ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1) Δίνονται οι παρακάτω πραγματικοί αριθμοί. Ταξινομήστε τους και τοποθετήστε τους στον παρακάτω πίνακα: 12000, 10.05, $0.333\ldots$, -1215, $\sqrt{4}$, 0, $|-3|$, $-1/3$, 0.101001000100001

Λύση

Φυσικοί: $12000, \sqrt{4}, |-3|$

Ακέραιοι: $12000, -1215, \sqrt{4}, 0, |-3|$

Ρητοί: [redacted] [redacted] $12000, 10.05, 0.333\ldots, -1215, \sqrt{4}, 0, |-3|, -\frac{1}{3}, 0.101001000100001$

1.2) Διατάξτε τους παρακάτω αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών: $-100, 23, 15\frac{2}{3}, -10.8, -20.555\ldots, 11/3$

Λύση

$$-100 < -20.555\ldots < -10.8 < \frac{11}{3} < 15\frac{2}{3} < 23$$

1.5) Σε τι διαφέρουν οι παραστάσεις $(2^2)^3$ και 2^{2^3};

Λύση

- $(2^2)^3 = 4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$
- $2^{2^3} = 2^{2\cdot 2\cdot 2} = 2^8 = 256$

1.6) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3(-2)^2 - 2\cdot 3^2 - 8(2^{-1}-1) + 4 - 4^0\cdot 2$$

Λύση

$$A = 3(-2)^2 - 2\cdot 3^2 - 8(2^{-1}-1) + 4 - 4^0\cdot 2 =$$

$$= 3\cdot 4 - 2\cdot 9 - 8\left(\frac{1}{2}-1\right) + 4 - 1\cdot 2$$

$$= 12 - 18 - 8\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 - 2$$

$$= 12 - 18 + 4 + 4 - 2$$

$$= 0$$

1.7) Να γίνουν οι πράξεις: $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^2 6xy^3}{(-2x^2y^3)^3}$

Λύση

$$\frac{\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^2 6xy^3}{(-2x^2y^3)^3} = \frac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^4y^2\right]6xy^3}{(-2)^3\,x^6\,y^9} = \frac{\frac{6}{9}\,x^5\,y^5}{-8\,x^6y^9}$$

$$= -\frac{6}{72}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y^4} = \frac{-1}{12xy^4}$$

1.8) Τι σημαίνει $2^{-\frac{3}{5}}$;

Λύση

$$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{2^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$$

10) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

β) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3$

γ) $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)-(3\alpha-\beta)=\alpha^2+4\beta^2$

Λύση

α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=$

$=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2)-(\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2)$

$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$

$=\alpha^2-\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2-\beta^2=4\alpha\beta$

β) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=$

$=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=$

$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=$

$=\alpha^3+\beta^3$

γ) $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)-(3\alpha-\beta)^2=$

$=(\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)+9\alpha^2-6\alpha\beta+6\alpha\beta-4\beta^2-(3\alpha-\beta)(3\alpha-\beta)=$

$=\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2+9\alpha^2-4\beta^2-(9\alpha^2-3\alpha\beta-3\alpha\beta+\beta^2)=$

$=10\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta-9\alpha^2+6\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2+4\beta^2$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

!!

- $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$
- $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
- $(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$
- $(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
- $(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2$

1.12) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} : \dfrac{x+3}{x^2-6x+9}$

Λύση

$$A = \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} : \frac{x+3}{x^2-6x+9} = \frac{\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}}{\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}} = \frac{\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}}{\dfrac{(x+3)}{(x-3)^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{x+3}{(x-3)^2}} = \frac{(x+3)(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = x-3$$

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$$

!!

1) Βρίσκουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

2) • Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε δυο λύσεις x_1, x_2:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

και $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$

• Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε μια λύση διπλή x_1:

$$x_1 = \frac{-\beta}{2a}$$ και $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)^2$

• Αν $\Delta < 0$, δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις

1.13) Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2 - x - 3 = 0$

β) $2x^2 + x + 1 = 0$

γ) $x^3 - x^2 = x - 1$

δ) $\frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

Λύση

α) $2x^2 - x - 3 = 0$

• $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25 > 0$

Άρα $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2\cdot 2} = \begin{cases} \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$

6

β) $2x^2+x+1=0$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 1^2-4\cdot 2\cdot 1 = -7 \quad <0$

δεν έχει πραγματικές λύσεις

γ) $x^3-x^2=x-1 \iff x^2(x-1)=x-1 \iff$

$x^2(x-1)-(x-1)=0$

$(x^2-1)(x-1)=0$

$(x-1)(x+1)(x-1)=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$

Άρα $x_1=1, \quad x_2=-1$.

δ) $\dfrac{4x}{x^2-x}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1} \iff$ Πρέπει $x\neq 0,1,-1$

$\dfrac{4x}{x(x-1)}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{(x-1)(x+1)} \iff$

$\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{(x-1)(x+1)} \iff$

$\dfrac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{4}{(x-1)(x+1)}=0 \iff$

$\dfrac{4x+4+x^2-x-4}{(x-1)(x+1)}=0 \iff$

$$\iff \frac{x^2+3x}{(x-1)(x+1)} = 0 \iff$$

$$x^2+3x=0 \iff x(x+3)=0 \iff$$

$x=0$ απορρίπτεται

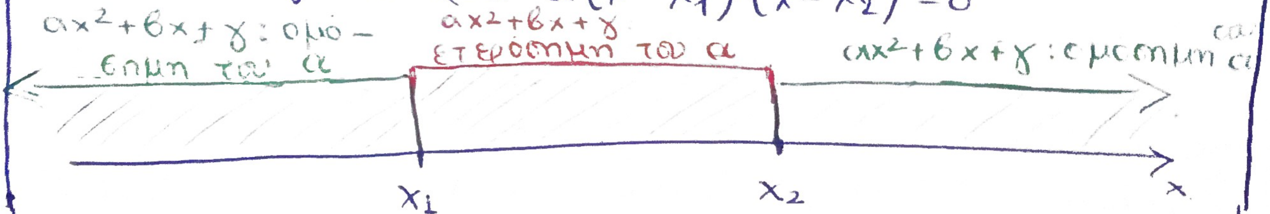
$x=-3$

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

• $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$!!

Βρίσκουμε τις δύο λύσεις (αν $\Delta<0$, τότε τριώνυμο παντού ομόσημο του α)

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \iff \alpha(x-x_1)(x-x_2)=0$$



1.14) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2-x-2>0$

β) $x^2+9\leq 6x$

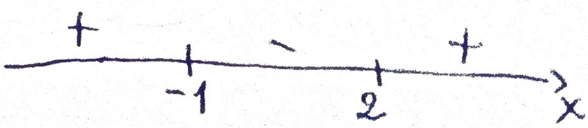
γ) $x^2+3x+5\leq 0$

Λύση

α) $x^2-x-2=0$

$\cdot\,\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm3}{2}= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$



Άρα $x^2-x-2>0$ όταν $x\leq-1$ ή $x>2$

β) $x^2+9 \leq 6x \iff x^2-6x+9 \leq 0$

$\iff (x-3)^2 \leq 0$

Επειδή $(x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x$

Άρα $(x-3)^2 \leq 0$ μόνο για $x=3$

γ) $x^2+3x+5=0$

• $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = -11 < 0$

Άρα $x^2+3x+5 > 0$ (αφού $\alpha > 0$)

Άρα για κανένα x δεν ισχύει $x^2+3x+5 \leq 0$

2.15) Ελέγξτε ποιές από τις παρακάτω ανισοτικές σχέσεις ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε όποιες ισχύουν. Δώστε αντιπαράδειγμα για αυτές που δεν ισχύουν:

1) $\alpha^2 \geq \alpha$ → Μόνο για $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

2) $2\alpha \geq \alpha$ → ισχύει για $\alpha \geq 0$

3) $\alpha+2 \geq \alpha$ → ισχύει για $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Αν $\alpha > -3$ τότε $\alpha^2 > 9$ → αντιπαράδειγμα, πχ $\alpha = -1$

5) Αν $\alpha < \beta$, και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\delta$.

↳ αντιπαράδειγμα. $\alpha = -1$, $\beta = 2$
$\gamma = -3$, $\delta = 1$.