ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ (ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ)

Ορισμένο ολοκλήρωμα

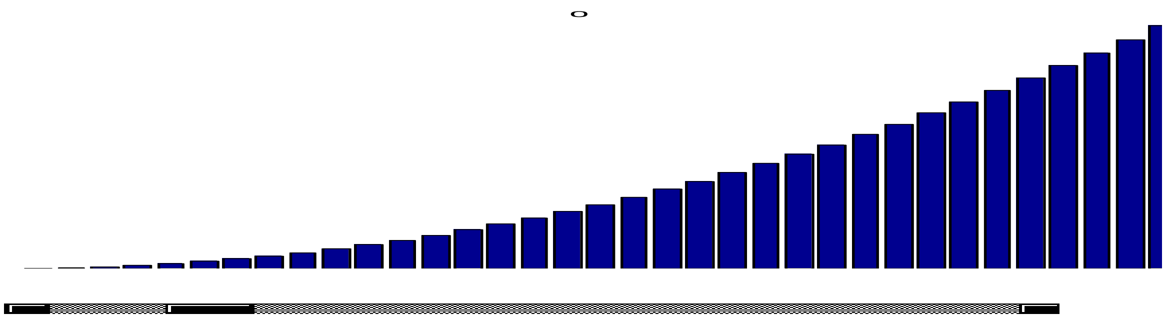
Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f(x) στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

1 *Χωρίσουμε το διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *με οποιονδήποτε τρόπο σε n τμήματα με τα σημεία* $\alpha = x_o, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = \beta \quad (x_o \prec x_1 \prec x_2 \ldots \prec x_{n-1} \prec x_n)$ *και συμβολίσουμε με* $\Delta x_1 = x_1 - x_o, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

2 *Αν εκλέξουμε σε κάθε τμήμα από ένα τυχαίο σημείο* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *όπου* $\xi_i \in \Delta x_i$.

3 *Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα εκλεγμένα σημεία και*

4 *Σχηματίζουμε το άθροισμα;* $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots f(\xi_n)\Delta x_n$



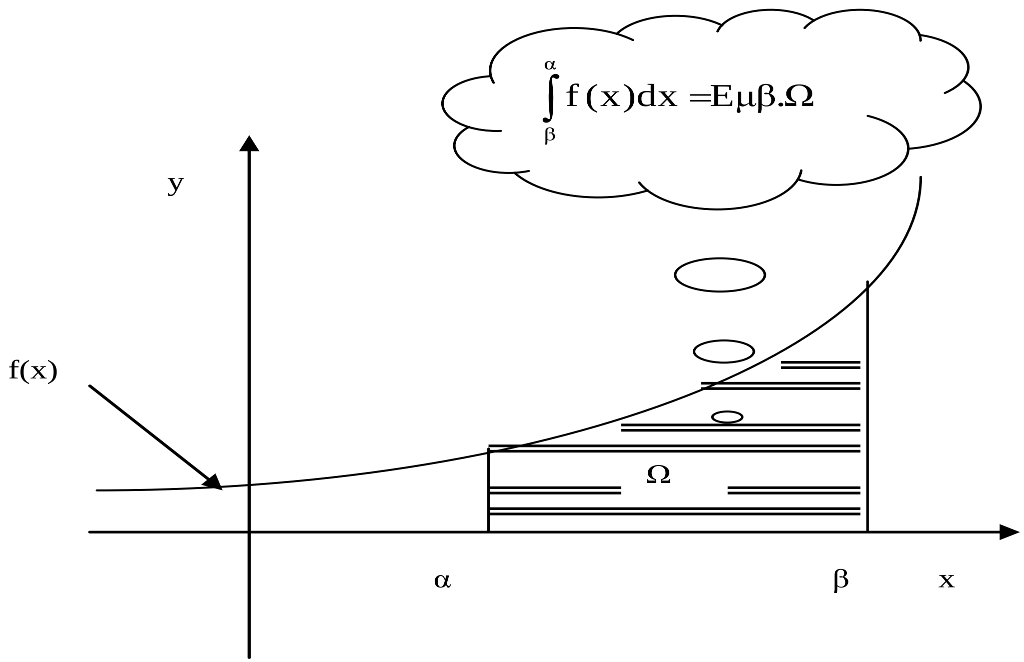
Το άθροισμα $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots f(\xi_n)\Delta x_n$ **ονομάζεται άθροισμα ολοκλήρωσης ή άθροισμα Riemman της f(x).**

Χωρίζοντας το διάστημα σε τμήματα με διάφορους τρόπους και εκλέγοντας σε αυτά από ένα σημείο επίσης σε διάφορες θέσεις μπορούμε για τη δεδομένη συνάρτηση να σχηματίσουμε ***απειροσύνολο διαφορετικών αθροισμάτων ολοκλήρωσης.***

<u>Ορισμός</u>: Αν για κάθε χωρισμό (διαμέριση) του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ **τέτοια ώστε** $\lim_{n\to\infty} \Delta x_i = 0$ **και για κάθε επιλογή σημείων** ξ_i **από το διάστημα** Δx_i **το άθροισμα ολοκλήρωσης** $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ **τείνει σε ένα αριθμό και το όριο αυτό ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της** $f(x)$ **στο** $[\alpha,\beta]$.

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

- **Αν** $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$ **τότε το ολοκλήρωμα παρουσιάζει από γεωμετρικής άποψης το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου Ω που ορίζεται από την καμπύλη f(x) τις ευθείες x = α και x = β και τον άξονα x΄x.**



ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Αν μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και αν F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) τότε

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)}$$

Παραδείγματα υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων

- $\displaystyle\int_{1}^{2} 3\mathrm{t}d\mathrm{t} = \left[\frac{3\mathrm{t}^{2}}{2}\right]_{1}^{2} = \left\{\frac{3}{2}2^{2}\right\} - \left\{\frac{3}{2}1^{2}\right\} = 4\frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2\mathrm{t}d\mathrm{t} = \left[-\frac{3}{2}\cos 2\mathrm{t}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left\{-\frac{3}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \left\{\frac{-3}{2}\cos 2\cdot 0\right\} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Αόριστο ολοκλήρωμα

Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

Η **F(x)** ονομάζεται **παράγουσα συνάρτηση** της **f(x)** όταν**:**

- Η f(x) ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
- Η F(x) είναι παραγωγίσιμη στο. $[\alpha,\beta]$
- $F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in (\alpha,\beta)$

Κάθε συνεχής συνάρτηση f(x) έχει άπειρες παράγουσες.

Ορισμός: **Αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) συμβολίζεται:** $\int f(x)dx$ **και είναι το σύνολο όλων των παραγουσών της f(x).**

Δηλαδή: $\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in R$ όταν $F'(x) = f(x)$

Η σταθερά c ονομάζεται **σταθερά ολοκλήρωσης**

Τυπολόγιο βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων

$$\int x^n dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ για κάθε n } \neq -1,$$

$$\int dx = \int dx = x + c\,, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c\,,$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c \qquad \int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sin^{-1} x + c$$

Παραδείγματα

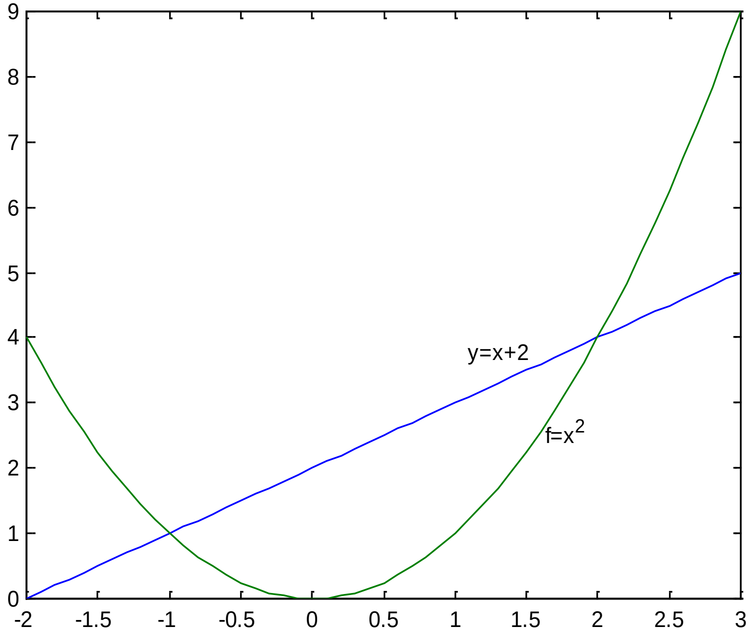
- Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y = x + 2$ και τη συνάρτηση $y = x^2$.

Πρέπει να βρούμε τα σημεία στα οποία συναντιούνται οι συναρτήσεις

$x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$ όταν $x = -1, x = 2$

Το εμβαδόν του χωρίου που ζητείται υπολογίζεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα:



$$\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \text{ τ. μ}$$