ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΜΕΤΡΗΣΗ

- Η μέτρηση είναι μια διαδικασία αντιστοίχισης στα αντικείμενα που μετράμε και σε ορισμένα σύμβολα, προφορικά ή γραπτά.

- Βάση της μέτρησης είναι οι συναρτήσεις 1-1

- Μια συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται 1-1 αν για κάθε x_1, x_2 στο A με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

  Δηλαδή, διαφορετικά στοιχεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες.

ΣΥΜΜΕΤΡΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

- Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β λέγονται **σύμμετρα** αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα γ και φυσικοί αριθμοί μ και λ ώστε:

$$\alpha=\mu\gamma \text{ και } \beta=\lambda\gamma$$

- Δηλαδή, δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα αν έχουν κοινό μέτρο.

ΥΠΑΡΞΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

- Η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς 1 είναι ασύμμετρη με την πλευρά του τετραγώνου

- Δεν υπάρχει ρητός αριθμός α με $\alpha^2 = 2$.

ΑΡΙΘΜΟΙ

- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι αριθμοί
- Ρητοί αριθμοί (κλάσματα)
- Άρρητοι αριθμοί

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

- *Αξιώματα (Πρωταρχικές έννοιες και θεμελιώδεις ιδιότητες τους).*
- *Μαθηματικές προτάσεις που προκύπτουν από τα αξιώματα και προτάσεις που έχουν ήδη αποδειχθεί.*
- *Ορισμοί νέων εννοιών που στηρίζονται σε προηγούμενες έννοιες και προτάσεις που έχουν αποδειχθεί.*

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αλγεβρική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**, το οποίο συμβολίζουμε με R, είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζονται δύο πράξεις, η **πρόσθεση** (+) και ο **πολλαπλασιασμό** (.), και μια διμελής σχέση, **η διάταξης** (<), οι οποίες ικανοποιούν 13 αξιώματα.

Αξιώματα της πρόσθεσης

- **(Π1) Ύπαρξη του μηδενός**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 0 (μηδέν)

  $$\boldsymbol{\alpha+0=\alpha}$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- **(Π2) Ύπαρξη του αντιθέτου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε –α και λέγεται αντίθετος του α, ώστε

  $$\boldsymbol{\alpha+(-\alpha)=0}$$

- **(Π3) Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

- **(Π4) Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
Μοναδικότητα του μηδενός.

Αν μ πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha + \mu = \alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, τότε $\mu = 0$.

Απόδειξη.

Από την ιδιότητα του μ έχουμε $0+\mu=0$.

Από την (Π1) έχουμε $\mu+0 = \mu$.

Από την (Π4) και τα παραπάνω έχουμε

$$0 = 0 + \mu = \mu + 0 = \mu$$

Μοναδικότητα του αντιθέτου.

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και

α + β = 0 τότε β=-α.

Απόδειξη.

β = β+0	(Π1)
=β + (α+(-α))	(Π2)
=(β + α) + (-α)	(Π3)
= (α + β) + (-α)	(Π4)
= 0 + (-α)	(υπόθεση για τον β)
=(-α) + 0	(Π4)
= -α	(Π1)

Αφαίρεση

Συμβολισμός

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί θέτουμε

$$α – β = α+(-β)$$

Αξιώματα του πολλαπλασιασμού

- **(Π5) Ύπαρξη της μονάδας**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 1 (μονάδα), ώστε

  $$1 \neq 0 \text{ και } \alpha.1 = \alpha$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- **(Π6) Ύπαρξη αντιστρόφου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε α^{-1} (αντίστροφος του α), ώστε

  $$\alpha.\alpha^{-1} = 1$$

- **(Π7) Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

- **(Π8) Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha.\beta = \beta.\alpha$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

Κλάσματα

Συμβολισμός:

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και $\beta \neq 0$ θέτουμε

$$\alpha/\beta = \alpha . \beta^{-1}$$

Αξίωμα που συνδέει τις δύο πράξεις

- **Π9. Επιμεριστική ιδιότητα**

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

Αξιώματα της διάταξης

- **(Π10) Ιδιότητα μεταβατικότητας**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και

  α > β και β > γ τότε α > γ

- **(Π11) Ιδιότητα της τριχοτομίας**

  Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις

  α = β, α < β, β < α

Αξιώματα που συνδέουν τις πράξεις με την διάταξη

- **(Π12) Διάταξη και πρόσθεση**

  Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και

  α > β τότε α + γ > β + γ

  για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

- **(Π13) Διάταξη και πολλαπλασιασμός**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με

  α > β και γ>0 τότε α.γ > β.γ

Φυσικοί Αριθμοί

- Ένα υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών λέγεται **επαγωγικό** αν:

  α) ο 1 ανήκει στο Α

  β) αν ο x ανήκει στο Α τότε ο x+1 ανήκει στο Α
- **Θεώρημα:** Υπάρχει μικρότερο επαγωγικό

  υποσύνολο του R
- Το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών λέγεται σύνολο των **Φυσικών Αριθμων** (συμβ. N)

Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών

Θεώρημα (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής)

Έστω μια μαθηματική πρόταση p.

Υποθέτουμε ότι η p

α) είναι αληθής για το 1

και

β) αν η p είναι αληθής για ένα φυσικό αριθμό m τότε η p είναι αληθής για τον m+1.

Τότε η p είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό.

Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών

Θεώρημα (Αρχή της καλής διάταξης)

Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

Συμβολισμός

2=1+1

.....

9=8+1

Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό

Έστω $\alpha \neq 0$.

Θέτουμε

$\alpha^0=1$, $\alpha^1=\alpha$ και $\alpha^{n+1}=\alpha^n.\alpha$ για κάθε n φυσικό αριθμό.

Ακέραιοι Αριθμοί

- Το σύνολο των **ακεραίων αριθμών** (συμβ. Z) είναι οι φυσικοί αριθμοί, οι αντίθετοι τους και το 0.

- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών ικανοποιεί τα αξιώματα της πρόσθεσης

Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

Έστω $α \neq 0$ και n φυσικός.

Θέτουμε $α^{-n} = 1/α^{n}$

Ρητοί Αριθμοί

- Το σύνολο των ρητών αριθμών (συμβ. Q) είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής α/β με α,β ακέραιους και β διάφορο το 0.

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος και κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός.

- Το σύνολο των ρητών αριθμών ικανοποιεί και τα 13 αξιώματα (ολικά διατεταγμένο σώμα).

- Δεν υπάρχει ρητός αριθμός α που ώστε $α^2 = 2$

Ελάχιστο άνω φράγμα

- Έστω A υποσύνολο του R.
  Το A λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M ώστε x ≤ M για κάθε x στοιχείο του A.
  Ένας αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άνω φράγμα** του A
- Το A λέγεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός Λ ώστε Λ ≤x για κάθε x στοιχείο του A.
  Ένας αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται λέγεται **κάτω φράγμα** του A

Ελάχιστο άνω φράγμα

- Υπάρχουν άνω φραγμένα υποσύνολα των ρητών αριθμών που δεν έχουν **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum) ρητό αριθμό.

- Υπάρχουν κάτω φραγμένα υποσύνολα των ρητών αριθμών που δεν έχουν **μέγιστο κάτω φράγμα** (infimum) ρητό αριθμό.

Πληρότητα των Πραγματικών Αριθμών

(Π14) **Αξίωμα της πληρότητας**

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Όλα τα υποσύνολα του R που μπορούν να έχουν ελάχιστο άνω φράγμα, έχουν ελάχιστο άνω φράγμα.

Ύπαρξη μέγιστου κάτω φράγματος

Πρόταση: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Άρρητοι αριθμοί

Θεώρημα: Για κάθε πραγματικό αριθμό $α \geq 0$ και κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός αριθμός $β \geq 0$ ώστε $α=β^n$

Συμβολισμός: $β=\sqrt[n]{α} = α^{1/n}$

Πόρισμα: Υπάρχουν μη ρητοί πραγματικοί αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί λέγονται **άρρητοι**

Μοναδικότητα της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών

- Ένα σύνολο που ικανοποιεί τα 14 αξιώματα λέγεται **πλήρες ολικά διατεταγμένο σώμα.**

- Αν ένα σύνολο είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα τότε είναι ισομορφικό με το R

Δηλαδή, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνηση μεταξύ αυτού του συνόλου και του R η οποία διατηρεί την δομή

Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό

Έστω $\alpha > 0$, m ακέραιος, n φυσικός.

Θέτουμε $\alpha^{m/n} = \sqrt[n]{\alpha^m}$

Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς

Θεώρημα: Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, με α<β.

Υπάρχει ρητός αριθμός q ώστε α<q<β.

Δηλαδή, για κάθε πραγματικό αριθμό μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε κοντά έναν ρητό αριθμό.

Πόρισμα: Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, με α<β.

Υπάρχει άρρητος αριθμός γ ώστε α<γ<β

Δεκαδική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών

Θεώρημα

Για κάθε φυσικό αριθμό m υπάρχει φυσικός αριθμός n και πεπερασμένο πλήθος αριθμών α_0, α_1, α_2,....,α_n από το σύνολο {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ,8, 9}, με $\alpha_n \neq 0$ ώστε

$$m=\alpha_n.10^n + \alpha_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + \alpha_1.10 + \alpha_0$$

Οι αριθμοί n, α_n, ...,α_0 είναι οι μοναδικοί αριθμοί με την παραπάνω ιδιότητα.

Συμβολισμός: $m=\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_1\ \alpha_0$

Δεκαδική αναπαράστση των ρητών αριθμών

Θεώρημα: Έστω πραγματικός αριθμός α με $0 \leq α \leq 1$.

Τότε υπάρχει ακολουθία $α_1, ..., α_n, ...$

αριθμών από το σύνολο {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ,8, 9} ώστε

$α = α_1 . 10^{-1} + α_2 . 10^{-2} + ... + α_n . 10^{-n} + ...$

Αν $β_1, ..., β_n, ...$ Είναι μια ακολουθία με την ίδια ιδιότητα τότε

ή $α_n = β_n$ για κάθε $n=1,2,.....,$

ή υπάρχει φυσικός αριθμός k ώστε

$α_n = β_n$ για κάθε $n=1,2,..,k-1$

$α_k = β_κ + 1$

$α_n = 0$ και $β_n = 9$ για κάθε $n > k$.

Συμβολισμός: $α = 0, α_1 α_2 … α_n …$