19/10/ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

12.2 $\quad (2a+1,\ 10a-3)=1$

$$\begin{matrix} \boxed{\gamma \mid 2a+1} \\ \gamma \mid 10a-3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma \mid 5\cdot(2a+1) \\ \gamma \mid 10a-3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma \mid 10a+5 \\ \gamma \mid 10a-3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \gamma \mid \big((10a+5)-(10a-3)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \mid 8$$

$$\gamma \in \{1, 2, 4, 8\}$$

Όμως $\gamma \mid 2a+1$, $2a+1$ περιττός

άρα και ο γ είναι περιττός (διότι το γινόμενο ενός άρτιου με οποιονδήποτε αριθμό είναι άρτιος) $\quad 2\alpha+1 = \kappa\gamma$

Επομένως, επειδή ο μοναδικός περιττός διαιρέτης είναι ο 1

$\gamma = 1$, $\quad (2a+1,\ 10a-3) = 1$

14.4

$\alpha \neq 0$, p πρώτος $\qquad a^2 - p = 9$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$a^2 - p = 9 \Leftrightarrow a^2 - 9 = p \Leftrightarrow a^2 - 3^2 = p$

$\underbrace{(a-3)(a+3) = p}$

Επειδή $\alpha + 3 > 1$; $\begin{cases} \alpha + 3 = p \\ \alpha - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 7 \\ a = 4 \end{cases}$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Αποδ. (δεν δείξαμε τη μοναδικότητα).

Έστω $a \in \mathbb{N}^*$

- Αν ο a είναι πρώτος, τότε το θεώρ. ισχύει διότι $\alpha = 1 \cdot a$
- Αν ο α δεν είναι πρώτος τότε σύμφωνα Πρτ. 7.31 $\exists\, \pi_1 \in \mathbb{N}^*$, π_1 πρώτος τ.ώ. $\pi_1 | a$, $a = \pi_1 a_1$, $1 < \pi_1, \alpha_1 < a$
- Αν ο a_1 είναι πρώτος τότε δείξαμε το ζητούμενο
- Αν ο a_1 δεν είναι πρώτος τότε σύμφωνα με Πρτ. 7.31 $\exists\, \pi_2 \in \mathbb{N}^*$ π_2 πρώτος τ.ω. $\pi_2 | a_1$, άρα $\alpha_1 = \pi_2 \cdot a_2$

$$a = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot a_2 \qquad 0 < a_2 < a_1 < a$$

Συνεχίζουμε με αντίστοιχο τρόπο.

Ισχυρισμός

- Σε κάποιο -βήμα, ν-οστό βήμα, ο αριθμός α_ν θα είναι πρώτος αριθμός και

$$\alpha = \pi_1 \ldots \pi_\nu a_\nu$$

Διότι

Αν για κάποιο ν ο a_ν δεν είναι πρώτος, τότε το σύνολο $S \neq \emptyset$ των διαιρετών του α που κατασκευάζονται με την παραπάνω διαδικασία δεν θα έχει ελάχιστο στοιχείο δηλαδή $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ θα υπάρχει $a_{\nu+1} \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ. $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$. Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω της Αρχής καλής διάταξης. Άρα υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ για το οποίο ο α_ν να είναι πρώτος. Επομένως, ο α μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων

Το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι απειροσύνολο.

<u>Αποδ.</u>

Έστω $\pi_1, \ldots, \pi_\nu$ πρώτοι αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους $\nu > 1$

$\pi =$ ο διάδοχος του γινομένου $\pi_1, \ldots \pi_\nu = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_\nu + 1$

Προφανώς

$\pi > \pi_i$ για $1 \leq i \leq \nu$

Αν ο π δεν είναι πρώτος, τότε από Πρτ. 7.31 <u>υπάρχει</u> $\theta > 1$, θ πρώτος

$\theta \mid \pi$

Ισχυρισμός: $\theta \neq \pi_i$ $1 \leq i \leq \nu$ διότι αν $\exists j$ $1 \leq j \leq \nu$ τ.ώ. $\theta = \pi_j$

τότε

$\theta \mid \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_\nu$ (γιατί?)

Όμως αν $\theta \mid \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_\nu$ και $\theta \mid \pi$ (εκ κατασκευής) τότε

(Πρτ. 9.3)

$\theta \mid 1 \Rightarrow \theta = 1$

Όμως ο $\theta \neq 1$ (>1) <u>Άτοπο!</u>

Άρα ο π είναι πρώτος και διαφορετικός από τους

$\pi_1, \ldots, \pi_\nu$

Αυτό όμως αποδεικνύεται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι απειροσύνολο.