4/11/2021

$\sqrt[10]{5}$ είναι ο πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση $x^5 = 10$

$\sqrt[3]{5}$ $\quad x^3 = 5$.

$(x^{1/3})^5 = x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$

~ . ~

$x^{2n} = \rho \qquad \rho \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt[2n]{\rho}$

$(-x)^2 = x^2$

~ . ~

21.1 α) $A = 5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 6\sqrt{32}$

$= 5\sqrt{2 \cdot 9} - 2\sqrt{2 \cdot 25} + 6\sqrt{8 \cdot 4}$

$= 5\sqrt{2}\sqrt{9} - 2\sqrt{2}\sqrt{25} + 6\sqrt{8}\sqrt{4}$

$= 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 12\sqrt{2 \cdot 4}$

$= 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 24\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} + 24\sqrt{2}$

$= 29\sqrt{2}$

21.2 Ν.δ.ό.

α) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+\sqrt{2ab}}$ $\quad a \geq 0$, $b \geq 0$

Λύση

$\boxed{x^2+y^2+2xy = (x+y)^2}$

$x = \sqrt{a}$

$y = \sqrt{b}$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + \sqrt{2ab}$$

$$= a + b + \sqrt{2ab}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a+b+\sqrt{2ab}} \\ \text{ή} \\ -\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}} \end{cases}$$

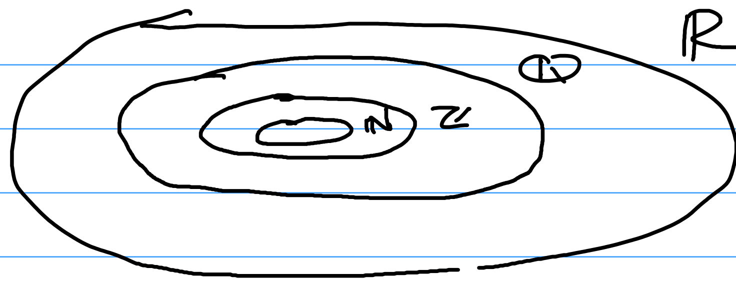
απορρίπτεται διότι < 0

Για να διώξουμε ρίζες από τον παρονομαστή

β) $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

γ) $$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{m\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\alpha - b}$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

~ . ~

Διαφάνεια 22 πρόταση

$\alpha^2 = 2$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$ $\alpha > 0$, $\sqrt{\alpha}$ είναι άρρητος. $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Απόδ.

Με εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{Q}$ τ.ώ. $\alpha^2 = 2$

Εφόσον $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$ $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$. $\lambda \neq 0$

Υποθέτουμε ότι είτε ο μ είτε ο λ δεν είναι άρτιος.

(γιατί αν $\mu = 2\rho$ και $\lambda = 2\kappa \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\rho}{2\kappa} = \dfrac{\rho}{\kappa}$)

Τότε

$2 = \alpha^2 = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow \mu^2 = 2\lambda^2$ άρα μ^2 άρτιος. Συνεπώς, μ άρτιος διότι το γινόμενο οποιωνδήποτε περιττών $(\mu \cdot \mu = \mu^2)$ είναι περιττός.

Επομένως, για κάποιον $w \in \mathbb{R}$, $\mu = 2w \Rightarrow \mu^2 = (2w)^2 \Rightarrow \mu^2 = 4w^2$

όμως $\mu^2 = 2\lambda^2$ $\Rightarrow \cancel{2}\lambda^2 = \cancel{4}^{2} w^2$

$\lambda^2 = 2w^2 \Rightarrow \lambda^2$ άρτιος $\Rightarrow \lambda$ άρτιος. Άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι ή μ ή λ δεν είναι άρτιος.

22. Πρτ. 2. (πυκνότητα αρρήτων).

Αποδ. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a < \omega < b$

Εφαρμόζουμε την πρόταση για την πυκνότητα των ρητών στους αριθμούς $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

Η πυκνότητα των ρητών μας λέει ότι
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ $\exists q \in \mathbb{Q}$: $x < q < y$

$\underline{a < b} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ώ. $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$

$a < q\sqrt{2} < b$ άρρητος που βρίσκεται ανάμεσα στους $a, b \in \mathbb{R}$.

Διαφάνεια 27

Αποδείξτε ότι $\sup[a,b]=b$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

Απόδ.

Έστω $c\in\mathbb{R}$, $\sup[a,b]=c$. Θ.δ.ό. $c=b$

Εφόσον $\sup[a,b]=c \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists x_0\in[a,b] : c-\varepsilon<x_0\leq c$

Έστω $c>b$. Θέτουμε $\varepsilon=c-b>0$

$$c-\varepsilon=c-(+c-b)<x_0\leq c$$

$$b<x_0\leq c \Rightarrow b<x_0 \quad \text{Άτοπο.}$$

Διότι

$$x_0\in[a,b] \Rightarrow x_0\leq b$$

Άρα, $c\leq b$

Όμως επειδή c άνω φράγμα $c\geq b$ $\Big\} \Rightarrow \underline{c=b}$

Συμπέρασμα: $\sup[a,b]=b$.

$\sim\cdot\sim$

$\inf(a,b)=a$

Έστω $\inf(a,b)=c$ και $c<a$

Θέτουμε $\varepsilon=a-c>0$ τότε $\exists x_0\in(a,b)$ $x_0<c+(a-c)$

$\Rightarrow x_0<a$ άτοπος διότι $x_0\in(a,b)$

Άρα $c\geq a$

c κάτω φράγμα $c\leq a$ $\Big\} \Rightarrow c=a$ $\inf(a,b)=a$

29.1 Άσκηση

$$E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1} \dots \right\} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$

άρα $\forall x \in E \quad x < 1$ άρα 1 είναι άνω φράγμα του E

Θ.δ.ο. $\sup E = 1$

Έστω ότι $\sup E = c < 1$ τότε

για $\varepsilon = 1 - c > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}^*$ τ.ω. $c - (1-c) < \frac{m}{m+1}$

$$\Rightarrow 2c - 1 < \frac{m}{m+1} \Rightarrow \dots \Rightarrow c < \frac{2m+1}{2(m+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c < \frac{2m+1}{(2m+1)+1} \quad \text{άτοπο}$$

Άρα $c \geq 1$

Επειδή το 1 είναι άνω φράγμα $\Big\} \Rightarrow \sup E = c = 1$