Δύο εφαρμογές της Μεθόδου της Ανάλυσης και της Σύνθεσης στα Όρια Συναρτήσεων

18 Νοεμβρίου 2021

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ. Η μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος με τη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης συνίσταται σε δύο διαδοχικά βήματα, την ανάλυση και τη σύνθεση. Κατά την ανάλυση το ζητούμενο λαμβάνεται ως δεδομένο και αναζητούμε μια πρόταση από την οποία το ζητούμενο μπορεί να συναχθεί παραγωγικά. Κατά τη σύνθεση, εκκινώντας από την πρόταση στην οποία καταλήξαμε μέσω της ανάλυσης συναγάγουμε το ζητούμενο παραγωγικά.

Αν κατά την ανάλυση συναγάγουμε μια αντίφαση, τότε το ζητούμενο είναι ψευδές. Η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση ανάλυσης.

Ο ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ (Spiva:81). Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να φέρουμε το $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά, αλλά όχι ίσο, με το a.

****

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 Να δειχθεί ότι το όριο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x)=\frac{1}{x}$ καθώς το x να είναι αρκετά κοντά, αλλά όχι ίσο, με το $a \in \mathbb{R}^*$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\frac{1}{a}$.

Λύση. Η λύση περιλαμβάνει τα δύο βήματα της μεθόδου.

Ανάλυση Θεωρούμε ως δεδομένο ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται κοντά στον αριθμό $\frac{1}{a}$. Δηλαδή, για κάποιο $\varepsilon > 0$,

$$f(x) \in (\frac{1}{a} - \varepsilon, \frac{1}{a} + \varepsilon). \tag{0.1}$$

Οπότε,

$$\frac{1}{a} - \varepsilon < f(x) < \frac{1}{a} + \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$$

Εκτελώντας τις πράξεις

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| < \varepsilon \tag{0.2}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ανισότητα θα πρέπει η ποσότητα $|x|$ να μην είναι κοντά στο μηδέν (και, προφανώς, να μην είναι ίση με το μηδέν), διότι όσο προσεγγίζουμε το μηδέν η ποσότητα $\frac{1}{|x|}$ θα μεγαλώνει και το γινόμενο $\frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a|$ θα γίνει μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αριθμό $\varepsilon > 0$.
Για να το επιτύχουμε αυτό θέτουμε τον εξής περιορισμό:

$$|x-a| < \frac{|a|}{2}$$

Οπότε,

$$|x-a| < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow a - \frac{|a|}{2} < x < a + \frac{|a|}{2}$$

Λαμβάνουμε δύο περιπτώσεις για το a:

1. Αν $a \geq 0$ τότε $a - \frac{|a|}{2} < x < a + \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow \frac{|a|}{2} < x < 3\frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{2} < x \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|}$

2. Αν $a < 0$ τότε $a - \frac{|a|}{2} < x < a + \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow -3\frac{|a|}{2} < x < -\frac{|a|}{2} \Rightarrow -\frac{|a|}{2} > x \Rightarrow -\frac{|a|}{2} > -|x| \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|}$

   Επομένως, αν $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ τότε

$$0 < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|} \tag{0.3}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε έναν περιορισμό για το πόσο κοντά πρέπει να είναι το x στο a ώστε να ισχύει η (0.1). Από τη σχέση (0.3), η οποία ισχύει αν $|x-a| < \frac{|a|}{2}$, έχουμε:

$$0 < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|} \Rightarrow 0 < \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| < \frac{2}{|a|^2}|x-a|$$

Σύμφωνα με τη (0.2) θέλουμε να ισχύει ότι $\frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| < \varepsilon$. Για αυτό απαιτούμε

$$\frac{2}{|a|^2} \cdot |x-a| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x-a| < \frac{|a|^2}{2}\varepsilon$$

Συνεπώς,

$$\text{Αν } |x-a| < \tfrac{|a|}{2} \text{ και } |x-a| < \tfrac{|a|^2}{2}\varepsilon \text{ τότε } |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| < \varepsilon$$

ή ισοδύναμα,

$$\text{Αν } |x-a| < \delta = min\left\{\tfrac{|a|}{2}, \tfrac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\} \text{ τότε } |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| < \varepsilon$$

<u>Σύνθεση</u> Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι

$$\text{αν } |x-a| < \delta = min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\} \text{ τότε } |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| < \varepsilon$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\frac{1}{|a|} > \varepsilon > 0$ τότε $|x-a| < \delta = \frac{|a|^2}{2}\varepsilon < \frac{|a|}{2}$, οπότε

$$\frac{2}{|a|^2} \cdot |x-a| < \varepsilon \overset{(0.3)}{\Longrightarrow} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| < \varepsilon \overset{(0.2)}{\Longleftrightarrow} |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$$

2. Αν $\varepsilon \geq \frac{1}{|a|}$ τότε $|x-a| < \delta = \frac{|a|}{2} \leq \frac{|a|^2}{2}\varepsilon$, οπότε ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα λαμβάνουμε το ζητούμενο.

$$\frac{2}{|a|^2} \cdot |x-a| < \varepsilon \overset{(0.3)}{\Longrightarrow} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| < \varepsilon \overset{(0.2)}{\Longleftrightarrow} |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 Να δειχθεί ότι το όριο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

καθώς το x να είναι αρκετά κοντά, αλλά όχι ίσο, με κάποιο $a \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχει.

Λύση. Η λύση ακολουθεί την εις άτοπον απαγωγή.

<u>Ανάλυση</u> Έστω ότι υπήρχε $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \tag{0.4}$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$, όταν το x είναι επαρκώς κοντά , αλλά όχι ίσο, με το $a \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, αν για κάποιο θετικό αριθμό δ

$$0 < |x-a| < \delta \Longleftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta) \tag{0.5}$$

Όμως, λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς, θα υπάρχει ρητός ξ και άρρητος ξ' , στο διάστημα $(a-\delta, a+\delta)$.

Επομένως, αν η συνθήκη $0 < |x-a| < \delta$, για κάποιο θετικό αριθμό δ , συνεπάγονταν ότι $|f(x) - l| < \varepsilon$ για κάποιο αριθμό $\varepsilon > 0$, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$|f(\xi') - l| < \varepsilon = |0 - l| < \varepsilon \text{ και } |f(\xi) - l| < \varepsilon = |1 - l| < \varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο.