7η Εργασία Φροντιστηρίου

1) α) $(\alpha-1)(\alpha^2-1)=1$

Χρησιμοποιώ την έννοια του αντιστρόφου για τους ακεραίους

Άρα:

$\alpha-1=1$ και $\alpha^2-1=1$ ή $\alpha-1=-1$ και $\alpha^2-1=-1$

$\alpha=2$ και $\alpha^2=2$ $\qquad$ $\alpha=0$ και $\alpha^2=0$

αδύνατον $\qquad$ $\alpha=0$

τους

ακεραίους

Άρα το $\alpha=0$ λύση της εξίσωσης

β) $-2\alpha-\alpha^2=1 \iff$

$\alpha(-2-\alpha)=1$ (λόγω επιμεριστικής ιδιότητας)

Άρα $\alpha=1$ και $-2-\alpha=1$ ή $\alpha=-1$ και $-2-\alpha=-1$

$\alpha=-2-1$ $\qquad$ και $\alpha=-2+1$

$\alpha=1$ και $\alpha=-3$ $\qquad$ $\alpha=-1$

αδύνατον

Άρα το $\alpha=-1$ είναι λύση της εξίσωσης.

2) α) $a+2 \geq a$

Ισχύει για κάθε $a \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη

Ισχύει ότι $2 \geq 0 \overset{+a}{\Leftrightarrow} a+2 \geq a$

β) Ισχύει $a-2 \leq a$

Απόδειξη

Ισχύει: $-2 \leq 0 \overset{+a}{\Leftrightarrow} a-2 \leq a$

γ) Έστω $a<b$. Θα δείξω ότι $a < \frac{a+b}{2} < b$.

$$a < \frac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{a+b}{2} \quad (1) \\ \text{και} \\ \frac{a+b}{2} < b \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2a < \cancel{2} \cdot \frac{a+b}{\cancel{2}} \Leftrightarrow 2a - a < b$

$\Leftrightarrow a < b$ που ισχύει

$(2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} a+b < 2b \Leftrightarrow a < 2b - b$

$\Leftrightarrow a < b$ που ισχύει.

Άρα αν $a<b$ τότε προκύπτει: $a < \frac{a+b}{2} < b$.

δ) Δεν ισχύει στο σύνολο των ακεραίων $(2a \geq a)$

Αντιπαράδειγμα: για $a=-2$: $2 \cdot (-2) \geq -2 \Leftrightarrow -4 \geq -2$ άτοπο

Η σχέση $2a \geq a$ θα ισχύει με την προϋπόθεση ότι το a είναι θετικός ακέραιος. Απόδειξη: $2 \geq 1 \overset{\cdot a>0}{\Leftrightarrow} 2a \geq a$.

3) Να αποδείξετε ότι $5^\nu > 5\nu - 1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Απόδειξη

Θέλω να αποδείξω την πρόταση $P(\nu): 5^\nu > 5\nu - 1$

(Βασικό Βήμα)

$P(1)$: για $\nu = 1$: $5^1 > 5 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow 5 > 5 - 1 \Leftrightarrow 5 > 4$
ισχύει

(Επαγωγική Υπόθεση)

$P(\kappa)$: Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για τυχαίο θετικό ακέραιο $\nu = \kappa$, δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{5^\kappa > 5\kappa - 1} \quad (1)$$

(Επαγωγικό Βήμα)

$P(\kappa+1)$: Θα δείξω ότι ισχύει και για τον $\nu = \kappa + 1$: δηλαδή ότι: $5^{\kappa+1} > 5(\kappa+1) - 1$ (2)

Από (1) ξέρω ότι ισχύει: $5^\kappa > 5\kappa - 1 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow}$ (εμφανίζω το $5^{\kappa+1}$)

$5^\kappa \cdot 5 > (5\kappa - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow$

$5^{\kappa+1} > (5\kappa - 1) \cdot 5$

Αν δείξω ότι: $(5\kappa - 1) \cdot 5 \overset{(2)}{>} 5(\kappa+1) - 1$ θα έχω δείξει και το ζητούμενο. Πράγματι:

$(5\kappa - 1) \cdot 5 > 5(\kappa+1) - 1 \Leftrightarrow 25\kappa - 5 > 5\kappa + 5 - 1 \Leftrightarrow$

$25\kappa - 5\kappa > 5 + 5 - 1 \Leftrightarrow 20\kappa > 9$ που ισχύει διότι κ θετικός ακέραιος.

Άρα τελικά ισχύει η πρόταση (2).

4)

(Βασικό Βήμα) για $\nu=1$: $1! > 1^2 \Leftrightarrow 1 > 1$ δεν ισχύει

για $\nu=2$: $2! > 2^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2 > 4$ δεν ισχύει

για $\nu=3$: $3! > 3^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3 > 9$

$\Leftrightarrow 6 > 9$ δεν ισχύει

για $\nu=4$: $4! > 4^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > 16$

$\Leftrightarrow 24 > 16$

για $\nu=5$: $5! > 5^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 > 25$

$\Leftrightarrow 120 > 25$ που ισχύει

για $\nu=6$: $6! > 6^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 > 36$

$\Leftrightarrow 720 > 36$ που ισχύει.

Άρα θα αποδείξουμε τη σχέση για $\nu \geq 5$

(Επαγωγική Υπόθεση)

P(κ): Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για τυχαίο φυσικό $\nu=\kappa$ $(\kappa\geq 5)$ δηλαδή ότι: $\kappa! > \kappa^2$

(Επαγωγικό Βήμα) Θα δείξω ότι $(\kappa+1)! > (\kappa+1)^2$ (P(κ+1))

Ισχύει $\kappa! > \kappa^2 \overset{\cdot(\kappa+1)}{\Leftrightarrow}$

$\kappa!(\kappa+1) > \kappa^2(\kappa+1) \Leftrightarrow$

$(\kappa+1)! > \kappa^2(\kappa+1)$

Αρκεί να δείξω ότι: $\kappa^2(\kappa+1) > (\kappa+1)^2 \Leftrightarrow$

$\kappa^2(\kappa+1) - (\kappa+1)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$(\kappa+1)[\kappa^2 - (\kappa+1)] > 0 \Leftrightarrow$

$(\kappa+1)[\kappa^2 - \kappa - 1] > 0$

$(\kappa+1)[\kappa(\kappa-1) - 1] > 0$ που ισχύει για $\kappa \geq 5$

$(\kappa+1>0,\ \kappa(\kappa-1)-1>0)$

5) (Βασικό Βήμα): για $\nu=1$: $1 < 2-1 \Leftrightarrow 1<1$ δεν ισχύει

για $\nu=2$: $1+\frac{1}{2^2} < 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{4} < \frac{2}{1}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} < \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} < \frac{6}{4}$ ισχύει

(Επαγωγική υπόθεση) Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για τυχαίο φυσικό $\nu=k$ (≥ 2)

δηλαδή ότι:

$(P(k))$ $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k}$$

(Επαγωγικό Βήμα) Θα δείξω ότι είναι αληθής και για $\nu=k+1$

δηλαδή ότι: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{(k+1)}$ $(P(k+1))$

$\Rightarrow$ Ισχύει ότι: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k}$ (προσθέτω $\frac{1}{(k+1)^2}$ και στα δύο μέλη)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

Αρκεί να αποδείξω ότι:

$$\cancel{2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} < \cancel{2}-\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k}^{(k+1)}-\frac{1}{k+1}^{(k)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{\cancel{k}+1-\cancel{k}}{k(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k\cancel{(k+1)}} \overset{\cdot(k+1)}{\Leftrightarrow}$$

$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ που ισχύει! $\Rightarrow$ Άρα η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Άρα από Μαθ. Επαγωγή η $P(\nu)$ είναι αληθής για $\nu\geq 2$

8η Εργασία

1) α)

$82 = 2 \cdot 36 + 10$
$36 = 3 \cdot 10 + 6$
$10 = 1 \cdot 6 + 4$
$6 = 1 \cdot 4 + 2 \leftarrow$
$4 = 2 \cdot 2$

Το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι ο ΜΚΔ(82,
Άρα $\text{ΜΚΔ}(82, 36) = 2$

β) $84 = 1 \cdot 63 + 21 \leftarrow$ $\quad \text{ΜΚΔ}(84, 63) = 21$
$63 = 3 \cdot 21$

γ) $2378 = 1 \cdot 1574 + 804$
$1574 = 1 \cdot 804 + 770$
$804 = 1 \cdot 770 + 34$
$770 = 22 \cdot 34 + 22$
$34 = 1 \cdot 22 + 12$
$22 = 1 \cdot 12 + 10$
$12 = 1 \cdot 10 + 2 \leftarrow$ $\quad$ Άρα $\text{ΜΚΔ}(2378, 1574) = 2.$
$10 = 5 \cdot 2$

2) $(a, b) = 1$ $\quad$ (δηλαδή $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 1$)
Θέλω να δείξω ότι: $(a, ab + b) = 1$

Απόδειξη

Έστω ότι $\text{ΜΚΔ}(a, ab+b) = \delta$, όπου δ θετικός ακέραιος > 1.

Τότε: $\left.\begin{array}{ll} \delta \mid a \text{ άρα και } & \delta \mid ab \\ \text{και} & \text{και} \\ \delta \mid ab+b & \delta \mid ab+b \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \mid \cancel{ab} + b - \cancel{ab} \Rightarrow \delta \mid b$

Άρα $\delta \mid a$ και $\delta \mid b$, άτοπο, αφού $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 1$.
Άρα $\text{ΜΚΔ}(a, ab + b) = 1$.

3) $5|a-3$ και $5|7-b$. Να δείξετε ότι $5|a+b$

Απόδειξη

$5|a-3 \Leftrightarrow a-3 = k\cdot 5 \Leftrightarrow a = 5k+3$

$5|7-b \Leftrightarrow 7-b = \lambda\cdot 5 \Leftrightarrow b = 7-5\lambda$

Άρα $a+b = 5k+3+7-5\lambda$

$= 5k-5\lambda+10$

$= 5(k-\lambda+2) \Leftrightarrow 5|a+b$

4) Να αποδείξετε ότι $36|(7^{v+1}-6v-7)$ $v\in\mathbb{N}^*$

Απόδειξη

(Βασικό βήμα) για $v=1$: $7^{1+1}-6\cdot 1-7=$

$7^2-13=49-13=36$

ισχύει

(Επαγωγική υπόθεση)

Έστω ότι για $v=k$ ισχύει: $36|(7^{k+1}-6k-7) \Leftrightarrow$

(P(k)) $7^{k+1}-6k-7 = 36\lambda \Leftrightarrow$

$\boxed{7^{k+1}=36\lambda+6k+7}$ (1)

(Επαγωγικό Βήμα)

Θα δείξω ότι ισχύει και για $v=k+1$ (P(k+1))

δηλαδή ότι: $36|7^{k+1+1}-6(k+1)-7 \Leftrightarrow$

$36|7^{k+2}-6k-6-7 \Leftrightarrow$

$36|7^{k+2}-6k-13$.

Έχουμε:

$7^{k+2}-6k-13 = 7^{k+1}\cdot 7-6k-13$

$\overset{(1)}{=}(36\lambda+6k+7)\cdot 7-6k-13$

$=252\lambda+42k+49-6k-13$

$=252\lambda+36k+36$

$=36(7\lambda+k+1)$

Άρα $36|7^{k+2}-6k-13$, άρα ισχύει η P(k+1).

Άρα από Μαθ. Επαγωγή: $36|(7^{v+1}-6v-7)$ $\forall v\in\mathbb{N}^*$