5.1) Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

I) $a_\nu = \dfrac{\nu^2+2\nu+1}{3\nu^2+5}$, $\lim \dfrac{\nu^2+2\nu+1}{3\nu^2+5} = \lim \dfrac{1+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{3+\frac{5}{\nu^2}} = \dfrac{1}{3}$

II) $a_\nu = \dfrac{2\nu^2+4\nu-7}{\nu^2+6\nu+1}$, $\lim \dfrac{2\nu^2+4\nu-7}{\nu^2+6\nu+1} = \lim \dfrac{2+\frac{4}{\nu}-\frac{7}{\nu^2}}{1+\frac{6}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} = 2$

III) $a_\nu = \dfrac{\nu^2+3}{\nu^3+5\nu+3}$, $\lim \dfrac{\frac{1}{\nu}+\frac{3}{\nu^3}}{1+\frac{5}{\nu^2}+\frac{3}{\nu^3}} = 0$

IV) $a_\nu = \dfrac{2\nu+1}{-4\nu^2+5}$, $\lim \dfrac{2\nu+1}{-4\nu^2+5} = \lim \dfrac{\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{-4+\frac{5}{\nu^2}} = 0$

V) $a_\nu = \dfrac{\nu^3+4\nu}{3\nu^2+5}$, $\lim \dfrac{\nu^3+4\nu}{3\nu^2+5} = \lim \dfrac{1+\frac{4}{\nu^2}}{\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}}$ [redacted]

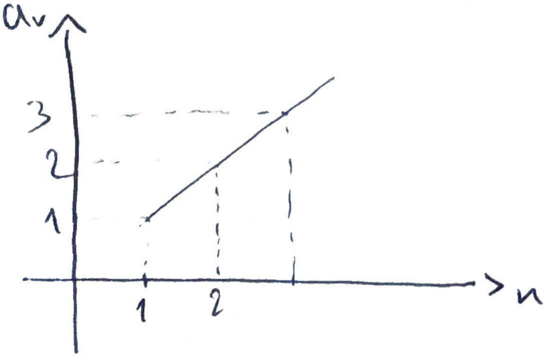
= lim 1/ 0. Επειδή 1>0 το όριο αυτό ισούται με + άπειρο. Διαφορετικά το όριο θα ήταν ίσο με - άπειρο.

.4) Με τη βοήθεια της γραφικής τους παράστασης να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

i) $a_\nu=\nu$, ii) $a_\nu=\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, iii) $a_\nu=1-\frac{1}{\nu}$.

i) $a_\nu=\nu$

ν	1	2	3	...
a_ν	1	2	3	...

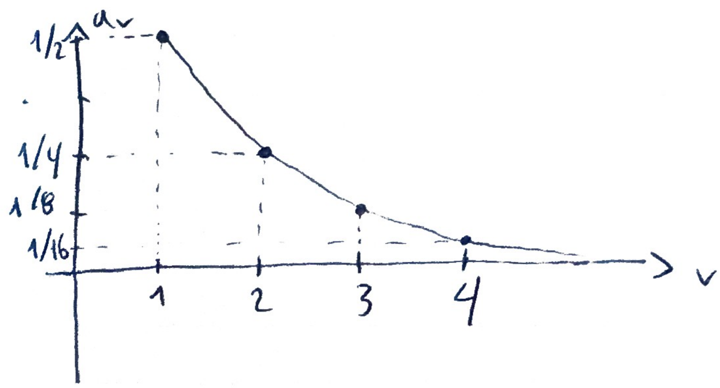


δεν συγκλίνει, [redacted]

το όριο ισούται με + άπειρο.

ii) $a_\nu=\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$

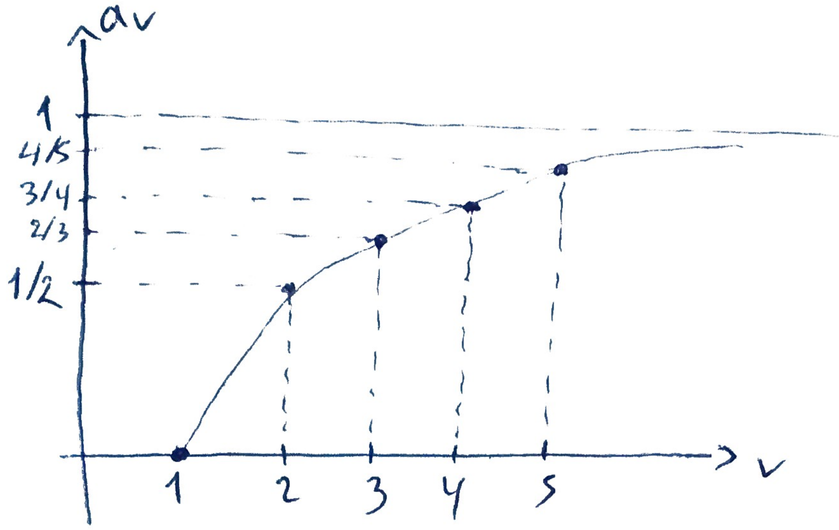
ν	1	2	3	4	...
a_ν	1/2	1/4	1/8	1/16	...



συγκλίνει στο 0

III) $a_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$

ν	1	2	3	4	5	...
a_ν	0	1/2	2/3	3/4	4/5	...



συγκλίνει στο 1

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i) $\lim \dfrac{3n+5}{6n-2} = \lim \dfrac{3+\frac{5}{n}}{6-\frac{2}{n}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

ii) $\lim \dfrac{\sqrt{2}\,n^2+n-2}{2n^2-n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

iii) $\lim \left(\dfrac{n^2+n-1}{2n^2+5}\right)^2 = \lim \left(\dfrac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

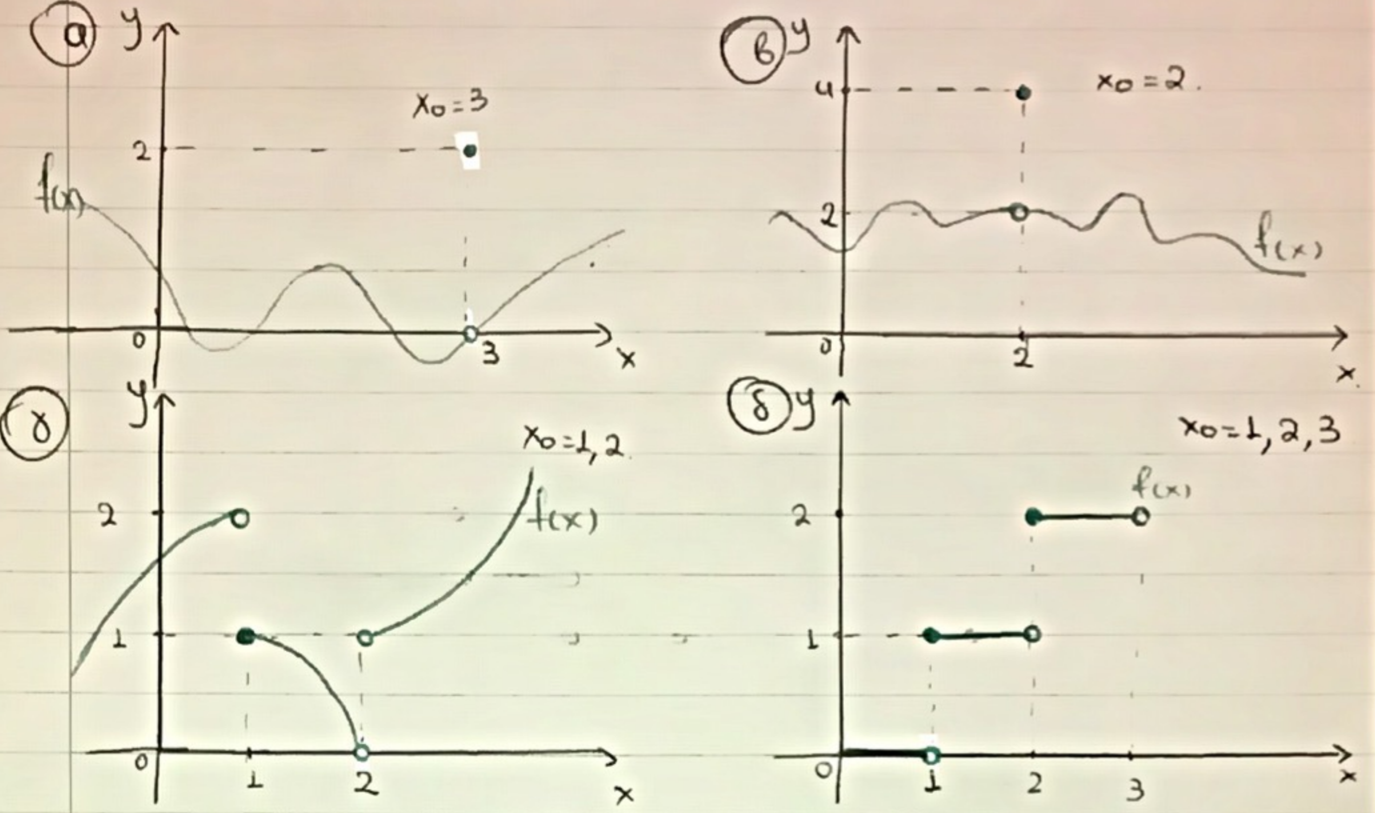
iv) $\lim \dfrac{3n^4-4n^3+n^2+9}{5n^4+n^3+2n+1} = \lim \dfrac{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{9}{n^4}}{5+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \dfrac{3}{5}$

v) $\lim \dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3+n^2+1} = \lim \dfrac{\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\dots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} = 0$

vi) $\lim \dfrac{-3\sqrt{n}+4}{2\sqrt{n}+1} = \lim \dfrac{-3+\frac{4}{\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} = -\dfrac{3}{2}$

vii) $\lim \left(\dfrac{2n+5}{-n+2}\right)^3 = \lim \left(\dfrac{2+\frac{5}{n}}{-1+\frac{2}{n}}\right)^3 = (-2)^3 = -8$

Άσκηση 9 Να βρείτε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν όταν η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι:



Λύση: α) $\lim_{x\to 3} f(x)=0$ (γιατί $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$) και $f(3)=2$

β) $\lim_{x\to 2} f(x)=2$ και $f(2)=4$.

γ) $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, γιατί $\lim_{x\to 1^-} \overset{=2}{f(x)} \neq \lim_{x\to 1^+} \overset{=1}{f(x)}$.

και $f(1)=1$.

Αντίστοιχα το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί $\lim_{x\to 2^-} \overset{=0}{f(x)} \neq \lim_{x\to 2^+} \overset{=1}{f(x)}$.

Επίσης παρατηρώ ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται για $x=2$ (το 2 είναι εκτός του πεδίου ορισμού) άρα το $f(2)$ δεν ορίζεται.

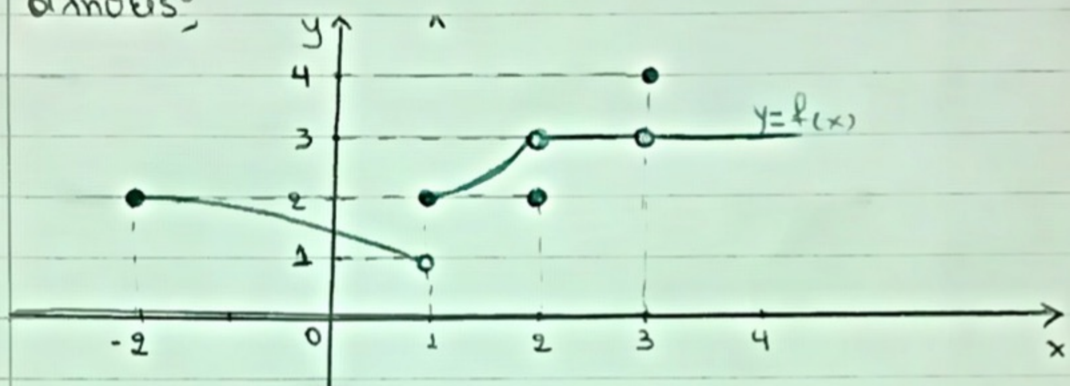
δ) Για $x_0=1$: $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει αφού $\underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x)}_{=0} \neq \underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x)}_{=1}$

και $f(1)=1$.

Για $x_0=2$: το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει και $f(2)$ 2.

Για $x_0=3$. Το $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$ και το $f(3)$ δεν ορίζεται.

Άσκηση 11: Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2,+\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς;



i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2$, Σωστό

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, Λάθος

iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$, Λάθος

iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, Σωστό

v) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$, Λάθος

vi) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=3$, Σωστό

Ασκηση 12: Να υπολογιστούν τα όρια: i) $\lim_{x\to 3} x^2-2x+3$, ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+1}$ και iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x^2-2}$

Λυση

i) $\lim_{x\to 3} x^2-2x+3 = 3^2-2\cdot 3+3 = 9-6+3 = 6.$

ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)}{\lim_{x\to 1}(x^2+1)} = \frac{1+1-2}{1+1} = 0$

iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x^2-2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-2)} = \frac{1-1+1}{1-2} = -1$

Ασκηση 13. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ με $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda^2-6$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Λυση. Για να υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, θα πρέπει:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$ Αντικαθιστώ από εκφώνηση:

$$\lambda^2-6 = \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda^2-\lambda-6 = 0. \quad \Delta = 1-4\cdot(-6) = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow -2 \end{array}$$

Αρα το όριο υπάρχει για $\lambda=3$ ή $\lambda=-2$.

Άσκηση 14 Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν), τα όρια:

i) $f(x)=\begin{cases}3x^2-1, & \text{αν } x\le -1\\ 5x+7, & \text{αν } x>-1\end{cases}$, $\lim_{x\to -1} f(x) = ;$

ii) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2}, & \text{αν } x>1\\ \dfrac{3x^2-2}{x^2}, & \text{αν } 0<x<1\end{cases}$, $\lim_{x\to 1} g(x) = ;$

Λύση i) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(3x^2-1) = 3\cdot(-1)^2-1 = 2$

και $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(5x+7) = 5\cdot(-1)+7 = 2$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$

Επομένως $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$.

ii) $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{1+1}{1-2} = \dfrac{2}{-1} = -2$

και $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2-2}{x^2} = \dfrac{3\cdot 1^2-2}{1^2} = 1$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$ άρα το $\lim_{x\to 1} g(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 15: (I) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$ και $g(x)=x+1$.

1) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ισχύει $f(x)=g(x)$

2) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$.

(II) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1}$ και $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

Λύση. Η $g(x)=x+1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{0\}$.

Για $x\neq 0$ η $f(x)$ γράφεται: $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x}=x+1$.

Επομένως για $x \neq 0$, δηλαδή για $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ισχύει $f(x) = g(x)$.

I) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x}$. Παρατήρηση: αντικαθιστώντας φτάνω σε μορφή $\frac{0}{0}$, οπότε κάνω παραγοντοποίηση για να απλοποιήσω το κλάσμα.

και έχω $\lim_{x \to 0} (x+1) = 1$.

II) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x = 1$.

και $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}$ → Θα κάνω παραγοντοποίηση του αριθμητή βρίσκοντας τις ρίζες του $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$.

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow 2. \end{cases}$

άρα ο αριθμητής γράφεται $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Αντικαθιστώ στο όριο: $\lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1$.