 167, 185, 290, 303.
- Parallelismus: 121, 122, 206, 224, 284, 287 ff., 288, 308, 401, 413, 414, 426; 151.
- Parallelogramm: 223, 224, 275, 279, 283, 284, 285, 413, 438 ff.
- participatio* (s. Teilhabe, *methexis*).
- Partikuläres: 172.
- peras* (s. Grenze): 17, 19, 24, 72, 83 ff., 84, 85, 86, 88, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 105, 110, 111, 114, 115, 116, 119, 124, 132, 137, 226, 241; 74, 132.
- Periodizität: 270.
- Peripatetiker: 212.
- Peripherie: 272, 273, 274, 275, 277, 278, 279, 280, 288, 296, 300.

- „Peripheriewinkel“: 310, 211.
 Peripheriewinkelsatz: 316.
 Perspektive (s. Kunst, Optik): 51; 6, 19, 21.
 Pferdefessel (s. Hippopede): 244.
 Pflanzen: 270.
 Phänomene: 28, 146, 392.
 „Phantasie“: 65, 94, 96, 194, 201, 202, 203, 204, 205, 209, 220, 225, 231, 232, 236, 250, 264, 265, 296, 297, 301, 302 u. a.
 Philologie: 128.
philosophia: 5.
 Philosophie: 5, 13, 18, 50, 53, 147, 149, 151, 177, 178, 180, 182, 192, 212, 213, 214, 230, 306 u. a.
 — des Cusanus: 128 ff.
 — der Mathematik: 6, 15.
 — mittelalterliche: 16.
 Phöniker: 211.
 Physik: 140, 143, 144, 145, 149, 229.
 Physik der Wertstufen: 133.
physis: 229.
 Planetarium: 192.
 Planeten (s. Astronomie): 14, 192.
 Planetenbahnen: 140, 143.
 Planimetrie: 62, 190, 217.
 Planwinkel: 250, 251, 254, 255, 256, 260.
 Plastik (s. Kunst): 261.
 Platonische Körper: 14, 214, 308; 45, 51, 207.
 Platonismus: 24, 27, 41, 132, 136, 205.
Pleroma: 4.
 Poesie (s. Kunst): 30, 180.
 Pole
 — der Sphären: 228, 229.
polon: 272 (s. Scheitelpunkt).
 Polygone: 130, 72.
 polytotische Probleme: 78.
Porisma: 77, 81, 314, 315, 375, 376, 377; 219, 221, 273.
 Positivismus: 12, 18, 33, 48, 55, 93, 99, 100, 143, 145 u. a.
 Postulate bei Euklid: 55, 56, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 77, 80, 117 ff., 124, 217, 219, 291 ff., 293, 313 u. a.
 Postulat der Erkenntnis: 91.
potentia: 47, 96, 105, 134, 173, 227, 247, 266, 267, 273, 276, 305, 380; 134, 203.
 Potentialität: 24.
 Potenz: 167, 174, 190.
 Prädikat: 221.
 Präexistenz: 173, 205, 274.
 prästabilisierte Harmonie: 147.
 Primfaktoren: 295.
 Primzahlen: 177.
principium identitatis indiscernibilium: 128, 133.
 Prinzipien
 — erstursächliche: 47, 193, 227, 230, 241, 257, 278, 291, 306.
 — der Geometrie: 6, 70 ff., 73, 107, 193, 205, 206, 211, 216, 217, 223, 231, 258, 306 u. a.
 — der Logik: 32.
 — ontologische: 41, 165, 193.
 Prinzipienlehre der Mathematik: 11, 38, 39, 52.
 Prinzipienlehre der Wissenschaften: 55.
 „*problemata*“: 71, 72, 75, 219.
 Problem der Koinzidenz: 20.
 Problem der Mathematik: 6.
 Probleme: 219, 220, 221, 222, 307, 314, 320, 321, 322 u. a.
prohodos: 4.
 progressive Methode: 57.
 Proportion: 47, 48, 59, 76, 87, 122, 167, 170, 174, 187, 208, 211, 212, 310 u. a.; 12, 37, 73.
 — der Erkenntnis: 169.
 — harmonische: 21, 50, 174.
 Proportionalität: 168.
 Propositionen Euklids: 306 ff.
 Prosa (s. Kunst): 30.
protasis: 76, 308, 309; 221.
 Prüfung: 186.
 Psychologie: 157, 225, 229, 268; 4.
ptosis (s. Fall): 77, 79, 224, 314, 315, 322, 367.
 Puls: 128.
 Punkt (*semeion*): 45, 64, 66, 92, 104 ff., 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 133, 134, 135, 146, 199, 205, 207, 225 ff., 226, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234,

- 235, 236, 237, 238, 240, 253, 261, 272, 274, 277, 292, 297, 310; 74.
 — Definition bei Euklid: 22, 45, 225 ff.; 74.
- Quadrat: 129, 221, 461 ff.
 quadratische Gleichung: 27, 36.
 Quadratur des Kreises: 204, 460.
 Quadratur der Mönchen: 212.
 Quadratrixkurven: 259.
 Quadratzahlen: 208, 464.
 quadrierende Kurven: 355, 414; 259, 297.
Quadrivium: 61, 90, 188, 207, 211, 212; 16.
- Qualität: 60, 76, 115, 120, 124, 250, 251, 252, 253, 293, 301, 308, 384, 410.
 Quanten: 251, 252, 253, 254, 266, 295.
 Quantität: 60, 61, 75, 94, 115, 120, 123, 124, 133, 144, 168, 188, 250, 251, 252, 253, 265, 293, 301, 304, 330, 384, 410.
 Quart (s. Musik): 175.
 Quint (s. Musik): 174.
- Radius: 271, 272, 273, 276, 278, 296, 312 u. a.
- ratio*: 97, 148, 159.
 „rational“: 48, 129; 1.
 Rationalismus: 26, 27, 39, 52, 148, 150.
 Raum: 60, 64, 83, 84, 141, 144; 25, 26, 75.
 raumaufspannend: 5, 132.
 Raumformen: 120; 26.
 Raumfunktion: 200.
 Raumgebilde: 204.
 Raumgröße: 60, 74, 75, 82, 86, 90, 96, 106, 107, 123, 124, 144, 166, 167, 168, 205, 230, 232, 233, 276, 293, 295, 304, 359, 390, 439 u. a.
 Raumgruppen: 30.
 Raum-Inhalt: 235.
 Raumlot: 260; 116.
 Raumproblem: 21.
 Raumschema: 218.
 Räume: 84, 97.
 reales Sein: 170.
 Realismus
 — aristotelischer: 137.
 — platonischer: 137.
- Realität (s. Wirklichkeit): 137, 165.
 Rechenkunst (s. „Logistik“): 62, 189, 190, 191.
 Rechnung: 31.
 rechter Winkel: 112; 113, 115, 162, 269.
 Reduktion: 78.
 reelles Kontinuum: 24, 87 (s. Kontinuum).
 Reflexion: 191; 6.
 Reflexivität: 120, 121, 122.
 Reformation: 16.
 regressive Methode: 57.
 Reihe
 — philosophische Begriffs-Reihe: 25, 27.
 Reihenbildung: 133, 134, 135, 149.
 Reinheit: 171, 203, 259, 262.
 Relation: 250, 251, 252, 253.
 Relatives: 130, 131, 132, 133.
 Renaissance: 13, 27.
 Renaissance des Geistes: 3, 103, 125, 126, 139, 141, 151.
 Reste: 206, 302.
 Rhetorik: 180, 340.
 Rhythmus: 261, 262.
 Richtschnur: 190.
 Rotationsflächen der Kegelschnitte (s. „Konoide“): 249; 103.
 Ruhe: 136, 188, 193, 228, 270, 286.
 Runde
 — das R.: 47, 112, 174, 188, 240, 241, 246, 247, 248, 268.
 Rundschild: 237.
- Saitengesetze (s. Musik): 51.
 Satz des Pythagoras: 462 ff.
 Satz des Thales: 221, 240; 65, 88.
 Satz vom Widerspruch: 135, 147.
 Schalenzahlen: 191.
 Schattenbildung: 235, 246.
 Schauung: 209.
 Scheitelpunkt (s. *polon*): 254, 272.
 Scheitelwinkel: 373, 374; 272.
 Schiffsbau: 210.
 Schild: 237.
 Schlüsse
 — hypothetische: 345.
 „Schluß“: 76, 214.

„Schlußfolgerung“: 308, 311, 345.

Schönheit: 37, 50, 51, 58, 93, 94, 140, 144, 167, 177, 180, 181, 182, 187, 261, 262, 263, 264, 265, 271, 279 u. a. (s. Kunst).

Schöpfergeist: 241.

Schöpferische

— das Sch.: 21, 26, 94, 97, 99, 100, 101, 106, 133 ff., 171, 175, 228, 230, 263.

Schöpfung: 57, 174, 176, 178, 183, 188, 202, 225, 229, 241, 257, 258, 261, 262, 264, 268, 271, 280, 281, 286.

Scholastik: 16, 26, 131, 132.

Schraubenlinie: 239, 244, 248, 250, 288, 292, 298, 342, 440; 84, 86, 154.

Schwere: 141.

Schwerpunkt: 192.

scientia generalis: 124.

sectio aurea: 208.

Seele: 20, 44, 45, 47, 48, 63, 72, 93, 94, 114, 135, 144, 165, 170, 171, 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 188, 189, 194, 195, 200, 209, 224, 226, 229, 231, 232, 240, 241, 246, 259, 262, 263, 264, 268, 269, 270, 283, 294, 317; 4, 8, 12.

Seelenkräfte: 21.

Segment: 245, 277, 279.

Sehlinien: 191.

Sehne: 191.

Sehobjekte: 191.

Seil: 190, 191.

Sein

— das reine S.: 18, 27, 124, 136, 141, 164, 165, 173, 178, 183, 242, 257, 410.

— mathematisches: 39, 44, 133, 163, 164, 165, 166, 170 ff., 171, 173, 175, 183, 193, 199, 209, 223, 228, 231, 251, 279, 297; 1.

Sein und Möglichkeit: 11, 124, 125.

Seinsbezüge des Mathematischen: 11, 68, 116, 133.

Seinsgattungen (s. Kategorien).

Seinsgestalt: 20, 156.

seinsgründende Prinzipien: 83 ff., 118.

Seinslehre (s. Ontologie): 15, 68, 85 ff., 93, 106.

Seinsweise des Unendlichen (s. Unendliches): 364.

Seiten: 28, 281.

Sektor: 245, 279, 280.

semeion (s. Punkt): 22, 92 ff.

semeion Platons: 133, 138.

„Senkrechte“ (s. Lot).

Sichelfigur: 278.

Sicherheit: 207, 217.

„Siegel der Rhea“: 228.

signa sensibilia: 133.

Signifikation: 130, 134.

signum: 133, 138.

Silber: 239.

Sinnendinge: 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 56, 61, 67, 86, 93, 94, 99, 144, 150, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 175, 176, 188, 189, 190, 191, 194, 201, 202, 210, 229, 241, 256, 263, 265 u. a.

Sinnentleerung: 227.

Sinnenwelt (s. *mundus sensibilis*): 364.

Sinngebilde: 33, 39, 48, 73, 75, 83, 86, 94, 101, 106, 109, 144, 163, 164.

Sinngehalt: 209, 307.

Sinnträger: 98, 109.

Sitte: 179.

Skeptiker: 306.

Skeptizismus: 150.

solarische Welt: 261.

Sonne (s. Astronomie): 192, 242.

Sonnenabstand: 14.

Sonnenfinsternis: 242.

Sonnenstrahlen: 190.

Sonnenuhr: 363.

Sophismus: 66, 206.

Sophistik: 184.

So-Sein (s. Wesen, *usia*): 45, 94, 101.

Spannung: 113.

Spannung der Geraden: 375, 386.

Spätantike: 143.

Sphären: 228, 229.

Sphärenharmonie: 145, 146.

„Sphärik“: 61, 90, 188, 207.

„sphärisch“ = räumlich: 440, 441.

sphärische Fläche (s. Kugel): 248, 249, 250, 254.

sphärische Winkel: 369; 270.

„Sphäroide“: 249.
 „Spiegelung“: 135.
 Spiegelgleichnis: 136, 169, 250, 264.
 „spira“: 249.
 Spiralen: 238, 239, 245.
 Spiralschnitte: 244.
 spirische Fläche (s. Wulst, Kreisring, Torus): 249; 101.
 spirische Schnitte: 244, 245, 249, 254, 255, 414; 94, 298.
 „spitzförmige Dreiecke“: 281.
 Spontaneität: 150.
 Sprache: 216.
 Staatswissenschaft: 50, 179, 209; 9.
 Stab: 272.
 Städteburgen (Fortifikationen): 209.
 Standhöhe: 192.
 Statik: 191.
 Stereometrie: 62, 190, 217, 247; 21.
 stereometrische Senkrechte (s. Raumlot): 260, 272.
 Sterne: 192.
 Sternkunde (s. Astronomie): 181.
 Stetigkeit: 25, 48, 88, 212 u. a.
 „stoicheion“: 216.
 „stoicheiosis“: 216.
 Stoiker: 219, 228, 302.
 Strategie: 189, 190.
 Streckenhalbierung: 66, 209, 263.
 „striegelförmiger Winkel“: 254, 333; 238.
 Struktur: 123, 124, 144, 150, 187.
 Studium
 — der Geometrie und Mathematik: 65, 204, 212, 213, 215, 217, 223.
 Stufenkosmos: 85, 132, 136.
 Stundenmessung: 192.
 Subjekt: 94.
 „Subjekt und Objekt des Sehens“: 261.
 sublunare Welt: 261, 270, 282.
 Substantialität: 138, 146.
 Substanz: 164, 169, 202, 203, 209.
 Substrat: 94, 166, 201, 204, 230, 265, 266.
 Subsumption: 186.
 Subtraktion: 167, 208, 219, 220.
superlatio: 26, 130, 131.
 Syllogistik: 84, 132.

symbolice investigare: 138.

Symmetrie

— allgemeine geistige: 29, 30, 37, 39, 44, 50, 51, 74, 85, 98, 120, 121, 123, 126, 135, 140, 141, 178, 181; 9, 48, 83, 99, 122, 193.
 — in der Geometrie: 22, 30, 37, 39, 44, 74, 85, 98, 112, 113, 120, 121, 122, 123, 141, 178, 181, 242.
 — in der Kunst (s. Kunst): 30.
 — in der Natur: 30, 39, 123, 178, 181.
 Symmetriegestalt: 87.
 Symmetrieprinzip: 29, 30, 31, 32, 70, 112, 117, 120, 121, 123, 135, 140.
 symmetrische Gestaltsynthese: 30, 31, 40, 41, 42, 43, 70, 74, 112, 123.
sympersasma: 76; 221.
 Symptote: 322.
 „Symptoten“: 288.
 Synthese: 52, 62, 66, 80, 90, 114, 136, 192, 193, 205, 344.
 synthetische Methode: 167 u. a.
 System der Wissenschaften: 75, 83, 134, 212, 213, 215, 307 u. a.
 Systembildung: 6, 134.

tabula rasa: 47, 173, 296.

Tätigkeit: 241, 259, 264, 280.

Tafel der Gegensätze: 17; 34.

Taktik (militärische, s. Strategie): 189, 190.

Tanz (s. Kunst): 180.

Taubengleichnis: 168.

Technik: 32, 128 u. a.

Teil-Ganzes: 104, 109, 123, 147, 166, 214, 234, 302, 304.

Teilbarkeit: 360.

Teilhabe (s. *methexis*): 20, 23, 28, 84, 105, 108, 124, 133, 150, 370, 371, 413.

Teilung: 39, 65, 67, 86, 87, 95, 96, 104, 163, 166, 170, 194, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 207, 212, 214, 219, 220, 221, 230, 236, 251, 253, 259, 267, 270, 273, 276, 277, 282, 295, 305.

Teleologie: 136, 137.

Terminologie

— mathematische: 156, 237.

Tetraeder: 461.
 Theatermalerei: 191.
 Theaterperspektive: 21.
 Theodizee: 32, 150.
 Theologie: 31, 50, 128, 143, 146, 178, 274; 8.
theoria: 5, 102, 219, 220, 321; 4.
 „*theoremata*“: 71, 72, 73, 75, 219, 220, 221, 222, 307, 314 u. a.
 Theosophie: 157.
thesis: 76, 80, 82, 308, 309, 310, 312.
 Theurgie: 262.
 Tiefe: 199, 233, 235, 245, 246.
 Tiere: 270.
 Tierkreis (s. Zodiakus): 254, 282, 353.
Tmema: 132.
 Töne (s. Musik): 439.
 Topik: 81.
 „*topika*“: 440.
 topische Sätze: 442.
 Torus-Schnitte (s. spirische Sch.): 244.
 Totalität: 129, 135, 137.
 Tragödie (s. Kunst): 180.
 Trapez: 444.
 Transitivität: 121, 122, 426.
 transzendental: 95, 130, 267.
 Transzendenz: 136.
 trennende Methode: 62, 68, 77, 192, 214.
 Trennungen: 192, 242, 259, 263, 305.
 triadischer Gott: 274.
trisection anguli: 355; 92, 256, 257, 262.
 Tugend: 174, 177, 179, 180, 209, 259, 286.
 Typus: 88, 89, 122.
ὄψος (Ellipse): 156, 237.
 überirdische Welt: 268.
 Überrationales: 130, 149.
 Umfang: 260, 261, 265; 236.
 „Umkehrung“: 68, 80, 81, 82, 167, 208, 214, 295, 342, 343, 344; 247.
 Umkehrung des Parallelenpostulats: 301; 172, 187, 301.
 Umkehrbarkeit
 — mathematischer Prozesse: 123.
 Umriß: 202, 244.
 Umwelt: 183.

Umwertung aller Werte: 4, 5, 126.
 Unbegrenzte (s. *apeiron*): 17, 83 ff., 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 105, 112, 115, 116, 120, 165, 166, 176, 188, 189, 207, 226, 227, 237, 238, 240, 241, 246, 256, 258, 259, 265, 266, 271, 272, 273, 274, 276, 280, 281, 282, 301, 305, 308, 312, 363, 364, 365, 370, 384, 441; 34.
 Unendliche: 24, 25, 26, 27, 31, 74, 86, 91, 92, 95, 96, 97, 115, 131, 148, 149, 150, 151, 188, 189, 227, 236, 240, 243, 244, 253, 258, 267, 276, 278, 279, 287, 288, 295, 297, 298, 301, 305, 359, 360, 364 ff., 390, 425, 427, 448; 134.
 Unermeßliche: 97, 165, 189.
 Unfruchtbarkeit: 167.
 Ungleichheit: 21.
 Universale: 342, 438, 463.
universalia: 52, 65, 131, 135, 136, 137, 184, 200, 201.
 Universalienstreit: 65, 135, 137, 201.
 Universalprinzip: 151, 172.
 Universität: 61.
 Universum: 26, 47, 128, 129, 131, 132, 135, 136, 137, 149, 156, 173, 228.
 Unmöglichkeit: 308.
 Unmöglichkeitsbeweise: 49, 210, 248.
 Unsterblichkeit: 136.
 Unterricht: 14, 49, 74, 77, 183, 217, 231, 304.
 Unveränderlichkeit: 40, 53, 163, 166, 177, 193, 262, 272.
 Unvergänglichkeit: 171, 220.
 Unvollkommenheit: 45, 429.
 Unwandelbarkeit: 41, 170, 228, 258.
 Unwiderlegbarkeit: 40, 44, 52, 53, 59, 64, 163, 170, 186, 187, 193, 200, 213, 214.
 Urbild: 18, 25, 41, 44, 47, 48, 93, 137, 145, 146, 164, 171, 173, 174, 209, 257, 264, 272, 273.
 Urformen: 44.
 Urgegensätzlichkeit: 84, 92.
 Urgestalten: 44, 90, 98 ff., 102, 105, 113.
 Urphänomen: 18, 44; 74.
 Urmittelpunkt: 146, 147.
 Urprinzip: 44, 87 ff., 169, 185.
 Ursache (s. *causa*).

- Ursinn: 138.
 Urteil: 306.
 Urteilkraft: 39.
 Urzahl: 18'.
- „väterliche Einzahl“: 234.
 Veränderung: 200, 220, 240, 261, 268, 270, 280, 281.
 „Verdoppelung des Unbegrenzten“: 276.
 „Verhältnis“: 88, 89, 206, 207, 208, 233, 251, 252.
veritas: 130.
veritas incorruptibilis: 149.
 Verkehr: 211.
 Vermessungskunde (s. Geodäsie): 189, 190, 209, 210, 235, 246, 261.
 vermittelndes (diskursives) Denken: 169, 175, 178, 195, 200, 203, 204, 205, 209, 296.
 Vernunft: 108, 234, 135, 144, 148, 150, 181.
 Vernunftkritik: 151.
 Verschiedenheit: 59, 60, 187, 188.
 Versmaß (s. Kunst): 180.
 Verstand: 97, 133, 134, 147, 148, 150, 292, 293.
 Vertauschung: 167, 168, 208, 310.
 Vertretbarkeit: 122.
 Vielfaches: 166.
 Vielheit: 95, 176, 225, 267, 273, 279.
 Vierseit: 413.
 vierseitige Figuren: 283.
 „vierseitiges Dreieck“: 281, 393; 146, 284.
 Vierzahl: 279.
visio Dei: 68, 136.
visio mentalis: 130.
 Vollendung: 317.
 Vollkommenheit: 45, 93, 170, 171, 195, 225, 226, 227, 229, 230, 247, 256, 259, 262, 263, 266, 268, 270, 271, 285, 286, 305, 310, 429 u. a.
 Volumen: 235.
 Vorbild: 173.
 Vorsehung: 241, 271.
 Vorstellung: 94, 201, 202, 225, 232, 235, 265, 296, 297, 304.
- „Wache des Zeus“: 228.
 Wage: 210.
 Wagen: 31, 50, 139, 149, 180.
 Wärme: 251, 389.
 Wahrheit: 25, 31, 45, 49, 52, 53, 54, 57, 66, 73, 74, 75, 90, 94, 101, 103, 123, 130, 135, 140, 149, 164, 167, 171, 172, 177, 178, 192, 199, 206, 214, 215, 229, 293, 294, 302, 304, 310, 311 u. a.
 Wahrheitskriterium: 94.
 Wahrsagekunst: 182.
 Wahrscheinlichkeit: 31, 59, 186, 301, 302.
 Wand: 235.
 „was auszuführen war“: 222, 313, 314.
 „was zu beweisen war“: 222, 313, 314.
 „Wasser“: 223, 230.
 Wasseruhr: 128.
 Wechselwinkelsatz: 414 ff.; 291, 299.
 „Wecker“: 195, 273; 4.
 Weg: 235, 243.
 Wegstrecken: 210.
 „weibliches Prinzip“: 235, 271.
 Wein: 282.
 Welt: 128, 131, 135, 138, 139, 142, 143, 144, 145, 148, 173, 177, 178, 209, 224, 225, 229, 240, 241, 257, 268, 274, 280, 296.
 Welt des Ewigen: 185.
 Weltall: 215, 228.
 Weltanschauung: 127, 146, 147, 152.
 Weltbild
 — des Kepler: 143 ff.
 — des Kopernikus: 138 ff.
 — des Nikolaus von Kues: 128 ff., 138, 139.
 — des Platon: 85.
 Weltelemente: 223.
 Weltenspinde: 228.
 Weltganzes: 128, 136, 139, 151.
 Weltharmonik: 144.
 Weltkörper: 211, 215, 216, 461.
 Weltordnung (s. Kosmos): 174.
 Weltschau: 128.
 Welt schöpfer (Demiurgos): 174, 188, 228.
 Weltseele: 24, 146, 174, 269.
 Weltsystem des Kopernikus: 138 ff., 139.

Werden: 241, 259, 263, 268, 270, 281, 282.
 „Werdeprozeß“: 74, 183, 220, 292, 307.
 Werkzeuge
 — der Geometrie: 118.
 Wertstufen: 133.
 Wesen des Mathematischen: 12, 13, 75,
 76, 94, 98, 101, 103, 135, 166, 187, 231,
 307 u. a.
 Wiedererinnerung (s. *anamnesis*).
 Widerspruch: 135, 147.
 Widerspruchslösigkeit: 103.
 windschiefe Geraden: 287, 415; 152.
 Winkel: 93, 112, 115 ff., 116, 119, 179,
 191, 200, 218, 221, 238, 243, 245, 250 ff.,
 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 260,
 265, 278, 279, 280, 281, 282, 295, 301,
 311.
 — rechter W.: 171, 221, 240, 257 ff., 258,
 259, 260, 282, 285, 286, 293, 294, 295,
 298 ff., 299, 300, 301.
 Winkelgeschwindigkeit: 239.
 Winkelhalbierung: 67, 254.
 Winkelkonstruktionen: 250.
 winkellose Figur: 277, 279.
 Winkelsumme: 172, 186.
 Winkelsummensatz: 429 ff.; 216, 278,
 279, 307.
 Wirklichkeit: 31, 96, 99, 100, 124, 135,
 146, 247.
 Wissen: 131, 134, 137, 166, 194, 212,
 218, 264.
 Wissenschaft: 37, 38, 48, 52, 54, 55, 58,
 59, 66, 75, 79, 80, 81, 85, 90, 97, 106,
 124, 126, 127, 134, 140, 141, 142, 143,
 145, 147, 149, 150, 151, 166, 168, 170,
 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179,
 180, 181, 182, 184, 186, 187, 188, 195,
 205, 207, 208, 209, 210, 211, 213, 214,
 217, 218, 219, 224, 230, 231, 235, 261,
 286, 295, 301, 303, 306, 307 u. a.
 Wissenschaftslehre: 55, 63, 75, 90, 124.
 Würfel: 190, 461.
 Würfelverdoppelung (s. Delisches Pro-
 blem): 315; 222, 223.
 Wulstsnitte (s. spirische Schnitte): 244.

Zählen: 31, 50, 149, 180, 191.

Zahl: 17, 30, 42, 47, 48, 50, 58, 59, 60,
 61, 62, 67, 74, 75, 82, 83, 84, 86, 90, 91,
 95, 96, 105, 106, 107, 110, 123, 124, 144,
 149, 165, 166, 167, 168, 174, 178, 179,
 180, 186, 188, 189, 190, 191, 199, 207,
 208, 210, 212, 230, 232, 235, 267, 271,
 272, 278, 279, 293, 295, 304, 439, 464;
 5, 8, 37.

— begrenzte: 276.

— geometrische: 179, 199.

— konkrete: 276.

— pythagoreische: 464; 38, 332.

— sich bewegende: 12.

— transfinite: 95; 134.

— unendliche: 96, 276.

Zahlenglieder: 174.

Zahlenkongruenz: 121.

Zahlenkunde: 217.

Zahlenlehre

— pythagoreische: 15, 464.

Zahlenreihe: 271.

Zahlensymbolik: 12.

Zaubergötter: 228.

Zauberkunst (s. Magie): 191.

Zeichen: 102, 133, 135.

Zeichnung: 53, 72, 77, 224, 237, 307, 315,
 461.

„Zeit“: 75, 123, 124, 230, 273, 304 u. a.

Zeitmessung: 192.

Zeitreihe: 134.

Zirkel

— ideeller: 118.

— Postulat des Z.: 296; 179, 180.

Zuordnung der Zahlen zu den Raum-
 gestalten: 233, 234, 235.

Zweckbegriff (s. Teleologie): 129.

Zweizahl: 279.

Zwölfeck: 286.

Zwölfszahl: 286.

Zylinder: 190, 216, 238, 239, 244, 245,
 248, 250, 254, 275; 104.

zylindrische Schraubenlinie: 239, 240,
 244, 307.

ZEIT-TAFELN

Kulturmorphologische Übersichten von den ältesten Zeiten bis heute
an Hand des Euklid-Kommentars des PROKLUS-DIADOCHUS.

Bearbeitet von

MAX STECK

Übersicht der nachfolgend bearbeiteten Zeit-Tafeln zum Euklid-Kommentar des Proklus Diadochos

Die nachfolgend bearbeiteten Zeit-Tafeln zum Euklid-Kommentar des PROKLUS DIADOCHUS, die als solche im gesamten Schrifttum erstmalig sein dürften, sollen in visueller Ordnung geistesgeschichtliche Genesen und kulturmorphologische Synthesen zur anschaulichen Fassung der totalen Geistgestalt des Abendlandes und seiner Kultur schlechthin sichtbar werden lassen und ihren inneren Sinn unserem Verständnis und Bewußtsein in einer Form nahebringen, die in dieser Umfassendheit und Weite der geistigen Sichten hier zum ersten Male versucht wird. Man könnte die Tafeln leicht durch weitere Geistphänomene erweitern; doch war eine Beschränkung auf das unentbehrlich Notwendige geboten. — Namen stehen in diesen Tafeln für geistige Phänomene und Gestalten und für die Ideen, die das Wesen der Wissenschaften und der Künste ausmachen. Termini technici haben in ihnen die Bedeutung der Angabe von Geiststrukturen — nicht Schlagworten — und typischen Gestalt- und Richtungsfeldern des Geistes, der in Natur und Geschichte, im Einzelsein des Menschen und in der Gemeinschaft der Kulturvölker west und nur immer in beiden zusammen sich sinntief ausdrücken kann. Die Tafeln sollen keine Schemata, Gerippe und Gerüste sein. Sie sind anschauliche Ideenstammtafeln, die man auch als Ideenstammbäume geben könnte, die nur das Wesentlichste enthalten können. Worte, Namen und termini stehen hier manchmal für ganze Buchkapitel, die einzelne Tafel für ganze große geistesgeschichtliche Werke, die wir leider noch nicht besitzen. Die Tafeln hängen innerlich zusammen. In ihrer natürlichen Reihenfolge bilden sie eine geschlossene Einheit und ein Ganzes, das man etwa so umreißen könnte:

Die Ideengenesis des Idealismus in Mathematik, Philosophie, Naturwissenschaften und in den Künsten von den ältesten Zeiten bis zum Neuplatonismus der PLOTIN und PROKLUS; die schematische Ideensynthese des deutschen Idealismus in Mathematik, Philosophie, Naturwissenschaften und in den Künsten von PROKLUS bis um 1900 unter Einbeziehung der von ARISTOTELES ausgehenden Geisteslinie des Rationalismus, Empirismus, Nominalismus, Positivismus als Gegenbewegung des Idealismus.

Die Tafeln umspannen daher in übergreifender Ordnungsgestalt die abendländische Geistesgeschichte schlechthin.

Zeit-Tafel I: Die geistigen und seelischen Formungen der Kulturvölker von den ältesten Zeiten bis zur Entdeckung der Wissenschaft durch die Griechen.

Zeit-Tafel II: Die ersten wissenschaftlichen Formungen und Ordnungen zur Ergreifung des Seins von den Vorsokratikern und Pythagoreern bis SOKRATES.

Zeit-Tafel III: Das universelle System des metaphysischen Idealismus PLATONS und seine unmittelbaren kulturmorphologischen Wirkungen in der mathematischen Systembildung des EUKLID.

Zeit-Tafel IV: Die Ideensynthese des deutschen Idealismus in Mathematik, Philosophie, Naturwissenschaften und den Künsten von den Nachfolgern PLATONS bis PROKLUS und schematisch bis 1900.

113099

QA
31
P75

113099

Proclus, Diadochus
Kommentar zum ersten
Buch von Euklids...

DATE DUE

BORROWER'S NAME

Proclus
Kommentar

THEOLOGY LIBRARY
SCHOOL OF THEOLOGY AT CLAREMONT
CLAREMONT, CALIFORNIA



PRINTED IN U.S.A.

