

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

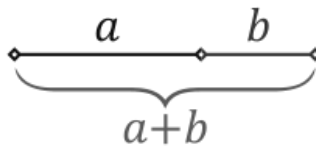
Α' ΜΕΡΟΥΣ

1. Δίνονται οι παρακάτω πραγματικοί αριθμοί. Ταξινόμησε τους και τοποθέτησέ τους στον παρακάτω πίνακα: 12000 10,05 0,33333...
1,12121122123124125... $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ 0 |-3| -1/3 0,101001000100001
0,101001000100001... π ϕ .

Τοποθέτησε τους στον παρακάτω πίνακα

Φυσικοί	
Ακέραιοι	
Ρητοί	
Άρρητοι	

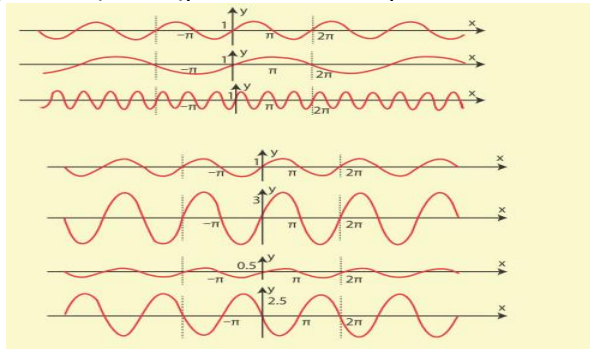
2. Διάταξε τους παρακάτω αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:
-100 23 $15\frac{2}{3}$ -10,8 -20,55555555... 11/3 $\sqrt{8}$.
3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.
4. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm².
5. Χρυσή τομή είναι ο χωρισμός ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δύο τμήματα α και β ώστε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \phi$.



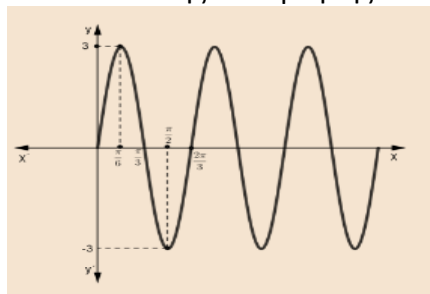
- 1) Δείξτε ότι η προηγούμενη σχέση οδηγεί στην ισότητα: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.
- 2) Λύστε την εξίσωση $x = 1 + \frac{1}{x}$ και διαπιστώστε ότι οι λύσεις της είναι οι αριθμοί $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $-\frac{1}{\phi}$.
6. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{\text{φοιτητής της σχολής ΙΦΕ}\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{\text{φοιτητής έχει περάσει το μάθημα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ}\}$ και $B = \{\text{ο φοιτητής έχει περάσει το μάθημα ΙΣΤΟΡΙΑ}\}$.
- 1) Να εκφράσετε λεκτικά τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, B' , $A - B$.
 - 2) Να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τις εκφράσεις:
 - Γ. Ο φοιτητής έχει περάσει και τα δύο μαθήματα.
 - Δ. Ο φοιτητής δεν έχει περάσει κανένα από τα δύο μαθήματα.
 - Ε. Ο φοιτητής έχει περάσει μόνο την ΙΣΤΟΡΙΑ.
 - Ζ. Ο φοιτητής έχει περάσει μόνο ένα από τα δύο μαθήματα.
 - Η. Ο φοιτητής έχει περάσει το πολύ ένα από τα δύο μαθήματα.
7. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ο αντίθετός του $-\alpha$ είναι μοναδικός. Δηλαδή, ότι αν β είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\alpha + \beta = 0$ τότε $\beta = -\alpha$.

8. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 0 είναι μοναδικός. Δηλαδή, ότι αν ο μ είναι πραγματικός αριθμός και $\alpha + \mu = \alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α , τότε $\mu = 0$.
9. Να κάνετε τη γραφική παράσταση για κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες:
- 1) $a_n = 2n$
 - 2) $a_n = 1/n$
 - 3) $a_n = n^2$
10. Από τις επόμενες ακολουθίες ποιες μπορεί να είναι αριθμητικές ή αντίστοιχα γεωμετρικές πρόοδοι;
- 1) 0, 1, 2, 4, 8, ...
 - 2) 7, 3, -1, -5, -9, ...
 - 3) 1, 3, 5, 8, 13, ...
 - 4) 1, -1, 1, -1, 1, ...
 - 5) 4, 2, 1, 0, -1, -2, ...
11. Α Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα 12α γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 50 € και κάθε επόμενη γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 10 € μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του. Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: "Θα σου δώσω τώρα 5€ και κάθε επόμενη γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό". Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα 18α γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.
- 1) Δικαιολογήστε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.
 - 2) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση στα 21α γενέθλιά του και πόσο θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;
12. Στον επόμενο πίνακα δίνονται κάποιες μετρήσεις που αφορούν την θερμοκρασία T του αέρα σε σχέση με το ύψος h από το έδαφος σε έναν τόπο κάποια χρονική στιγμή.
- | | | | | |
|-------------|----|----|----|---|
| H (σε km) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| T (σε °C) | 22 | 15 | 11 | 4 |
- 1) Τοποθετήστε τα δεδομένα σε ένα σύστημα συντεταγμένων και δώστε μια εκτίμηση της συνάρτησης που εκφράζει την θερμοκρασία T βάσει του ύψους h .
 - 2) Ποια είναι η θερμοκρασία σε ύψος 500 m από το έδαφος;
 - 3) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία είναι 18 °C;
13. Οι ενδείξεις θερμοκρασιών σε βαθμούς Fahrenheit (F) συνδέονται με τις ενδείξεις σε βαθμούς Κελσίου (C) μέσω της σχέσης $F = \frac{9}{5}C + 32$.
- I. Να μετατρέψετε τους 40°C σε βαθμούς F.
 - II. Να μετατρέψετε τους 110 βαθμούς F σε βαθμούς Κελσίου.
 - III. Σε ποια θερμοκρασία οι ενδείξεις των θερμομέτρων Fahrenheit και Κελσίου συμπίπτουν;
14. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων. Ποια είναι η μέγιστη, ποια η ελάχιστη τιμή και ποια η περίοδος κάθε συνάρτησης;
- $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = 2\eta\mu x$, $h(x) = 2\eta\mu x + 1$.
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + 1$.

15. Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπύλων.



16. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της; Ποια είναι η περίοδος της; Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.



17. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

I. $\alpha_n = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+5}$

III. $\alpha_n = \frac{2n^2+4n-7}{n^2+6n+1}$

II. $\alpha_n = \frac{n^3+4n}{3n^2+5}$

18. Να βρείτε τα αθροίσματα:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

$$8 - 4 + 2 - 1 + \dots$$

19.

ΚΥΛΙΟΜΕΝΟΙ ΔΙΑΔΡΟΜΟΙ

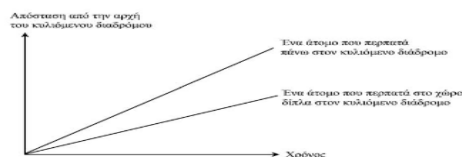
Θέμα που δόθηκε στους μαθητές για το Πρόγραμμα PISA 2003

Ερώτηση 1: ΚΥΛΙΟΜΕΝΟΙ ΔΙΑΔΡΟΜΟΙ

Στα δεξιά, βλέπετε μια φωτογραφία κυλιόμενων διαδρόμων.



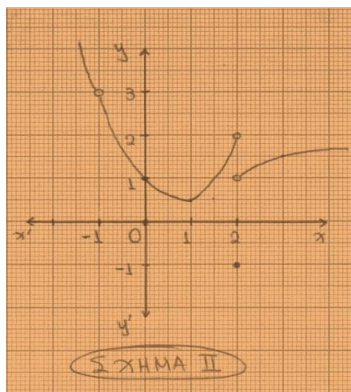
Το διάγραμμα Απόσταση-Χρόνος που ακολουθεί, δείχνει τη σύγκριση μεταξύ του «περπατήματος πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο» και του «περπατήματος στο χώρο δίπλα στον κυλιόμενο διάδρομο».



Υποθέτοντας ότι στο παραπάνω διάγραμμα και τα δυο άτομα περπατούν με το ίδιο μήκος βήματος, να προσθέσετε μία γραμμή, η οποία θα αναπαριστά την απόσταση ως προς τον χρόνο για ένα άτομο που στέκεται ακίνητο πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ

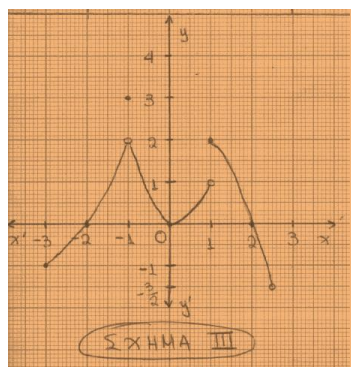
1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων. Να υπολογιστούν τα όρια που ζητούνται σε κάθε περίπτωση, εφόσον υπάρχουν.



$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

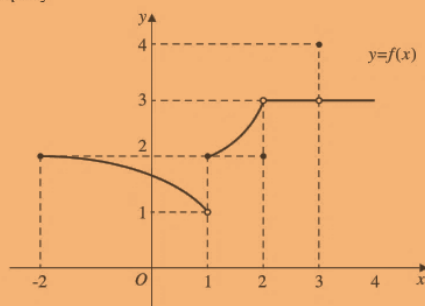
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

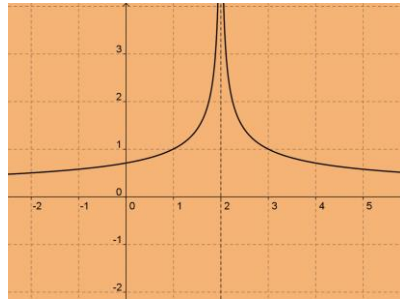
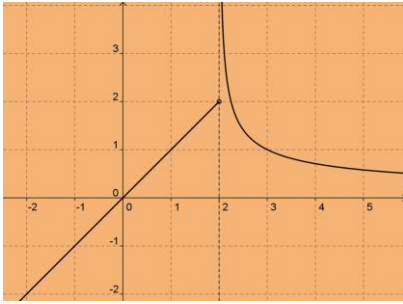
iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



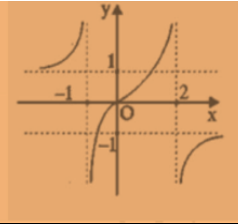
3. Να διερευνήσετε την συμπεριφορά των τιμών των συναρτήσεων όπως το x τείνει στο 2 στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



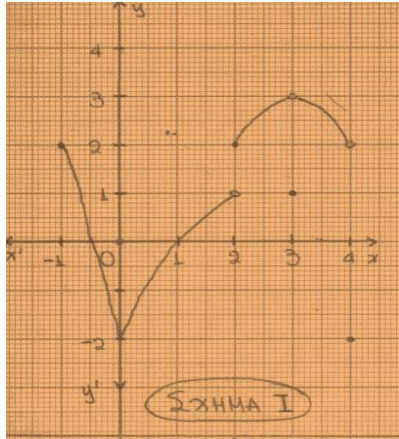
4.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα όρια:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | ii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ |
| iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | iv) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
| v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | vi) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ |
| vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | |

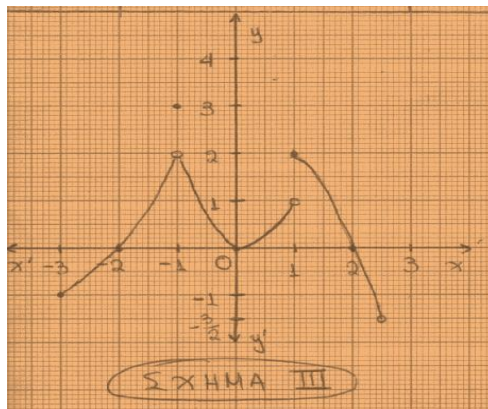


I.



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x_0=0$, $x_0=2$, $x_0=3$, $x_0=4$

II.



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x_0=-3$, $x_0=-1$, $x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1

* Να συμπληρώσετε τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

α) $f(x) = x^2$ $f'(0) = \dots\dots\dots$

β) $f(x) = x^2 + 1$ $f'(1) = \dots\dots\dots$

γ) $f(x) = 2x^2 - 3$ $f'(-1) = \dots\dots\dots$

δ) $f(x) = \eta\mu x$ $f'(\frac{\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

2

Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $s(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

- Την μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[2, 4]$ sec.
- Την ταχύτητα του κινητού όταν $t = 3$ sec.
- Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι ακίνητο.

3

Οι διαστάσεις χ, ψ ενός ορθογωνίου αυξάνουν με το χρόνο με ρυθμό 3 cm/sec και 4 cm/sec, αντιστοίχως. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο, τη στιγμή που οι διαστάσεις του είναι 30 cm και 40cm, αντιστοίχως.

4

Δίνεται συνάρτηση f που έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(3, f(3))$ την ευθεία $\psi = 2\chi + 1$. Να βρείτε:

1. την τιμή $f(3)$.
2. την παράγωγο της συνάρτησης f στο $\chi_0 = 3$.
3. το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

5

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = x^2 + 5x - 2$	ii. $g(x) = 2x^3 - \sqrt{3}$	iii. $h(x) = 3x^2 - 27x + 5$
iv. $f(x) = 3x^2 - 27x^{\frac{2}{3}} + 5$	v. $g(x) = 5x^2 + \frac{5}{x^6} - \sqrt{x}$	vi. $h(x) = (x - 2)(x^2 + 4)$
vii. $f(x) = \sqrt{x} + (x + 2)(3x - 1)$	viii. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	ix. $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

6

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της (ϵ) στο σημείο $A(-2, 2)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(-2)$.

