Σύνταξη και σημασιολογία της γλώσσας Q

1. Τα σύμβολα της γλώσσας Q:

   προτασιακά γράμματα: p, q, r, s, p', q', …

   ονοματικά γράμματα: a, b, c, d, a', b', …

   κατηγορηματικά γράμματα: F, G, H, F', G', H', F'', …

   μεταβλητές: x, y, z, x', y', …

   το σύμβολο της ταυτότητας: $=$

   τα συνδετικά $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$

   οι ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$

   και οι παρενθέσεις (και).

2. Πότε μια σειρά συμβόλων είναι πρόταση της γλώσσας Q (σύμφωνα με την εκδοχή της γλώσσας που ακολουθεί ο Sainsbury):

Πρώτα απ΄ όλα, οι ατομικές (βασικές) προτάσεις είναι οι εξής: οποιοδήποτε προτασιακό γράμμα μόνο του· οποιοδήποτε κατηγορηματικό γράμμα συνοδευόμενο από ένα ή περισσότερα ονοματικά γράμματα· το σύμβολο $=$ έχοντας στις δυο του πλευρές από ένα ονοματικό γράμμα (το ίδιο ή διαφορετικό). Είναι σημαντικό πως όταν μια ατομική πρόταση περιέχει κατηγορηματικό γράμμα, γράφουμε πρώτα το γράμμα αυτό και μετά τα ονοματικά γράμματα που το συνοδεύουν.

Επισήμως, τα κατηγορηματικά γράμματα χωρίζονται σε βαθμούς: όσα είναι βαθμού 1 είναι σαν κατηγορήματα μίας θέσης, όσα είναι βαθμού 2 είναι σαν κατηγορήματα δύο θέσεων και ούτω καθεξής. Και ένα κατηγορηματικό γράμμα βαθμού l, για να φτιάξει ατομική πρόταση, πρέπει να συνοδευτεί από l ονοματικά γράμματα (ακριβέστερα, από l εμφανίσεις ονοματικών γραμμάτων, γιατί μπορεί, μέσα στην ατομική πρόταση, το ίδιο ονοματικό γράμμα να εμφανίζεται πάνω από μία φορά). Όμως, για απλοποίηση, θα αγνοήσουμε τους βαθμούς και θα γράφουμε το ίδιο κατηγορηματικό γράμμα, π.χ. το F, συνοδευόμενο από οποιονδήποτε αριθμό ονοματικών γραμμάτων.

Ξεκινώντας από τις ατομικές προτάσεις σχηματίζουμε σύνθετες με εφαρμογή των ακόλουθων κανόνων: Αν A είναι οποιαδήποτε πρόταση (ατομική ή μη ατομική), η $\neg A$ είναι επίσης πρόταση. Αν A και B είναι οποιεσδήποτε προτάσεις, τοτε είναι επίσης προτάσεις οι $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ και $(A \leftrightarrow B)$. Αν A είναι μια πρόταση, ενώ το $\mathbf{n}$ είναι κάποιο ονοματικό γράμμα (το a ή το b ή ...) που περιέχεται στην A, και $\mathbf{v}$ είναι μια μεταβλητή (η x ή η y ή ...) που δεν περιέχεται στην A, τότε είναι προτάσεις και οι $\forall \mathbf{v} A'$ και $\exists \mathbf{v} A'$, όπου A' είναι η σειρά συμβόλων που προκύπτει από την A όταν μέσα στην A αντικαθιστούμε το ονοματικό γράμμα $\mathbf{n}$ (παντού όπου εμφανίζεται) με τη μεταβλητή $\mathbf{v}$.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε την πρόταση Fab ως A, το γράμμα b ως $\mathbf{n}$ και τη μεταβλητή x ως $\mathbf{v}$, είναι προτάσεις οι $\forall x\, Fax$ και $\exists x\, Fax$. Και αν πάρουμε την $\forall x\, Fax$ ως A, το γράμμα a ως $\mathbf{n}$ και τη μεταβλητή z ως $\mathbf{v}$, είναι προτάσεις οι $\forall z\, \forall x\, Fzx$ και $\exists z\, \forall x\, Fzx$.

Μια σειρά συμβόλων που προκύπτει από μια πρόταση A αντικαθιστώντας ένα ή περισσότερα ονοματικά γράμματα που περιέχονται στην A με μεταβλητές που δεν περιέχονται στην A είναι *ανοιχτός τύπος* της γλώσσας Q. Έτσι, σε μια πρόταση $\forall \mathbf{v} \ldots$ ή $\exists \mathbf{v} \ldots$, η σειρά συμβόλων που βρίσκεται στη θέση των τελειών είναι ανοιχτός τύπος. Οι προτάσεις λέγονται και *κλειστοί τύποι.*

3. Τι είναι *ερμηνεία* της γλώσσας Q:

Ερμηνεία είναι κάθε ζεύγος $\langle D, I \rangle$ όπου το D είναι κάποιο σύνολο (όχι το κενό) ενώ I είναι μια απόδοση τιμών στα προτασιακά, ονοματικά και κατηγορηματικά γράμματα η οποία έχει τα εξής γνωρίσματα: σε κάθε προτασιακό γράμμα αποδίδει από μια αληθοτιμή (αλήθεια ή ψεύδος), σε κάθε ονοματικό γράμμα αποδίδει κάποιο μέλος του D, σε κάθε κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 1 (δηλ. μίας θέσης) αποδίδει κάποιο υποσύνολο του D, σε κάθε κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 2 (δύο θέσεων) αποδίδει κάποιο σύνολο ζευγών (διατεταγμένων ζευγών) από μέλη του D, σε κάθε κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 3 αποδίδει κάποιο σύνολο τριάδων από μέλη του D, και ούτω καθεξής.

Η ιδέα είναι ότι, στο πλαίσιο μιας ερμηνείας, η ποσόδειξη νοείται ως ποσόδειξη που αφορά τα μέλη του D μόνο και όχι όλα τα πράγματα ανεξαιρέτως, ότι αν δούμε ένα ονοματικό γράμμα σαν όνομα, το μέλος του D που του αποδίδεται είναι ο φορέας του ονόματος, ότι αν δούμε ένα κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 1 σαν κατηγόρημα μίας θέσης, το υποσύνολο του D που του αποδίδεται είναι το σύνολο των πραγμάτων που ικανοποιούν το κατηγόρημα (δηλ. των πραγμάτων που είναι όπως λέει το κατηγόρημα), κλπ.

4. Πότε μια πρόταση της γλώσσας Q είναι *αληθής ως προς μια ερμηνεία* $\langle D, I\rangle$:

Άμα η πρόταση είναι ένα σκέτο προτασιακό γράμμα, τότε είναι αληθής ως προς την ερμηνεία ανν η απόδοση τιμών I αποδίδει στο γράμμα την τιμή αλήθεια, και είναι ψευδής ως προς την ερμηνεία ανν η I αποδίδει στο γράμμα την τιμή ψεύδος.

Άμα η πρόταση είναι π.χ. η Fa, τότε είναι αληθής ως προς την ερμηνεία ανν το αντικείμενο που η I αποδίδει στο γράμμα a ανήκει στο σύνολο που η I αποδίδει στο γράμμα F, και είναι ψευδής ως προς την ερμηνεία ανν το εν λόγω αντικείμενο δεν ανήκει στο εν λόγω σύνολο. Ανάλογα ισχύουν άμα η πρόταση είναι μια άλλη πρόταση που αποτελείται από ένα κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 1 κι ένα ονοματικό γράμμα.

Άμα η πρόταση είναι π.χ. η Gac, τότε είναι αληθής ως προς την ερμηνεία ανν το ζεύγος που έχει ως πρώτο όρο το αντικείμενο που η I αποδίδει στο a και ως δεύτερο το αντικείμενο που η I αποδίδει στο c ανήκει στο σύνολο που η I αποδίδει στο G, και είναι ψευδής ως προς την ερμηνεία ανν το εν λόγω ζεύγος δεν ανήκει στο εν λόγω σύνολο. Ανάλογα ισχύουν άμα η πρόταση είναι μια άλλη πρόταση που αποτελείται από ένα κατηγορηματικό γράμμα βαθμού 2 και δύο ονοματικά γράμματα (ή ένα ονοματικό γράμμα γραμμένο δύο φορές).

Παρομοίως άμα η πρόταση είναι π.χ. η $Hbac$, η $F'bcad$ κλπ.

Άμα η πρόταση είναι π.χ. η $b = c$, τότε είναι αληθής ως προς την ερμηνεία ανν η απόδοση τιμών I αποδίδει το ίδιο αντικείμενο στο γράμμα b και στο γράμμα c. Ανάλογα ισχύουν άμα η πρόταση είναι μια άλλη πρόταση που αποτελείται από το σύμβολο $=$ έχοντας στις δυο πλευρές του από ένα ονοματικό γράμμα.

Άμα η πρόταση είναι άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή ή διπλή συνεπαγωγή, το αν είναι αληθής ή ψευδής ως προς την ερμηνεία καθορίζεται, βάσει των αληθοπινάκων των συνδετικών, από το αν οι συστατικές της προτάσεις (π.χ. οι προτάσεις των οποίων η διάζευξη είναι διάζευξη) είναι αληθείς η ψευδείς ως προς την ερμηνεία.

Τι γίνεται άμα η πρόταση έχει τη μορφή $\forall x \ldots$ όπου στη θέση των τελειών είναι γραμμένος κάποιος ανοιχτός τύπος; Παίρνουμε μια πρόταση που προκύπτει από τον ανοιχτό τύπο όταν στο εσωτερικό του αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x (οπουδήποτε εμφανίζεται) με κάποιο ονοματικό γράμμα — δεν έχει σημασία ποιο, αρκεί να είναι ονοματικό γράμμα που το ίδιο δεν περιέχεται στον ανοιχτό τύπο. Ας αποκαλέσουμε A την πρόταση αυτή και ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ότι το c είναι το ονοματικό γράμμα που αντικατέστησε τη μεταβλητή. Τότε η πρόταση $\forall x \ldots$ είναι αληθής ως προς την ερμηνεία $\langle D, I\rangle$ ανν η A είναι αληθής και ως προς την $\langle D, I\rangle$ και ως προς κάθε άλλη ερμηνεία η οποία διαφέρει από την $\langle D, I\rangle$ μόνο στο μέλος του D

που αποδίδεται στο γράμμα c. Και η $\forall x \ldots$ είναι ψευδής ως προς την ερμηνεία $\langle D, I\rangle$ ανν η A είναι ψευδής είτε ως προς την $\langle D, I\rangle$ είτε ως προς κάποια άλλη ερμηνεία η οποία διαφέρει από την $\langle D, I\rangle$ μόνο στο μέλος του D που αποδίδεται στο γράμμα c. (Βέβαια, παρόμοια ισχύουν και αν η μεταβλητή που εμπλέκεται δεν είναι η x, αλλά κάποια άλλη.)

Η ιδέα είναι η εξής: στο πλαίσιο της ερμηνείας $\langle D, I\rangle$, η πρόταση $\forall x \ldots$ μάς λέει ότι όλα τα μέλη του D είναι έτσι-και-έτσι, ενώ η A μάς λέει ότι ένα ορισμένο αντικείμενο (αυτό που η I αποδίδει στο γράμμα c) είναι έτσι-και-έτσι· άμα, λοιπόν, διατρέξουμε νοερά όλες τις ερμηνείες που διαφέρουν από την $\langle D, I\rangle$ μόνο στο ποιο μέλος του D αποδίδεται στο γράμμα c, συμπεριλαμβάνοντας μεταξύ αυτών των ερμηνειών και την ίδια την $\langle D, I\rangle$, τότε το να βγαίνει η πρόταση A αληθής ως προς όλες αυτές τις ερμηνείες ισοδυναμεί με το να είναι όλα τα μέλη του D έτσι-και-έτσι.

Τέλος, τί γίνεται άμα η πρόταση έχει τη μορφή $\exists x \ldots$ όπου στη θέση των τελειών είναι γραμμένος κάποιος ανοιχτός τύπος; Παίρνουμε και πάλι μια πρόταση, A, που προκύπτει από τον ανοιχτό τύπο όταν στο εσωτερικό του αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με κάποιο ονοματικό γράμμα που το ίδιο δεν περιέχεται στον ανοιχτό τύπο, έστω το c. Τότε η πρόταση $\exists x \ldots$ είναι αληθής ως προς την ερμηνεία $\langle D, I\rangle$ ανν η A είναι αληθής είτε ως προς την $\langle D, I\rangle$ είτε ως προς κάποια άλλη ερμηνεία η οποία διαφέρει από την $\langle D, I\rangle$ μόνο στο μέλος του D που αποδίδεται στο γράμμα c. Και η $\exists x \ldots$ είναι ψευδής ως προς την ερμηνεία $\langle D, I\rangle$ ανν η A είναι ψευδής και ως προς την $\langle D, I\rangle$ και ως προς κάθε άλλη ερμηνεία η οποία διαφέρει από την $\langle D, I\rangle$ μόνο στο μέλος του D που αποδίδεται στο c.

5. Πότε ένα επιχείρημα στη συμβολική γλώσσα Q λέμε ότι είναι *Q-έγκυρο*: Είναι Q-έγκυρο ανν κάθε ερμηνεία ως προς την οποία οι προκείμενες είναι αληθείς είναι ερμηνεία ως προς την οποία και το συμπέρασμα είναι αληθές.