Συναρτήσεις

Η άλγεβρα των συναρτήσεων

Έστω συναρτήσεις f: A →R , g:B →R και λ πραγματικός αριθμός

- Άθροισμα συναρτήσεων,

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$

- Διαφορά συναρτήσεων

  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$

- Γινόμενο συναρτήσεων

  $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$, πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$

- Γινόμενο αριθμού με συνάρτηση

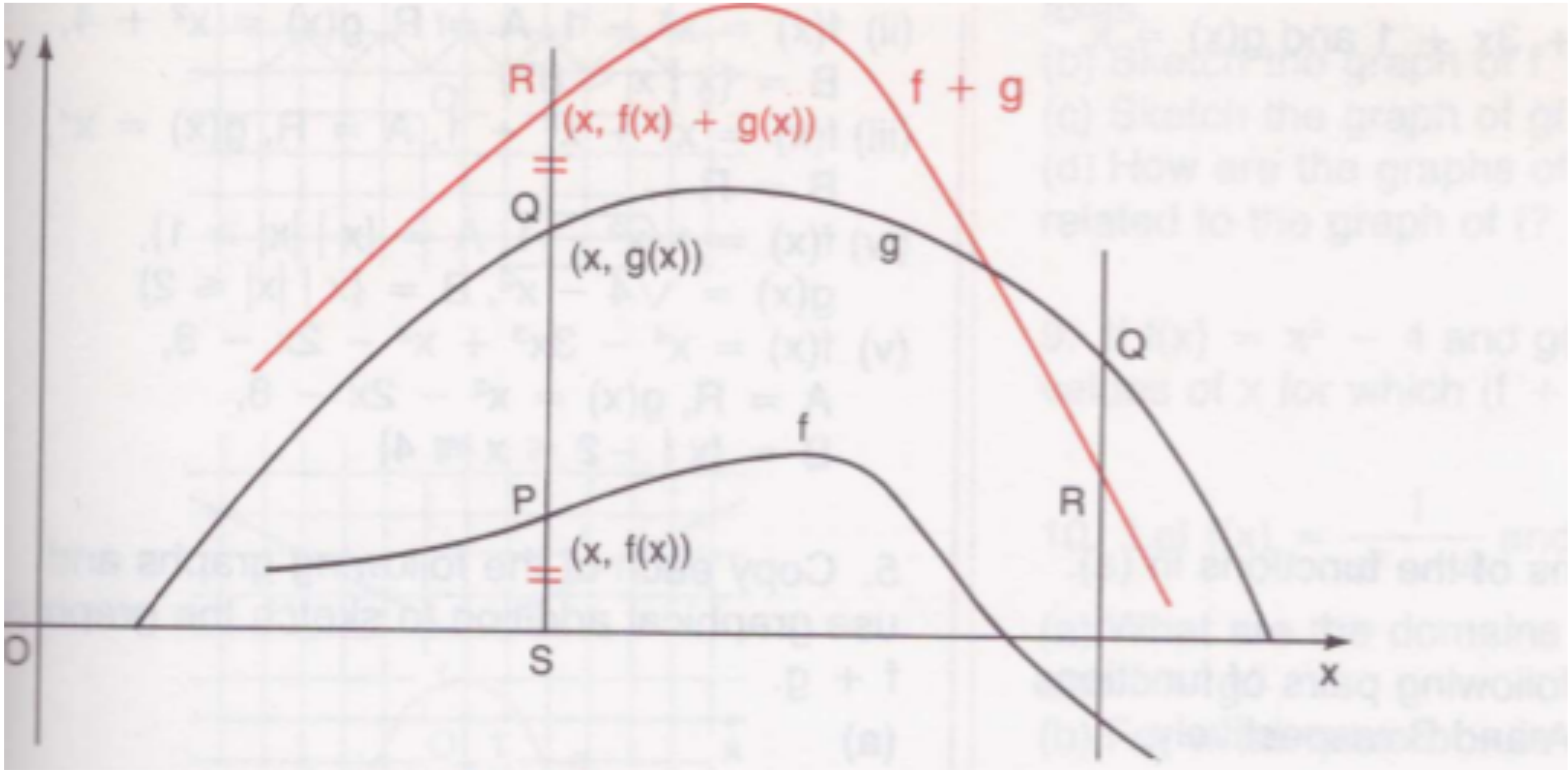
  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A

- Πηλίκο συναρτήσεων

  $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$

  με πεδίο ορισμού το σύνολο Γ = {x ανήκει στην τομή των A, B και $g(x) \neq 0$}

Γραφική απεικόνιση πρόσθεσης συναρτήσεων



ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Είδη συναρτήσεων

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
- Ρητές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Πολυωνυμική είναι κάθε συνάρτη της μορφής

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι πιο συνηθισμένες πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι:

Η $f(x) = \alpha x + \beta$ (ευθεία)

Η $f(x) = c$ (σταθερή)

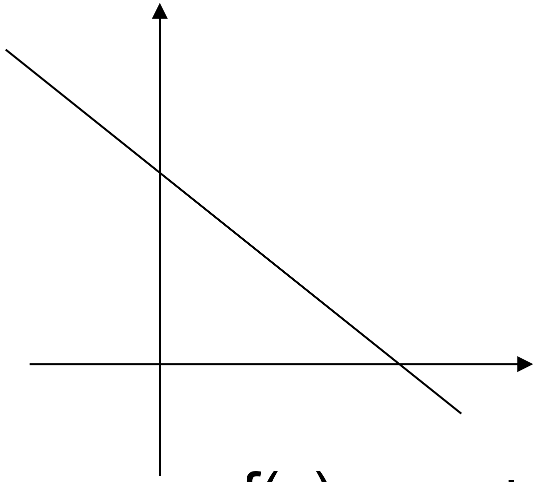
Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (παραβολή)

Η $f(x) = \alpha x^3$

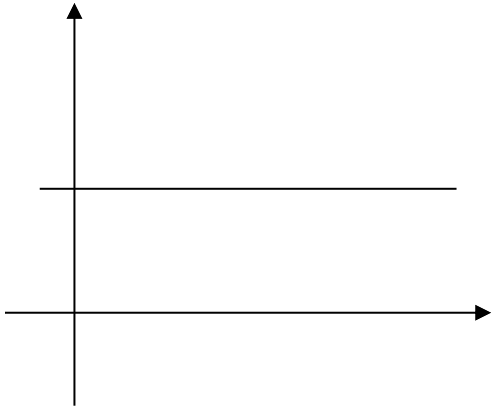
Διαγράμματα πολυωνυμικών συναρτήσεων

$f(x) = x^2$

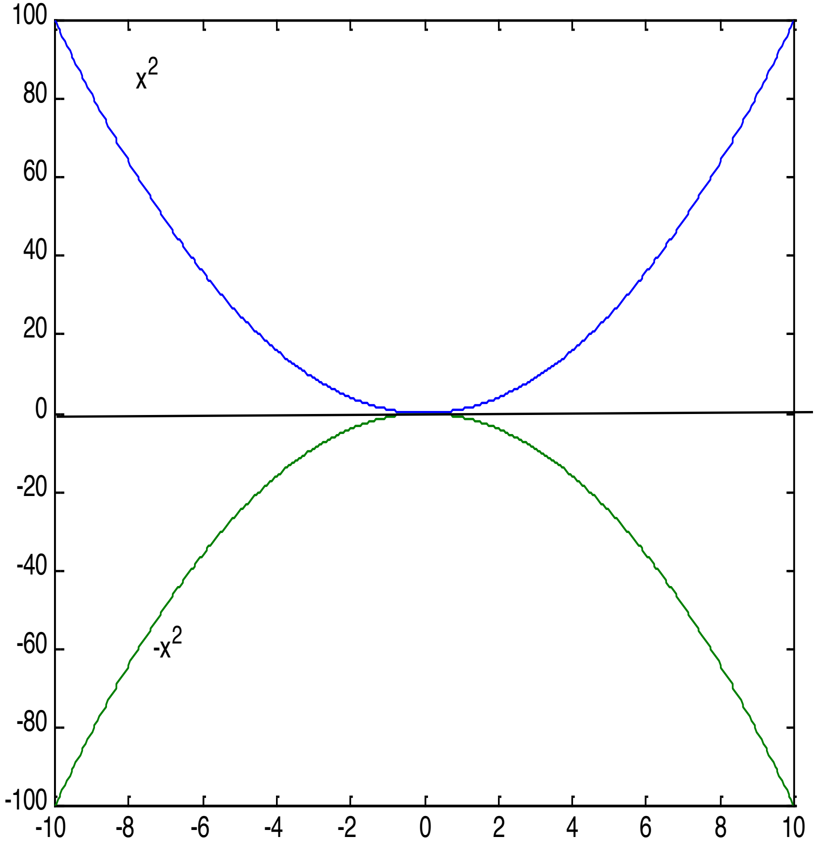
$g(x) = -x^2$



$f(x) = \alpha x + \beta$

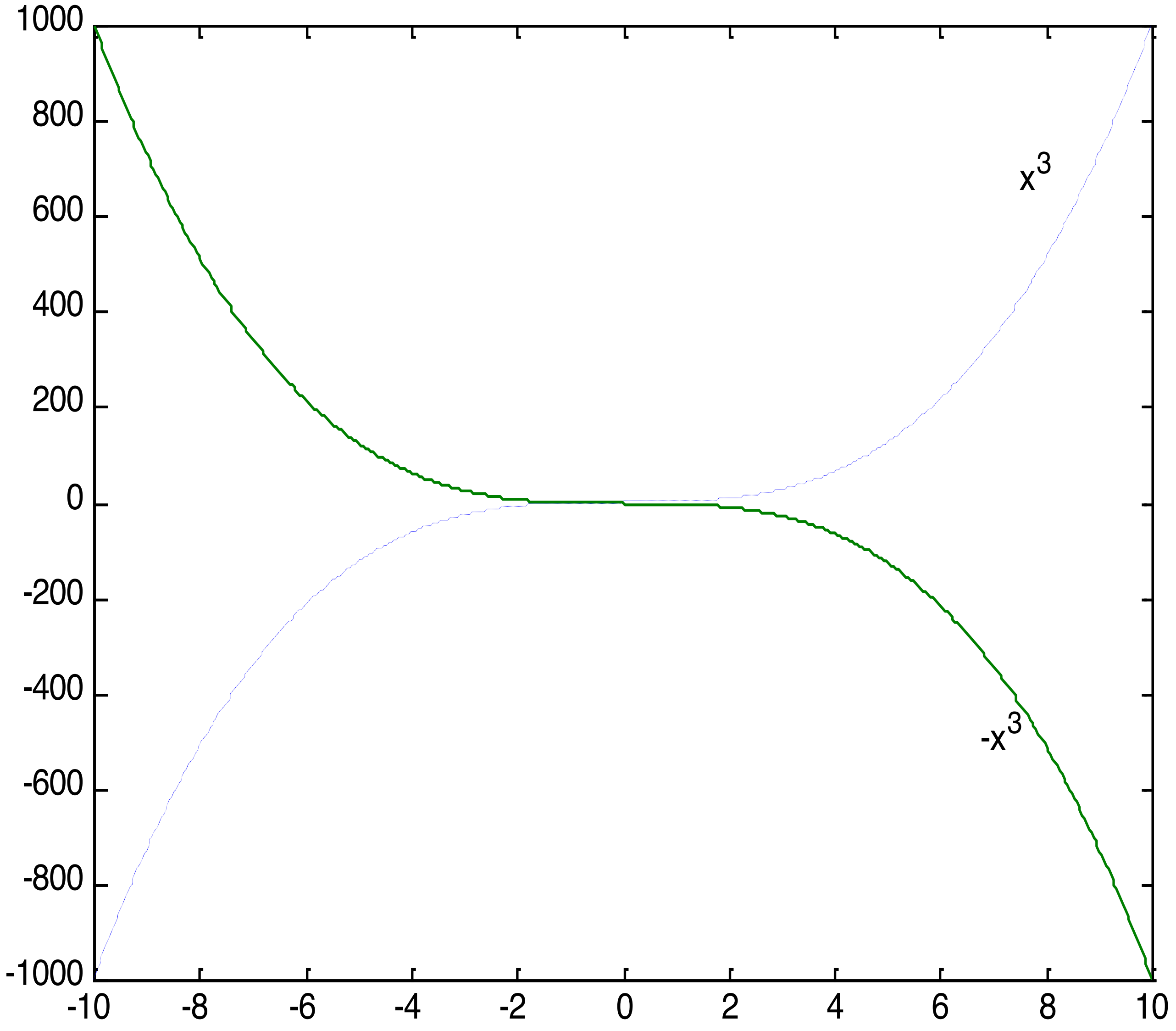


$f(x) = c$



$f(x) = x^3$

$g(x) = -x^3$



1000
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x3
-x3

Η ευθεία f(x)=αx+β

Τι εκφράζουν τα α και β;

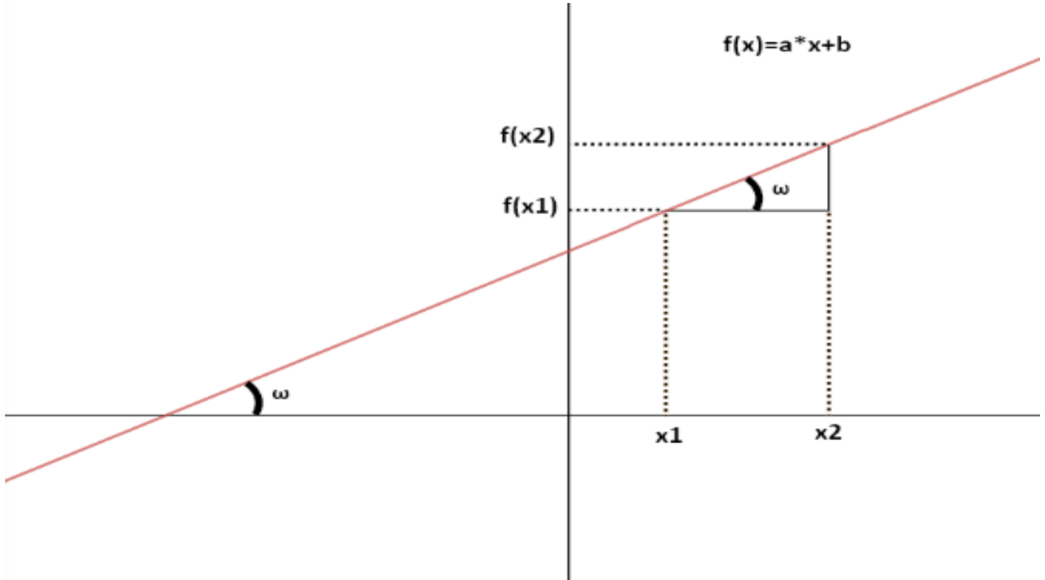
Το α είναι η κλίση της ευθείας, δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\alpha x_2 - \beta) - (\alpha x_1 - \beta)}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha x_2 - \beta - \alpha x_1 + \beta}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Το β είναι το σημείο τομής της Ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα

f(0)=α.0+β=β



Κλίση δρόμου

- **Οδικό σήμα**

Επικίνδυνη ανωφέρεια με κλίση 10%

Τι εκφράζει το 10%;

Απ. Οριζόντια μετατόπιση κατά 100μ αντιστοιχεί σε κατακόρυφη μετατόπιση κατά 10μ.

Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός γωνίας εκφράζει την κλίση του δρόμου;

Απ. Η εφω

Ποια είναι η γωνία κλίσης του συγκεκριμένου δρόμου;

Απ. Περίπου 5 μοίρες

Ρητές συναρτήσεις

Ρητή συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

όπου P και Q είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

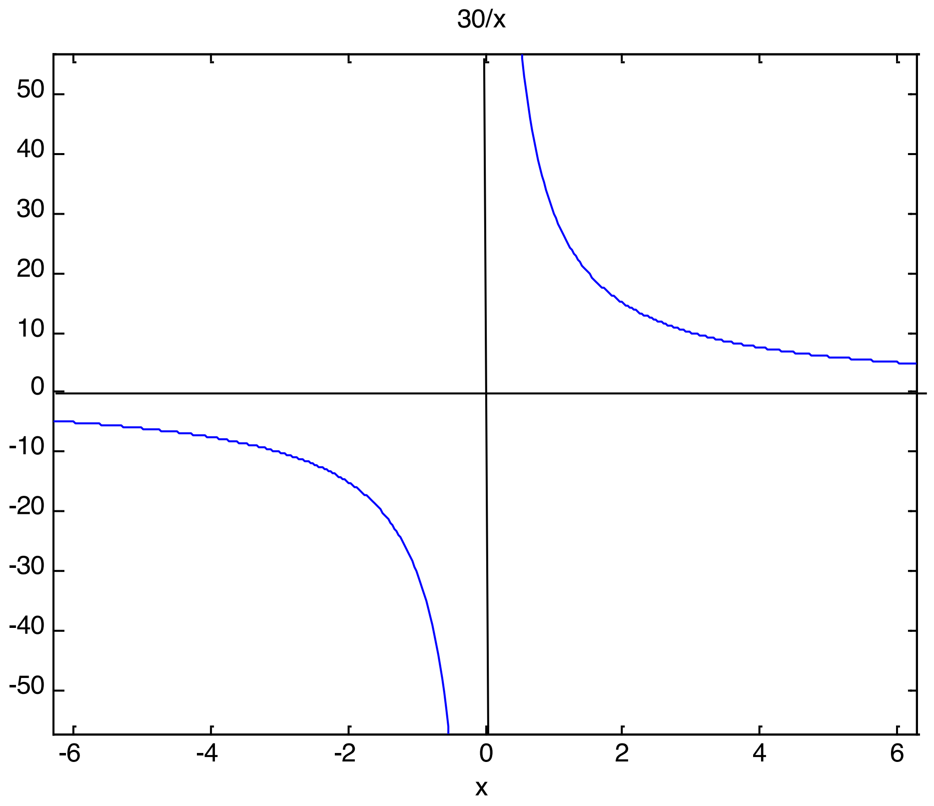
Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A={$x \in \mathbb{R}$: $Q(x) \neq 0$}

Παράδειγμα: $f(x) = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}, \mu\varepsilon\ \gamma \neq 0$ και αδ-βγ $\neq 0$.

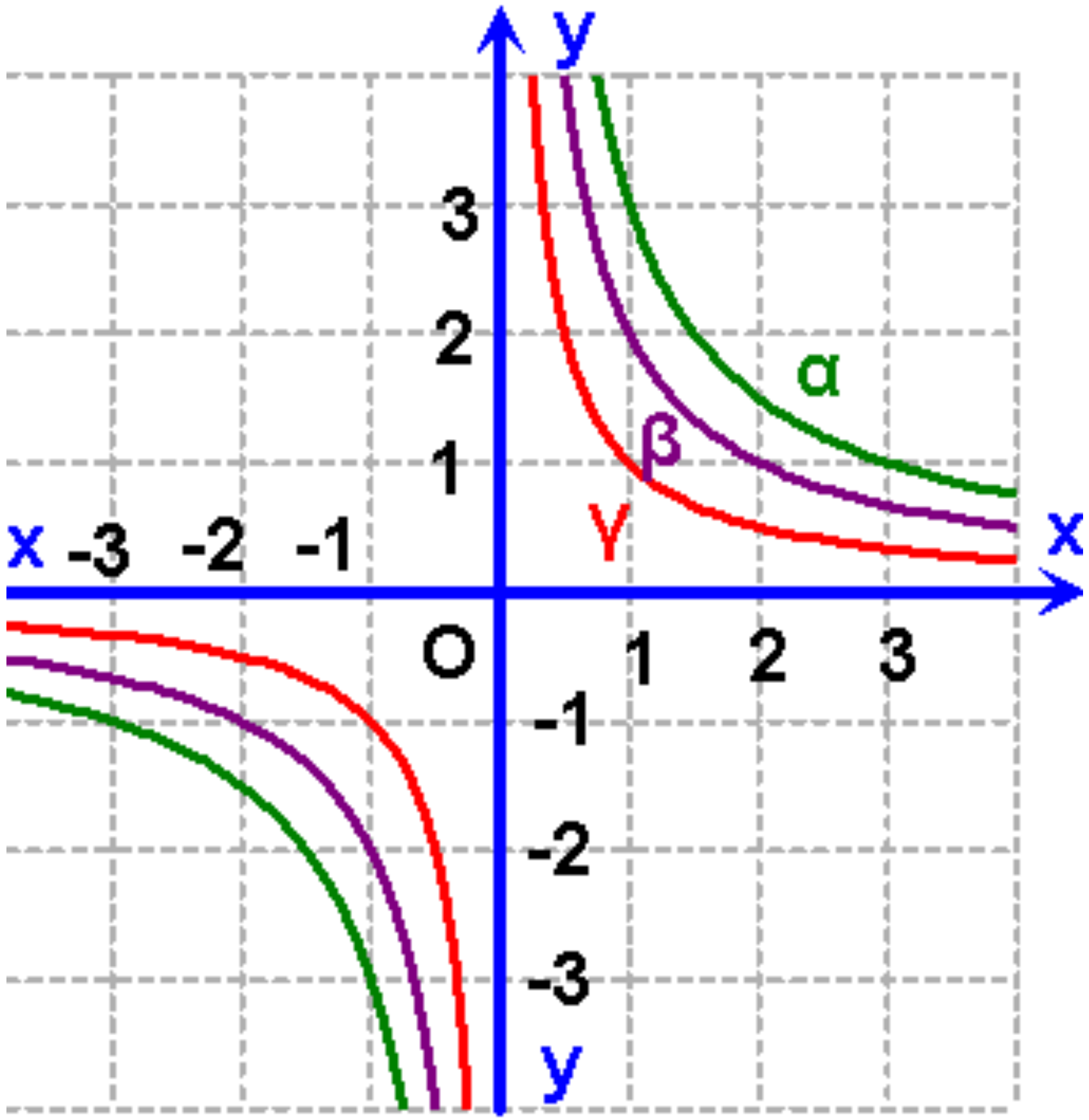
Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A= {$x \in \mathbb{R}$: $x \neq -\frac{\delta}{\gamma}$ }

Παράδειγμα

$$f(x) = \frac{30}{x}$$

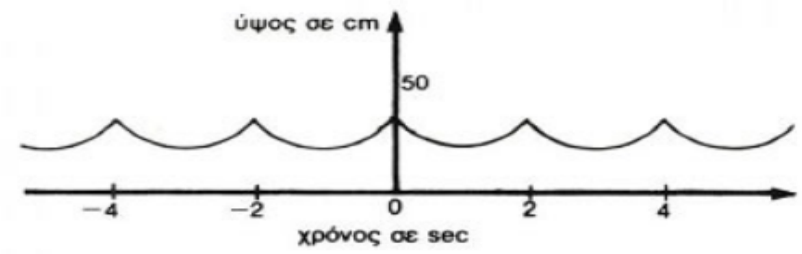


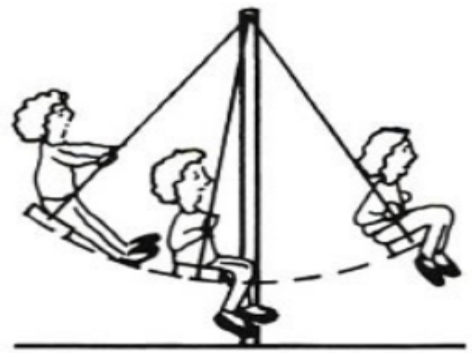
Να βρείτε τα α, β, γ στις συναρτήσεις της μορφής α/x, β/x, γ/x του διπλανού σχήματος.



Περιοδικές συναρτήσεις

- Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου t.





Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή t, το ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή t + 2 sec και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή t - 2 sec.

Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου t) **είναι περιοδική** με **περίοδο** 2 sec.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A$, $x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- sinx ή ημx ή συνάρτηση ημιτόνου

Πεδίο ορισμού $x \in R \to [-1,1]$ (Σύνολο τιμών)

- cosx ή συνx ή συνάρτηση συνημιτόνου

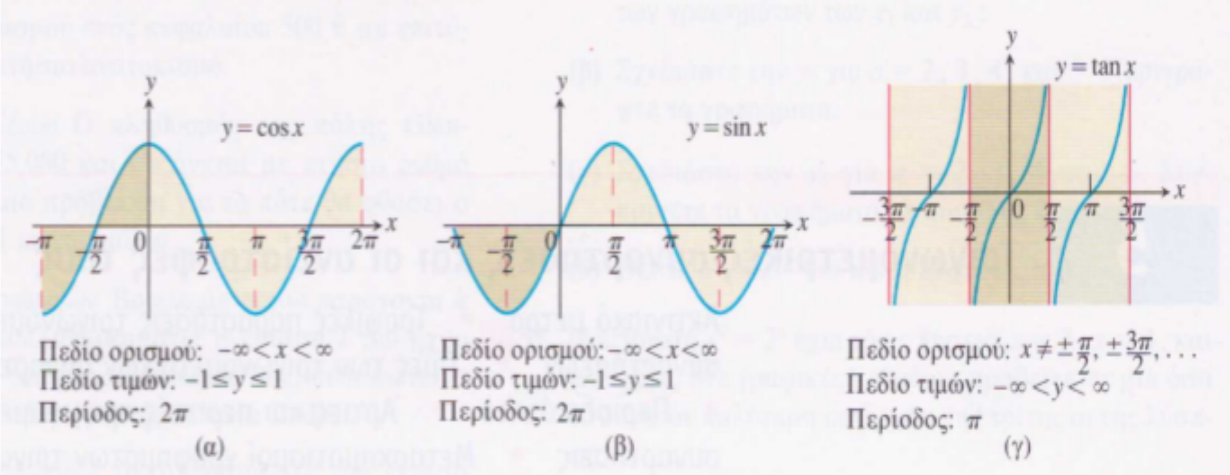
Πεδίο ορισμού $x \in R \to [-1,1]$ (Σύνολο τιμών)

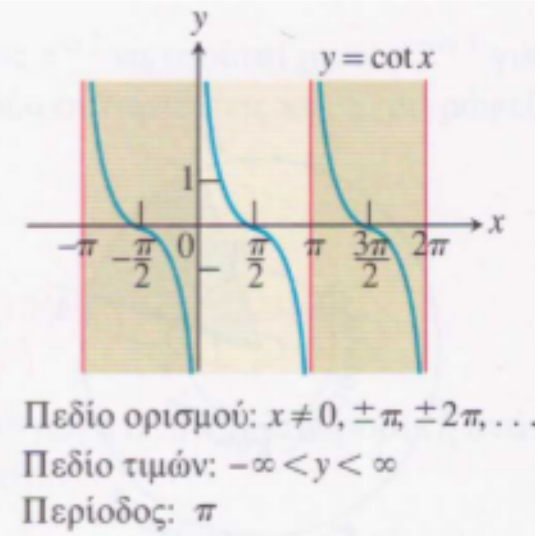
- tanx ή εφx ή συνάρτηση εφαπτομένης

Πεδίο ορισμού $x \in R\text{-}[k\pi+\pi/2, k \in Z] \to R$ (Σύνολο τιμών)

- cotx ή σφx ή συνάρτηση συνεφαπτομένης

Πεδίο ορισμού $x \in R - [k\pi, k \in Z] \to R$ (Σύνολο τιμών)





Εκθετικές συναρτήσεις

Εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $f(x) = α^x$

$f(x) = α^x$

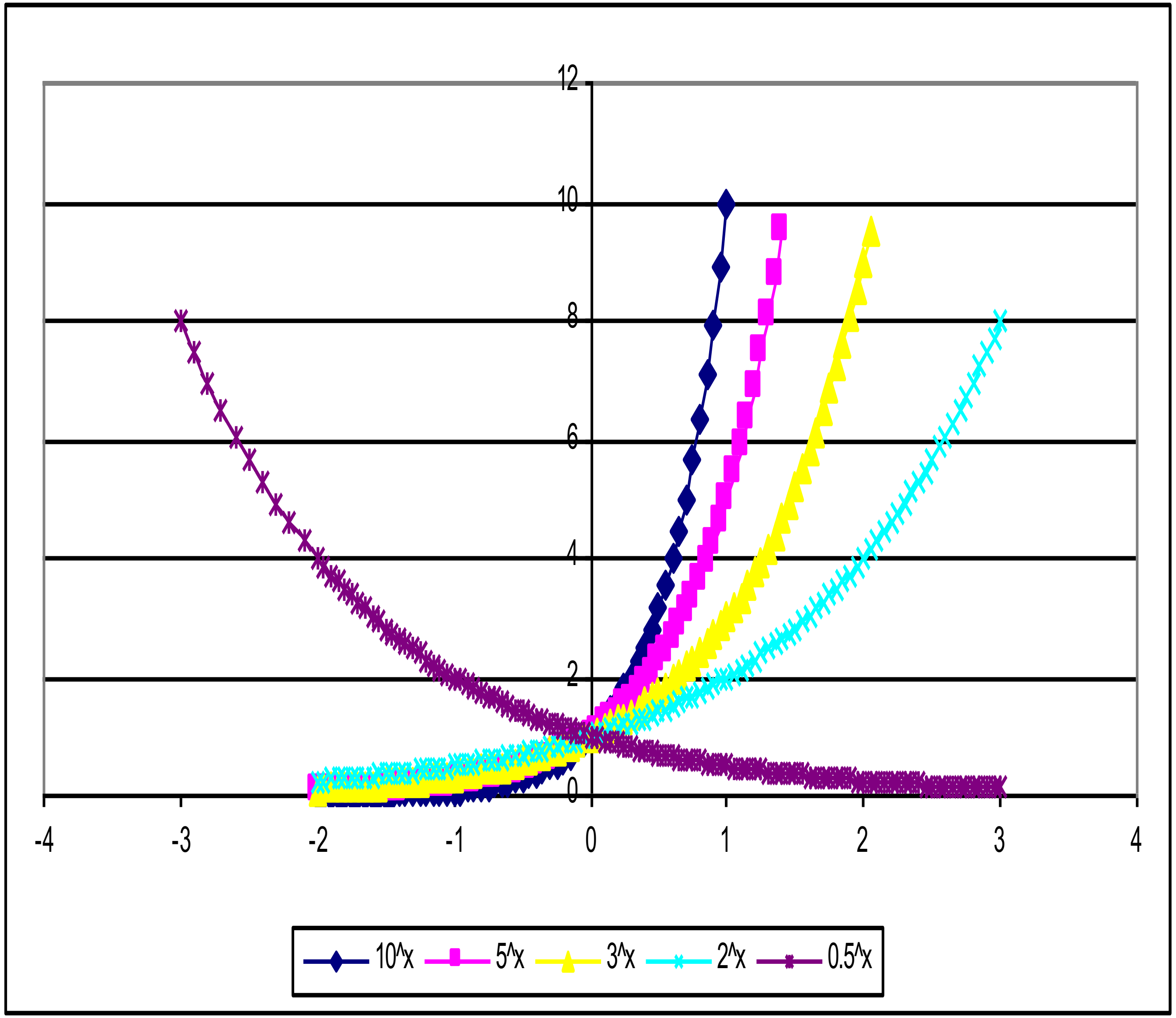
Πεδίο ορισμού $x \in R$

Σύνολο τιμών $(0, \infty)$

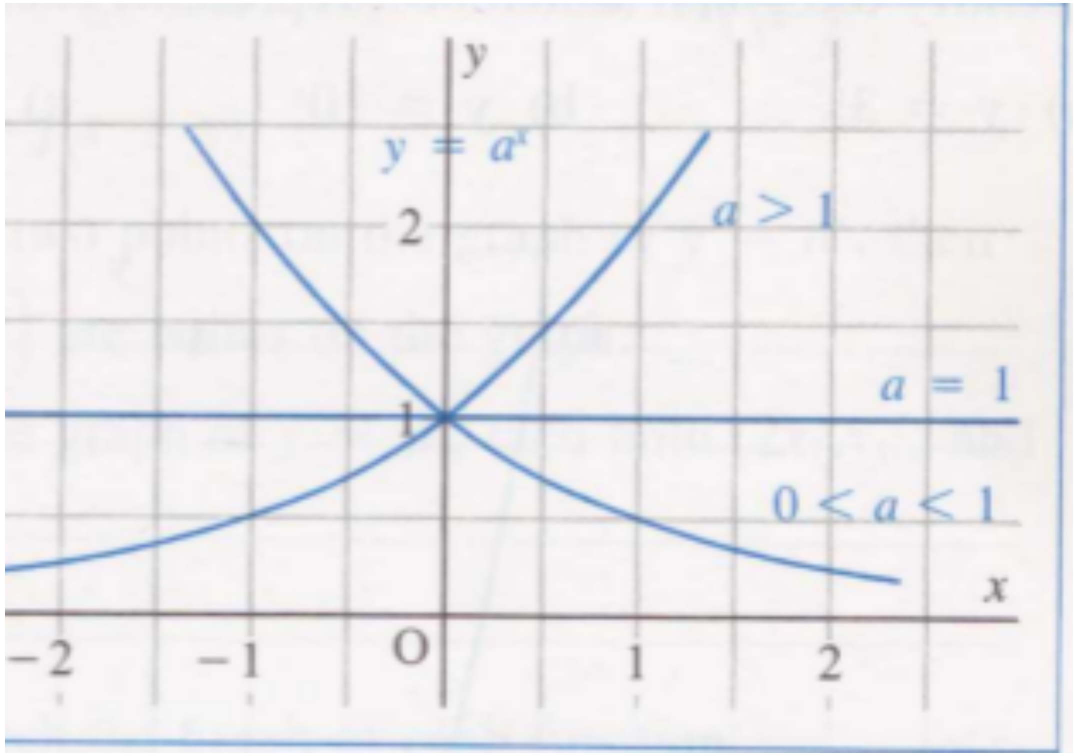
$α \succ 0$ και $α \neq 1$

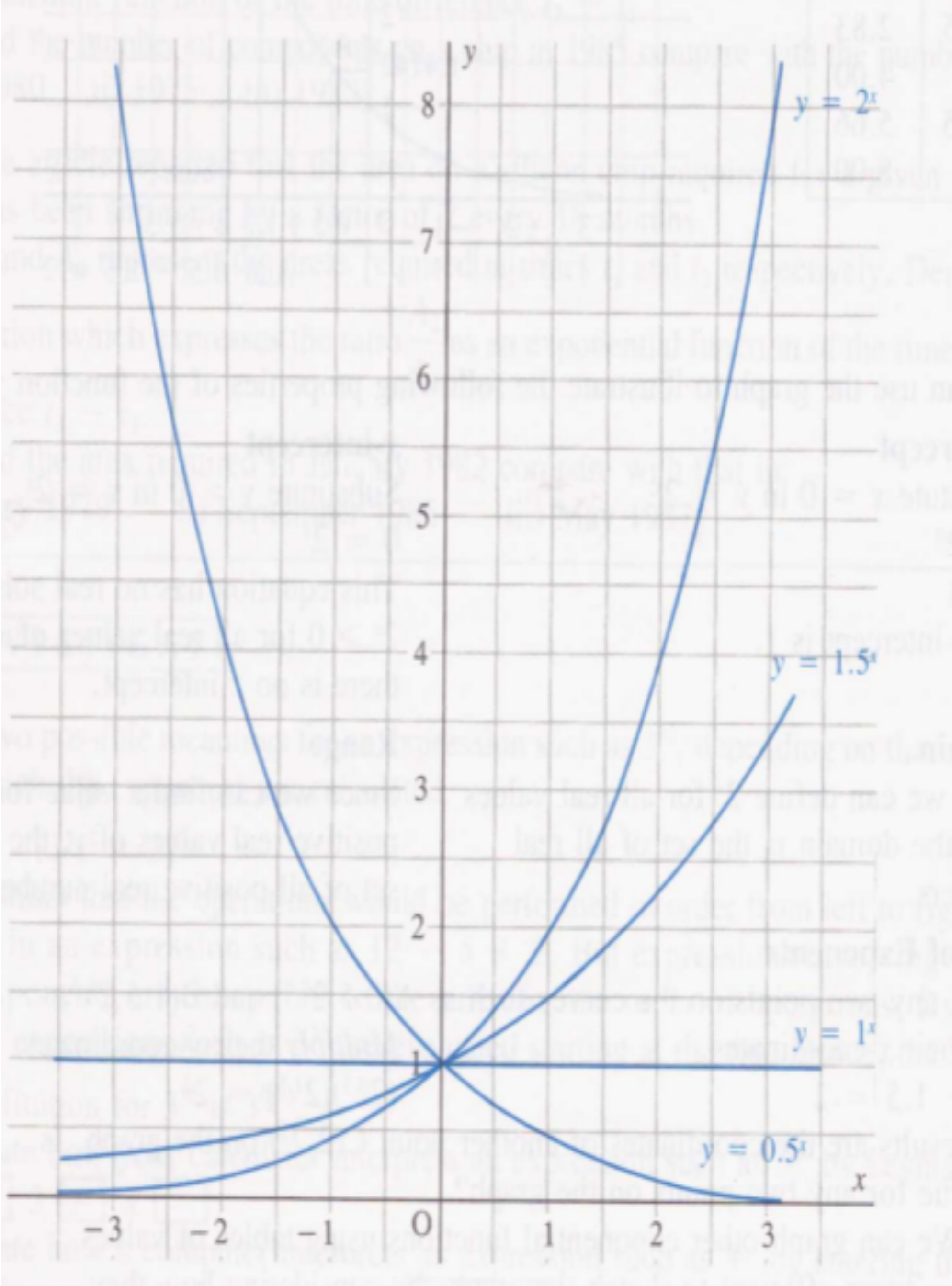
- Έστω οι εκθετικές συναρτήσεις 10^x, 5^x, 3^x, 2^x και $(1/2)^x$

- Να αναγνωρίσετε και να δικαιολογήσετε τη θέση της κάθε συνάρτησης.
- Ποια συνάρτηση εκφράζει την γρηγορότερη αύξηση;

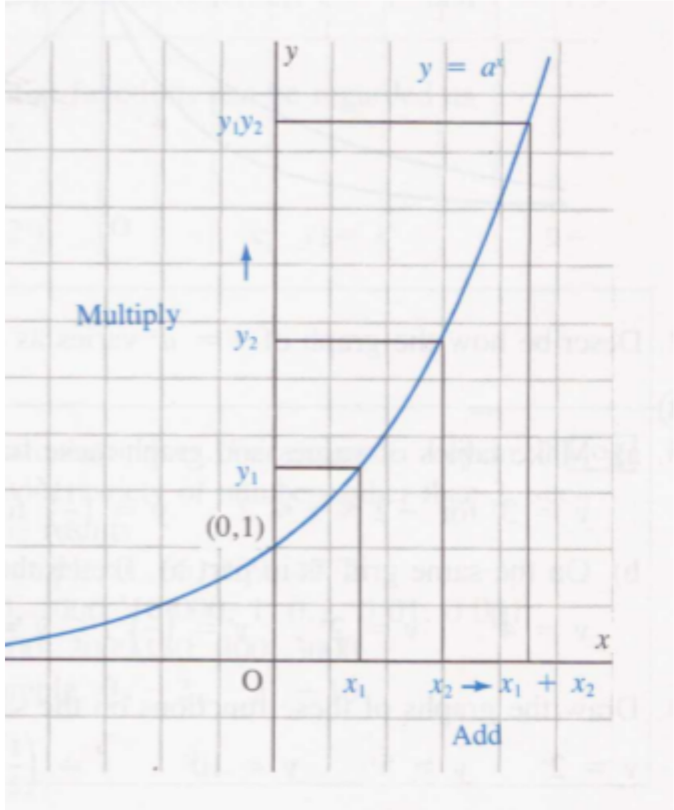


Γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων $y = \alpha^x$





Αποδείξτε ότι αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι σημεία της εκθετικής συνάρτησης $y = \alpha^x$ τότε και το σημείο με συντεταγμένες $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$ ανήκει επίσης στην συνάρτηση $y = \alpha^x$



Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha^{x1} \\ y_2 &= \alpha^{x2} \end{aligned}\right\} \quad y_1 y_2 = \alpha^{x1}\,\alpha^{x2} = \alpha^{x1+x2}$$

Συνεπώς και το σημείο

με συντεταγμένες $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$

ανήκει επίσης στην συνάρτηση $y = \alpha^x$.

Λογαριθμικές συναρτήσεις

Ορίζοντας την έννοια του λογαρίθμου

Στην ισότητα $3^4 = 81$, ο αριθμός 4 είναι ο εκθέτης ο οποίος με βάση 3 μας δίνει το 81.
Μια πιθανή ερώτηση η οποία προκύπτει από αυτή την ισότητα είναι:
«Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τι παριστάνει το 4 στην ισότητα $3^4 = 81$ και με ποιο συμβολικό τρόπο θα το γράφαμε»;

Ώστε, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ

Έτσι, στην ισότητα $3^4 = 81$, το 4 είναι ο εκθέτης που με βάση το 3 μας δίνει τον αριθμό 81. Ισοδύναμα, λέμε ότι: «το 4 είναι ο λογάριθμος του 81 με βάση 3» και συμβολικά γράφουμε:

$$4 = \log_3 81 \ (\text{ή } 4 = \lambda o\gamma_3 81)$$

Έτσι, από μια εκθετική ισότητα μπορούμε να έχουμε την αντίστοιχη λογαριθμική ισότητα:

$$\underbrace{3^4 = 81}_{\text{εκθετική ισότητα}} \iff \underbrace{4 = \log_3 81}_{\text{λογαριθμική ισότητα}}$$

Ο $\log_2 64$ διαβάζεται «λογάριθμος του 64 με βάση το 2» και ισούται με τον εκθέτη της δύναμης 2^6, που είναι το 6.

$$2^6 = 64 \iff 6 = \log_2 64$$

Τόσο από τον ορισμό του λογάριθμου, όσο και από την ισοδυναμία εκθετικής - λογαριθμικής ισότητας, αποδεικνύονται οι πρώτες ιδιότητες των λογαρίθμων. Πιο κάτω αναφέρονται ορισμένες ιδιότητες των λογαρίθμων, οι οποίες πηγάζουν άμεσα από το ορισμό του ίδιου του λογάριθμου $\log_a x$, όταν το $x > 0$ και $a > 0, a \neq 1$, για συγκεκριμένες τιμές του x.

Ιδιότητες λογάριθμου	**Αιτιολόγηση**	**Παραδείγματα**
1. $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	✓ $\log_5 1 = 0$ ✓ $\log 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	➢ $\log_7 7 = 1$ ➢ $\log 10 = 1$
3. $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	✓ $ln e^4 = 4$ ✓ $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$
4. $a^{\log_a x} = x$	$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ $\Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$	➢ $3^{\log_3 15} = 15$ ➢ $e^{\ln \kappa} = \kappa$ ➢ $10^{\log 8} = 8$

Παραδείγματα (1/2)

Να εκφράσετε τις πιο κάτω εκθετικές ισότητες με τις αντίστοιχες ισοδύναμες λογαριθμικές ισότητες:

(α) $7^2 = 49$ (β) $10^6 = 1000000$ (γ) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1$ (ε) $\sqrt{81} = 9$ (στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4$

Λύση

(α) $7^2 = 49 \Leftrightarrow 2 = \log_7 49$

(β) $10^6 = 1000000 \Leftrightarrow 6 = \log_{10} 1000000 = \log 1000000$

(γ) $2^{-5} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow -5 = \log_2 \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_6 1$

(ε) $\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 81^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log_{81} 9$

(στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \log_{32} 4$

Παραδείγματα (2/2)

Δικαιολογείστε τις παρακάτω σχέσεις

$\log_2 8 = 3$, γιατί $8 = 2^3$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$, γιατί $2 = 4^{1/2}$

$\log_{10} 0,001 = -3$, γιατί $0,001 = 10^{-3}$

$\log_{0,5} 0,25 = 2$, γιατί $0,25 = 0,5^2$

Δεκαδικοί λογάριθμοι ή λογάριθμοι με βάση το 10 (λογθ)

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι.**

Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται απλά με logθ και όχι με $\log_{10}\theta$.

Επομένως:

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
log 213	213 $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{=}$	$\boxed{2.328379603}$
log 0,325	0.325 $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{=}$	$\boxed{-0.488116639}$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Οι λογάριθμοι θετικών αριθμών αντιπροσωπεύονται από τους εκθέτες σε μια εκθετική ισότητα. Γνωρίζουμε επίσης αρκετές ιδιότητες δυνάμεων, οι οποίες δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες λογαρίθμων. Αν έχουμε τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς a, x, y ($a \neq 1$) και $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν και οι πιο κάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα	Λεκτική περιγραφή
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	Ο λογάριθμος του γινομένου δύο αριθμών είναι ίσος με το άθροισμα των λογαρίθμων των αριθμών.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο αριθμών είναι ίσος με τη διαφορά των λογαρίθμων των αριθμών.
3. $\log_a A^\kappa = \kappa \cdot \log_a A$	Ο λογάριθμος της δύναμης ενός αριθμού είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη της δύναμης επί τον λογάριθμο του αριθμού.

Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Εστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \theta_2 = x_2 \qquad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

2. Εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο.

3. Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta = x \qquad (2)$$

Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha \theta^k = kx$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Η σημασία του λογάριθμου στην επιστήμη

- Η ανάπτυξη των λογαρίθμων τον 17^{o} αιώνα, έφεραν την επανάσταση στην αστρονομία, αφού επέτρεψε υπολογισμούς που ήταν αδύνατοι μέχρι τότε.
- Παρόλο που σήμερα οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν αναλάβει πλέον αυτόν το υπολογιστικό ρόλο, οι λογάριθμοι έχουν μεγάλο ρόλο στα Μαθηματικές και τις Φυσικές Επιστήμες.
- Που χρησιμεύουν;
- Οι λογάριθμοι και οι λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμεύουν στην διαχείριση, στη σύγκριση, αλλά και στις πράξεις μεταξύ πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αριθμών.
- Το γεγονός αυτό έχει πολλές εφαρμογές στις επιστήμες.
  - Για παράδειγμα, είναι πολύ ευκολότερο, αντί της περιεκτικότητας ενός διαλύματος σε κατιόντα υδρογόνου, να διαχειριζόμαστε το pH, που είναι λογάριθμος αυτής της περιεκτικότητας.
  - Άλλες εφαρμογές είναι η κλίμακα Richter στη σεισμολογία, η κλίμακα Decibel στην μέτρηση της έντασης του ήχου, η αστρική φωτεινότητα στην αστρονομία κ.α.
- Με ποιο τρόπο γίνεται αυτή η διαχείριση;
- Αυτό λοιπόν που συμβαίνει είναι ότι αντί να χειριζόμαστε απευθείας τους πολύ μεγάλους ή πολύ μικρούς αριθμούς, αρχικά τους «μετασχηματίζουμε» σε πολύ μικρότερους (δηλαδή τους λογάριθμούς τους) και στη συνέχεια με τον αντίστροφο μετασχηματισμό επιστρέφουμε στις αρχικές μετρήσεις.
  - Η παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιείται και σε λογισμικά, όταν ηλεκτρονικοί υπολογιστές καλούνται να δώσουν αποτελέσματα συγκρίνοντας αριθμούς που έχουν πολύ μεγάλο εύρος τιμών.

Διαχείριση πολύ μεγάλων αριθμών…

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης 20190^{20190}

ΛΥΣΗ

Έστω $20190^{20190} = α$

log(α) (δηλαδή δεκαδικός λογάριθμος του α) = log (20190^{20190})

=20190 . log20190 (ιδιότητα των λογαρίθμων)

$\approx 20190 \,.\, 4{,}3 = 86817$

Άρα log(α) $\approx$ 86817

Άρα α$\approx 10^{86817}$ (μετατροπή της λογαριθμικής σχέσης σε εκθετική)

Η λογαριθμική συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log_\alpha x$

Η συνάρτηση **g(x) = $\log_\alpha$x** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.**

Περιγραφή της συνάρτησης

Είναι συνάρτηση 1-1, είναι αύξουσα όταν $\alpha \succ 1$ και φθίνουσα όταν $\alpha \prec 1$

Είναι αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης και γι' αυτό τον λόγο τα γραφήματά τους είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y = x.

- Η συνάρτηση **y = lnx** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση τον **νεπέριο αριθμό e.**
- **Η συνάρτηση y=λογx λέγεται δεκαδική λογαριθμική συνάρτηση** μιας και έχει βάση **τον αριθμό 10.**

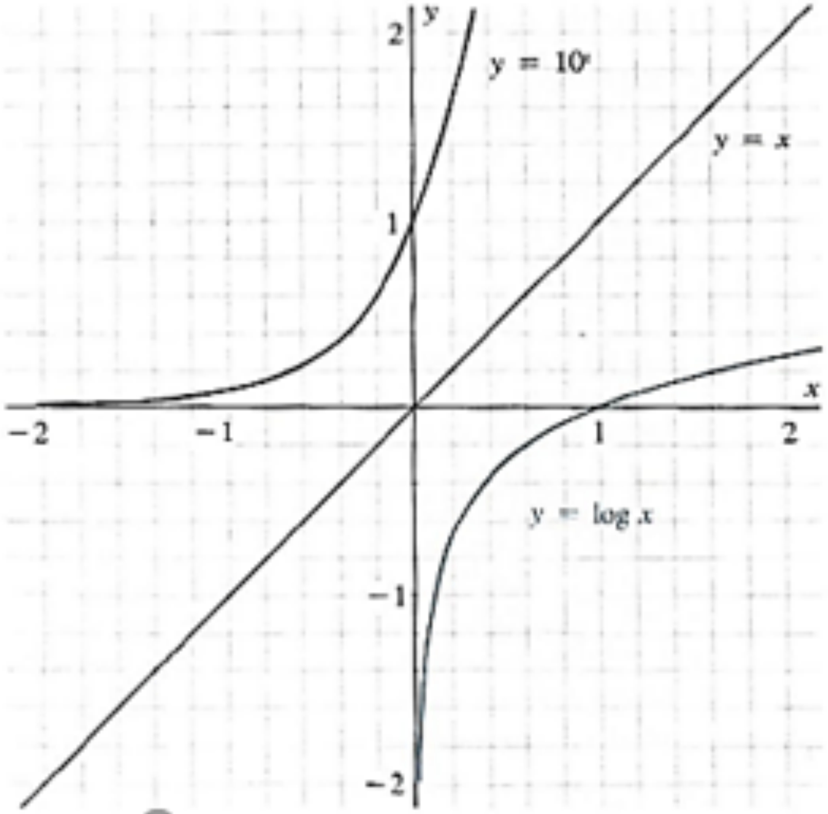
Σημείωση 1: όταν δεν αναφέρεται η βάση μιας λογαριθμικής συνάρτησης ή ενός λογαρίθμου εννοούμε ότι είναι το 10

Σημείωση 2: το επιστημονικό κομπιουτεράκι υπολογίζει μόνο δεκαδικούς και νεπέριους λογαρίθμους.

Σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα την y=10^x και την λογx ή logx. Τι παρατηρείτε;

$y = 10^x$

x	y
−2	0.01
−1.5	0.03
−1	0.10
−0.5	0.32
−0.2	0.63
0	1.00
0.1	1.26
0.2	1.58
0.3	2.00

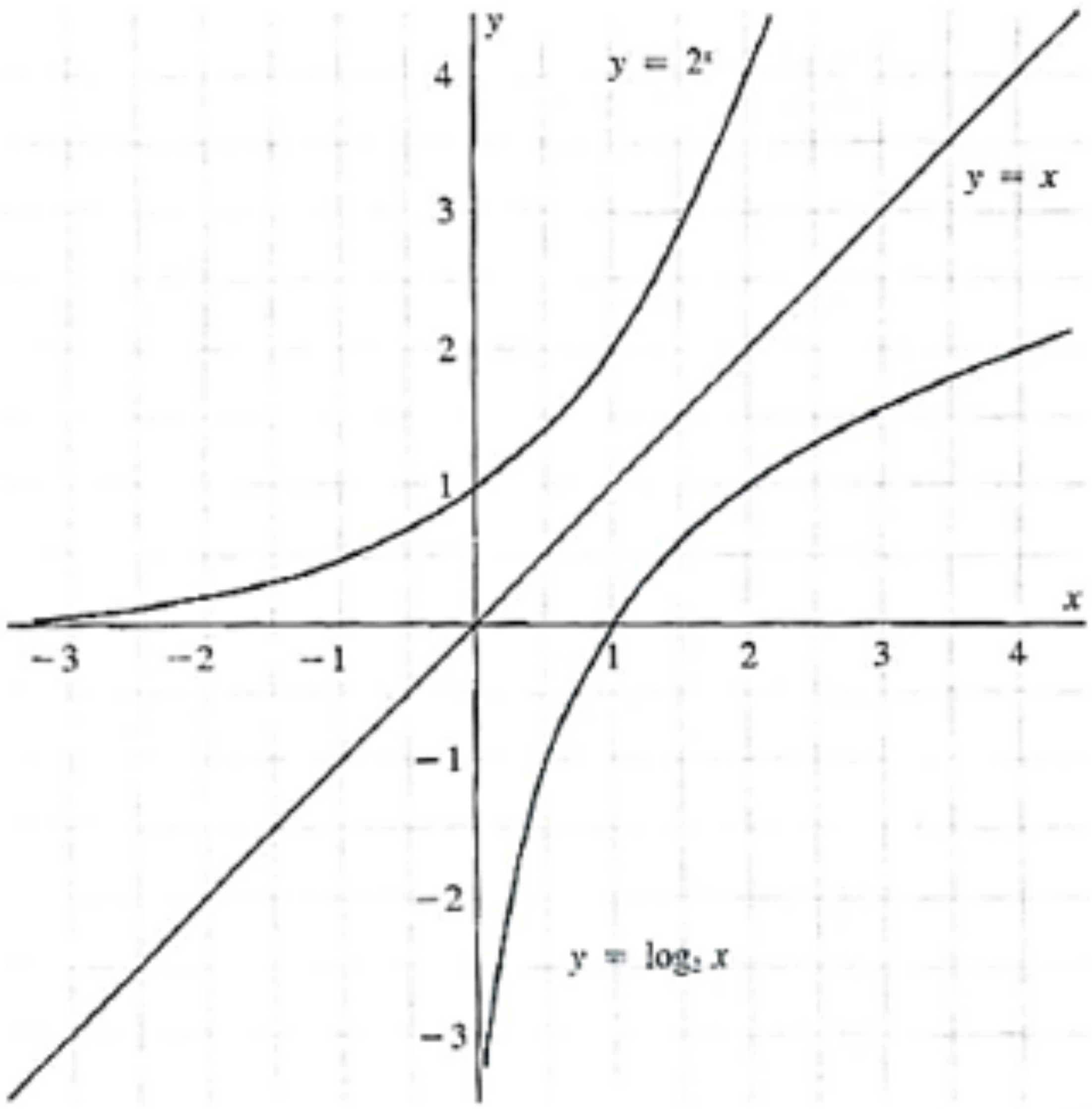


$y = 2^x$

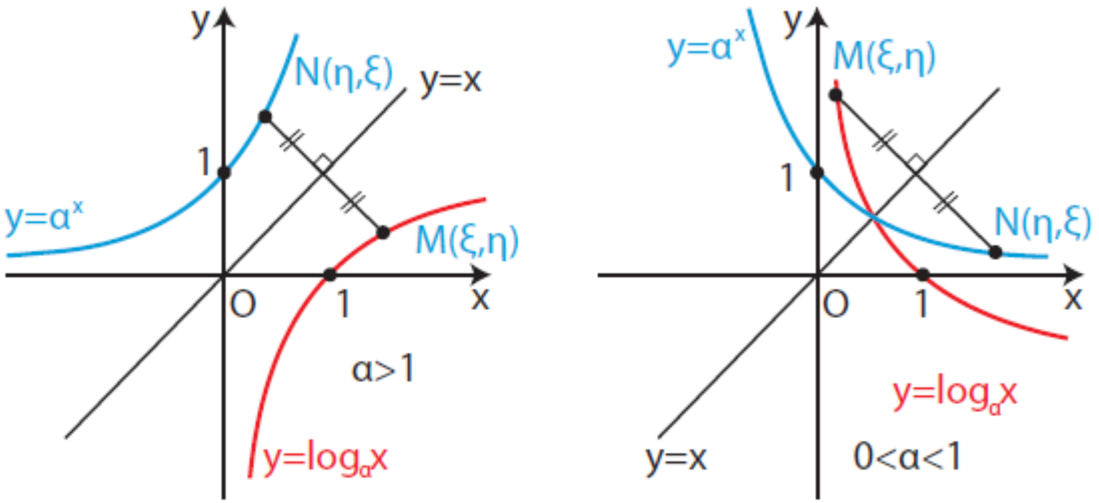
x	y
-3	0.13
-2	0.25
-1	0.50
-0.5	0.71
0	1.00
0.5	1.41
1	2.00
1.5	2.83
2	4.00

$y = \log_2 x$

x	y
0.13	-3
0.25	-2
0.50	-1
0.71	-0.5
1.00	0
1.41	0.5
2.00	1
2.83	1.5
4.00	2



Συγκρίνοντας τα γραφήματα της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης. Τι παρατηρούμε;



Μελέτη από σχολικά κείμενα

- **Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο** - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
  - 3.1 – Η έννοια της συνάρτησης
  - 3.2 – Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης
  - 3.3 – Η συνάρτηση y = αx
  - 3.4 – Η συνάρτηση y = αx + β
  - 3.5 – Η συνάρτηση y = α/x – Η υπερβολή
- **Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ 7ο Κεφάλαιο-** Μελέτη βασικών συναρτήσεων
- **Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ 3ο Κεφάλαιο** (3.1 -3.4) Τριγωνομετρία & τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- **Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ 5ο Κεφάλαιο**
  - **5.1. Εκθετικές συναρτήσεις**
  - **5.2 Λογαριθμικές συναρτήσεις**