26/10/2021

4.1 Το μηδέν είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \alpha + 0 = \alpha \qquad (\Pi_1)$$

Απόδ.

Έστω ότι $\exists\, 0' \in \mathbb{R}$ τ.ω. να ισχύει $\alpha + 0' = a$ (ισότητα 1)

Τότε για $\alpha = 0$ από ① έχουμε

$$0 + 0' = 0 \underset{(\Pi_4)}{\Rightarrow} 0' + 0 = 0 \underset{(\Pi_1)}{\overset{\text{για } \alpha = 0'}{\Longrightarrow}} 0' = 0$$

4.2 Μοναδικότητα του αντιθέτου

Η $(\Pi 2)$ $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a$: $a + (-a) = 0$

Έστω αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$, Από (Π_2),

$$a + (-a) = 0 \qquad (1)$$

Υποθέτω ότι για τον τυχόντα αριθμό $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει α' τ.ω.

$$\alpha + \alpha' = 0 \qquad (2)$$

Από (1) και (2)

$$\alpha + (-\alpha) = \alpha + \alpha'$$

Από το μονοσήμαντο του αθροίσματος προκύπτει ότι μπορώ να προσθέσω στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό.

$$(-a) + (a + (-a)) = (-a) + (a + a')$$

Προσεταιριστική (Π3)

$$((-a) + a) + (-a) = ((-a) + a) + a'$$

Από την (Π2), (Π4)

$$0 + (-a) = 0 + a'$$

Από την (Π1), (Π4)

$$-a = a'$$

4.3 $a + x = b$

$$a + x = b$$

από το μονοσήμαντο της πρόσθ.

$$(-a) + (a + x) = (-a) + b$$

(Π3) $$((-a + a)) + x = (-a) + b)$$

(Π2)(Π4) $$0 + x = (-a) + b$$

(Π1) (Π4) $$x = b + (-a)$$

ορσ. $x - y := x + (-y)$

$$x = b - a$$

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Έστω $x' \in \mathbb{R}$: $a + x' = b$

Επειδή $\alpha + x = b$,

$$\alpha + x = \alpha + x'$$
$$(-a) + (a + x) = (-a) + (a + x')$$
$$((-a) + a) + x = ((-a) + a) + x'$$
$$0 + x = 0 + x'$$
$$x = x'$$

~ . ~

6.4 $\alpha \cdot 0 = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \qquad \Pi 1$$
$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \qquad \Pi 9$$
$$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + \alpha \cdot 0) \qquad \Pi 3$$
$$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0$$
$$0 = 0 + a \cdot 0 \qquad \Pi 2, \Pi 4$$
$$0 = a \cdot 0 \qquad \Pi 1$$

Ασκήσεις Ταυτότητες

1) Αν $x+y=7$ και $xy=12$ Να βρεθεί $x^2+y^2=$;

ΛΥΣΗ

Από γνωστή Ταυτότητα

$$\underbrace{(x+y)^2}_{} = \underbrace{x^2+y^2}_{\text{?}} + 2\underbrace{xy}_{}$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 49 - 2\cdot 12 = 49 - 24$$

$$= 25.$$

2) Να βρείτε τα γινόμενα

α) $(x+y+z)(x+y-z)$ ①

έστω $w=x+y$ τότε η ① $\Rightarrow (w+z)(w-z) = (w^2-z^2)$ από γνωστή ταυτότητα

$$(x+y+z)(x+y-z) = (x+y)^2 - z^2$$

σύντομη λύση

β) $(\alpha - x + \beta - y)(\alpha + x + \beta + y) = \big((\alpha+\beta)-(x+y)\big)\big((\alpha+\beta)+(x+y)\big)$

$$= (\alpha+\beta)^2 - (x+y)^2$$

Με επιμ. ιδιότητα

$$(\alpha-x)(\alpha+x) + (\alpha-x)(\beta+y) + (\beta-y)(\alpha+x) + (\beta-y)(\beta+y)$$

$$\alpha^2 - x^2 + \alpha\beta + \cancel{\alpha y} - \cancel{x\beta} - xy + \beta\alpha + \cancel{\beta x} - \cancel{y\alpha} - yx$$

$$+\beta^2 - y^2$$

$$a^2 - x^2 + 2a\beta + \beta^2 - y^2 - 2xy$$

$$(a+\beta)^2 - (x^2 + y^2 + 2xy) = (a+\beta)^2 - (x+y)^2$$

Ασκήσεις

12.2 Αν $a < \beta$ τότε

$$\alpha < \frac{1}{2}(\alpha+\beta) < \beta$$

Απόδ.

Έστω $\alpha < \beta$

$$\alpha + \alpha < \alpha + \beta \qquad (\Pi 12)$$

$$2a < a + \beta$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2a < \frac{1}{2}(a+\beta) \qquad 1/2 > 0,\ \Pi 13$$

$$a < \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad ①$$

Αντίστοιχα, $\alpha < \beta$

$$\alpha+\beta < \beta + \beta \qquad (\Pi 12)$$

$$\alpha + \beta < 2\beta$$

$$\frac{1}{2}(a+\beta) < \frac{1}{2}\cdot 2\beta \qquad (\Pi 13)$$

$$\frac{1}{2}(a+\beta) < \beta \qquad ②$$

Από ① και ②

$$\alpha < \frac{1}{2}(a+\beta) < \beta.$$