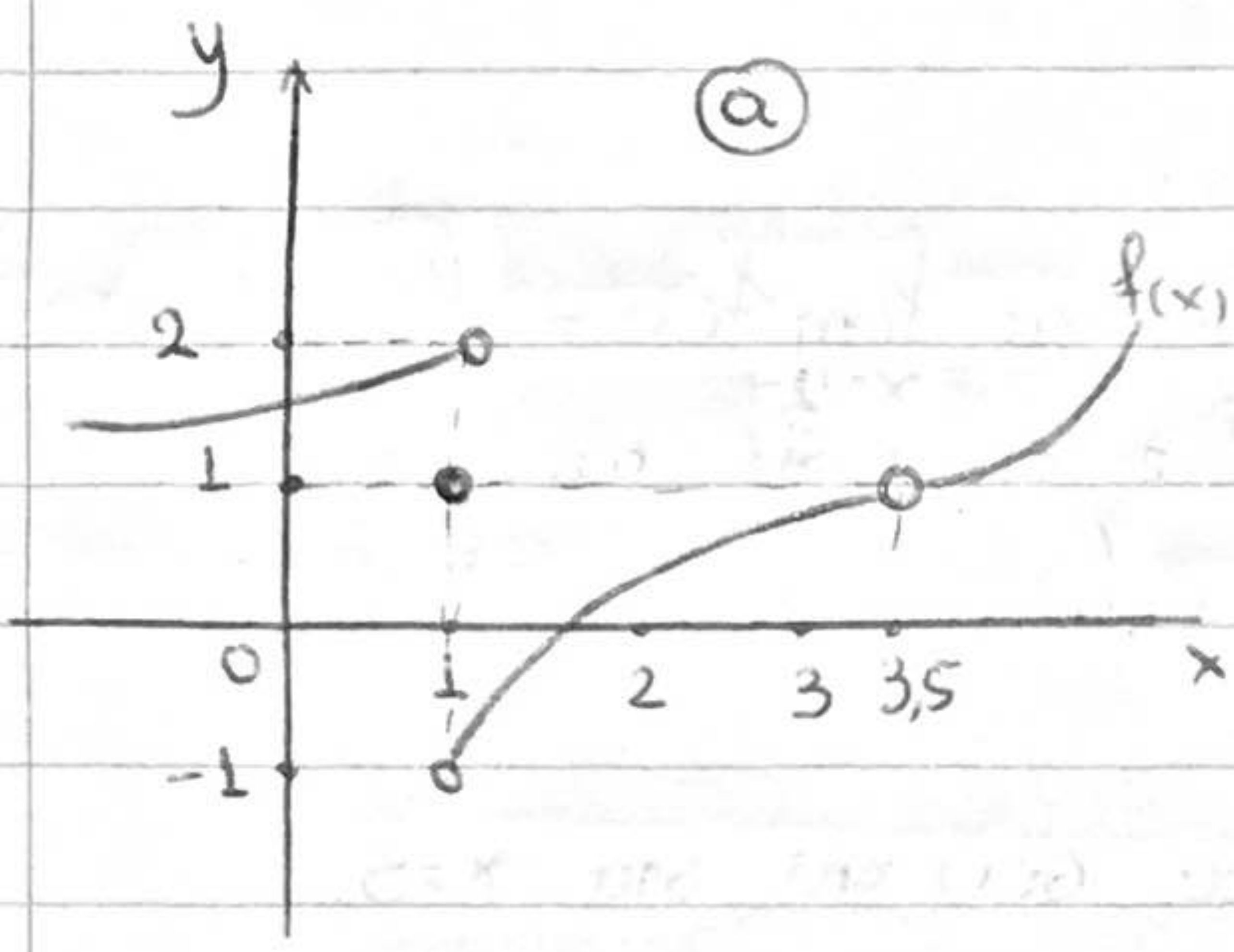
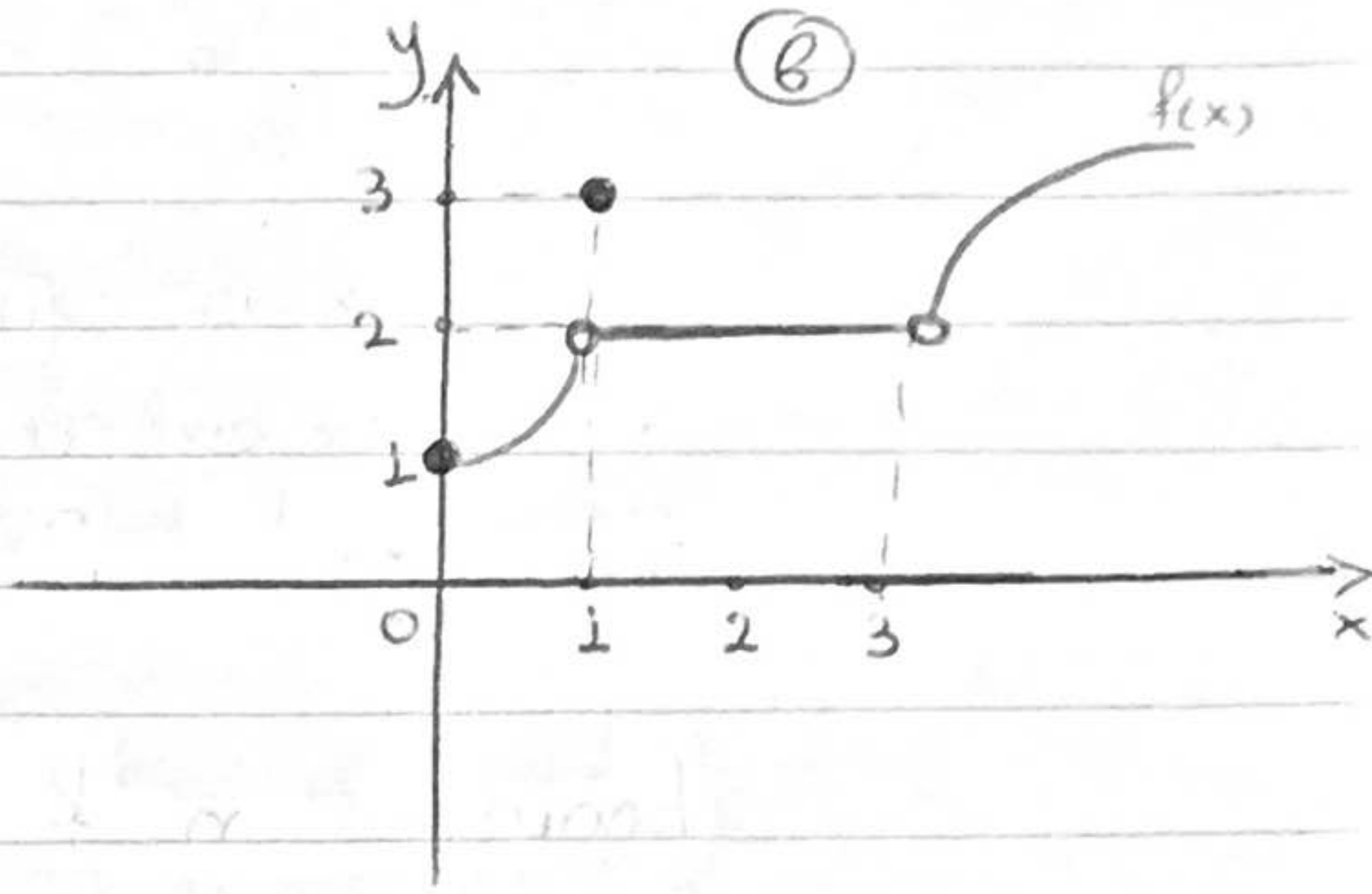
①

Ασκήσεις στη συνέχεια συνάρτησης.

Άσκηση 22: Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





Λύση: Μια συνάρτηση <u>δεν</u> είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, όταν ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Εξετάζω τα σημεία της γραφικής παράστασης στα οποία πιθανώς προκύπτει η ασυνέχεια.

α) <u>Για $x=1$</u>, παρατηρώ ότι:
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$
- $f(1) = 1$

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 1} f(x)$, άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 1.

<u>Παρατήρηση:</u> το $\lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, δηλαδή $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$. Ακόμα και αν το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$ υπήρχε, η $f(x)$ δεν θα ήταν συνεχής στο $x=1$ αν ισχύει $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

<u>Για $x=3,5$</u>, παρατηρώ ότι: $\lim_{x \to 3,5^-} f(x) = \lim_{x \to 3,5^+} f(x) = 1$, άρα $\lim_{x \to 3,5} f(x) = 1$. Όμως βλέπω ότι το $f(3,5)$ δεν ορίζεται, δηλαδή το $x=3,5$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, οπότε ΔΕΝ μιλάμε για συνέχεια στο σημείο αυτό.

★ Εξετάζω τη συνέχεια μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού ★

β) <u>Για $x=1$</u>, παρατηρώ ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$,

άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Επίσης βλέπω ότι $f(1) = 3$.

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow$ η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 1

<u>Για $x=3$</u>: παρατηρώ ότι στο $x_0=3$ η f δεν ορίζεται, δηλαδή το 3 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, και επομένως δεν συζητάμε για τη συνέχεια της f στο ~~σημείο~~ σημείο αυτό.

<u>Άσκηση 23</u>: Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στα ζητούμενα σημεία οι παρακάτω συναρτήσεις.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{αν } 0<x<2 \\ 4, & \text{αν } x=2 \\ 5x-3, & \text{αν } 2<x<5 \end{cases}$, στο $x_0 = 2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2-x+4, & \text{αν } 0<x<1 \\ 5, & \text{αν } x=1 \\ 2x+3, & \text{αν } 1<x<4 \end{cases}$, στο $x_0 = 1$.

Λύση:

<u>ΓΕΝΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ</u>: Για να μελετήσω τη συνέχεια στο x_0 πρέπει να υπολογίσω 2 τιμές, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$. Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, τότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

1) Υπολογίζω τα πλευρικά όρια:

για $x<2$ ισχύει $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2x+2) = 2\cdot 2+2 = 6$.

για $x>2$ ισχύει $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(5x-3) = 5\cdot 2-3 = 7$.

άρα $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ δηλαδή το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x=2$. (όποια και αν είναι η τιμή του $f(2)$).

2) Υπολογίζω τα πλευρικά όρια:

Για $x<1$ ισχύει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x^2-x+4) = 2\cdot 1-1+4 = 5$

Για $x>1$ ισχύει $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x+3) = 2\cdot 1+3 = 5$

αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$ ισχύει ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

Επίσης $f(1)=5$. Άρα $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$, επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής για $x=1$.

<u>Άσκηση 24</u>: Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο $x_0 = \pi/2$: $f(x) = \begin{cases} 3\eta\mu x, & \text{αν } x<\frac{\pi}{2} \\ a, & \text{αν } x=\pi/2 \\ b-2\sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } x<\pi/2 \end{cases}$.

Λύση: Υπολογίζω τα πλευρικά όρια στο $x_0 = \pi/2$:

- $\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^-}(3\eta\mu x) = 3\cdot \eta\mu(\pi/2) = 3\cdot 1 = 3$
- $\lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+}(b-2\sigma\upsilon\nu x) = b-2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi/2) = b-2\cdot 0 = b$.

→ Για να υπάρχει το όριο στο $x_0=\pi/2$ πρέπει:
$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} f(x)$, άρα $\boxed{b=3}$ τότε $\boxed{\lim_{x\to \pi/2} f(x)=3}$

→ Για να είναι συνεχής η $f(x)$ στο $\pi/2$ πρέπει
$f(\pi/2) = \lim_{x\to \pi/2} f(x) \Leftrightarrow \boxed{a=3}$.

Άρα για $a=b=3$ η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

Ασκήσεις στις παραγώγους.

Άσκηση 1: Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη A με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
① $3x^2$	ⓐ $6x^2-1$
② $3x$	ⓑ $6x$
③ $2(x^2-1)$	ⓒ 3
④ $(3x)^2$	ⓓ $4x$
⑤ $(3x-1)^2$	ⓔ $3x-1$
⑥ $3x^2-x$	ⓕ $18x$
	ⓖ $6(3x-1)$
	ⓗ $6x^2$
	ⓙ $6x-1$

Λύση:

1) $(3x^2)' = 3\cdot(x^2)' = 3\cdot(2\cdot x^{2-1}) = 3\cdot 2x^1 = 6x$.

άρα το ⓑ

2) $(3x)' = 3(x') = 3\cdot 1 = 3$ άρα το ⓒ

3) $(2(x^2-1))' = 2\cdot(x^2-1)' = 2\cdot((x^2)'-(1)') = 2\cdot(2x-0)$

$= 4x$. άρα το ⓓ

4) $((3x)^2)' = 2\cdot(3x)^{(2-1)}\cdot(3x)' = 2\cdot 3x\cdot(3\cdot 1) = 18x$.

άρα το ⓕ

5) $((3x-1)^2)' = 2\cdot(3x-1)\cdot(3x-1)' = 2\cdot(3x-1)\cdot(3\cdot 1-0)$

$= 6\cdot(3x-1)$ άρα το ⓖ

6) $(3x^2-x)' = (3x^2)' - (x)' = 3\cdot 2x^{(2-1)} - 1 = 6\cdot x - 1$

άρα το ⓙ.

Άσκηση 2: Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

i) $f(x) = x^2+5x-2$.

$f'(x) = (x^2+5x-2)' = (x^2)' + (5x)' - (2)' = 2x + 5\cdot 1 - 0$

$f'(x) = 2x+5$.

3

ii) $g(x) = 2x^3 - \sqrt{3}$

$$g'(x) = (2x^3 - \sqrt{3})' = (2x^3)' - (\sqrt{3})' = 2(3x^2) - 0 = 6x^2$$

iii) $h(x) = 3x^2 - 27x + 5$

$$h'(x) = (3x^2 - 27x + 5)' = (3x^2)' - (27x)' + (5)' = 6x - 27 + 0$$

iv) $f(x) = 3x^2 - 27x^{2/3} + 5$

$$f'(x) = (3x^2)' - (27x^{2/3})' + (5)' = 6x - 27\cdot\frac{2}{3}\,x^{(2/3-1)} + 0 =$$

$$= 6x - 9\cdot 2x^{-1/3} = 6x - 18x^{-1/3} = 6x - 18\cdot\frac{1}{x^{1/3}} =$$

v) $g(x) = 5x^2 + \frac{5}{x^6} - \sqrt{x}$

$$g'(x) = (5x^2)' + \left(\frac{5}{x^6}\right)' - (\sqrt{x})' = (5x^2)' + (5\cdot x^{-6})' - (\sqrt{x})' =$$

$$= 5\cdot 2x + \left(5\cdot(-6)\cdot x^{(-6-1)}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x - 30x^{-7} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

vi) $h(x) = (x-2)(x^2-4)$

από κανόνες παραγώγισης

$$h'(x) = ((x-2)(x^2-4))' = (x-2)'(x^2-4) + (x-2)(x^2-4)' =$$

$$= (1-0)(x^2-4) + (x-2)(2x-0) =$$

$$= x^2-4 + (x-2)\cdot 2x = x^2 - 4 + 2x^2 - 4x = 3x^2 - 4x - 4$$

viii) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

από κανόνες παραγώγισης

$$g'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot(2x+0)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

xi) $g(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$g'(x) = \left(\frac{e^x}{\ln x}\right)' = \frac{(e^x)'\ln x - e^x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{e^x\cdot\ln x - e^x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x(\ln x)^2}$$

xiii) $f(x) = e^x + ημx + συνx$.

$f'(x) = (e^x)' + (ημx)' + (συνx)' = e^x + συνx - ημx$.

Άσκηση 4. Να συμπληρώσετε τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων για αντίστοιχα σημεία:

α) $f(x) = x^2$, $f'(0) = \ldots$

β) $f(x) = x^2+1$, $f'(1) = \ldots$

γ) $f(x) = 2x^2-3$, $f'(-1) = \ldots$

δ) $f(x) = ημx$, $f'(\pi/2) = \ldots$

Λύση: α) Βρίσκω πρώτα $f'(x)$. $f'(x) = (x^2)' = 2x$. άρα $f'(0) = 2\cdot 0 = 0$

β) $f'(x) = (x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$. άρα $f'(1) = 2$

γ) $f'(x) = (2x^2-3)' = (2x^2)' - (3)' = 2\cdot 2x = 4x$. άρα $f'(-1) = -4$.

δ) $f'(x) = (ημx)' = συνx$. άρα $f'(\pi/2) = 0$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

α) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ στο σημείο της με $x_0 = 1$

β) $f(x) = x^3 - 1$, στο σημείο της με τεταγμένη 7.

α) Για $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1 + 2 - 3 = 0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,0)$, είναι:

$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$,

όπου $\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

άρα $\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2x - 3) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} =$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+3)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x + 3) = 4$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης $y - 0 = 4(x - 1) \Leftrightarrow$

$\boxed{y = 4x - 4}$

β) $f(x_0) = 7 \Leftrightarrow x_0^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2,7)$, είναι:

$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$

$f'(x) = 3x^2$, άρα για $x = 2$: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

άρα $\lambda = f'(2) = 12$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης: $y - 7 = 12(x - 2) \Leftrightarrow$

$\boxed{y = 12x - 17}$

Άσκηση 10: 1γ, 2ε, 3α

Δίνεται η συνάρτηση f που έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(3, f(3))$ την ευθεία $y = 2x + 1$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(3)$

β) την παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 = 3$

γ) το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο είναι:

$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y = \lambda x + (f(x_0) - \lambda x_0)$

Για $A(3, f(3))$ έχουμε: $y = \lambda x + (f(3) - 3\lambda)$

από την εκφώνηση: $y = 2x + 1$, άρα

• $\lambda = 2$ και

• $f(3) - 3\lambda = 1 \Leftrightarrow f(3) - 6 = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(3) = 7}$

β) Η παράγωγος της συνάρτησης f στο $x_0 = 3$, καθώς και το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ είναι το λ

άρα $\boxed{f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lambda = 2}$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 9$ και $g(x) = \eta\mu(x)$

α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις.

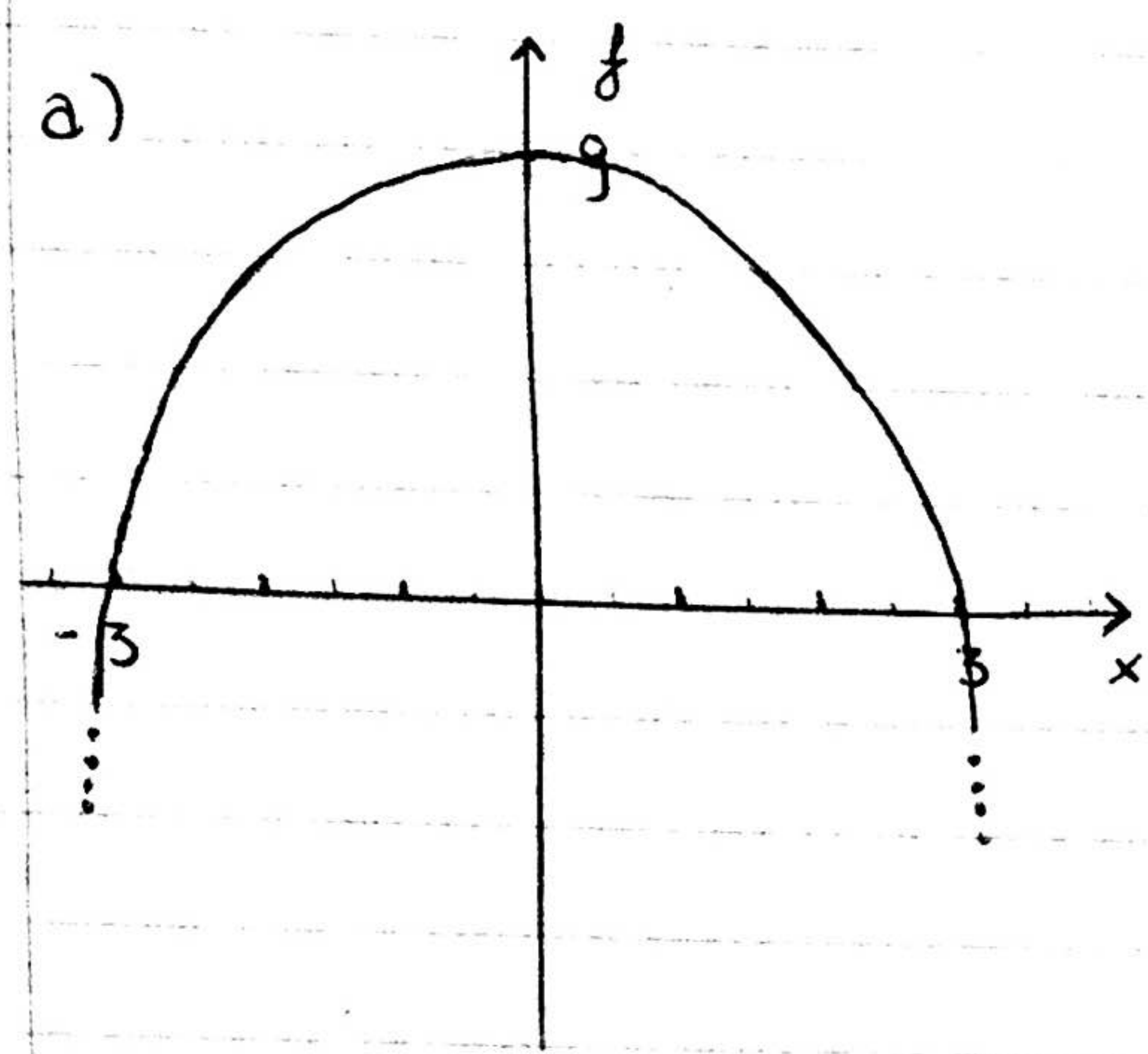
β) Να βρείτε τις παραγώγους.

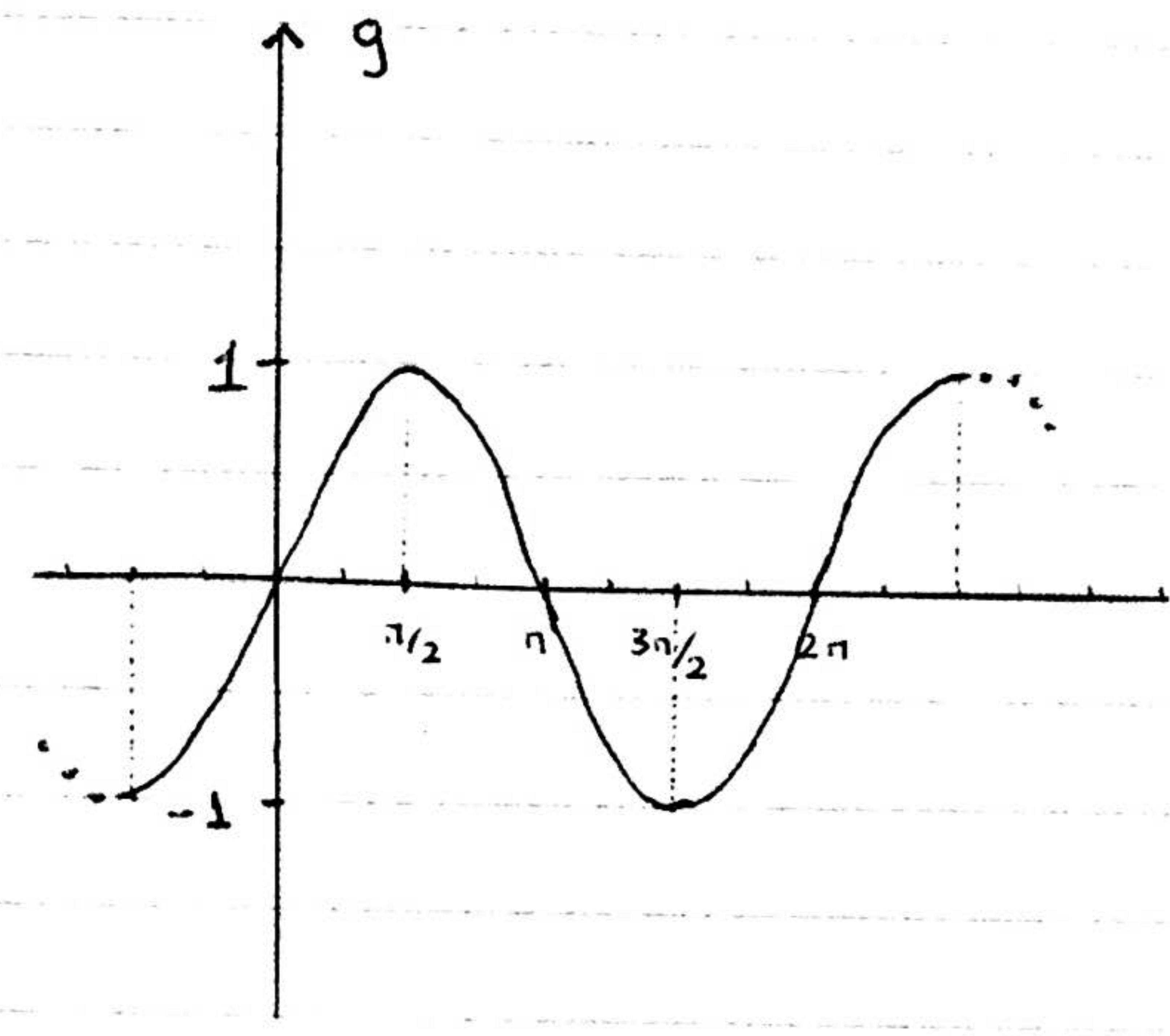
γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

δ) Να βρείτε εάν είναι αύξουσες ή φθίνουσες.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της f και του $x'x$ από το -3 έως το 3 και της g από 0 έως π.

α)





β) $f'(x) = (-x^2+9)' = -2x$

$g'(x) = (ημx)' = συνx$

γ) Τοπικά ακρότατα για $f'(x)=0$ και $g'(x)=0$, και αλλαγή προσήμου της παραγώγου, πριν και μετά από το σημείο μηδενισμού της:

α) μηδενίζω: • $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$

β) ελέγχω πρόσημο: • $f'(x) = -2x$

→ για $x<0$, $f'(x)>0$ ($f(x)$ αύξουσα)

→ για $x>0$, $f'(x)<0$ ($f(x)$ φθίνουσα).

α) μηδενίζω: • $g'(x)=0 \Leftrightarrow συνx=0 \Leftrightarrow x=κπ+\pi/2$, $κ\in Z$

β) ελέγχω πρόσημο: → για $x\in(0,\pi/2)$ και $x\in(3\pi/2, 2\pi)$, $g'(x)>0$ ($g(x)$ αύξουσα)

→ για $x\in(\pi/2,\pi)$ και $x\in(\pi, 3\pi/2)$, $g'(x)<0$ ($g(x)$ φθίνουσα)

Επειδή η συνάρτηση ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η μελέτη της έγινε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

δ) Στα διαστήματα που η παράγωγος μια συνάρτησης είναι θετική, η συνάρτηση είναι αύξουσα. Αντίστοιχα, όπου η παράγωγος είναι αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα

Έτσι, όπως μελετήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα,
- η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα για $x<0$
  είναι γν. φθίνουσα για $x>0$
- η $g(x)$ είναι γν. αύξουσα για $x\in(0,\pi/2)$ και $x\in(3\pi/2, 2\pi)$
  είναι γν. φθίνουσα για $x\in(\pi/2,\pi)$ και $x\in(\pi, 3\pi/2)$

και η μονοτονία αυτή επαναλαμβάνεται στο διάστημα κάθε περιόδου.

ε) $E_1 = \int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx = -\int_{-3}^{3} x^2 dx + 9\int_{-3}^{3} dx =$

$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} + 9(3-(-3)) = -\left[\frac{27}{3} - \left(\frac{-27}{3}\right)\right] + 9\cdot 6 =$

$= -\left[\frac{54}{3}\right] + 54 = 108/3.$

$E_2 = \int_0^{\pi} ημx\, dx = [-συνx]_0^{\pi} = -(συνπ - συν0) = -(0-1) = 1$