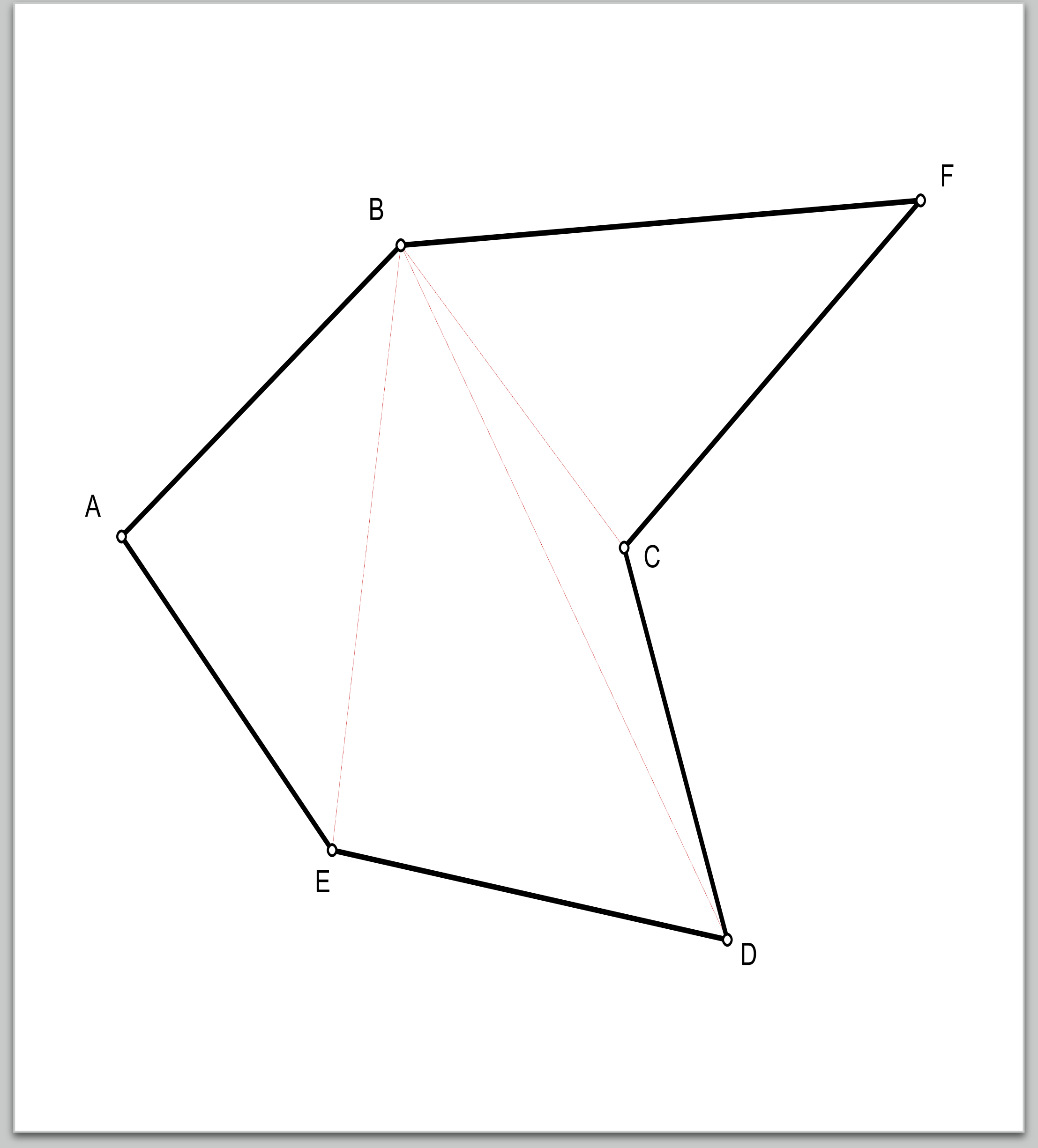
Άπειρες διαδικασίες

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα 1

Πως υπολογίζουμε το εμβαδόν ενός πολυγώνου

- Το εμβαδόν ενός πολυγώνου μπορούμε να το υπολογίσουμε χωρίζοντάς το σε σχήματα των οποίων γνωρίζουμε το εμβαδόν.



- Για τον κύκλο μπορούμε να κάνουμε κάτι αντίστοιχο;

Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του από εμβαδά γνωστών σχημάτων;

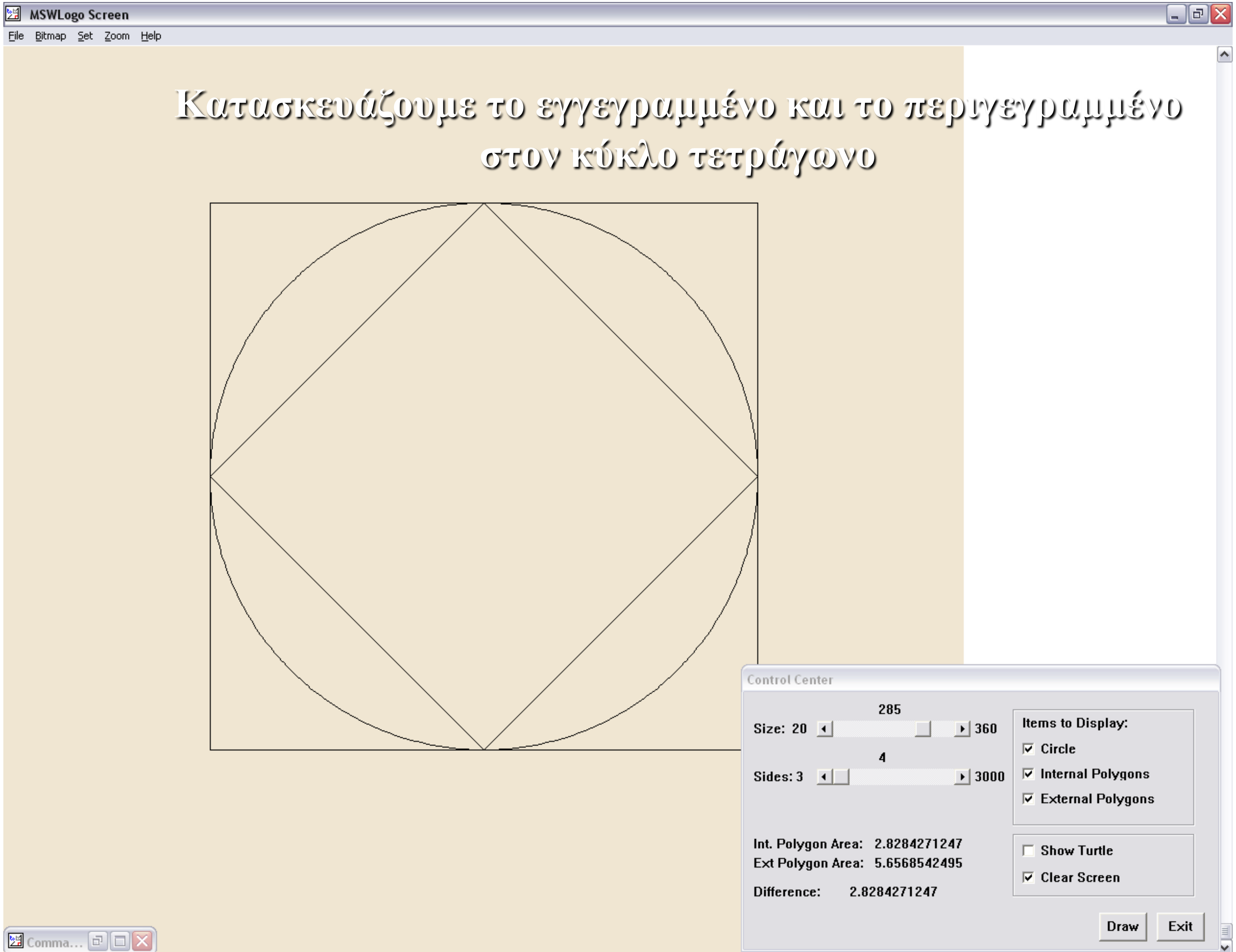
Δεν μπορούμε γιατί οι πλευρές των πολυγώνων είναι ευθύγραμμα τμήματα.

Ο κύκλος δεν μπορεί να χωριστεί σε πολύγωνα

- Μπορούμε να βρούμε πολύγωνα με μικρότερο εμβαδόν και με μεγαλύτερο εμβαδόν από το εμβαδόν του κύκλου.

Εγγεγραμμένα στον κύκλο και περιγεγραμμένα περί τον κύκλο πολύγωνα

Κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο στον κύκλο τετράγωνο

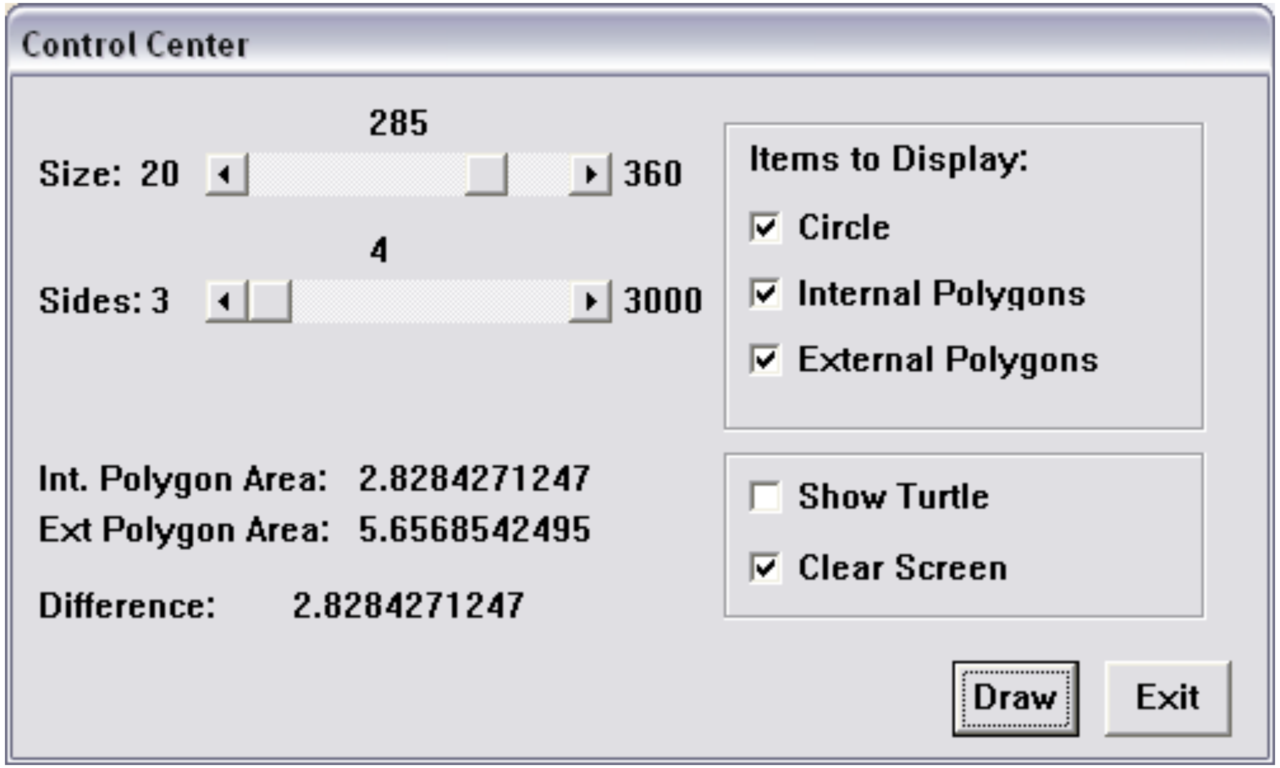


- Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ένας αριθμός Ε με την ιδιότητα:

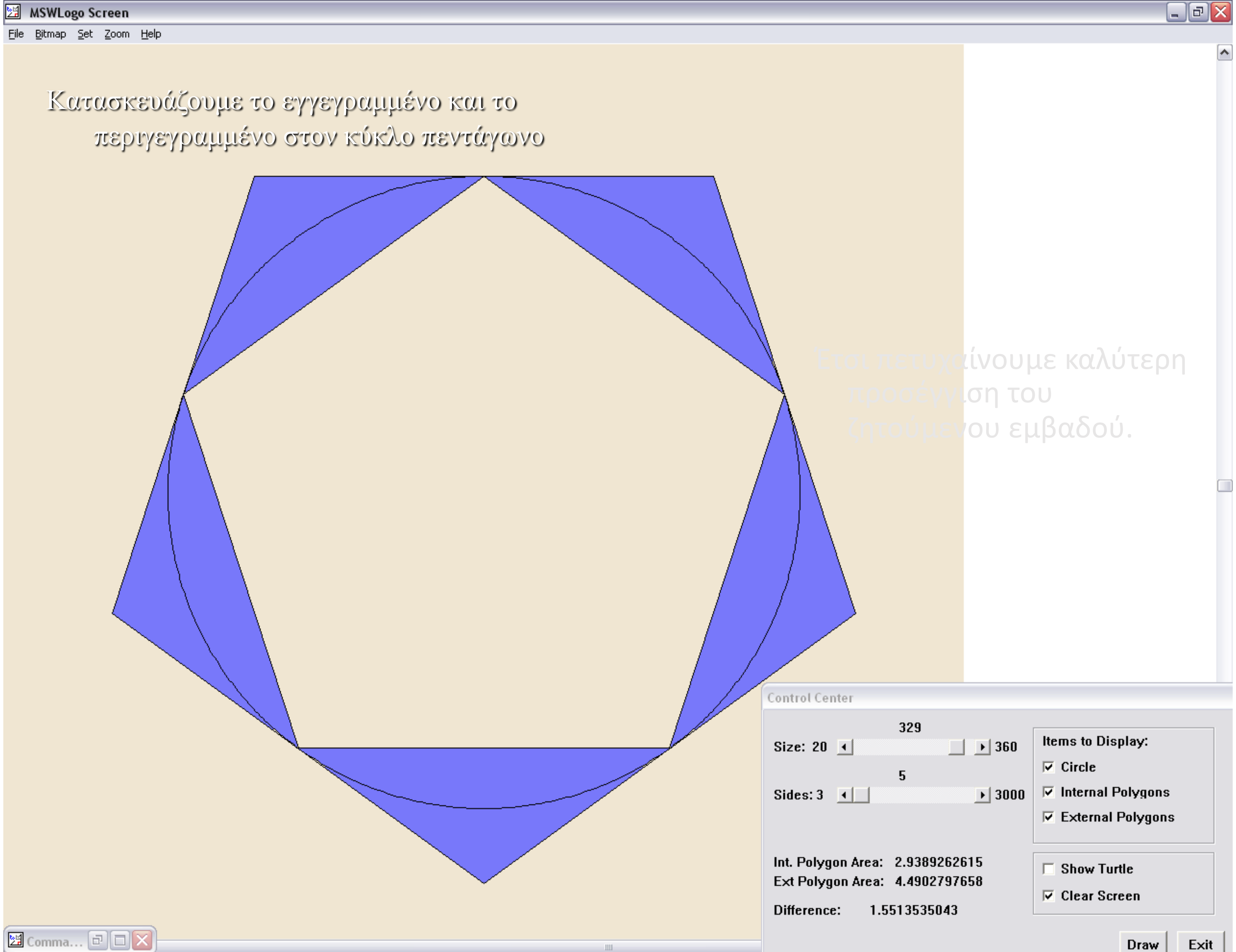
$$2.8284 < E < 5.6568$$

- Έχουμε βρει το ζητούμενο εμβαδόν με προσέγγιση

$$5.6568 - 2.8284 = 2.8284$$



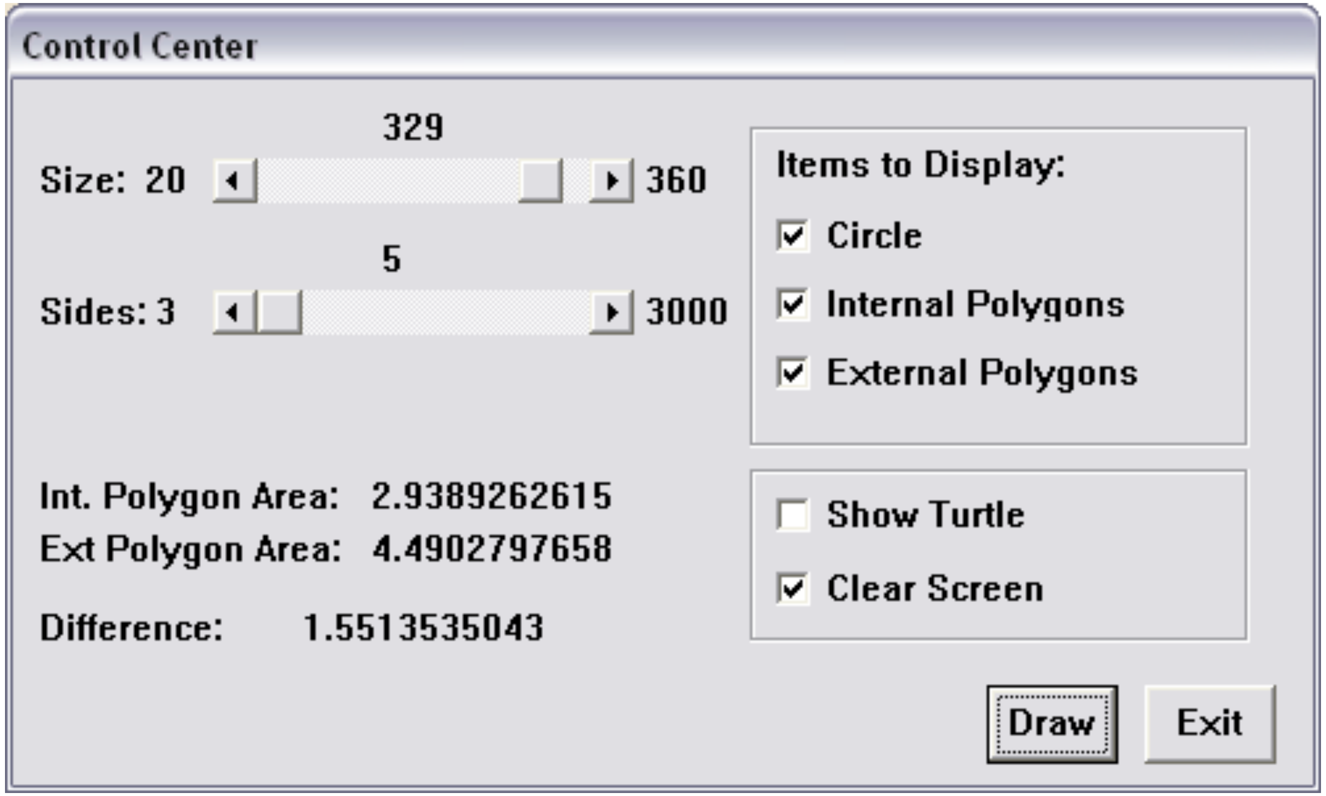
Με ποια διαδικασία μπορούμε να συνεχίσουμε ώστε να μειώσουμε τη διαφορά μεταξύ των εμβαδών του εξωτερικού και του εσωτερικού πολυγώνου;

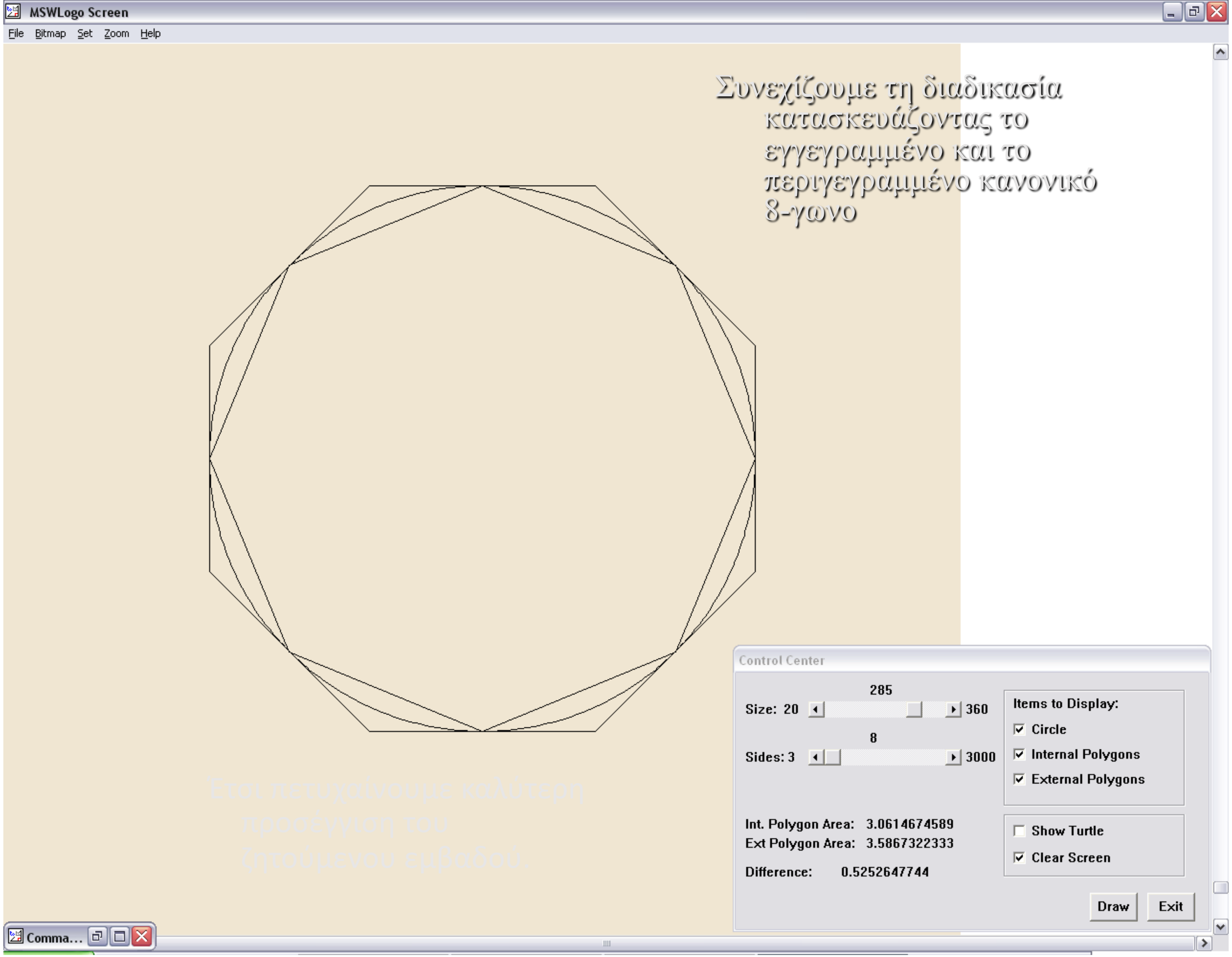

MSWLogo Screen
File Bitmap Set Zoom Help
Κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο στον κύκλο πεντάγωνο
Έτσι πετυχαίνουμε καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.
Control Center
329
Size: 20 360
5
Sides: 3 3000
Items to Display:
Circle
Internal Polygons
External Polygons
Int. Polygon Area: 2.9389262615
Ext Polygon Area: 4.4902797658
Difference: 1.5513535043
Show Turtle
Clear Screen
Draw
Exit
Comma...

Το εμβαδόν του κύκλου ικανοποιεί την ανισότητα:

$$2.93892 < E < 4.49027$$

Βρισκόμαστε 1.55 μονάδες κοντά στο εμβαδόν που ζητάμε.



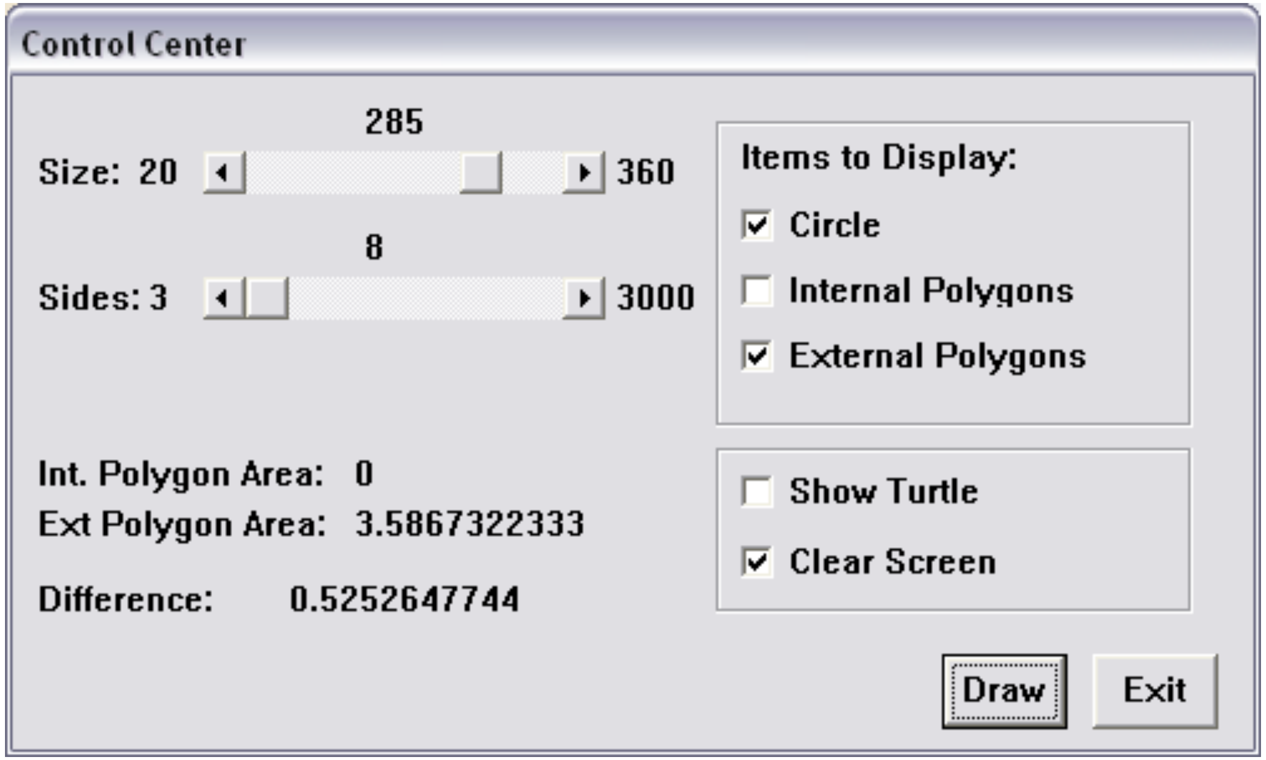

MSWLogo Screen
File
Bitmap
Set
Zoom
Help
Συνεχίζουμε τη διαδικασία κατασκευάζοντας το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο κανονικό 8-γωνο
Έτσι πετυχαίνουμε καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.
Control Center
285
Size: 20
360
8
Sides: 3
3000
Items to Display:
Circle
Internal Polygons
External Polygons
Int. Polygon Area: 3.0614674589
Ext Polygon Area: 3.5867322333
Difference: 0.5252647744
Show Turtle
Clear Screen
Draw
Exit
Comma...

Το εμβαδόν του κύκλου ικανοποιεί την ανισότητα:

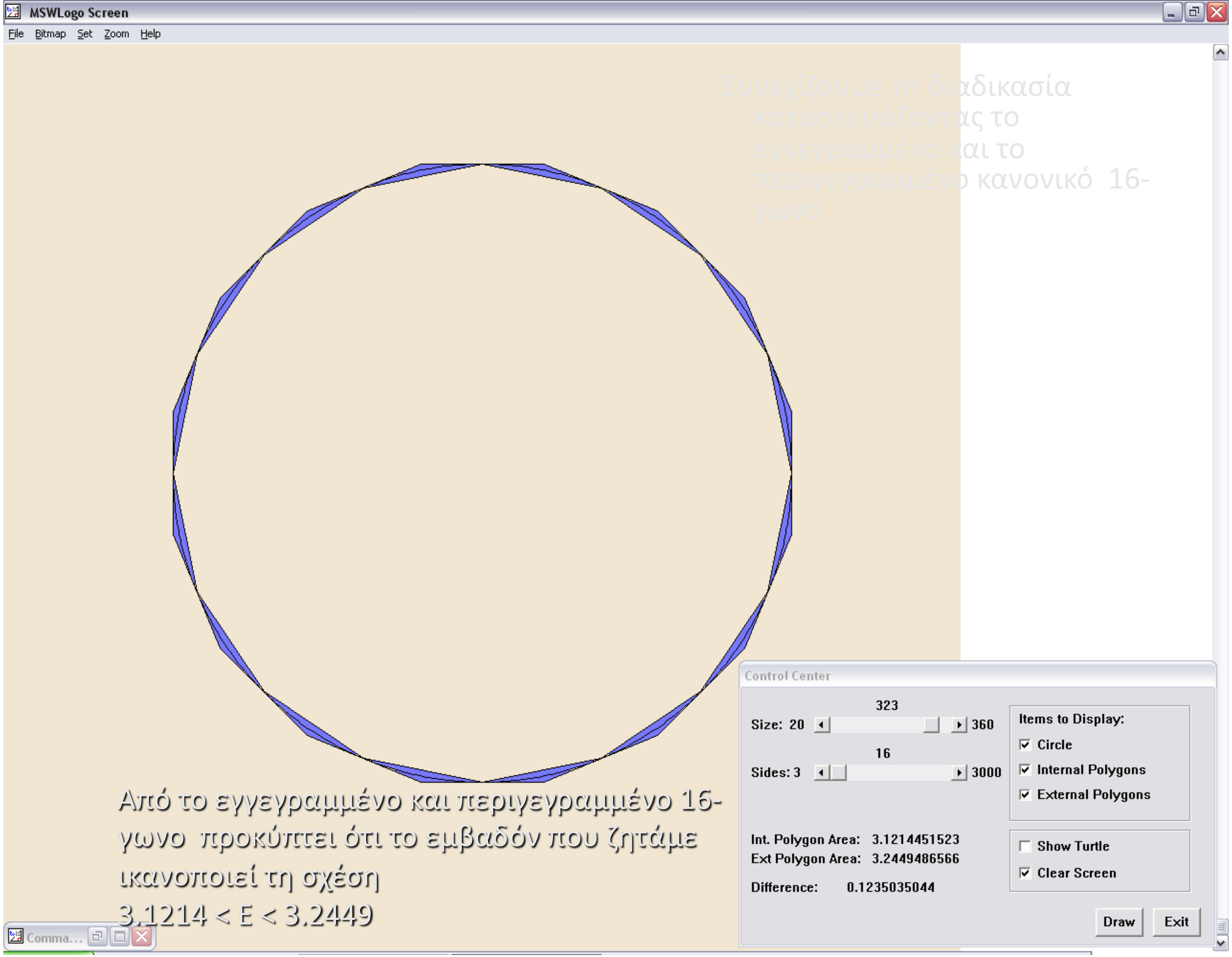
$$3.0614 < E < 3.5867$$

Ήδη έχουμε μια ακέραια προσέγγιση του Ε!

Βρισκόμαστε 0.52 μονάδες κοντά στο εμβαδόν που ζητάμε!!

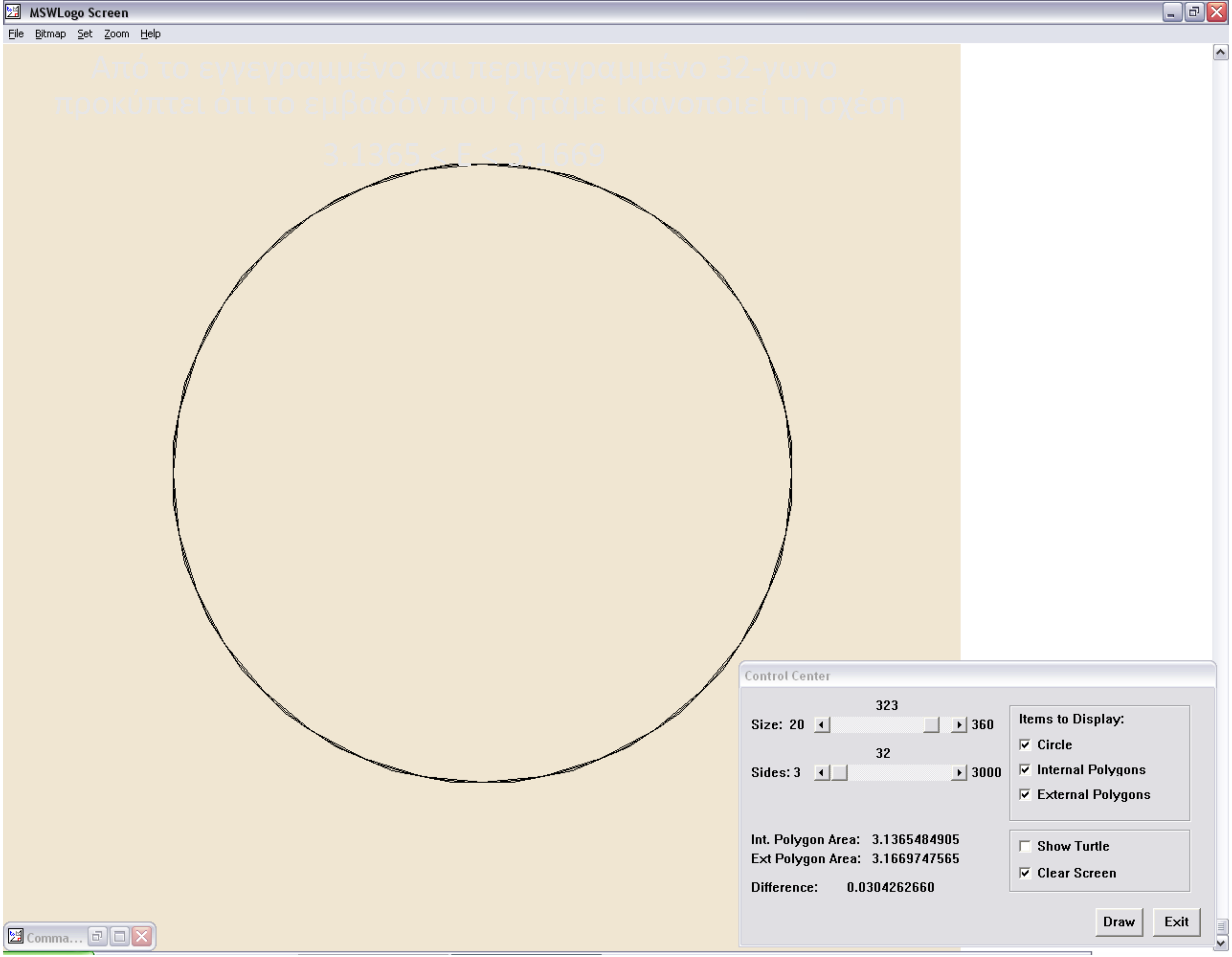


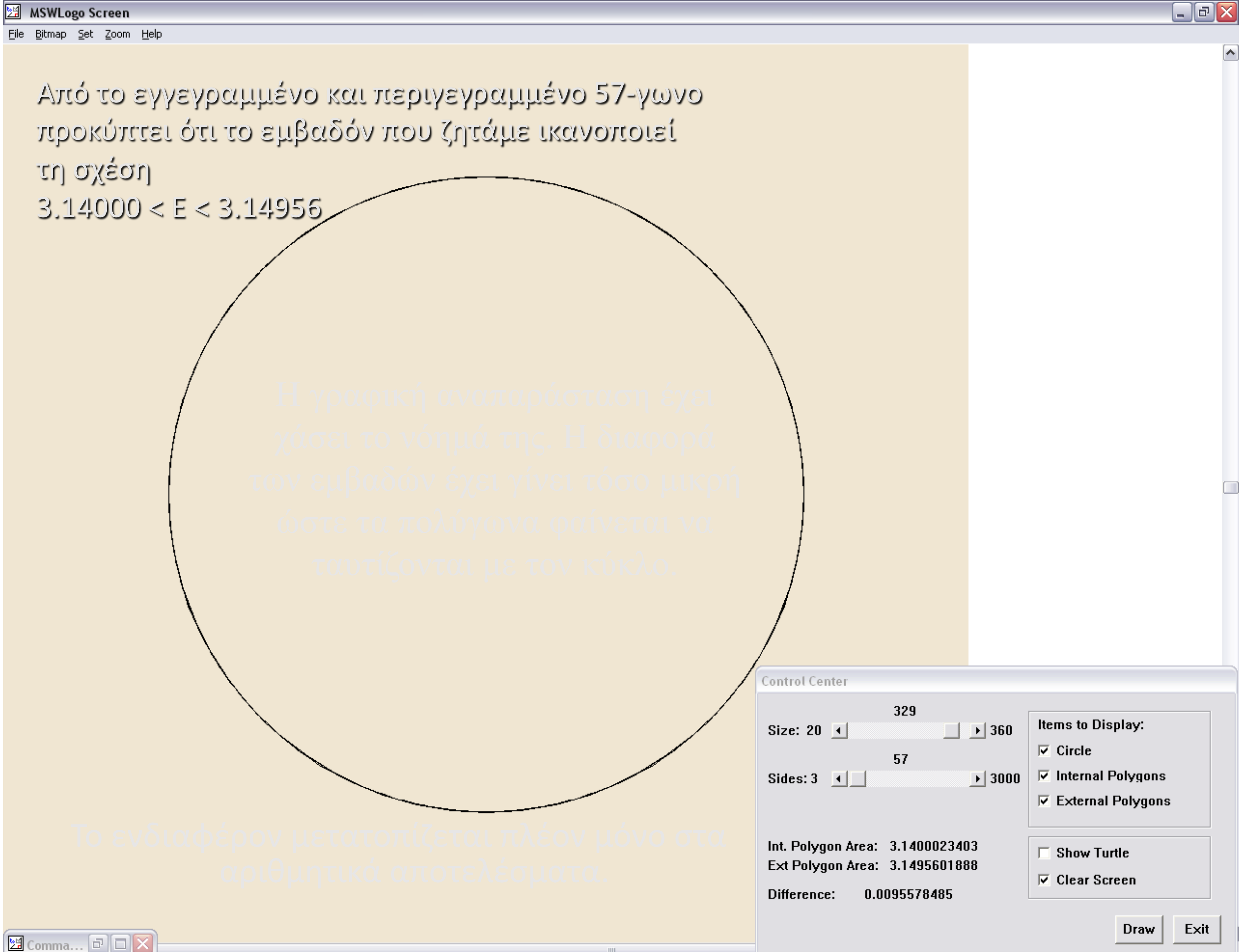
Συνεχίζουμε τη διαδικασία κατασκευάζοντας το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο κανονικό 16-γωνο

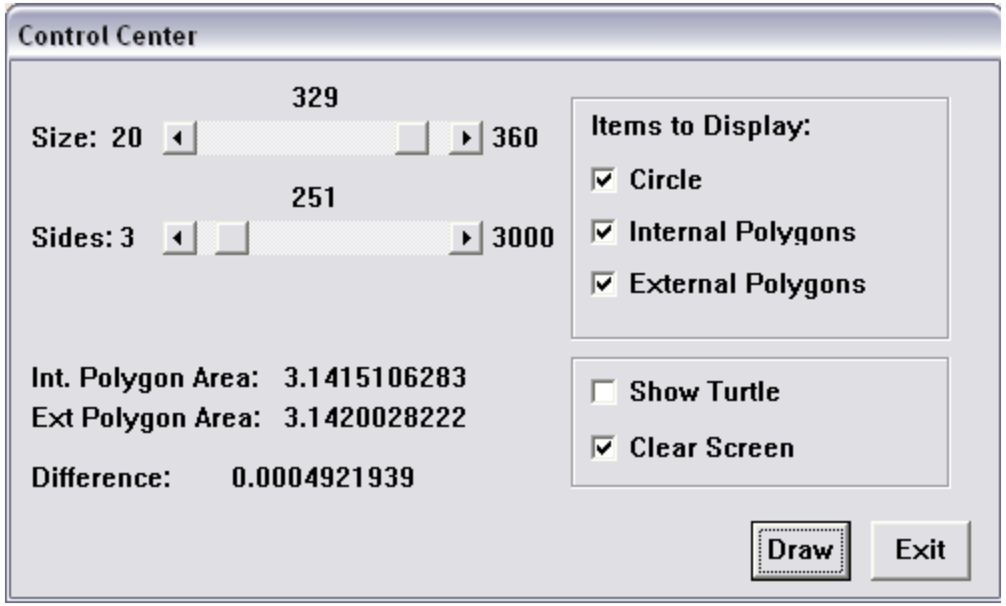


Από το εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο 16-γωνο προκύπτει ότι το εμβαδόν που ζητάμε ικανοποιεί τη σχέση

$3.1214 < E < 3.2449$


MSWLogo Screen
File
Bitmap
Set
Zoom
Help
Από το εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο 32-γωνο
προκύπτει ότι το εμβαδόν που ζητάμε ικανοποιεί τη σχέση
3.1365 < E < 3.1669
Control Center
323
Size: 20
360
32
Sides: 3
3000
Items to Display:
Circle
Internal Polygons
External Polygons
Int. Polygon Area: 3.1365484905
Ext Polygon Area: 3.1669747565
Difference: 0.0304262660
Show Turtle
Clear Screen
Draw
Exit
Comma...

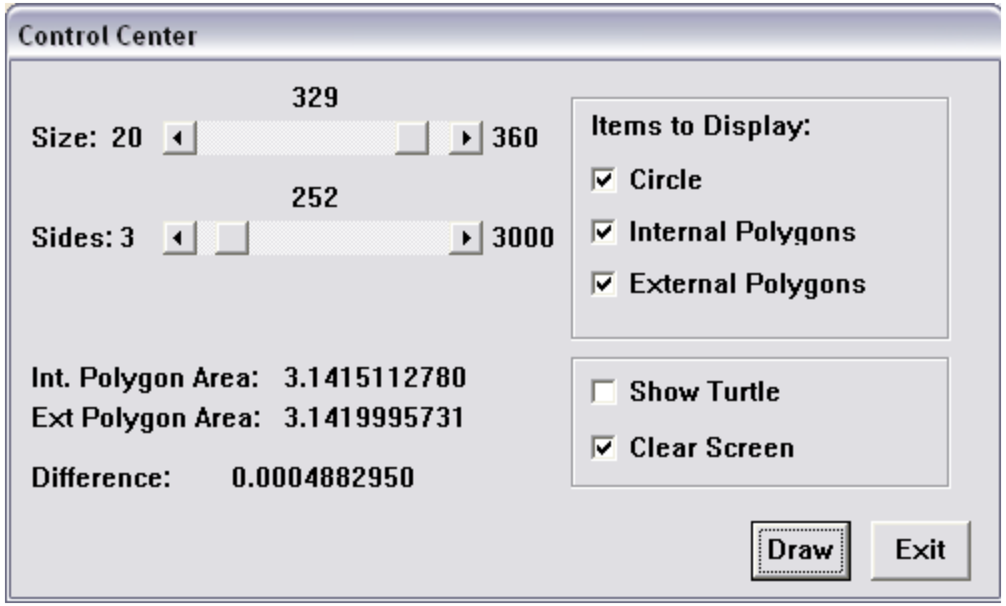

MSWLogo Screen
File Bitmap Set Zoom Help
Από το εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο 57-γωνο
προκύπτει ότι το εμβαδόν που ζητάμε ικανοποιεί
τη σχέση
3.14000 < Ε < 3.14956
Η γραφική αναπαράσταση έχει
χάσει το νόημά της. Η διαφορά
των εμβαδών έχει γίνει τόσο μικρή
ώστε τα πολύγωνα φαίνεται να
ταυτίζονται με τον κύκλο.
Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται πλέον μόνο στα
αριθμητικά αποτελέσματα.
Control Center
329
Size: 20 360
57
Sides: 3 3000
Items to Display:
Circle
Internal Polygons
External Polygons
Int. Polygon Area: 3.1400023403
Ext Polygon Area: 3.1495601888
Difference: 0.0095578485
Show Turtle
Clear Screen
Draw
Exit
Comma...

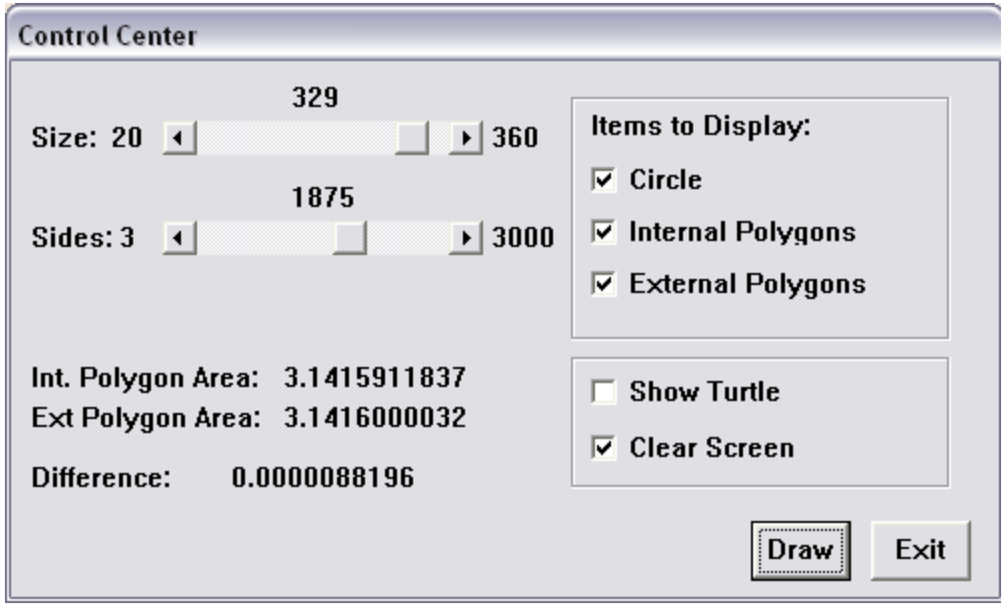


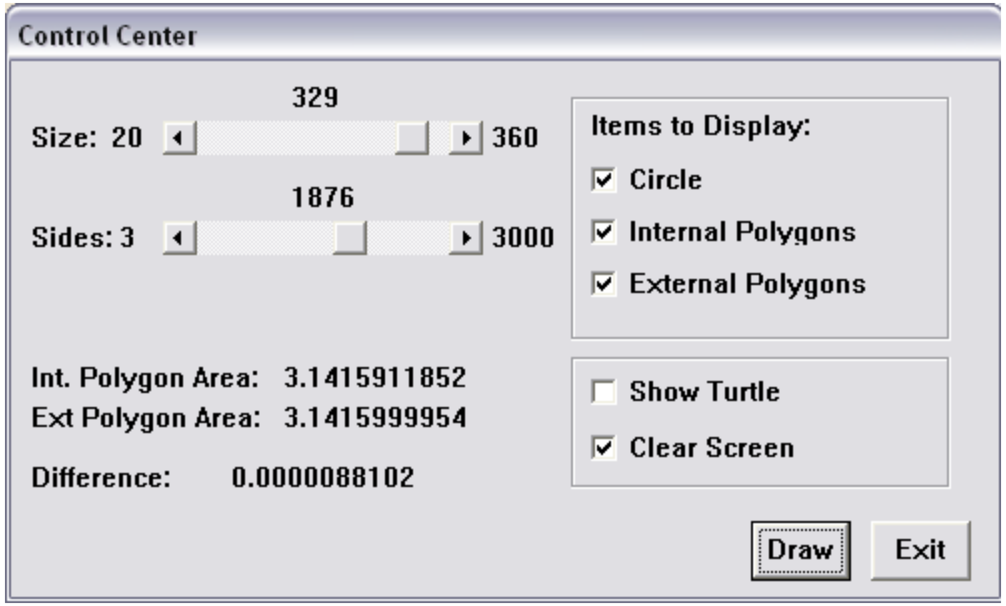
Δοκιμάζοντας μεγαλύτερες τιμές αρχίζουμε να βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε καλύτερες προσεγγίσεις.

Προκειμένου να έχουμε το τρίτο δεκαδικό ψηφίο του ζητούμενου εμβαδού πρέπει να προσεγγίσουμε τον κύκλο

από 252-γωνα!







Για προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού χρειάζεται ένα πολύγωνο 1876 πλευρών

Ερωτήσεις

- Θα πετύχουμε σε κάποιο βήμα ένα πολύγωνο να συμπέσει με τον κύκλο;
- Θα καταλήξουμε σε ένα πολύγωνο με εμβαδόν ακριβώς ίσο με αυτό του κύκλου;
- Μέχρι πότε μπορώ να επαναλαμβάνω αυτή τη διαδικασία;

- Ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά των εμβαδών του εξωτερικού από το εσωτερικό πολύγωνο;
- Πόσο κοντά στο μηδέν μπορεί να γίνει η απόσταση αυτή
- Πόσο κοντά στο εμβαδόν του κύκλου μπορώ να φτάσω;

Όριο ακολουθίας

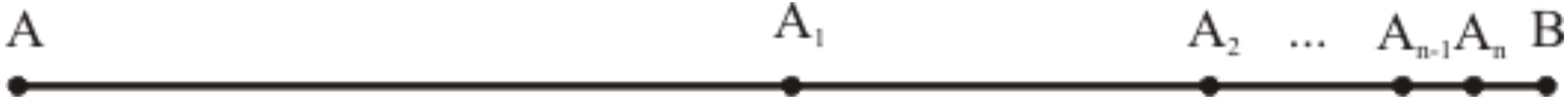
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 1. Ένα υλικό σημείο κινείται από το A προς το B :

Κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα AA_1 ίσο με το μισό του διαστήματος AB.

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα A_1A_2 ίσο με το μισό του διαστήματος A_1B.

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, κατά τη διάρκεια της n μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα $A_{n-1}A_n$ ίσο με το μισό του διαστήματος $A_{n-1}B$.

(Δηλαδή, κάθε μέρα το κινητό καλύπτει το μισό της απόστασης που έχει απομείνει μέχρι να το B).



- **Ε1: Το κινητό θα φτάσει στο σημείο στο *Β*;**

Εάν υποθέσουμε ότι φτάνει τη *n* μέρα, αυτό σημαίνει ότι τη n-1 μέρα δεν είχε φτάσει στο *Β*. Έστω *Γ* το σημείο στο οποίο βρισκόταν τη *n*-1 μέρα. Τότε τη *n* μέρα βρισκόταν στο μέσον A_n του διαστήματος *ΓΒ*, όμως αυτό είναι διαφορετικό από το *Β*.

- **Ε2: Υπολογίστε το μήκος των διαστημάτων A_nB, για *n*=1,2,3…,n**

$$\mathrm{A}_1\mathrm{B} = \frac{1}{2},\ \ \mathrm{A}_2\mathrm{B} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2},\ \mathrm{A}_3\mathrm{B} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}, \ldots, \mathrm{A}_n\mathrm{B} = \frac{1}{2^n}$$

- **Ε3: Έστω $\boldsymbol{Γ_1}$ ένα σημείο του *ΑΒ* τέτοιο ώστε $\boldsymbol{Γ_1 B = 10^{-6}}$.**

  Το κινούμενο σημείο θα ξεπεράσει το $\boldsymbol{Γ_1}$;

Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ερώτηση ότι $\mathrm{A}_n\mathrm{B} = \frac{1}{2^n}$ για κάθε n=1,2,3,…

Άρα η ερώτηση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $\frac{1}{2^{n_0}} < 10^{-6}$ ή $2^{n_0} > 10^6$;

Η πρόταση αυτή είναι αληθής διότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν έχει άνω φράγμα.

Συνεπώς υπάρχει φυσικός αριθμός *n* τέτοιος ώστε $n_0 > 10^6$ και επειδή $2^{n_0} > n_0$, προκύπτει $2^{n_0} > 10^6$.

- **E4: Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για τα σημεία $\boldsymbol{\Gamma_2}$, $\boldsymbol{\Gamma_3}$**

  τέτοια ώστε $\boldsymbol{\Gamma_2 B = 10^{-100}}$, $\boldsymbol{\Gamma_3 B = 10^{-1000}}$

Ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό της Ε3 μπορεί να δείξει ότι το σημείο θα ξεπεράσει τα Γ_2 και Γ_3.

- **Ε5: Έστω *Γ* ένα τυχαίο σημείο ανάμεσα στα *Α* και *Β*. Το κινούμενο σημείο θα ξεπεράσει το *Γ;***

Έστω ε το μήκος του ΓΒ. Η ερώτηση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ ή $2^{n_0} > \varepsilon$;

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί παρόμοια με τις Ε3 και Ε4.

- **Ε6: Μπορείτε να βρείτε μια περιγραφή για το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξατε στην ερώτηση Ε5;**

Για κάθε ε>0 υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε A_nB< ε

- **Ε7: Συμπληρώστε την απάντησή σας στην ερώτηση Ε6 με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριλάβει και την πληροφορία ότι αν μια μέρα το σημείο βρίσκεται μετά το Γ τότε και όλες τις επόμενες ημέρες θα συμβαίνει το ίδιο.**

Για κάθε ε>0 υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε A_nB< ε

για κάθε $n \geq n_0$

Ορισμός

Έστω ακολουθία (α_n)

Λέμε ότι η (α_n) συγκλίνει στον αριθμό α ή έχει όριο το α

Και συμβολίζουμε $a_n \to a$ ή $\lim_{n} a_n = a,$ αν

για κάθε ε>0 υπάρχει φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n_0}$ ώστε $|\boldsymbol{\alpha_n} - \boldsymbol{\alpha}| < \varepsilon$ για κάθε $\boldsymbol{n \geq n_0}$.

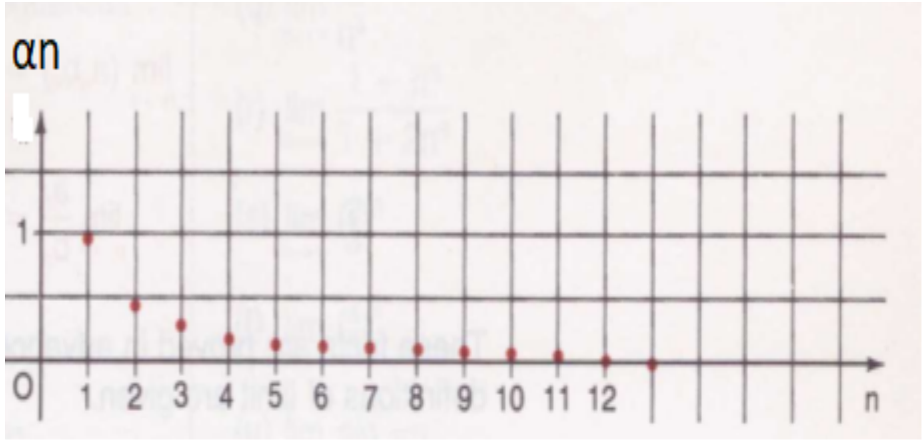
Διαισθητικά, μια ακολουθία λέμε ότι έχει ***όριο*** ή ότι ***συγκλίνει σε ένα αριθμό α****, όταν οι όροι της είναι* **οσοδήποτε κοντά στο α** *για* ***κατάλληλα μεγάλους*** *δείκτες.*

Παραδείγματα

- **Έστω η ακολουθία α_n = 1/n**

Όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$

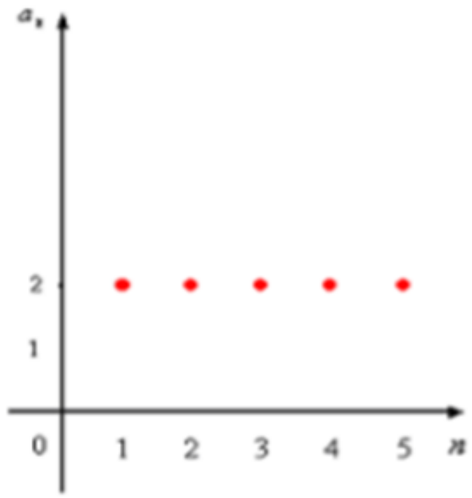
$a_1 = 1$		$a_{11} = 0.090909$		$a_{21} = 0.047619$	$\cdots$	$a_{50} = 0.02$
$a_2 = 0.5$		$a_{12} = 0.083333$		$a_{22} = 0.045454$		$\vdots$
$a_3 = 0.333333$		$a_{13} = 0.076923$		$a_{23} = 0.043478$		$a_{100} = 0.01$
$a_4 = 0.25$		$a_{14} = 0.071428$		$a_{24} = 0.041666$		$\vdots$
$a_5 = 0.2$		$a_{15} = 0.066666$		$a_{25} = 0.04$		$a_{500} = 0.002$
$a_6 = 0.166666$		$a_{16} = 0.0625$		$a_{26} = 0.038461$		$\vdots$
$a_7 = 0.142857$		$a_{17} = 0.058823$		$a_{27} = 0.037037$		$a_{1000} = 0.001$
$a_8 = 0.125$		$a_{18} = 0.055555$		$a_{28} = 0.035714$		$\vdots$
$a_9 = 0.111111$		$a_{19} = 0.052631$		$a_{29} = 0.034482$		$a_{2000} = 0.0005$
$a_{10} = 0.1$		$a_{20} = 0.05$		$a_{30} = 0.033333$		$\vdots$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Το όριο της σταθερής ακολουθίας

Έστω η ακολουθία $a_n = c = 2$



Οι όροι της ακολουθίας $a_n = 2$ ανεξάρτητα από την τιμή του n έχουν την ίδια τιμή που είναι ίση με 2, άρα η ακολουθία συγκλίνει στο 2.

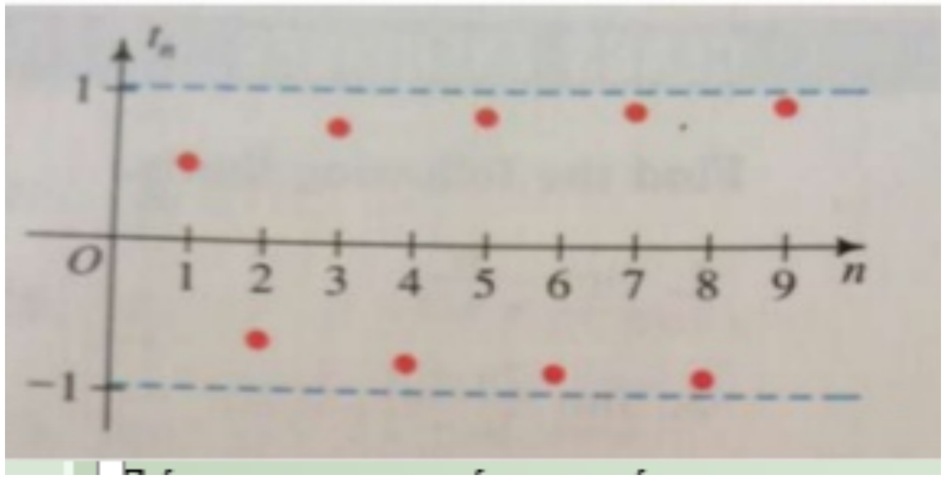
Παράδειγμα μη συγκλίνουσας ακολουθίας

- Έστω ότι ζητάμε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{(-1)^{n+1}.n}{n+1}$

Οι όροι της είναι της μορφής

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n+1}, \ldots$$

- Η γραφική παράσταση της ακολουθίας είναι η εξής:



Η ακολουθία α_n δεν συγκλίνει

Ιδιότητες του ορίου ακολουθίας

Έστω δύο ακολουθίες (α_n), (β_n) με $\lim\limits_n a_n = a$ και $\lim\limits_n \beta_n = \beta$.

Τότε

- $\lim\limits_n a_n + \beta_n = a + \beta$
- $\lim\limits_n a_n - \beta_n = a - \beta$
- $\lim\limits_n a_n . \beta_n = a . \beta$
- $\lim\limits_n \lambda a_n = \lambda a$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ
- Αν $\beta_n \neq 0$ και $\beta \neq 0$ ισχύει $\lim\limits_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Εφαρμογές

- $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n} \frac{1}{n} . \lim\limits_{n} \frac{1}{n} = 0.0 = 0$
- $\lim\limits_{n} \frac{2n-1}{n} = \lim\limits_{n} 2 - \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2$
- $\lim\limits_{n} \frac{n^2+4n+5}{n^2+2n+3} = \lim\limits_{n} \frac{n^2(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})} = \lim\limits_{n} \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} =1$