Μαθηματικά

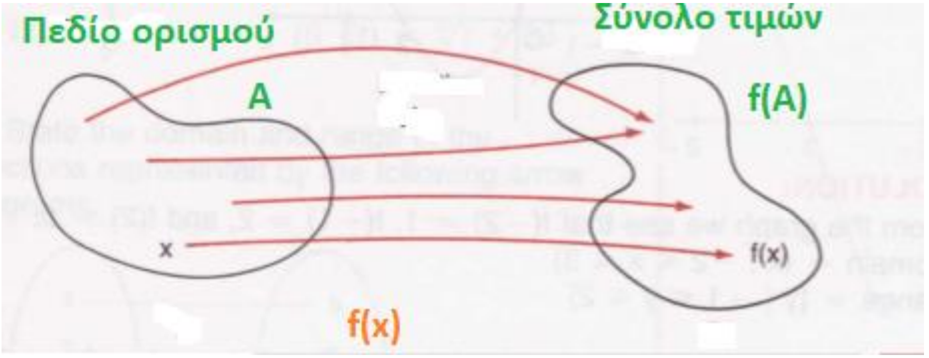
$3^η$ ενότητα: Συναρτήσεις

ΙΦΕ

- **Κάθε σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών είναι συνάρτηση;**

ΟΡΙΣΜΟΣ

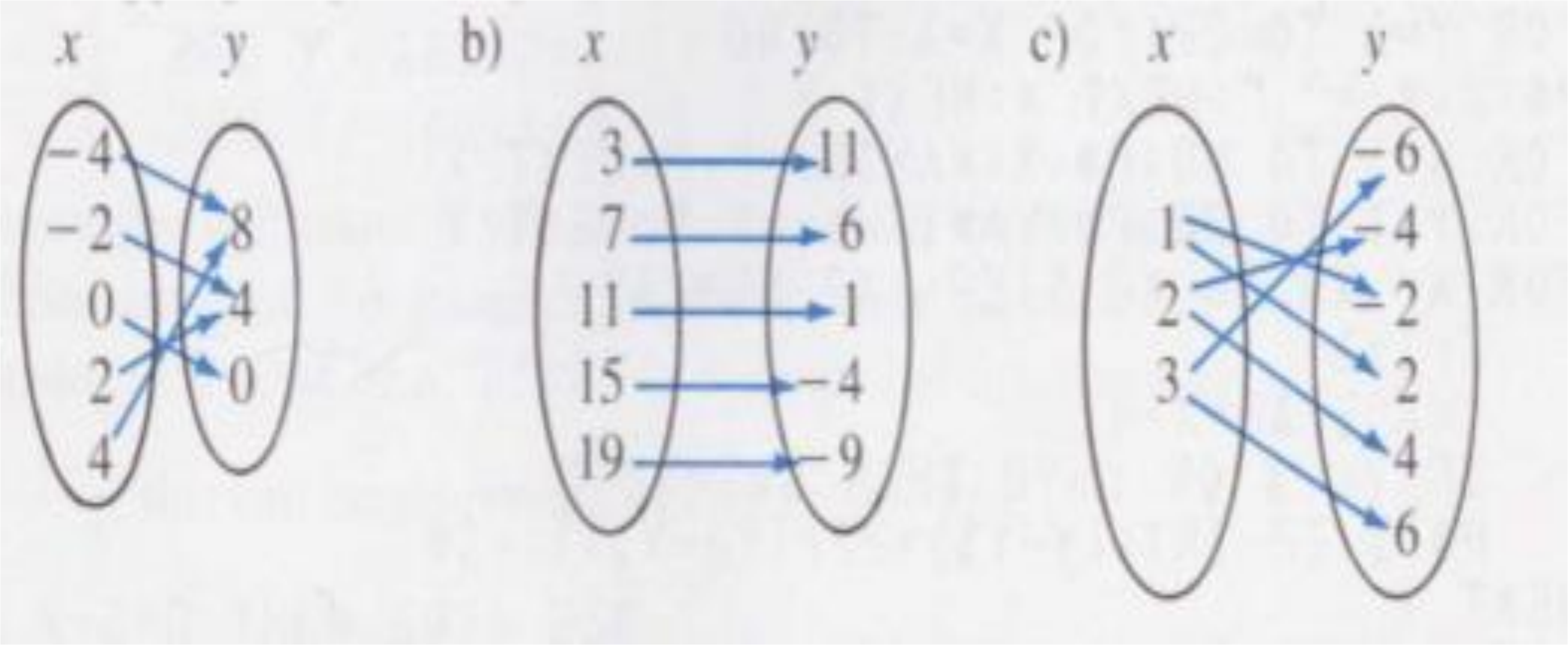
Έστω A ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο x ∈ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με f(x).



- Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, **κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού <u>πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο</u> του συνόλου τιμών**.

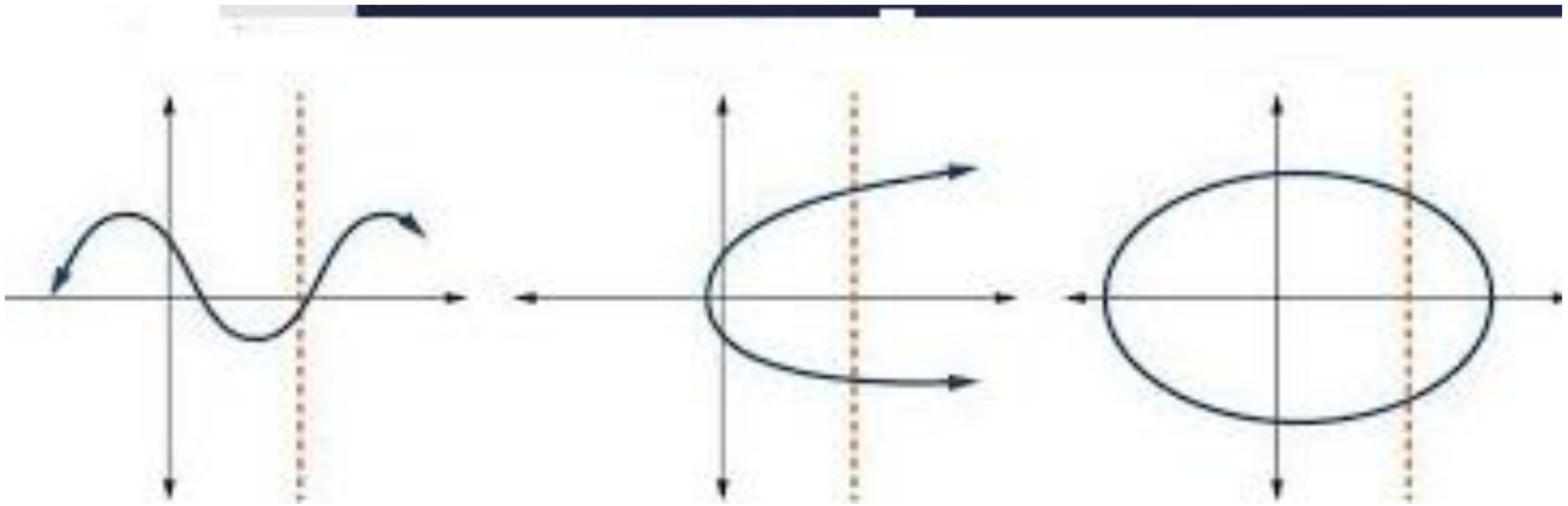
Συνεπώς, τι δεν πρέπει να βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα;

Ποιες από τις αντιστοιχήσεις συνόλων x, y αναπαριστούν συναρτήσεις; Αιτιολογείστε



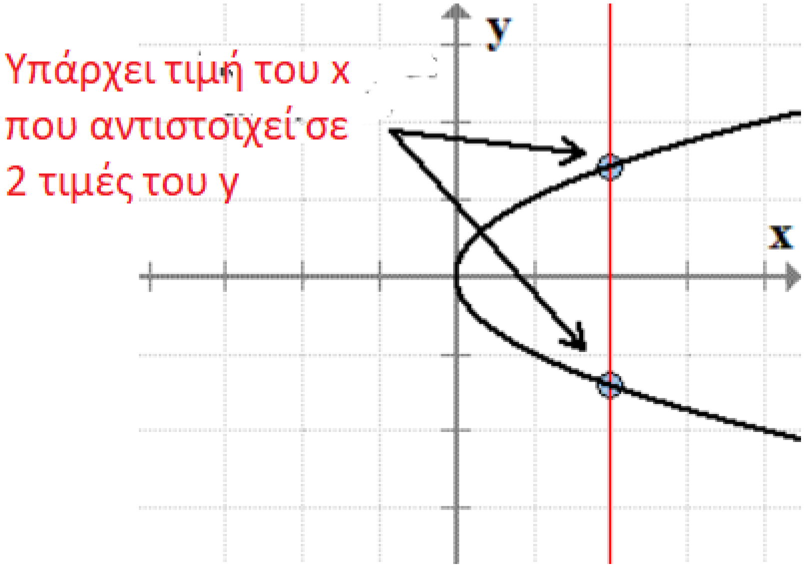
Έλεγχος με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης. Αιτιολογείστε

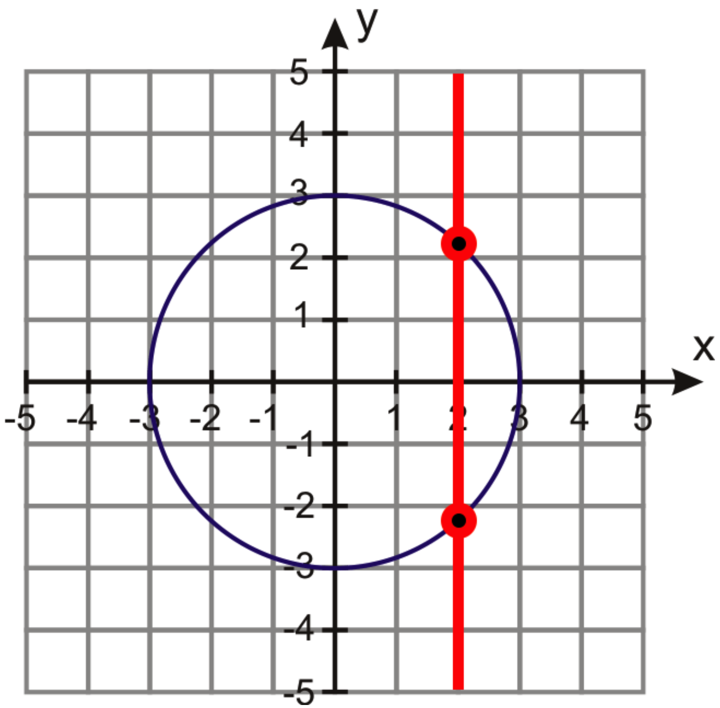
- Συνάρτηση Μη συνάρτηση Μη συνάρτηση



Είναι ο κύκλος συνάρτηση;

Παράδειγμα: $x^2 + y^2 = 9$



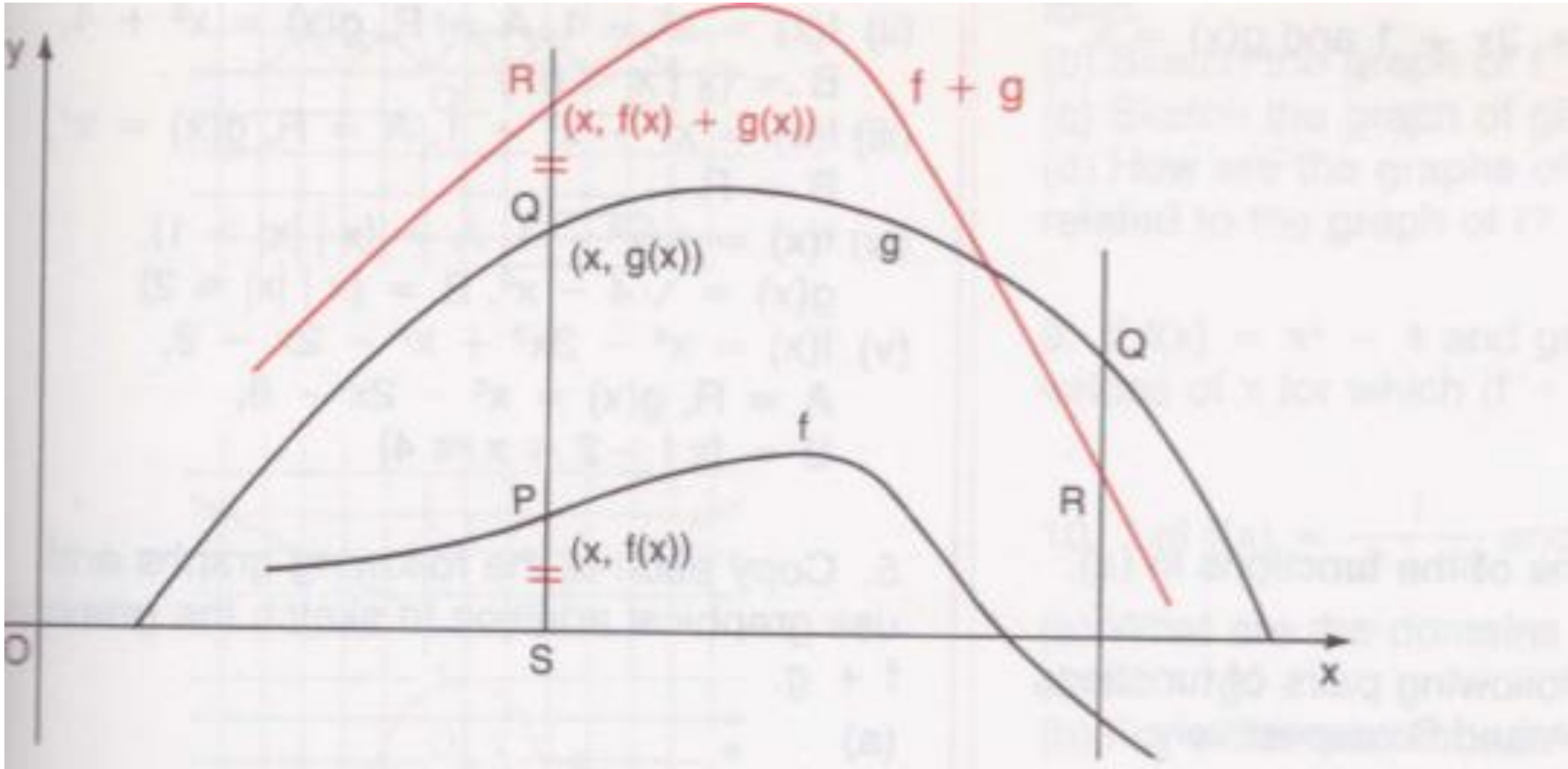


Η άλγεβρα των συναρτήσεων

- Άθροισμα συναρτήσεων,
  - (f + g)(x) = f(x) + g (x), πεδίο ορισμού το σύνολο A∩B
- Διαφορά συναρτήσεων
  - (f - g)(x) = f(x) - g (x), πεδίο ορισμού το σύνολο A∩B
- Γινόμενο συναρτήσεων
  - (f g)(x) = f(x) g (x), πεδίο ορισμού το σύνολο A∩B
- Πηλίκο συναρτήσεων
  - (f/g) (x) = f(x) / g (x)

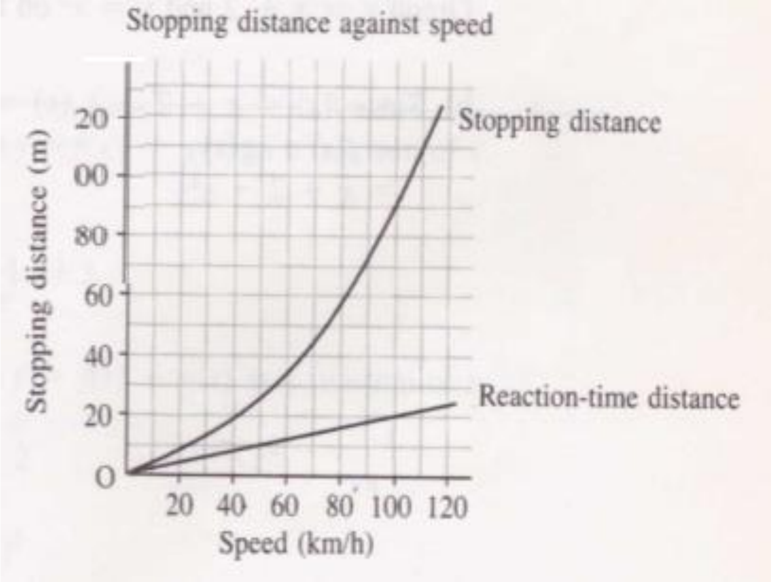
  Πεδίο ορισμού = {x ανήκει στην τομή των A, B και g(x)≠0}

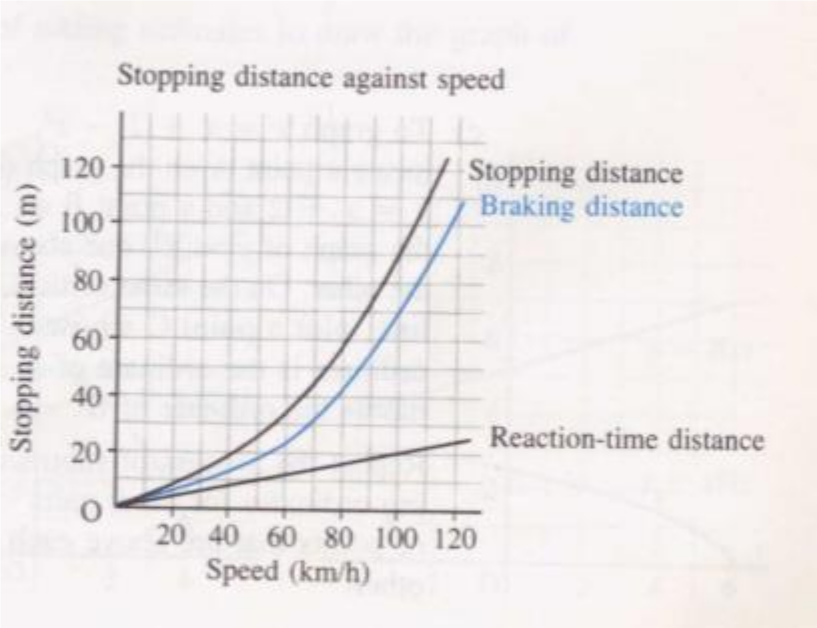
Γραφική απεικόνιση πρόσθεσης συναρτήσεων



Ένα παράδειγμα εύρεσης της διαφοράς συναρτήσεων γραφικά

- Θέλουμε να αναπαραστήσουμε την απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που πατάει φρένο ο οδηγός για διαφορετικές ταχύτητες.
  - Με πειράματα έχει διαπιστωθεί ότι το γράφημα που ζητάμε είναι **η διαφορά των παρακάτω συναρτήσεων**
    - Α) της συνάρτησης που αναπαριστά **την απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο για να σταματήσει**
    - Β) της συνάρτησης που αναπαριστά **την αντίδραση του οδηγού**
    - Σημ. και οι δύο συναρτήσεις δείχνουν τη σχέση απόστασης (m)- ταχύτητας (km/h)





Τα μαθηματικά στην καθημερινότητά μας

Η κλίση του δρόμου

Κλίση δρόμου

- **Οδικό σήμα**

Επικίνδυνη ανωφέρεια με κλίση 10%

Τι εκφράζει το 10%;

Απ. αν προχωρήσω οριζόντια 100μ θα ανέβω κατακόρυφα 10μ.

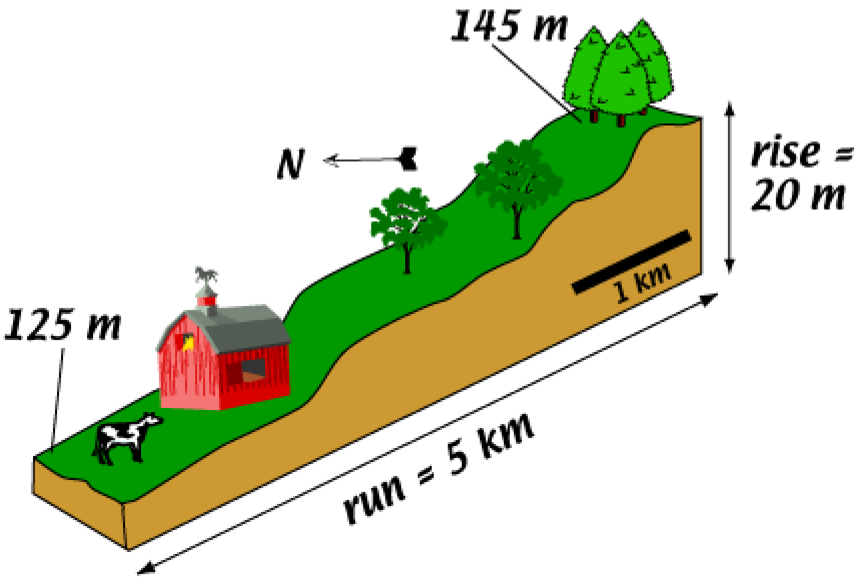
Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός γωνίας εκφράζει την κλίση του δρόμου;

Απ. Η εφω

Ποια είναι η γωνία κλίσης του συγκεκριμένου δρόμου;

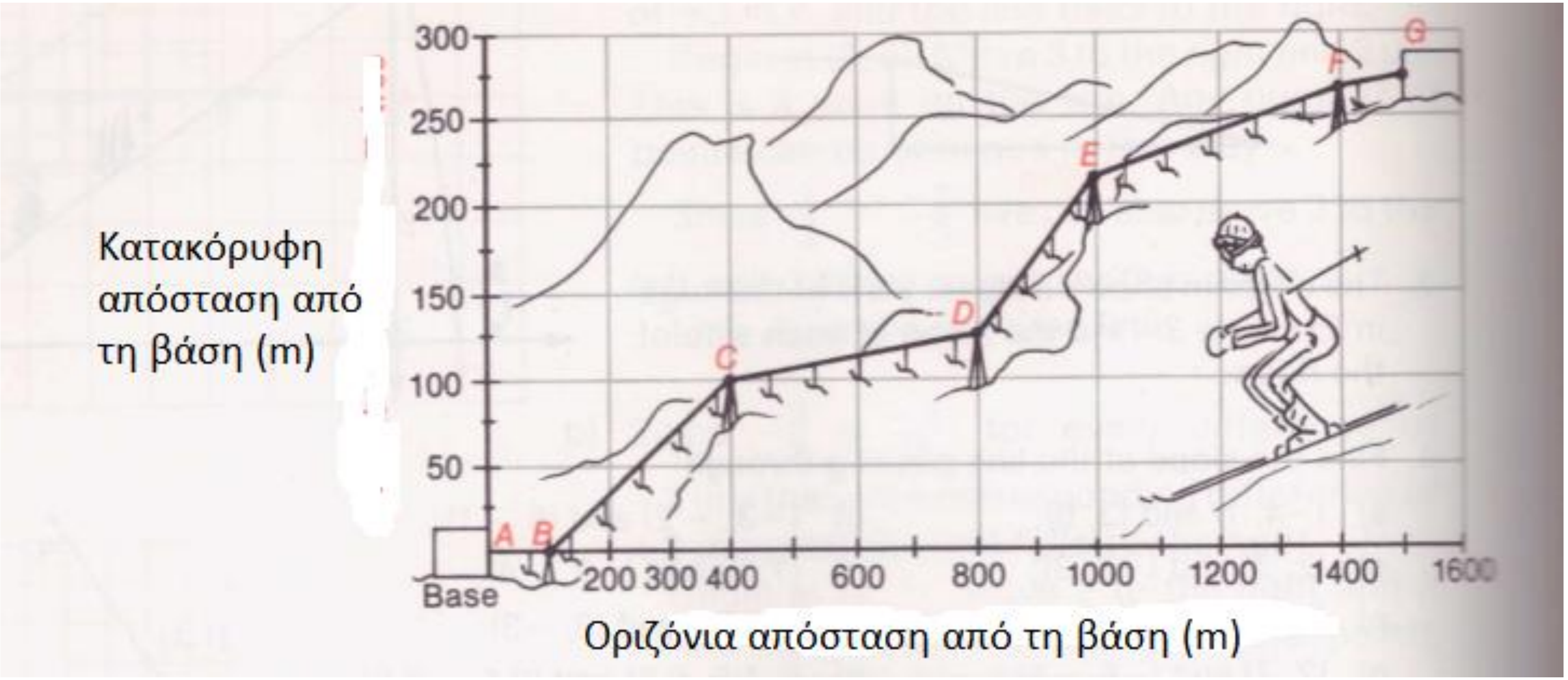
Απ. Περίπου 5 μοίρες

Ποια είναι η κλίση του λόφου;



Κλίση του λόφου = Rise/run = 20/5000=0.004 ή 0.4%

Να υπολογίσετε την κλίση στα τμήματα AB, BC, CD, DE,EF, FG του τελεφερίκ



ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Είδη συναρτήσεων

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
- Ρητές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Πολυωνυμική είναι κάθε συνάρτηση που μπορεί να γραφεί στη μορφή πολυωνύμου της μορφής

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$$

με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι πιο συνηθισμένες πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι:

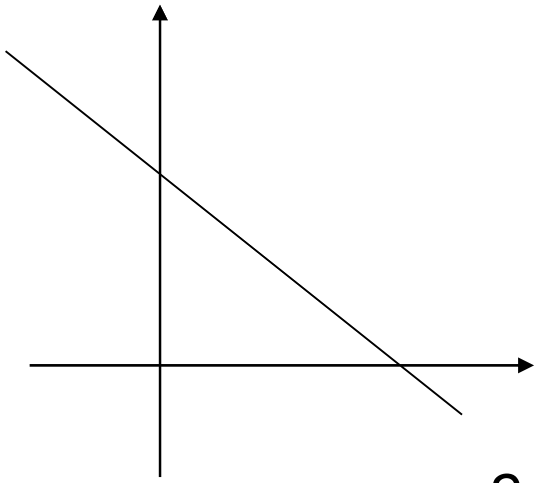
Η ευθεία με τύπο: $y(x) = \alpha x + \beta$

Η σταθερή συνάρτηση $y(x) = c$

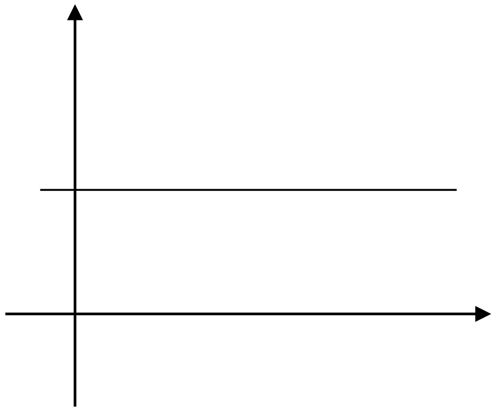
Η τριωνυμική με τύπο: $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Η γεωμετρική με τύπο: $y(x) = \alpha x^3$

Διαγράμματα πολυωνυμικών συναρτήσεων



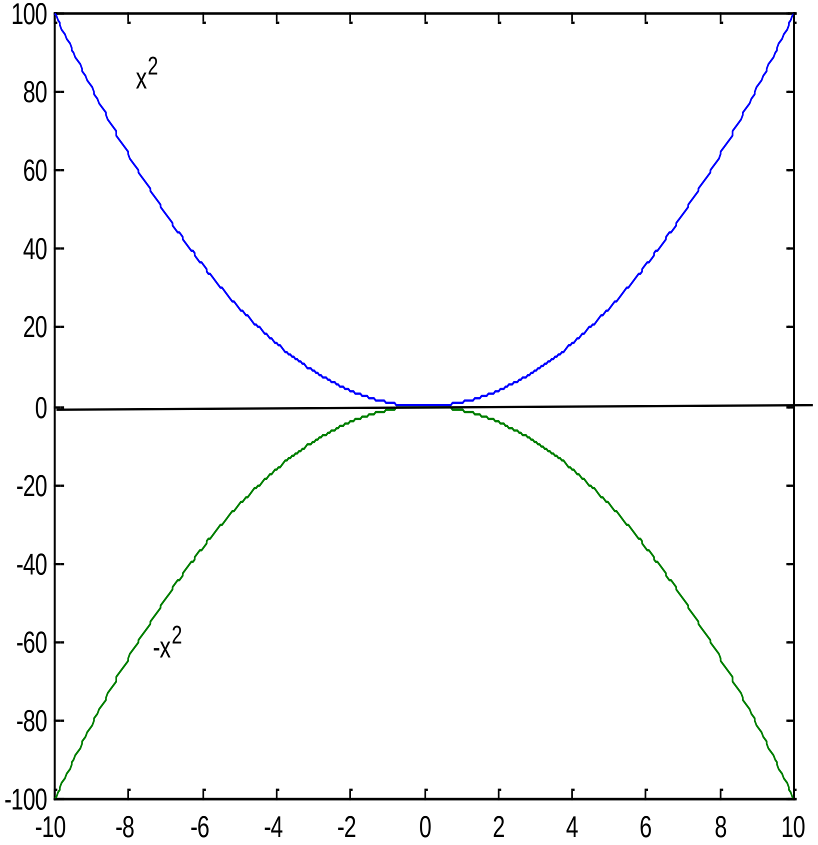
$y = \alpha x + \beta$



$y = c$

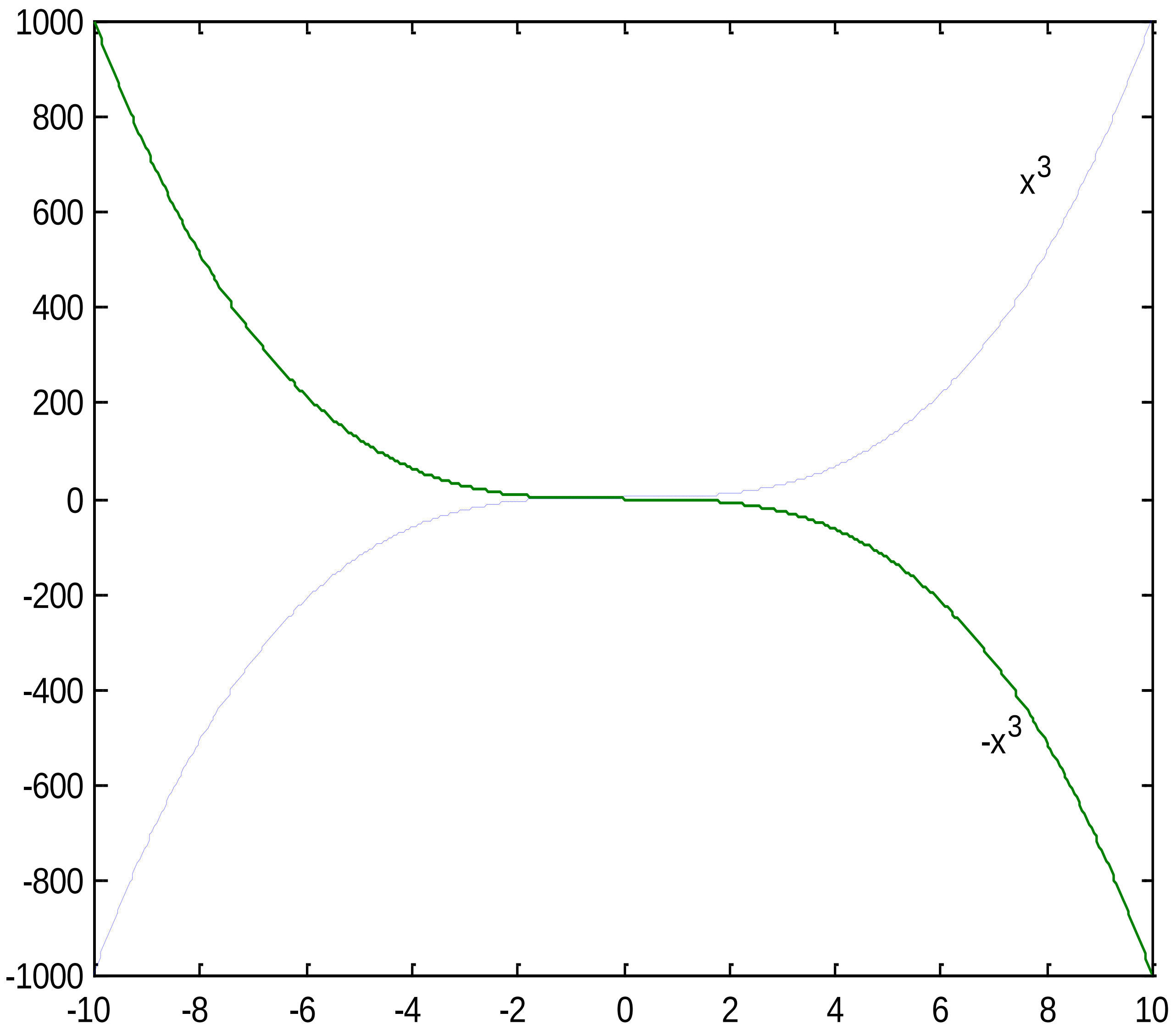
$f(x) = x^2$

$g(x) = -x^2$



$f(x) = x^3$

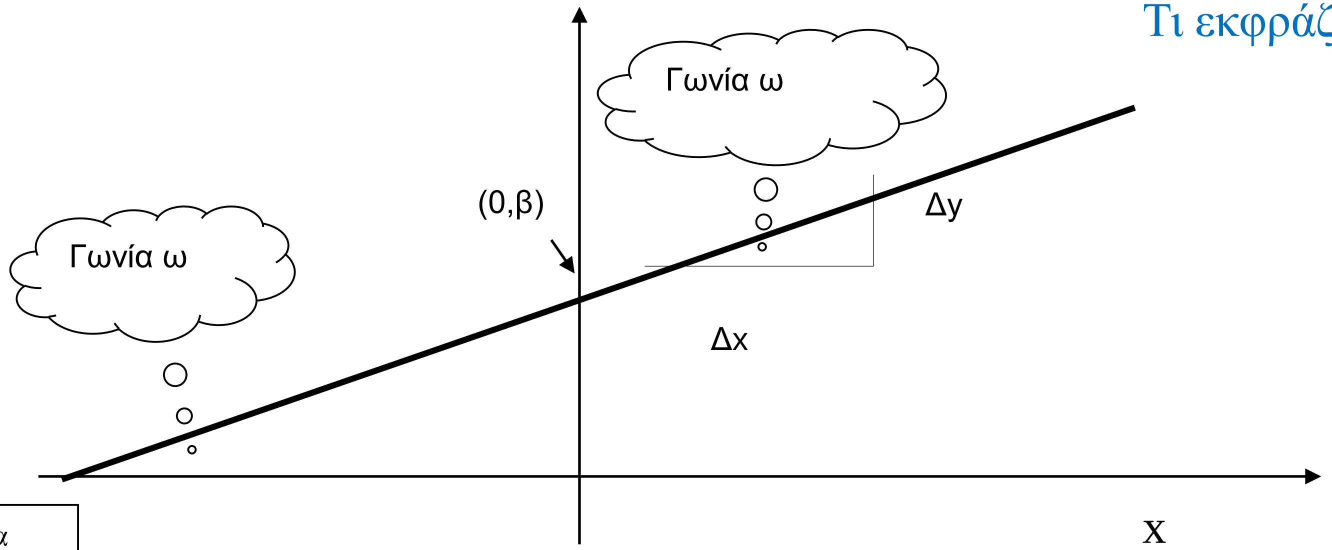
$g(x) = -x^3$


1000
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x3
-x3

Η ευθεία y=αx+β

Τι εκφράζουν τα α, β;

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon\varphi\omega$$



Όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα Οx

Το σημείο (0,β) είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα Oy.
Ο συντελεστής α εκφράζει την κλίση της ευθείας y = αx + β

Παρατηρήσεις

Αν η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων ή από το σημείο (0,0) τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής **y = αx.**

Η εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο (x_o,y_o) είναι: $\mathbf{y-y_o = \alpha(x-x_o)}$.

Η εξίσωση ευθείας που περνά από τα σημεία $M(x_1,y_1)$ και $N(x_2,y_2)$ είναι:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ρητές κλασματικές συναρτήσεις

Ρητές κλασματικές είναι οι συναρτήσεις της μορφής $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

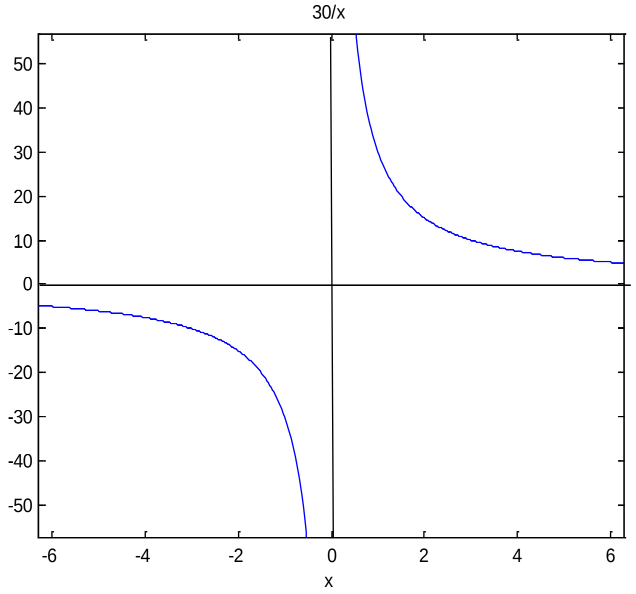
όπου P(x),Q(x) δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής:

$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_0 \;\; \alpha_\nu \neq 0$, και $Q(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \ldots + \beta_0 \;\; \beta_\kappa \neq 0$

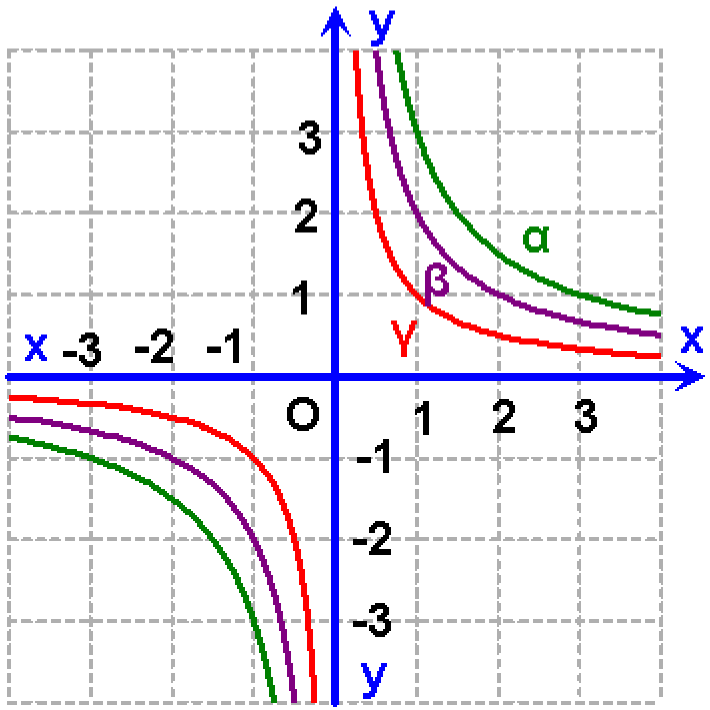
Η πιο συνηθισμένη ρητή κλασματική συνάρτηση είναι της μορφής:

$$y(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \gamma \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \quad \acute{\eta} \quad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$$

Αν θέσω α = 0, β = 1, γ = 1, δ = 0 προκύπτει μια συνάρτηση της μορφής: $y(x)=\dfrac{1}{x}$.



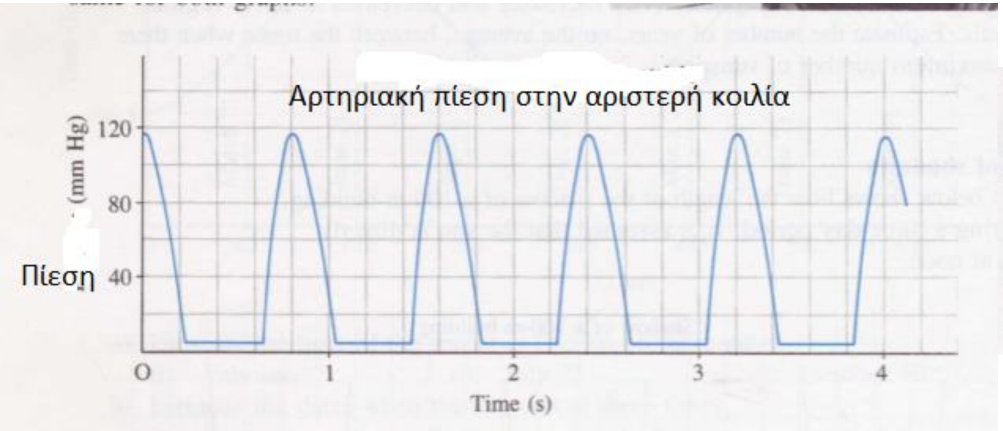
- Τι παρατηρείτε στη συνάρτηση y=30/x;

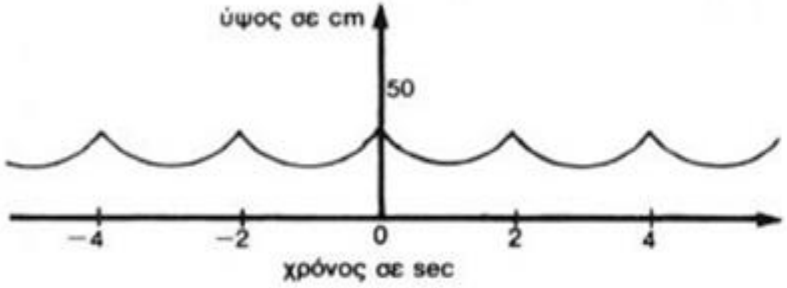


- Να βρείτε τα α, β, γ στις συναρτήσεις της μορφής α/x, β/x, γ/x που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.

Περιοδικές συναρτήσεις

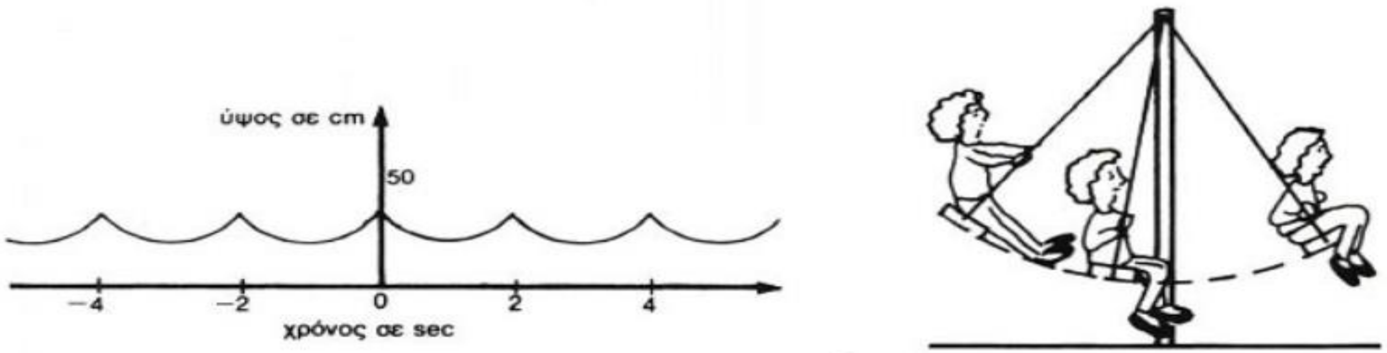
Η περιοδική συνάρτηση στην καθημερινότητά μας





Ορισμός περιοδικής συνάρτησης

- Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου t.



Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή t, το ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή t + 2 sec και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή t - 2 sec.

Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου t) **είναι περιοδική** με **περίοδο** 2 sec.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A, x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Ειδικές περιπτώσεις περιοδικών συναρτήσεων

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- sinx ή ημx ή συνάρτηση ημιτόνου

Πεδίο ορισμού x ∈ R → [-1,1] (Σύνολο τιμών)

- cosx ή συνx ή συνάρτηση συνημιτόνου

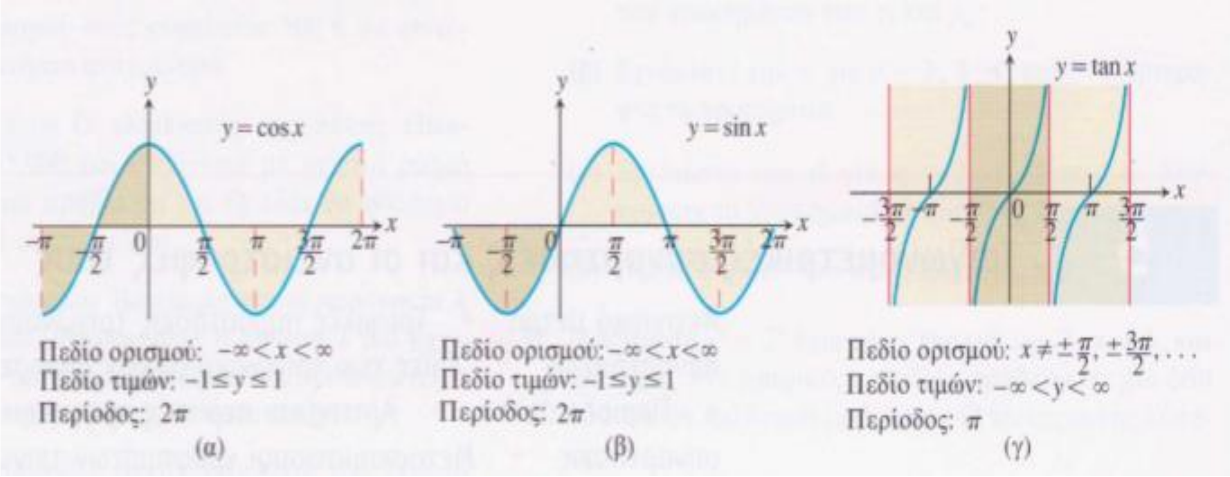
Πεδίο ορισμού x ∈ R → [-1,1] (Σύνολο τιμών)

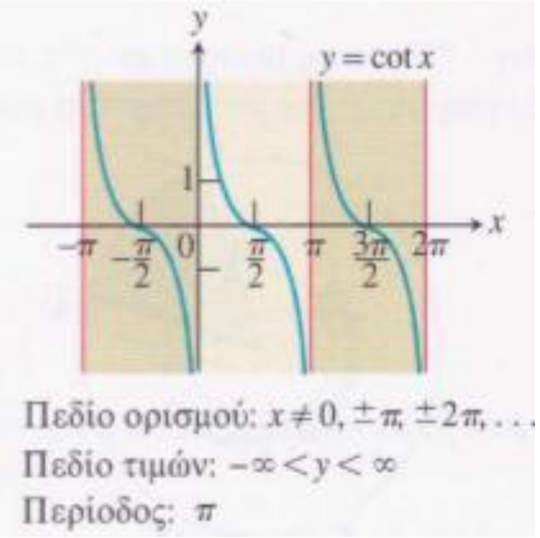
- tanx ή εφx ή συνάρτηση εφαπτομένης

Πεδίο ορισμού x ∈ R-[kπ+π/2, k∈ Z] → R (Σύνολο τιμών)

- cotx ή σφx ή συνάρτηση συνεφαπτομένης

Πεδίο ορισμού x ∈ R – [kπ, k∈ Z] → R (Σύνολο τιμών)

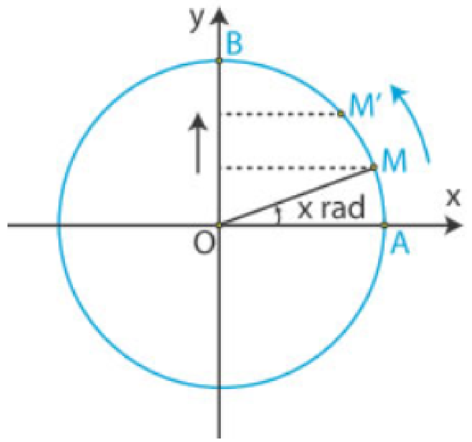




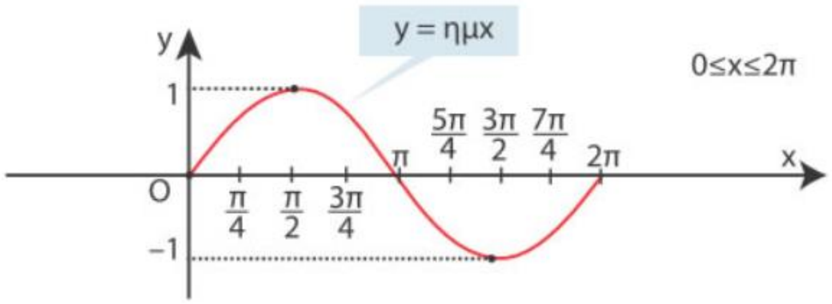
Μελέτη της συνάρτησης ημx με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου

• Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το $\frac{\pi}{2}$, το M κινείται από το A μέχρι το B. Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι:



Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα [0, 2π]:



Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική, με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα [2π, 4π], [4π, 6π] κτλ. καθώς και στα διαστήματα [-2π, 0], [-4π, -2π] κτλ.

Οι **περιοδικές** συναρτήσεις της μορφής
y(t) = Αημ(ωt)
και **g(t) = Ασυν(ωt)** λέγονται **αρμονικές συναρτήσεις**.

Χαρακτηριστικά των αρμονικών συναρτήσεων

α. Το γράφημά τους είναι ημιτονοειδής καμπύλη ή αρμονικό κύμα.

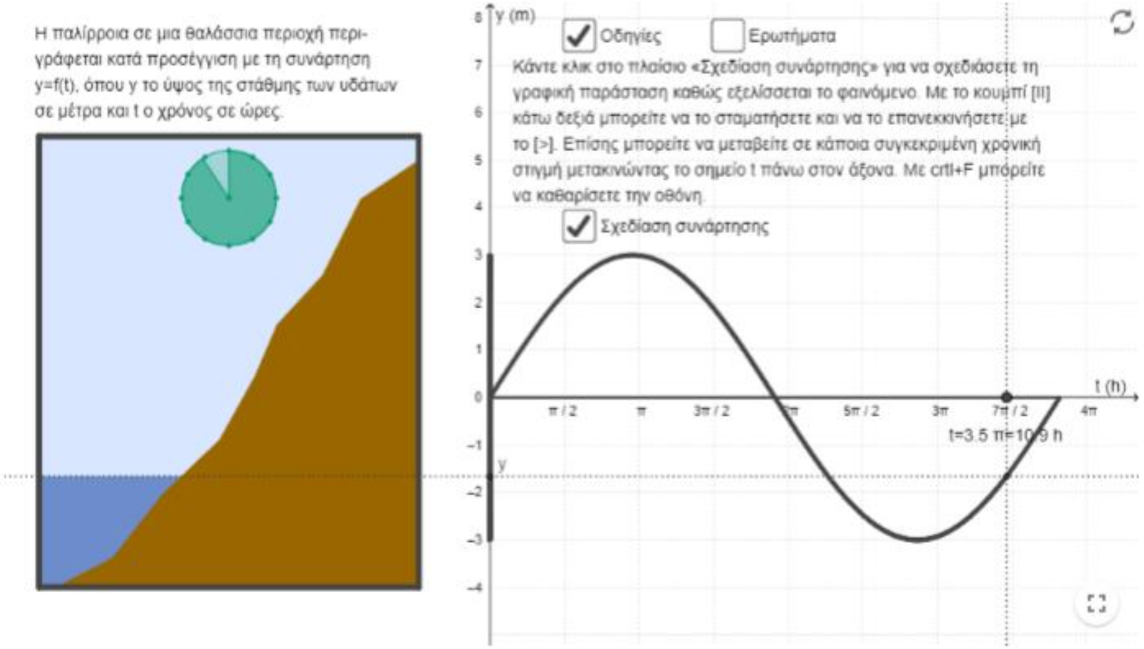
β. Έχουν περίοδο **Τ =** $\frac{2\pi}{\omega}$

γ. Έχουν πλάτος |Α| που εκφράζει την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

- Σχεδιάστε τη συνάρτηση $$y(t) = \sin \frac{2\pi t}{5}$$

Το φυσικό φαινόμενο της παλίρροιας και ημιτονοειδής συνάρτηση

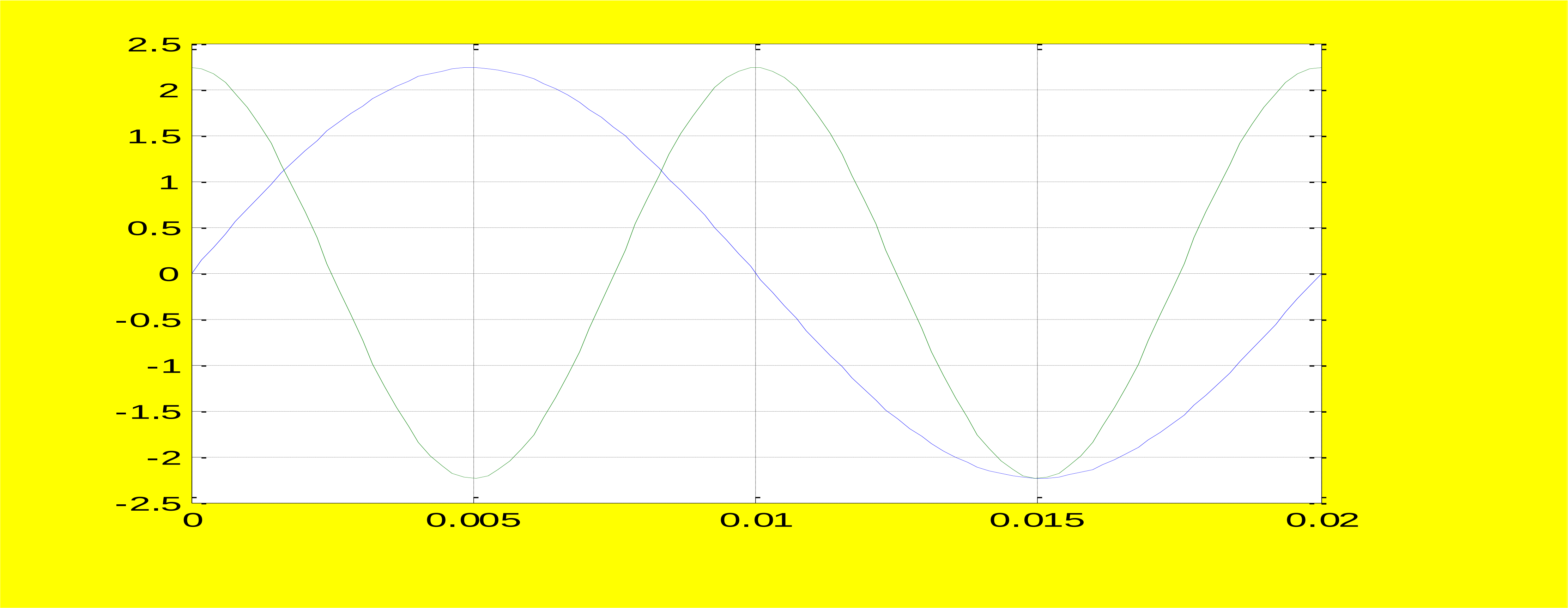
- http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5165



Εικόνα 2: Παράλληλη αναπαράσταση στάθμης νερού σε φυσικό περιβάλλον και άξονες συντεταγμένων σε κοινή μονάδα χρόνου

Στο παρακάτω γράφημα να αναγνωρίσετε την κάθε συνάρτηση και να αναφέρετε τα χαρακτηριστικά της (περίοδο και πλάτος).

$$f(t) = \sqrt{5} \cdot \eta\mu(100\pi t) \qquad g(t) = \sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu(200\pi t)$$



Εκθετικές συναρτήσεις

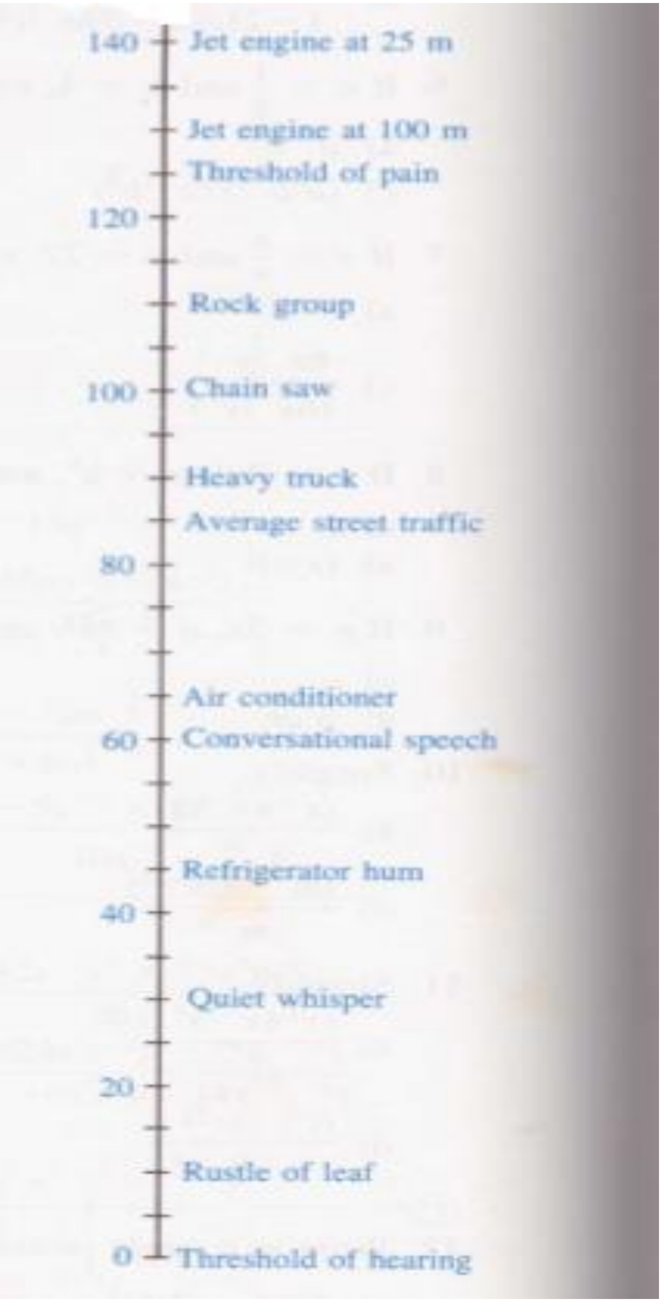
Εντάσεις ήχων στην κλίμακα decibel (dB)

- Για παράδειγμα, ο θόρυβος του ψυγείου είναι 45dB ενώ του αλυσοπρίονου είναι 100dB.
- Κάθε αύξηση κατά 10dB στον θόρυβο μιας πηγής σημαίνει 10φορές αύξηση της έντασης του ήχου, 20dB αύξηση 100 ή 10^2 φορές της έντασης του ήχου κλπ.
- Ερ. 1: Συγκρίνετε τις εντάσεις του ψιθύρου (30db) και ενός φορτηγού (90dB)
  - Απ. Αύξηση 60 dB δηλαδή 10^6 = 1.000.000 ή ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερη η ένταση του ήχου ενός φορτηγού από έναν ψίθυρο.
- Η σχέση που συνδέει τις εντάσεις δύο πηγών L_1 και L_2 είναι εκθετική συνάρτηση της μορφής

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{0,1(S_2 - S_1)}$$

όπου S_1 και S_2 εκφράζονται σε dB.

Ερ.2: Επιβεβαιώστε τη σχέση που βρήκατε στην ερώτηση 1.



Εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $f(x) = α^x$

$f(x) = α^x$ ¶

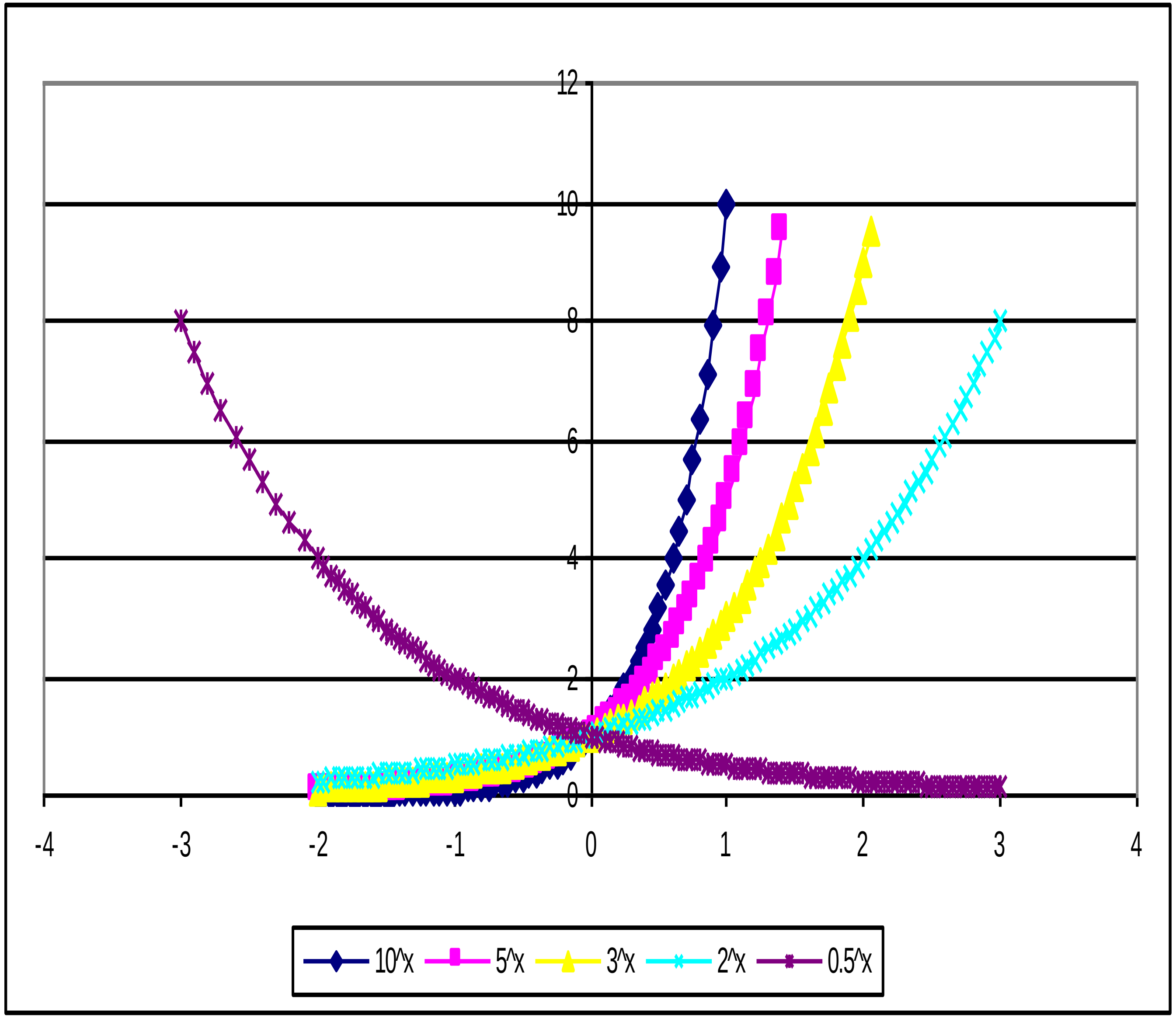
Πεδίο·ορισμού·x·∈·R¶

Σύνολο·τιμών·(0,·∞)¶

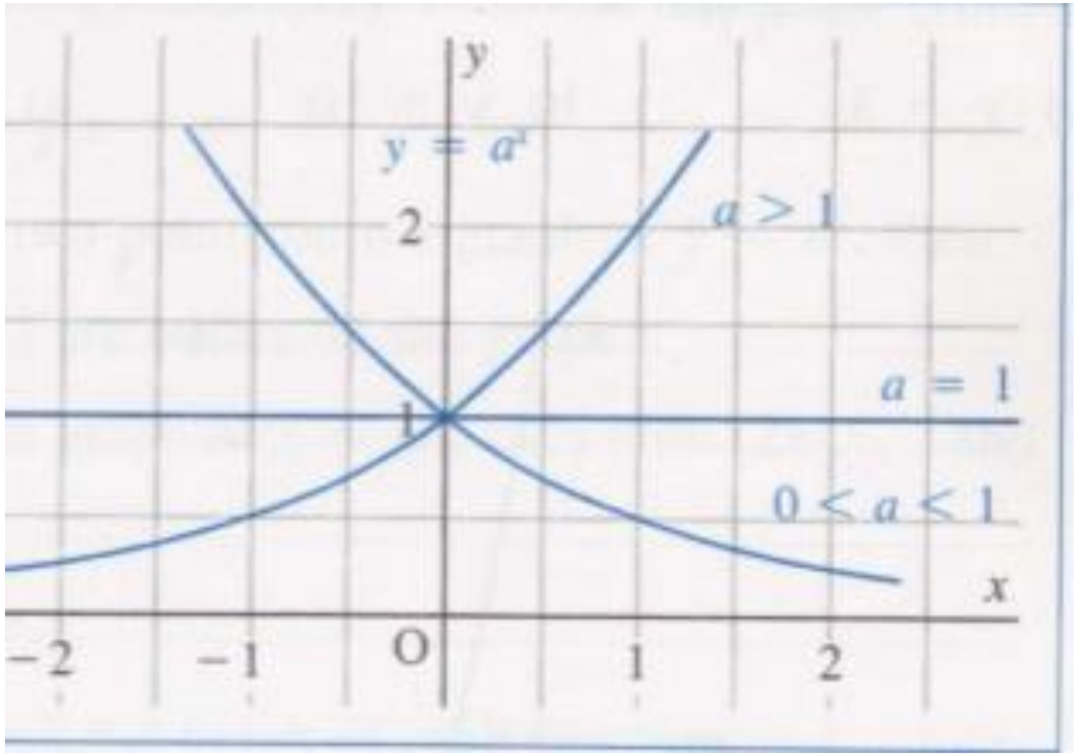
$α \succ 0$·και·$α \neq 1$¶

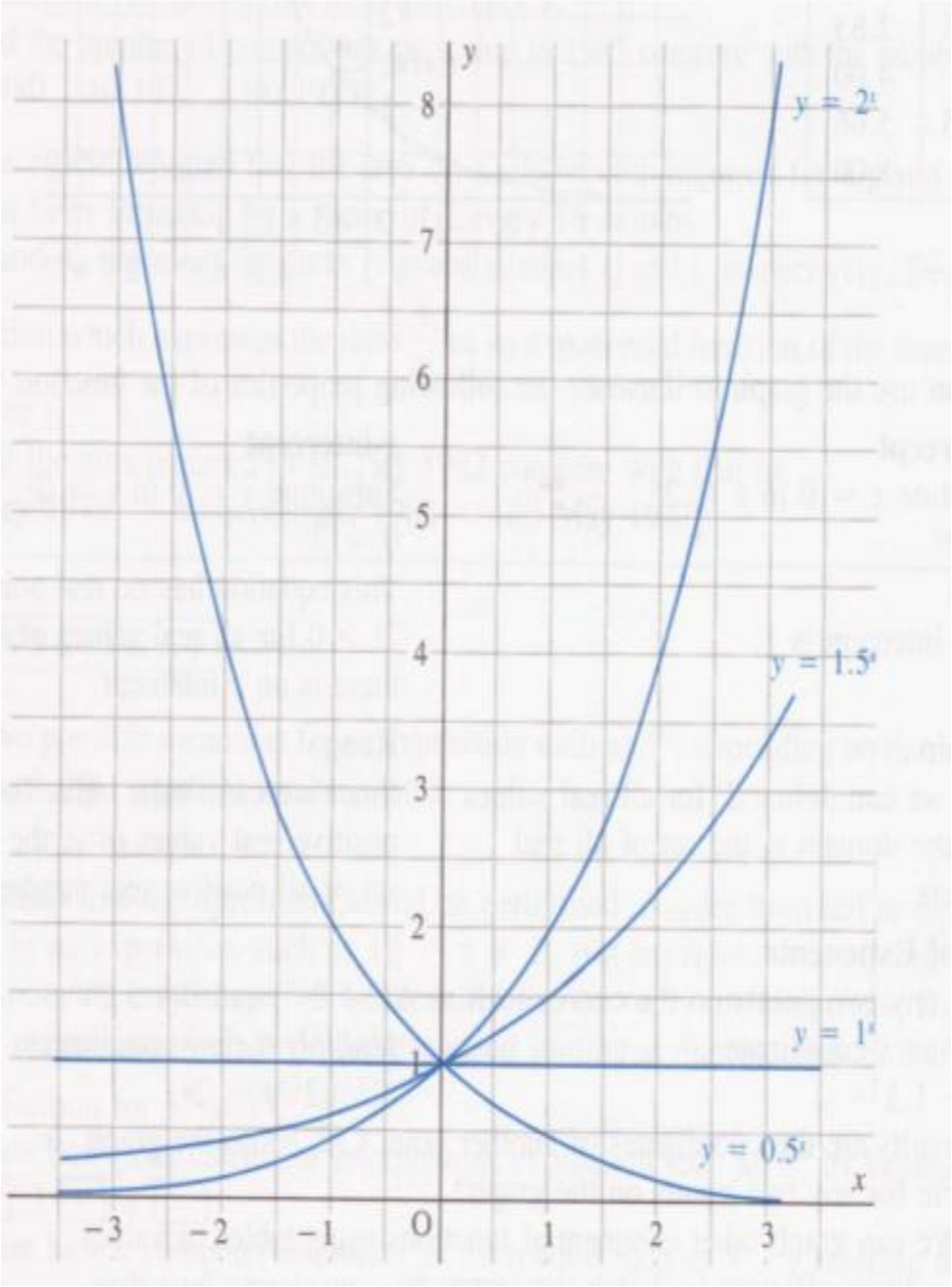
- Έστω οι εκθετικές συναρτήσεις 10^x, 5^x, 3^x, 2^x και $(1/2)^x$

- Να αναγνωρίσετε και να δικαιολογήσετε τη θέση της κάθε συνάρτησης.
- Ποια συνάρτηση εκφράζει την μεγαλύτερη αύξηση;

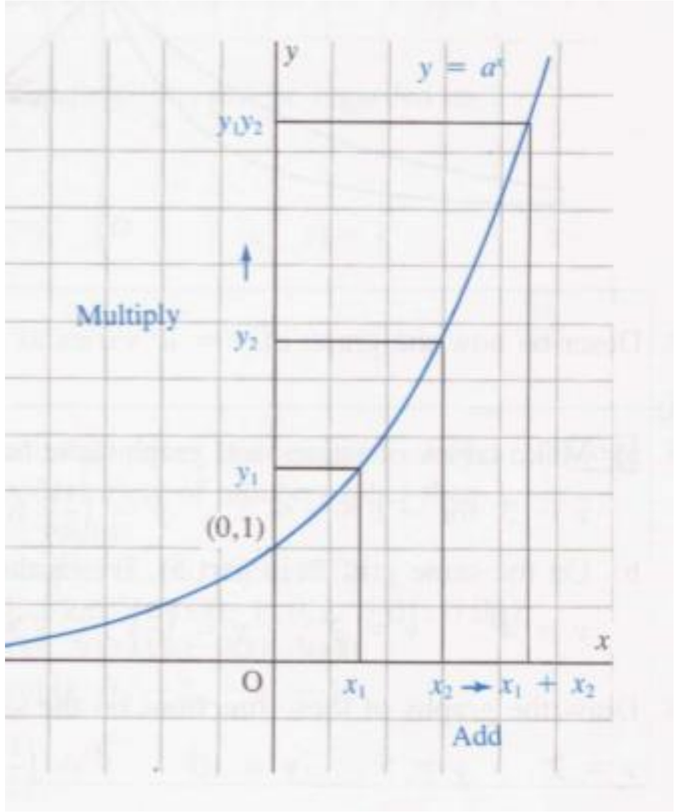


Γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων $y = \alpha^x$





Αποδείξτε ότι αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι σημεία της εκθετικής συνάρτησης $y = \alpha^x$ τότε και το σημείο με συντεταγμένες $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$ ανήκει επίσης στην συνάρτηση $y = \alpha^x$



Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha^{x1} \\ y_2 &= \alpha^{x2} \end{aligned}\right\} \quad y_1 y_2 = \alpha^{x1}\,\alpha^{x2} = \alpha^{x1+x2}$$

Συνεπώς και το σημείο

με συντεταγμένες $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$

ανήκει επίσης στην συνάρτηση $y = \alpha^x$.

Λογαριθμικές συναρτήσεις

Ορίζοντας την έννοια του λογαρίθμου

Στην ισότητα $3^4 = 81$, ο αριθμός 4 είναι ο εκθέτης ο οποίος με βάση 3 μας δίνει το 81.
Μια πιθανή ερώτηση η οποία προκύπτει από αυτή την ισότητα είναι:
«Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τι παριστάνει το 4 στην ισότητα $3^4 = 81$ και με ποιο συμβολικό τρόπο θα το γράφαμε»;

Ώστε, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ

Λογαριθμική μορφή	Εκθετική μορφή
Εκθέτης $\log_a x = y$ Βάση	Εκθέτης $a^y = x$ Βάση

Έτσι, στην ισότητα $3^4 = 81$, το 4 είναι ο εκθέτης που με βάση το 3 μας δίνει τον αριθμό 81. Ισοδύναμα, λέμε ότι: «το 4 είναι ο λογάριθμος του 81 με βάση 3» και συμβολικά γράφουμε:

$$4 = \log_3 81 \ (\text{ή } 4 = \lambda o \gamma_3 81)$$

Έτσι, από μια εκθετική ισότητα μπορούμε να έχουμε την αντίστοιχη λογαριθμική ισότητα:

$$\underbrace{3^4 = 81}_{\text{εκθετική ισότητα}} \iff \underbrace{4 = \log_3 81}_{\text{λογαριθμική ισότητα}}$$

Ο $\log_2 64$ διαβάζεται «λογάριθμος του 64 με βάση το 2» και ισούται με τον εκθέτη της δύναμης 2^6, που είναι το 6.

$$2^6 = 64 \iff 6 = \log_2 64$$

Τόσο από τον ορισμό του λογάριθμου, όσο και από την ισοδυναμία εκθετικής - λογαριθμικής ισότητας, αποδεικνύονται οι πρώτες ιδιότητες των λογαρίθμων. Πιο κάτω αναφέρονται ορισμένες ιδιότητες των λογαρίθμων, οι οποίες πηγάζουν άμεσα από το ορισμό του ίδιου του λογάριθμου $\log_a x$, όταν το $x > 0$ και $a > 0, a \neq 1$, για συγκεκριμένες τιμές του x.

Ιδιότητες λογάριθμου	Αιτιολόγηση	Παραδείγματα
1. $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	✓ $\log_5 1 = 0$ ✓ $\log 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	➢ $\log_7 7 = 1$ ➢ $\log 10 = 1$
3. $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	✓ $ln e^4 = 4$ ✓ $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$
4. $a^{\log_a x} = x$	$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ $\Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$	➢ $3^{\log_3 15} = 15$ ➢ $e^{\ln \kappa} = \kappa$ ➢ $10^{\log 8} = 8$

Παραδείγματα (1/2)

Να εκφράσετε τις πιο κάτω εκθετικές ισότητες με τις αντίστοιχες ισοδύναμες λογαριθμικές ισότητες:

(α) $7^2 = 49$ (β) $10^6 = 1000000$ (γ) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1$ (ε) $\sqrt{81} = 9$ (στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4$

Λύση

(α) $7^2 = 49 \Leftrightarrow 2 = \log_7 49$

(β) $10^6 = 1000000 \Leftrightarrow 6 = \log_{10} 1000000 = \log 1000000$

(γ) $2^{-5} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow -5 = \log_2 \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_6 1$

(ε) $\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 81^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log_{81} 9$

(στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \log_{32} 4$

Παραδείγματα (2/2)

Δικαιολογείστε τις παρακάτω σχέσεις

$\log_2 8 = 3$, γιατί $8 = 2^3$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$, γιατί $2 = 4^{½}$

$\log_{10} 0{,}001 = -3$, γιατί $0{,}001 = 10^{-3}$

$\log_{0,5} 0{,}25 = 2$, γιατί $0{,}25 = 0{,}5^2$

Δεκαδικοί λογάριθμοι ή λογάριθμοι με βάση το 10 (λογθ)

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι.**

Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται απλά με logθ και όχι με $\log_{10}\theta$.

Επομένως:

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
log 213	213	log	=	2.328379603
log 0,325	0.325	log	=	−0.488116639

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Οι λογάριθμοι θετικών αριθμών αντιπροσωπεύονται από τους εκθέτες σε μια εκθετική ισότητα. Γνωρίζουμε επίσης αρκετές ιδιότητες δυνάμεων, οι οποίες δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες λογαρίθμων. Αν έχουμε τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς a, x, y ($a \neq 1$) και $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν και οι πιο κάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα	Λεκτική περιγραφή
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	Ο λογάριθμος του γινομένου δύο αριθμών είναι ίσος με το άθροισμα των λογαρίθμων των αριθμών.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο αριθμών είναι ίσος με τη διαφορά των λογαρίθμων των αριθμών.
3. $\log_a A^\kappa = \kappa \cdot \log_a A$	Ο λογάριθμος της δύναμης ενός αριθμού είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη της δύναμης επί τον λογάριθμο του αριθμού.

Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

2. $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

3. $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Εστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \theta_2 = x_2 \qquad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

2. Εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο.

3. Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta = x \qquad (2)$$

Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha \theta^k = kx$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Διαχείριση πολύ μεγάλων αριθμών…

- Υπολογίστε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων

α) 20190^2019 = 2.27x 10^6744

β) 20190^20190 = ?

ΛΥΣΗ

Έστω 20190^20190 =α

log(α) (δηλαδή δεκαδικός λογάριθμος του α) = log (20190^20190)

=20190xλογ20190 (ιδιότητα των λογαρίθμων)

= 20190x4,3=86.817

Άρα log(α) = 86.817

Άρα α= 10^86.817 (μετατροπή της λογαριθμικής σχέσης σε εκθετική)=6.86x10^86

Η σημασία του λογάριθμου στην επιστήμη

- Η ανάπτυξη των λογαρίθμων τον $17^{ο}$ αιώνα, έφεραν την επανάσταση στην αστρονομία, αφού επέτρεψε υπολογισμούς που ήταν αδύνατοι μέχρι τότε.
- Παρόλο που σήμερα οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν αναλάβει πλέον αυτόν το υπολογιστικό ρόλο, οι λογάριθμοι έχουν μεγάλο ρόλο στα Μαθηματικές και τις Φυσικές Επιστήμες.
- Που χρησιμεύουν;
- Οι λογάριθμοι και οι λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμεύουν στην διαχείριση, στη σύγκριση, αλλά και στις πράξεις μεταξύ πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αριθμών.
- Το γεγονός αυτό έχει πολλές εφαρμογές στις επιστήμες.
  - Για παράδειγμα, είναι πολύ ευκολότερο, αντί της περιεκτικότητας ενός διαλύματος σε κατιόντα υδρογόνου, να διαχειριζόμαστε το pH, που είναι λογάριθμος αυτής της περιεκτικότητας.
  - Άλλες εφαρμογές είναι η κλίμακα Richter στη σεισμολογία, η κλίμακα Decibel στην μέτρηση της έντασης του ήχου, η αστρική φωτεινότητα στην αστρονομία κ.α.
- Με ποιο τρόπο γίνεται αυτή η διαχείριση;
- Αυτό λοιπόν που συμβαίνει είναι ότι αντί να χειριζόμαστε απευθείας τους πολύ μεγάλους ή πολύ μικρούς αριθμούς, αρχικά τους «μετασχηματίζουμε» σε πολύ μικρότερους (δηλαδή τους λογάριθμούς τους) και στη συνέχεια με τον αντίστροφο μετασχηματισμό επιστρέφουμε στις αρχικές μετρήσεις.
  - Η παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιείται και σε λογισμικά, όταν ηλεκτρονικοί υπολογιστές καλούνται να δώσουν αποτελέσματα συγκρίνοντας αριθμούς που έχουν πολύ μεγάλο εύρος τιμών.

Η λογαριθμική συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log_\alpha x$

Η συνάρτηση **g(x) = log$_\alpha$x** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.**

Περιγραφή της συνάρτησης

Είναι συνάρτηση 1-1, είναι αύξουσα όταν $\alpha \succ 1$και φθίνουσα όταν $\alpha \prec 1$

Είναι αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης και γι' αυτό τον λόγο τα γραφήματά τους είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y = x.

- Η συνάρτηση **y = lnx** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση τον **νεπέριο αριθμό e.**
- **Η συνάρτηση y=λογx λέγεται δεκαδική λογαριθμική συνάρτηση** μιας και έχει βάση **τον αριθμό 10.**

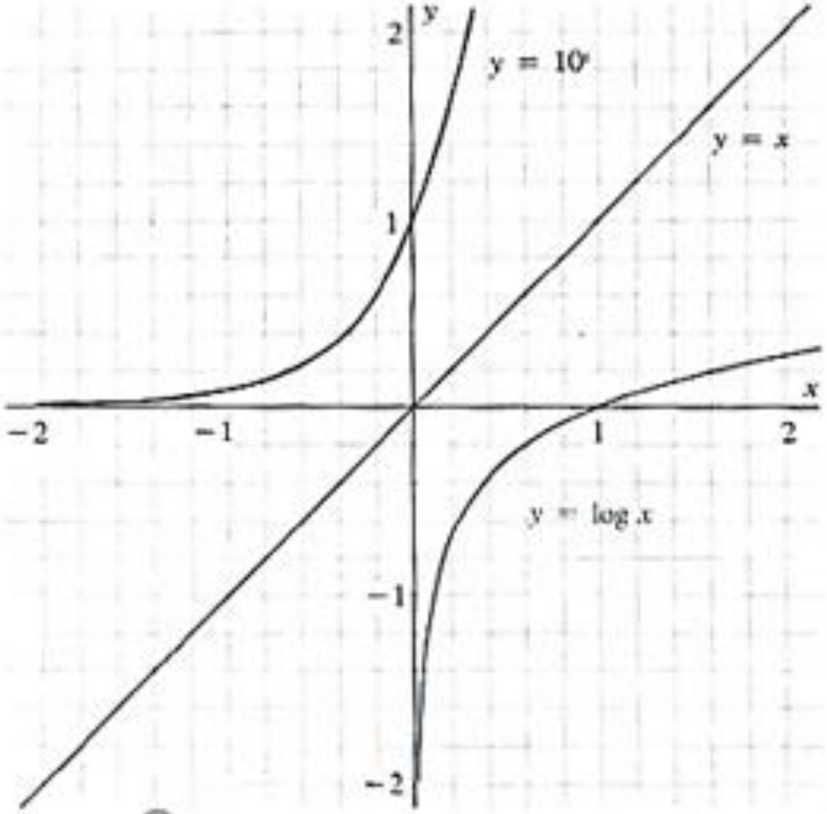
Σημείωση 1: όταν δεν αναφέρεται η βάση μιας λογαριθμικής συνάρτησης ή ενός λογαρίθμου εννοούμε ότι είναι το 10

Σημείωση 2: το επιστημονικό κομπιουτεράκι υπολογίζει μόνο δεκαδικούς και νεπέριους λογαρίθμους.

Σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα την y=10^x και την λογx ή logx. Τι παρατηρείτε;

$y = 10^x$

x	y
−2	0.01
−1.5	0.03
−1	0.10
−0.5	0.32
−0.2	0.63
0	1.00
0.1	1.26
0.2	1.58
0.3	2.00

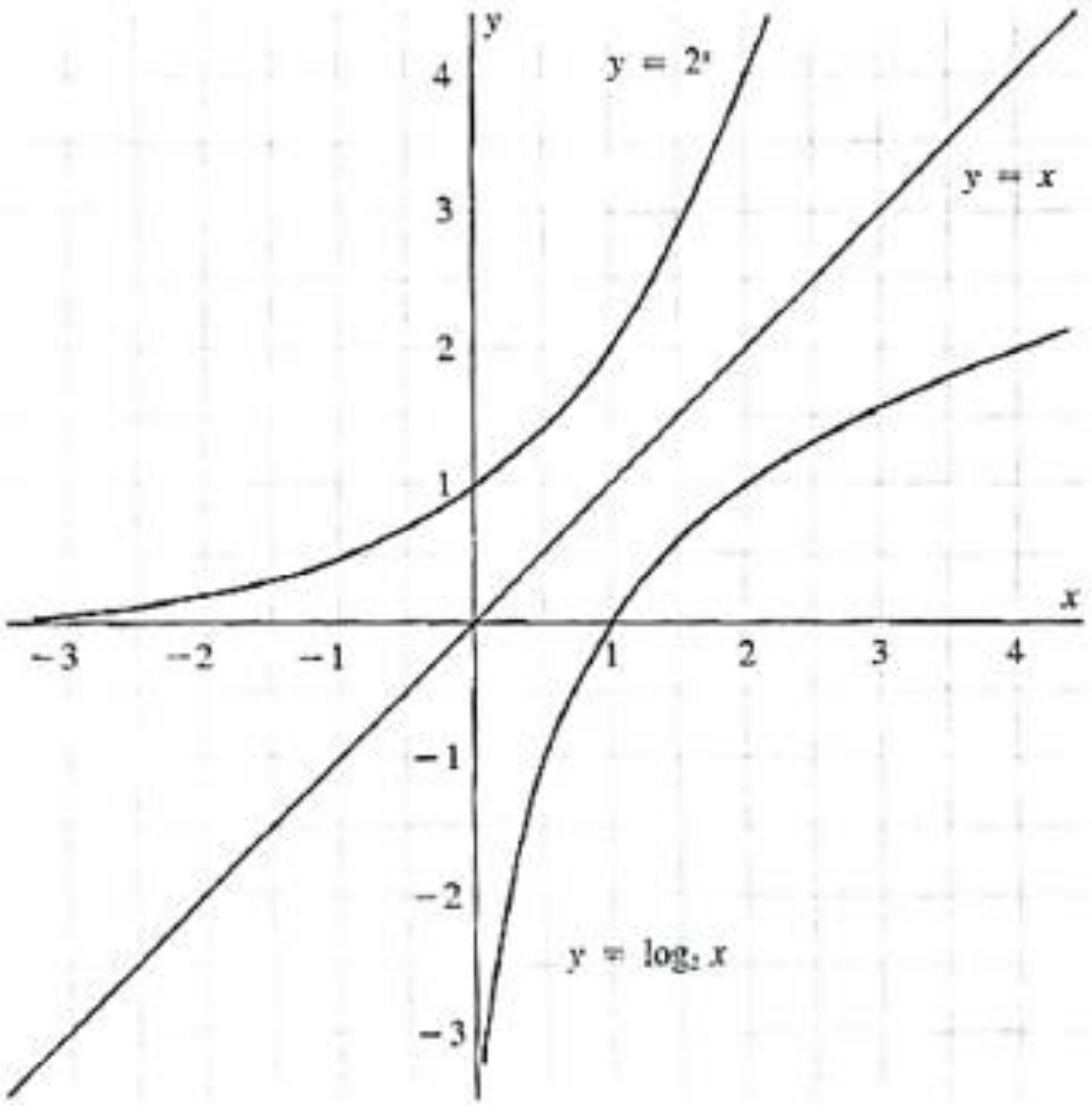


$y = 2^x$

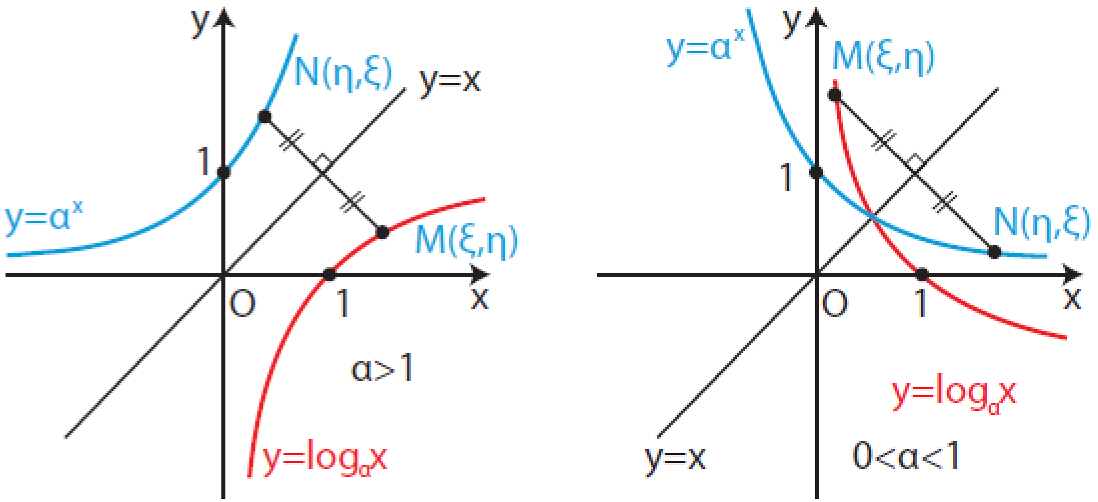
x	y
−3	0.13
−2	0.25
−1	0.50
−0.5	0.71
0	1.00
0.5	1.41
1	2.00
1.5	2.83
2	4.00

$y = \log_2 x$

x	y
0.13	−3
0.25	−2
0.50	−1
0.71	−0.5
1.00	0
1.41	0.5
2.00	1
2.83	1.5
4.00	2



Συγκρίνοντας τα γραφήματα της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης. Τι παρατηρούμε;



Μελέτη από σχολικά κείμενα

- **Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο** - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
    - 3.1 – Η έννοια της συνάρτησης
    - 3.2 – Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης
    - 3.3 – Η συνάρτηση y = αx
    - 3.4 – Η συνάρτηση y = αx + β
    - 3.5 – Η συνάρτηση y = α/x – Η υπερβολή
- **Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ 7ο Κεφάλαιο-** Μελέτη βασικών συναρτήσεων
- **Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ 3ο Κεφάλαιο** (3.1 -3.4) Τριγωνομετρία & τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- **Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ 5ο Κεφάλαιο**
    - **5.1. Εκθετικές συναρτήσεις**
    - **5.2 Λογαριθμικές συναρτήσεις**

3η εργασία

- Η έννοια της περιοδικότητας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ιστορική εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης (Buendia, 2010).
    - Να καταγράψετε τουλάχιστον 2 σημαντικές στιγμές αυτής της εξέλιξης.

Buendía, G. (2010). The use of periodicity through history. *Elements for a social epistemology of mathematical knowledge. Enviado para su publicación a Proceedings of the 6th European Summer University-History and Epistemology in Mathematics Education*.