1)

<u>Άσκηση 1</u>. Να γίνουν οι πράξεις: $\dfrac{(x^{-2}y)\cdot(3x\cdot y^2)^2}{-18(x^2\cdot y^3)^3}$

Λύση: $\dfrac{(x^{-2}\cdot y)\cdot(3x\cdot y^2)^2}{-18(x^2\cdot y^3)^3} = \dfrac{(x^{-2}\cdot y)\cdot 3^2\cdot x^2\cdot (y^2)^2}{-18(x^2)^3\cdot(y^3)^3} =$

$= \dfrac{9x^{-2}\cdot y\cdot x^2\cdot y^4}{(-18)x^6\cdot y^9} = \dfrac{9\cdot x^{(-2+2)}\cdot y^{(1+4)}}{(-18)\cdot x^6\cdot y^9} = \dfrac{9\cdot y^5}{(-18)\cdot x^6\cdot y^9} =$

$= -\dfrac{1}{2x^6\cdot y^4}$

Άσκηση 2: Να λύσετε i) την εξίσωση $(2x-1)^2-x(x-1)=3+x^2$

ii) την ανίσωση $(2x-1)^2-x(x-1)>3+x^2$

<u>Λύση:</u> i) $(2x-1)^2-x(x-1)=3+x^2$

$(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot1+1 -x^2+x = 3+x^2$

$4x^2-4x+1-x^2+x-3-x^2=0$

$2x^2-3x-2=0$. Άρα $\alpha=2,\ \beta=-3,\ \gamma=-2$

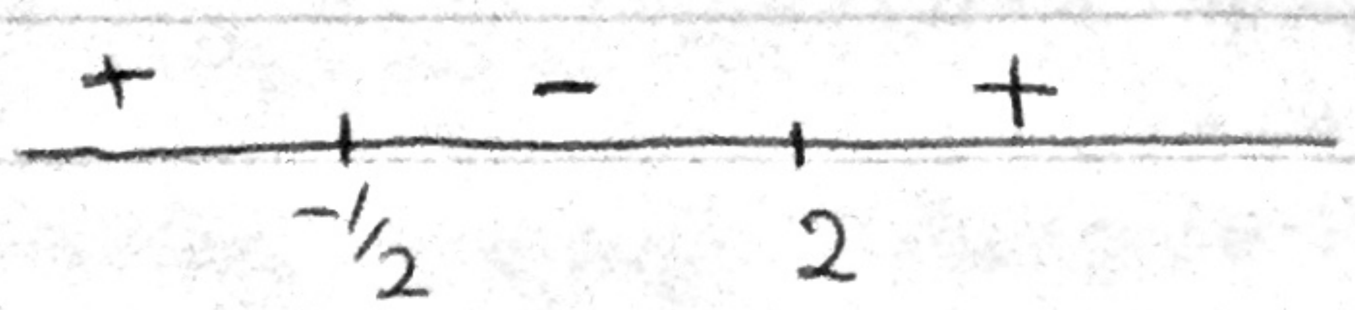
και η διακρίνουσα: $\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25>0$, άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις x_1, x_2 με

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm5}{4}$ $\nearrow x_1=\dfrac{8}{4}=2$ $\searrow x_2=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$

άρα $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

ii) Όμοια με τις πράξεις του ερωτήματος (i), η ανίσωση $(2x-1)^2-x(x-1)>3+x^2$ γράφεται: $2x^2-3x-2>0$

Αφού $\Delta>0$, ελέγχω το πρόσημο του α, $\alpha=2>0$, και το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό, για $x<x_1$ και $x>x_2$.



Άρα $2x^2-3x-2>0$ για $x\in(-\infty,-1/2)\cup(2,+\infty)$

Άσκηση 3. Να λύσετε i) την εξίσωση $\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x-1$.

ii) την ανίσωση $\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} > x-1$.

Λύση: i) Πολ/ζω με το ΕΚΠ των παρονομαστών

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x-1.$$

$$6\cdot\frac{x^2}{2} - 6\cdot\frac{(x-1)}{3} = 6x-6 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 2(x-1) = 6x-6 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 2x + 2 - 6x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 8 = 0.$$ Άρα $\alpha=3$, $\beta=-8$, $\gamma=8$

Επομένως $\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 3\cdot 8 = 64 - 96 = -32 < 0$.

Άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει πραγματικές λύσεις.

ii) Μετά τις πράξεις (όπως ερώτημα (i)) η ανίσωση γράφεται:

$$3x^2 - 8x + 8 > 0.$$

Αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, συμβαίνει ότι τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του $\alpha=3$, δηλαδή θετικό.

Άρα $3x^2 - 8x + 8 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x+6} = \frac{72}{x^2-36} + 4$.

Λύση: $\frac{x}{x+6} = \frac{72}{x^2-36} + 4$. $\Leftrightarrow$ ΑΠΑΙΤΩ $x \neq 6$ ΚΑΙ $x \neq -6$.

$\frac{x}{x+6} = \frac{72}{(x-6)(x+6)} + 4$ $\Leftrightarrow$ Πολ/ζω ΕΚΠ, δηλαδή $(x-6)(x+6)$:

$$(x-6)(x+6)\cdot\frac{x}{(x+6)} = (x-6)(x+6)\cdot\frac{72}{(x-6)(x+6)} + (x-6)(x+6)\cdot 4 \Rightarrow$$

$$x\cdot(x-6) = 72 + 4(x-6)(x+6)$$

$$x^2 - 6x = 72 + 4(x^2-36)$$

2

$x^2-6x=72+4x^2-144$

$3x^2+6x-72=0 \Rightarrow 3(x^2+2x-24)=0$

$x^2+2x-24=0 \quad \Delta=4-4\cdot(-24)=100$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-2\pm10}{2} \begin{matrix}\nearrow 4\\ \searrow -6\end{matrix}$$

άρα $x_1=4$ και $x_2=-6 \rightarrow$ απορρίπτεται από περιορισμούς

άρα $x=4$ η λύση της εξίσωσης

Άσκηση 5: Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}:\dfrac{x^2-4}{3x+6}$

Λύση:

$$A=\frac{\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}}{\dfrac{x^2-4}{3x+6}}=\frac{\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)}}{\dfrac{(x-2)(x+2)}{3\cdot(x+2)}}=\frac{\dfrac{(x-2)}{3x}}{\dfrac{(x-2)}{3}}=$$

$$=\frac{3(x-2)}{3x(x-2)}=\frac{1}{x}$$

Επομένως $A=\dfrac{1}{x}$.

Άσκηση 6: Δίνεται το σύνολο $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και τα υποσύνολά του $A=\{x\in\mathbb{R}: x$ ρίζα της εξίσωσης $x^2-4x+3=0\}$ και $B=\{x\in\mathbb{Z}: 1\leq 2x+1<7\}$.

1) Να γράψετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn

2) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, A', B'.

3) Να επαληθεύσετε τις ισότητες $(A\cap B)'=A'\cup B'$ και $(A\cup B)'=A'\cap B'$

Λύση: 1) Για να βρω τα σύνολα A και B πρέπει να λύσω την εξίσωση και την ανίσωση, αντίστοιχα.

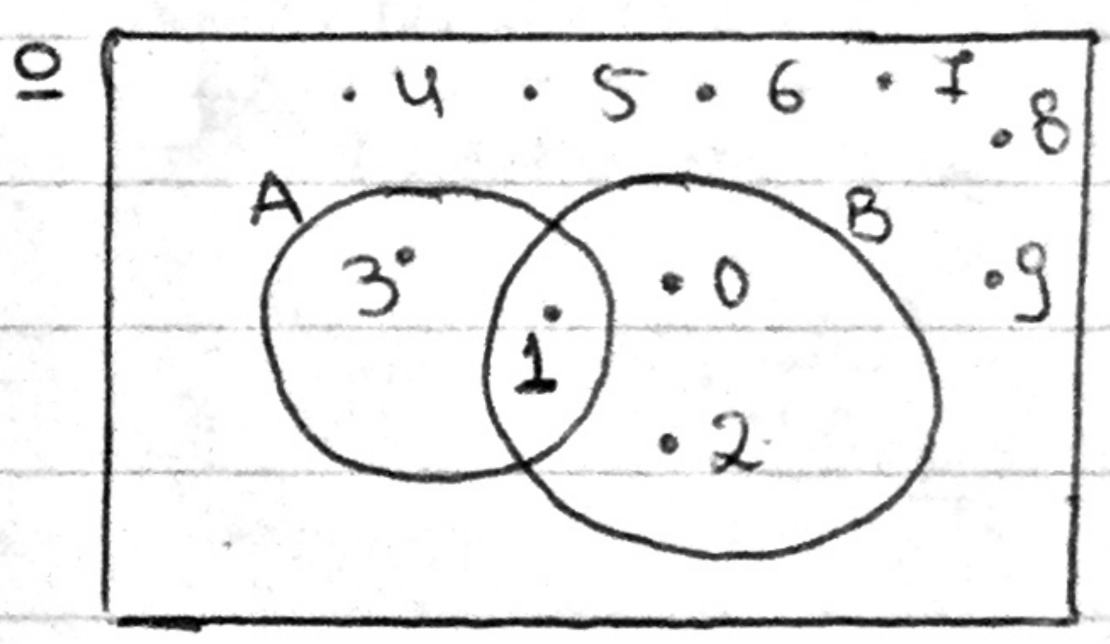
Για το Α: $x^2-4x+3=0$, $\Delta=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1$
$=16-12$
$=4>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες. $x_{1,2}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2}$

άρα $x_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2}$ $\begin{cases}\nearrow \frac{6}{2}=3 \\ \searrow \frac{2}{2}=1\end{cases}$, $x_1=1$ και $x_2=3$.

άρα το σύνολο $A=\{1,3\}$.

Για το Β: $1\le 2x+1<7 \Rightarrow$ Αφαιρώ 1:
$0\le 2x<6$ Διαιρώ με το 2:
$0\le x<3$, και αφού από εκφώνηση $x\in\mathbb{Z}$, θα έχω το σύνολο $B=\{0,1,2\}$.

Διάγραμμα Venn:



2) • $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.
• $A-B=\{3\}$.
• $A\cap B=\{1\}$
• $A'=\{0,2,4,5,6,7,8,9\}$.
• $B'=\{3,4,5,6,7,8,9\}$.

3) Από το προηγούμενο ερώτημα έχω ότι: $A\cap B=\{1\}$ άρα
Άρα $(A\cap B)'=\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (1).

Επίσης με βάση τα A', B' που υπολόγισα έχω ότι
$A'\cup B'=\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. (2)
Από σχέσεις (1) και (2) παίρνω ότι $(A\cap B)'=A'\cup B'$, η ισότητα επαληθεύτηκε.

③

Από προηγούμενο ερώτημα $A \cup B = \{0,1,2,3\}$ άρα $(A\cup B)' = \{4,5,6,7,8,9\}$ (3)

Επίσης $A' \cap B' = \{4,5,6,7,8,9\}$ (4)

Από σχέσεις (3),(4) έχω ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$, η ισότητα επαληθεύθηκε.

<u>Άσκηση 7</u>: Τι είδους ακολουθία είναι η a_ν : $\begin{cases} a_{\nu+1} - 3 = a_\nu \\ a_1 = 7 \end{cases}$;

i) Βρείτε τον τύπο που δίνει το a_ν συναρτήσει του ν.

ii) Ποιος όρος της είναι ίσος με 190;

Λύση:

i) Παρατηρώ ότι η διαφορά των διαδοχικών όρων a_ν και $a_{\nu+1}$ παραμένει σταθερή: $\boxed{a_{\nu+1} - a_\nu = 3}$ Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 3$.

Ο γενικός τύπος μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$a_\nu = a_1 + (\nu-1)\cdot\omega$$

Αντικαθιστώ $a_1 = 7$, $\omega = 3$ και έχω:

$$a_\nu = 7 + (\nu-1)\cdot 3$$
$$= 7 + 3\nu - 3$$
$$\boxed{a_\nu = 3\nu + 4}$$

ii) $a_\nu = 190$ και ψάχνω σε ποιό ν αντιστοιχεί αυτός ο όρος:

$3\nu + 4 = 190 \Rightarrow$

$3\nu = 186$

$\nu = 62$. άρα $a_{62} = 190$ ή ο $62^{ος}$ όρος της αριθμ. προόδου είναι ίσος με 190.

<u>Άσκηση 8</u>: Τι είδους ακολουθία είναι η a_ν: $\begin{cases} a_{\nu+2} = 3\cdot a_{\nu+1} \\ a_1 = 1 \end{cases}$;

i) Βρείτε τον τύπο που δίνει το a_ν συναρτήσει του ν.

ii) Να βρεθεί ο όρος $a_{\nu+1}$ συναρτήσει του ν.

Λύση: i) Παρατηρώ ότι ο λόγος των διαδοχικών όρων a_{v+2} και a_{v+1} παραμένει σταθερός:

$$\frac{a_{v+2}}{a_{v+1}} = 3$$

Άρα η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$.

Η γενική μορφή της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

Αντικαθιστώ $a_1 = 1$ και $\lambda = 3$ και έχω: $\boxed{a_v = 3^{v-1}}$: ο γενικός τύπος.

ii) Αντικαθιστώ όπου v το $v+1$:

$$a_{v+1} = 3^{(v+1)-1}$$

άρα $a_{v+1} = 3^v$.

Άσκηση 9. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

i) $a_v = 3v + 1$

ii) $a_v = \dfrac{3v+1}{v^2}$

iii) $a_v = \dfrac{3v^2+1}{v^2}$

Λύση: i) $\lim\limits_{v\to+\infty} a_v = \lim\limits_{v\to+\infty}(3v+1) = +\infty$, η ακολουθία δεν συγκλίνει.

ii) $\lim\limits_{v\to+\infty} a_v = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{3v+1}{v^2} = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{v^2\left(\frac{3}{v}+\frac{1}{v^2}\right)}{v^2} = \lim\limits_{v\to+\infty}\left(\frac{3}{v}+\frac{1}{v^2}\right) = 0$,

αφού $\lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{1}{v} = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{1}{v^2} = 0$.

iii) $\lim\limits_{v\to+\infty} a_v = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{3v^2+1}{v^2} = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{v^2\left(3+\frac{1}{v^2}\right)}{v^2} = \lim\limits_{v\to+\infty}\left(3+\frac{1}{v^2}\right) =$

$\lim\limits_{v\to+\infty} 3 + \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{1}{v^2} = 3+0 = 3$.

④.

Άσκηση 10: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-1}$

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
2) Να βρείτε την τιμή $f(2)$
3) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2$
4) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
5) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x+1)$
6) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της $f(x)$ και της $g(x)=1$

Λύση

1) Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής της δηλαδή $x-1\neq 0 \Rightarrow$ πρέπει $x\neq 1$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $R-\{1\}$.

2) $f(2)\ \frac{2^2-5\cdot 2+6}{2-1}=\frac{4-10+6}{1}=0$ άρα $f(2)=0$.

3) $f(x)=2 \Rightarrow$

$\frac{x^2-5x+6}{x-1}=2 \Rightarrow x^2-5x+6=2x-2 \Rightarrow$

$x^2-7x+8=0 \quad \Delta=49-4\cdot 8$

$\Delta=49-32=17>0$

άρα $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$ $\nearrow \frac{7+\sqrt{17}}{2}$ $\searrow \frac{7-\sqrt{17}}{2}$

$x_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ και $x_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$

4) Για σημεία τομής με τον $x'x$, παίρνω $f(x)=0$.

$x^2-5x+6=0$, $\Delta=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$ $\rightarrow 3$ $\searrow 2$

, $x_1=3$, $x_2=2$.

Άρα η $f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(2,0)$ και $(3,0)$.

Για σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, παίρνω $x=0$.

$$f(0)=\frac{0+0+6}{-1}\quad,\quad f(0)=-6.$$

άρα η $f(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,-6)$.

5) Θέτω όπου x το $x+1$:

$$f(x+1)=\frac{(x+1)^2-5(x+1)+6}{(x+1)-1}$$

$$f(x+1)=\frac{x^2+2x+1-5x-5+6}{x}$$

$$f(x+1)=\frac{x^2-3x+2}{x}$$

6) $f(x)=g(x) \Rightarrow$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-1}=1 \Rightarrow$$

$$x^2-5x+6=x-1 \Rightarrow$$

$$x^2-6x+7=0 \qquad \Delta=36-4\cdot 7=36-28=8>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$$

άρα $x_1=3+\sqrt{2}$ και $x_2=3-\sqrt{2}$

άρα τα κοινά σημεία των f και g είναι:

$(3+\sqrt{2},1)$ και $(3-\sqrt{2},1)$.

<u>Άσκηση 11</u>: Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+4}{x+3}, & \text{αν } x>2\\ 3-x^2, & \text{αν } x<2\end{cases}$, $\lim_{x\to 2} f(x)=;$

ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}, & \text{αν } x>3\\ x^2-2x+3, & \text{αν } x\leq 3\end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 3} f(x)=;$

Λύση:

i) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x+4}{x+3} = \frac{3\cdot 2+4}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$

και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3-x^2) = 3-2^2 = 3-4 = -1$

παρατηρώ ότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$. άρα το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

ii) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$. Παρατηρώ ότι αντικαθιστώντας το $x=3$, φτάνω σε μία μορφή $\frac{0}{0}$, που σημαίνει ότι το 3 είναι ρίζα και του αριθμητή και του παρονομαστή, άρα κάνω παραγοντοποίηση για να απλοποιήσω το κλάσμα. Το τριώνυμο $x^2-5x+6=0$, $\Delta = 25-24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

άρα $x^2-5x+6 = (x-3)\cdot(x-2)$.

επίσης $x^2-9 = (x-3)(x+3)$

Άρα το κλάσμα γίνεται: $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}\cdot(x-2)}$

άρα $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2-2x+3 = 9-6+3 = 6$.

άρα $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$, επομένως το όριο στο $x=3$ υπάρχει και είναι ίσο με 6.