Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$, όπου $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $x_0 \in \mathrm{I}$.

Παράγωγος της f στο x_0 είναι το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Συμβολισμός

Την παράγωγο μιας συνάρτησης f στο x_0 τη συμβολίζουμε $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $\frac{df}{dx}|_{x=x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ προκύπτει $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Παραδείγματα

- $f(x) = c \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$

- $f(x) = x \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

Συνάρτηση παράγωγος

Έστω συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$, όπου $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα.

Αν η f έχει παράγωγο σε κάθε $x \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$f': I \to \mathbb{R}$, με $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

και την ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση της f.

Κανόνες παραγώγισης

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

$(c)' = 0$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$(x)' = 1$	
$(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(e^x)' = e^x$	
$(\ell nx)' = \dfrac{1}{x}$	$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης
στο σημείο Α(xο, f(xο))

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\mathbf{y - f(x_0) = \lambda\,(x - x_0)}\,,$$

όπου

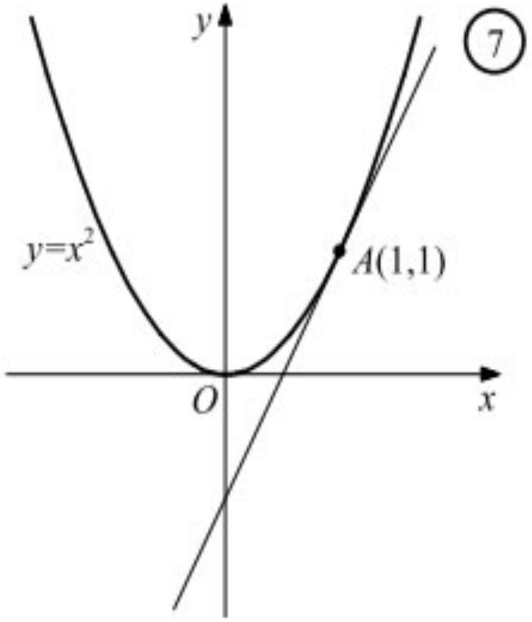
$$\lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Παράδειγμα

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο της Α(1,1). Επειδή

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\,,$$

ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(1,1). Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και εξίσωση $y - 1 = 2(x - 1)$.



Ακρότατα και Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ με *I* διάστημα και $x_0 \in I$.

- Το x_0 είναι λέγεται ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in I$
- Το x_0 είναι λέγεται ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο αν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in I$
- Το x_0 είναι λέγεται τοπικό μέγιστο αν υπάρχει δ>0 ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- Το x_0 είναι λέγεται τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει δ>0 ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$.

- Η f λέγεται γνησίως αύξουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$με $x_1 < x_2$ $\mathit{ισχύει}$ $f(x_1) < f(x_2)$
- Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$με $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Θεώρημα. Έστω I διάστημα, συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$.

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I και τοπικό ακρότατο της f τότε $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα. Έστω I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και διαφορίσιμη στο εσωτερικό του A.

α) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

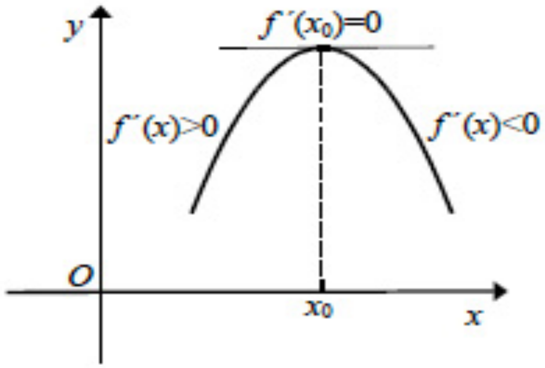
β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

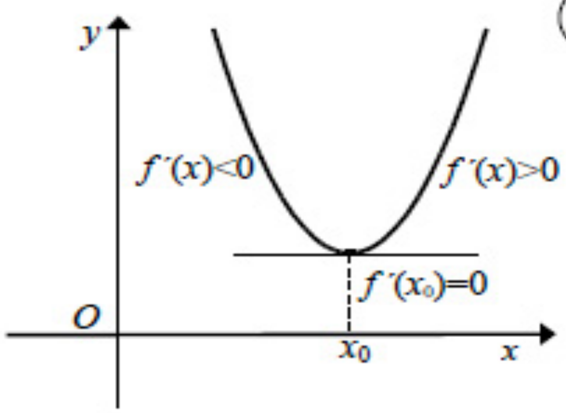
Μέγιστο (max) / ελάχιστο (min) συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.





17

Σχημα 3.22 Η πρώτη παράγωγος μιας συναρτήσεως μας πληροφορεί αν, και πόσο απότομα, ανέρχεται ή κατέρχεται η γραφική της παράσταση.

Οι παρατηρήσεις αυτές μάς οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου κριτηρίου για την ύπαρξη και τη φύση των τοπικών ακροτάτων διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Σε ένα κρίσιμο σημείο $x = c$,

1. η f εμφανίζει *τοπικό ελάχιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από αρνητική σε θετική
2. η f εμφανίζει *τοπικό μέγιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από θετική σε αρνητική
3. η f δεν εμφανίζει *τοπικό ακρότατο* αν η f' έχει το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του c.

Βιβλιογραφία

- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός λογισμός. Απόδοση στα ελληνικά Μανώλης Αντωνογιαννάκης. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- **Γ’ Λυκείου.** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦ. 1: Διαφορικός λογισμός

1.3. Παράγωγος συνάρτηση (εκτός της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης).

1.4. Εφαρμογές των παραγώγων

Μελέτη

- **Γ' Λυκείου.** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦ. 1: Διαφορικός λογισμός

1.3. Παράγωγος συνάρτηση (εκτός της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης).

1.4. Εφαρμογές των παραγώγων (ΜΟΝΟ ΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ)

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Αόριστο ολοκλήρωμα

Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

Η **F(x)** ονομάζεται **παράγουσα συνάρτηση** της **f(x)** όταν**:**

- Η f(x) ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
- Η F(x) είναι παραγωγίσιμη στο. $[\alpha,\beta]$
- $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in (\alpha,\beta)$

Κάθε συνεχής συνάρτηση f(x) έχει άπειρες παράγουσες.

<u>Ορισμός</u>: **Αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) συμβολίζεται:** $\int f(x)dx$ **και είναι το σύνολο όλων των παραγουσών της f(x).**

Δηλαδή: $$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in R \;\text{ όταν }\; F'(x) = f(x)$$

Η σταθερά c ονομάζεται **σταθερά ολοκλήρωσης**

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

- $\int 1dx = \int dx = x + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ για κάθε $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ για $\alpha > 0$
- $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
- $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

- $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\lambda \int f(x)dx = \int \lambda f(x)dx$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [a,\beta] \to \mathbb{R}$ και $\mathrm{F}\colon [a,\beta] \to \mathbb{R}$ μια παράγουσα της f.

Ορισμένο ολοκλήρωμα της f (συμβολισμός $\int_a^\beta f(x)dx$) λέμε τον αριθμό $F(\beta) - F(a)$. Δηλαδή

$$\int_a^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

Παραδείγματα

- $\int_1^3 xdx = [\frac{x^2}{2}]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

- $\int_1^e \frac{1}{x} dx == [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - (-\sigma\upsilon\nu 0) = 0 - (-1) = 1$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \pm g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- $\lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{a}^{\beta} \lambda f(x) dx$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- Αν $f: [a, \beta] \to \mathbb{R}$ και $\alpha < \gamma < \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \geq 0$

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [a,\beta] \to \mathbb{R}$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ το $\int_a^\beta f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$.

Αν $f, g\colon [a,\beta] \to \mathbb{R}$ και $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g ισούται με το $\int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)\, dx$= $\int_a^\beta f(x) - g(x)\, dx$

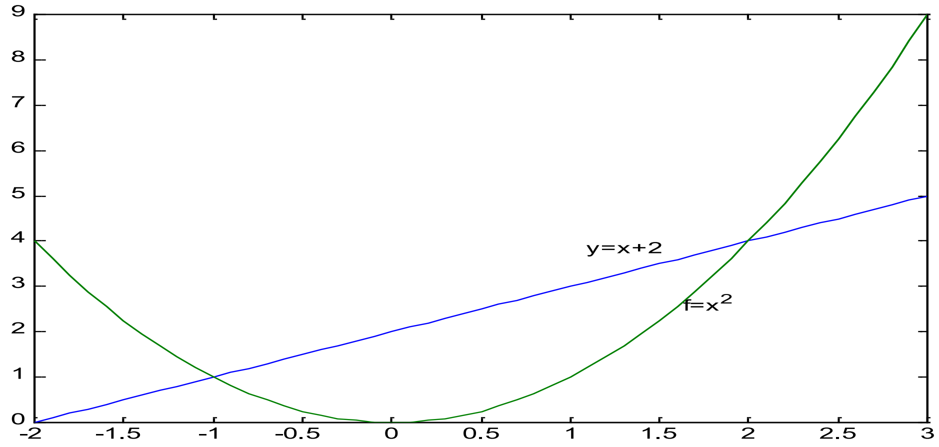
Παραδείγματα

- Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y = x + 2$ και τη συνάρτηση $y = x^2$.

Πρέπει να βρούμε τα σημεία στα οποία συναντιούνται οι συναρτήσεις

$x+2 = x^2$
$x^2 - x - 2 = 0$ όταν $x = -1, x = 2$

Το εμβαδόν του χωρίου που ζητείται υπολογίζεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα:



$$\int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \text{ τ. μ}$$