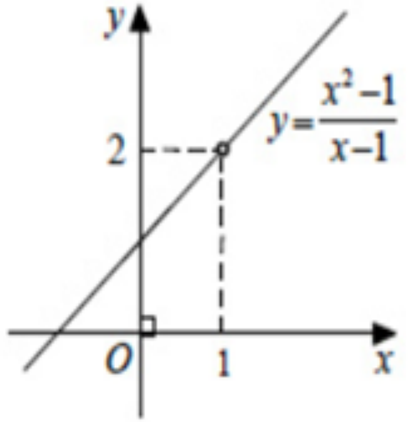
Όριο συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, η οποία δεν ορίζεται για x=1. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο 1.

$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100



Τι παρατηρούμε;

Παρατηρούμε ότι όσο οι τιμές του x πλησιάζουν στο 1 οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν στο 2

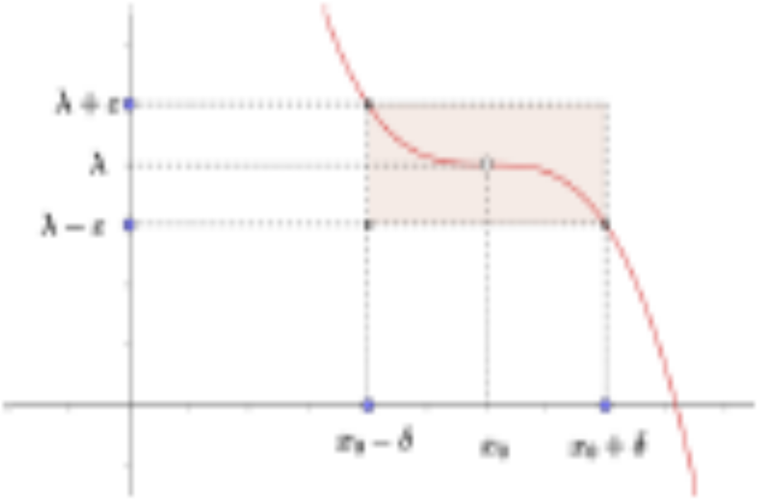
Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα ή ένωση διαστημάτων και x_0 πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι η f συγκλίνει στον αριθμό α όταν το x τείνει στο x_0 (συμβ. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - a| < \varepsilon$

- Για να μελετήσουμε τη σύγκλιση της f όταν το x τείνει στο x_0 δεν είναι αναγκαίο το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Πρέπει το πεδίο ορισμού της f να περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(a\, , x_0\,) \cup (\, x_0, \beta)$ ή $(a\, , x_0\,)$ ή $(\, x_0, \beta)$
- Το όριο μιας συνάρτησης όταν υπάρχει είναι μοναδικό
- Το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 από μικρότερες τιμές το συμβολίζουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και όταν το x τείνει στο x_0 από μεγαλύτερες τιμές το συμβολίζουμε $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
- Όταν $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ = $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
- Όταν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τότε δεν υπάρχει $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Διαισθητική περιγραφή του ορισμού του ορίου συνάρτησης:

Μια συνάρτηση f(x) έχει όριο τον αριθμό α όταν το x τείνει στο x_0 , αν οι τιμές της, δηλαδή τα f(x), βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο α όταν τα x είναι κατάλληλα κοντά στο x_0 και διαφορετικά του x_0.

Γραφικά, η πρόταση $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$ σημαίνει ότι δεν υπάρχει κομμάτι της γραφικής παράστασης της f στη λωρίδα που καθορίζει το δ, που να είναι έξω από το σκιασμένο ορθογώνιο (με πιθανή εξαίρεση του σημείου $(x_0, f(x_0))$).



Παραδείγματα

- Έστω η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Έστω η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

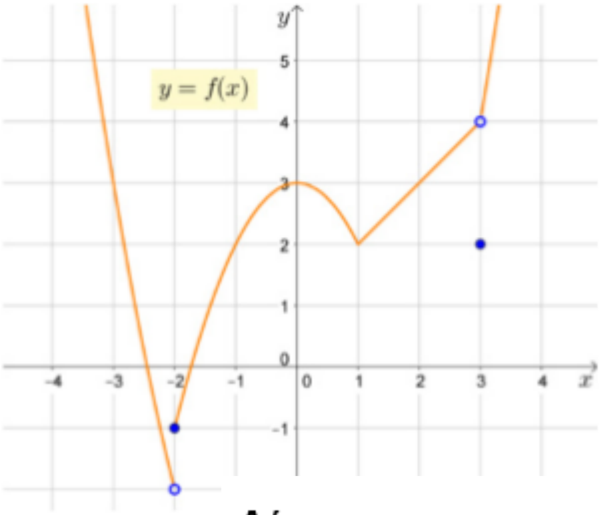
Υπολογισμός ορίων με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

Παράδειγμα

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (β) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(γ) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (δ) $\lim_{x \to 3} f(x)$



Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$. Επομένως, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

(β) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$. Επομένως, $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

(γ) Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια στο -2 είναι άνισα:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1, \lim_{x \to -2^-} f(x) = -2$$

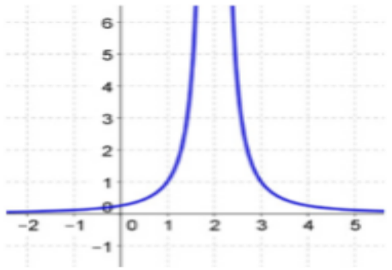
Επομένως, το όριο $\lim_{x \to -2} f(x)$ δεν υπάρχει.

(δ) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$. Επομένως, $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$.

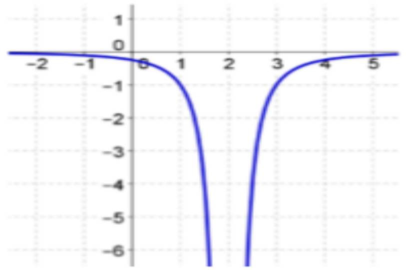
Άπειρα όρια

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

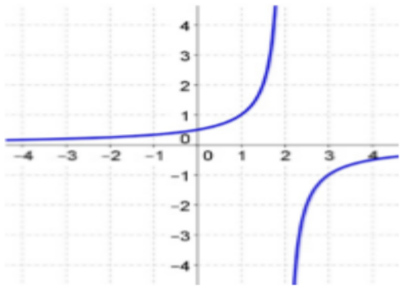
(α)



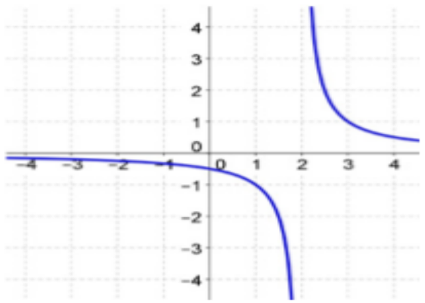
(β)



(γ)



(δ)



Να ερευνήσετε τη συμπεριφορά των τιμών των συναρτήσεων, όταν το x τείνει στο 2 από δεξιά και από αριστερά. Τι παρατηρείτε;

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ (το $f(x)$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο όταν το x τείνει στο 2)

β) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ (το $f(x)$ γίνεται οσοδήποτε μικρό όταν το x τείνει στο 2)

γ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \; και \; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$
- $\lim_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$
- $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
- $\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$

Επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, (- ∞)+(- ∞)=- ∞,

(± ∞)+α=α+(± ∞)= ± ∞ για κάθε α∈ $\mathbb{R}$

$(+\infty).(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)$.(- ∞)=- ∞, (- ∞).(- ∞)=+ ∞

α(+∞)=(+ ∞)α=+ ∞, α(-∞)=(+-∞)α=- ∞ για κάθε α>0

α(+∞)=(+ ∞)α=-∞, α(−∞)=(-∞)α=+∞ για κάθε α<0

$\frac{\alpha}{+\infty} = \frac{\alpha}{-\infty} = 0$ για κάθε α∈ $\mathbb{R}$

- Οι πράξεις $(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty),\ 0.(\pm\infty), (\pm\infty).0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$

  δεν επιτρέπονται.

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

i) Έστω x_0 στοιχείο του A.

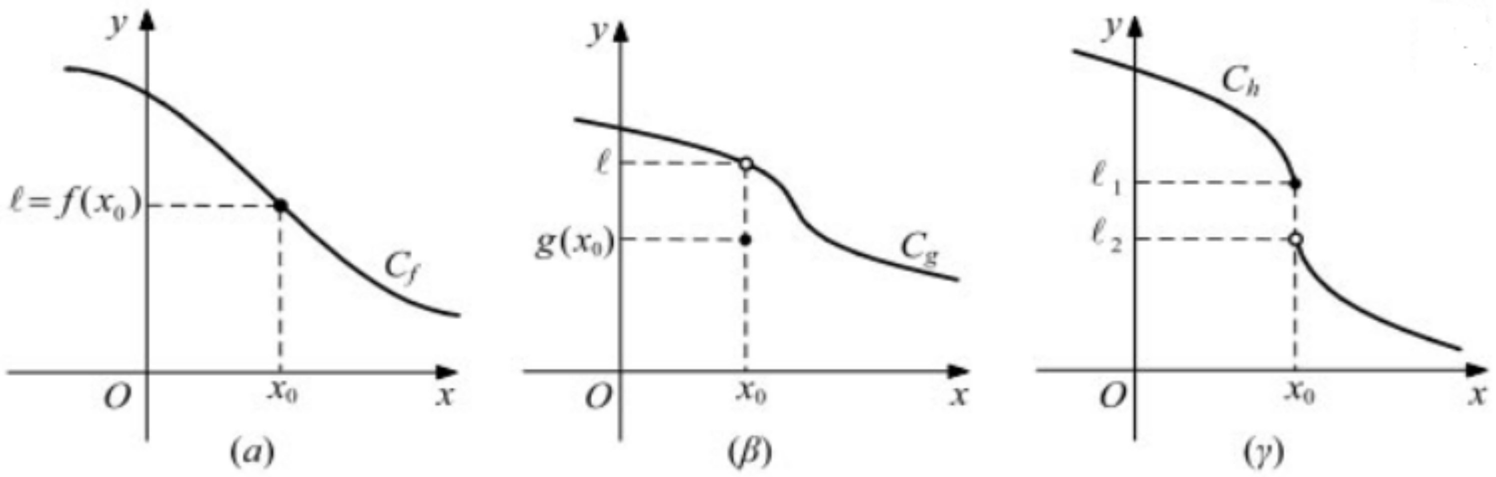
Η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Η f λέγεται ασυνεχής στο x_0 αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

ii) Η f λέγεται συνεχής συνάρτηση αν είναι συνεχής σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της.

Δηλαδή αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in A$.

Ποια είναι τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων όταν το x τείνει στο x_o;
Ποια/ες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο x_0;

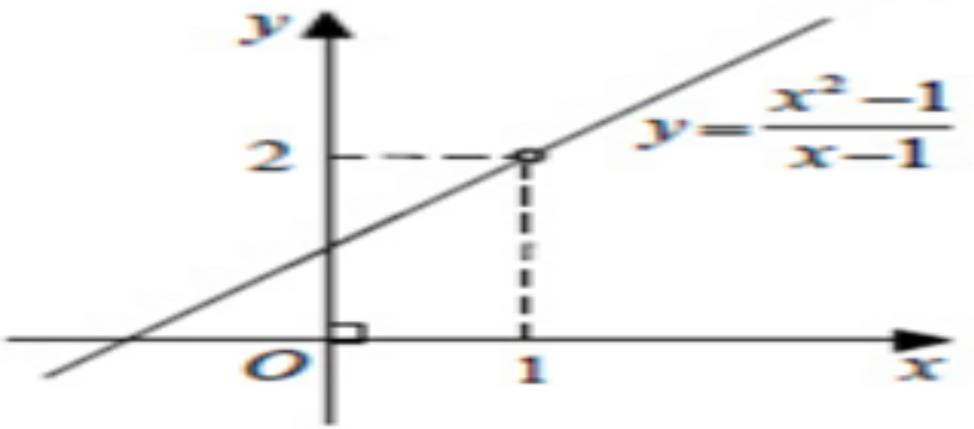


α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$. Άρα η g δεν είναι συνεχής στο x_0.

γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$. Άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$. Συνεπώς η h δεν είναι συνεχής στο x_0.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
Η f είναι συνεχής στο 1;
Η f είναι συνεχής συνάρτηση;



Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Δεν έχει νόημα η συνέχεια της f στο 1 γιατί το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Η f είναι συνεχής συνάρτηση γιατί ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Εφαπτόμενη καμπύλης

- **Το ζήτημα της εφαπτομένης καμπύλης**

- Απόσπασμα από το βιβλίο **Απειροστικός λογισμός των** Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012).

Απόδοση στα ελληνικά Μανώλης Αντωνογιαννάκης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Το ζήτημα της εφαπτομένης ήταν το κυριότερο μαθηματικό πρόβλημα των αρχών του $17^{ου}$ αιώνα, και η επίλυσή του αποτελούσε διακαή πόθο των μεγαλύτερων μαθηματικών της εποχής. Στην οπτική, η εφαπτομένη καθορίζει τη γωνία υπό την οποία μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται σε καμπύλο φακό. Στη μηχανική, η εφαπτομένη καθορίζει την κατεύθυνση της κίνησης σωματιδίου σε κάθε σημείο της τροχιάς του. Στη γεωμετρία, οι εφαπτομένες δύο καμπυλών στο σημείο τομής τους καθορίζουν τη γωνία που σχηματίζουν τεμνόμενες οι καμπύλες. Ο René Descartes μάλιστα είχε δηλώσει ότι το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης σε μια καμπύλη ήταν «το χρησιμότερο και γενικότερο πρόβλημα που γνωρίζω και που θα ήθελα όσο τίποτε άλλο να λύσω.»

Η ευθεία $\boldsymbol{y = ax + \beta}$

Ευθεία είναι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax + \beta$.

Αν θέσουμε $y = f(x)$ τότε η συνάρτηση γράφεται $\boldsymbol{y = ax + \beta}$

Κλίση της ευθείας είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα.

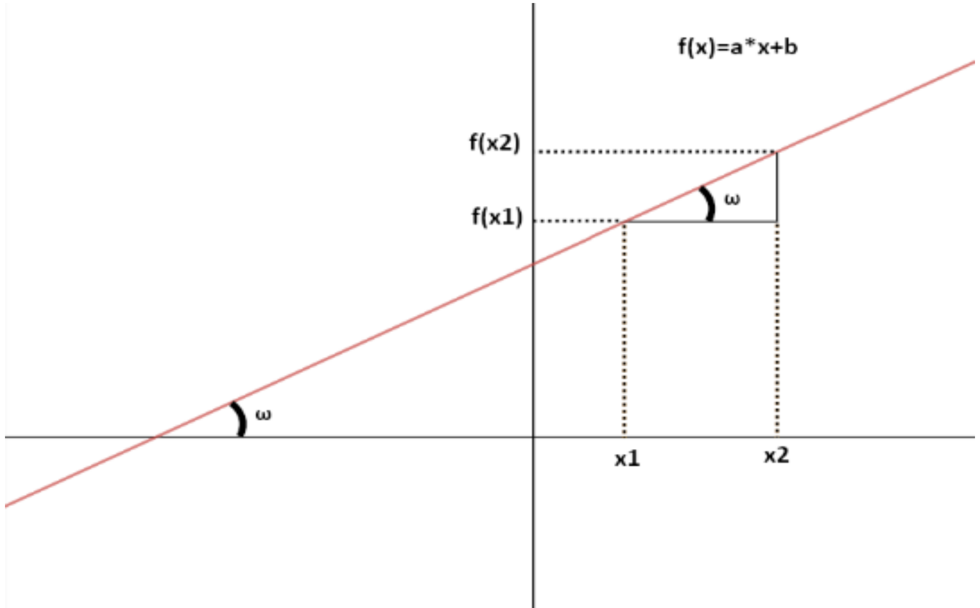
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αν μια ευθεία έχει κλίση λ

και διέρχεται από το σημείο

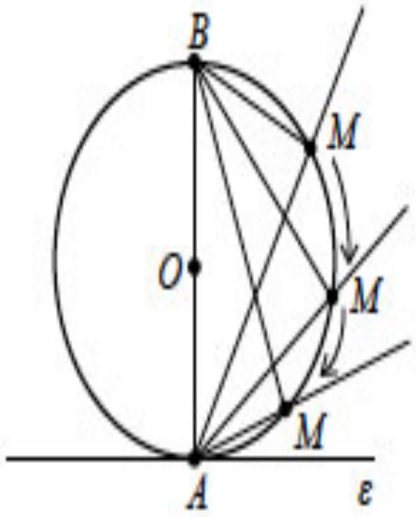
$\mathrm{P}(x_0, y_0)$ τότε η εξίσωση της είναι

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$



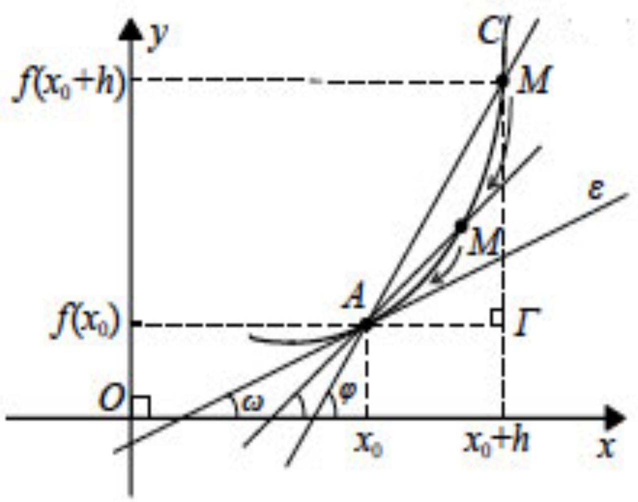
Η εφαπτομένη κύκλου

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A είναι η ευθεία ε που είναι κάθετη στην ακτίνα OA στο σημείο A. Έστω M ένα άλλο σημείο του κύκλου. Επειδή το τρίγωνο MAB είναι ορθογώνιο στο M, το άθροισμα των γωνιών του A και B είναι $90°$. Αν υποθέσουμε ότι το M κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει το A, η γωνία B τείνει να γίνει μηδενική, οπότε η γωνία A τείνει να γίνει ορθή. Δηλαδή η τέμνουσα AM τείνει να γίνει κάθετη στην OA που σημαίνει ότι τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη ε. Θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε ως εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο A, την οριακή θέση της τέμνουσας AM, καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το A.



Η εφαπτομένη καμπύλης

Τον ισοδύναμο αυτό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα τον χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησηςσε ένα σημείο της.
Έστω λοιπόν f μια συνάρτηση και $A(x_0), f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C.
Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C με $h\neq 0$.



Παρατηρούμε ότι καθώς το M κινούμενο πάνω στη C πλησιάζει το A, όταν δηλαδή $h \to 0$, τότε η ευθεία AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε η οποία λέγεται εφαπτομένη (tangent) της C στο A. Από το σχήμα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο A θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = x^2$ στο σημείο $P(2,4)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+4)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(2) = 4(x-2) \Leftrightarrow y - 4 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

Μελέτη

- **Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ**

3.5 Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου.

http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSEPAL-B107/302/2098,7504/

Γ’ Λυκείου. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦ. 1: Διαφορικός λογισμός

1.1. όριο συνάρτησης

1.2. Η έννοια της παραγώγου.

Εφαπτομένη καμπύλης