18/11/2021 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

27.2 (i) $y^2 = 8x \iff y^2 = 2 \cdot 4x$

$\boxed{\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ E(p/2, 0) \\ \delta: x = -p/2 \end{array}}$

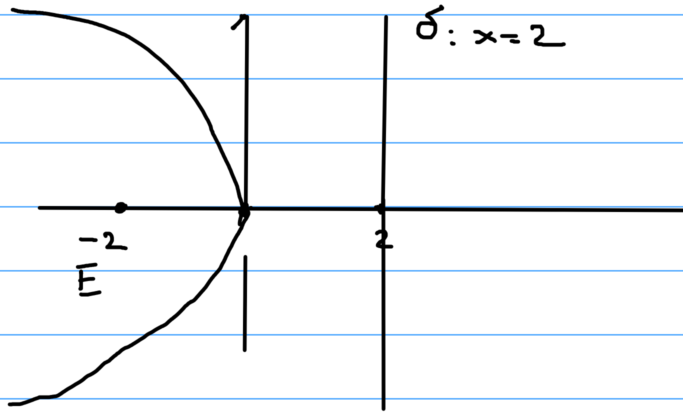
$p = 4$

$\hookrightarrow E(2,0)$

$\delta: x = -2.$

(ii) $y^2 = -8x \iff y^2 = 2 \cdot (-4)x$, $p = -4$

$E(-2,0)$ $\delta: x = 2$

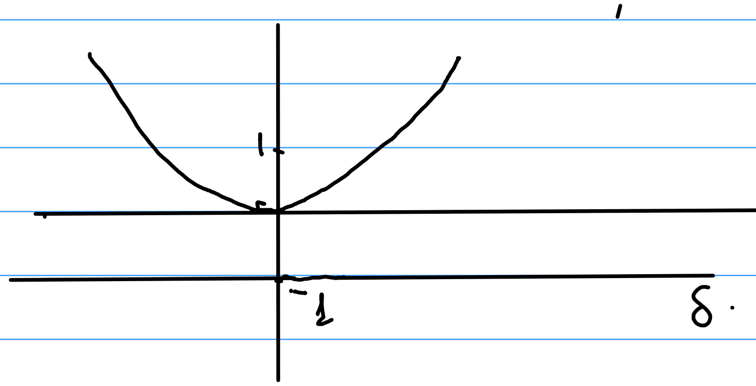


(iii) $y = \frac{1}{4}x^2 \iff x^2 = 4y \iff$

$\iff x^2 = 2 \cdot 2y$

$p = 2$, $E(0,1)$, $\delta: y = -1.$

$\begin{array}{|l} x^2 = 2py \\ E(0, p/2) \\ \delta: y = -p/2 \end{array}$

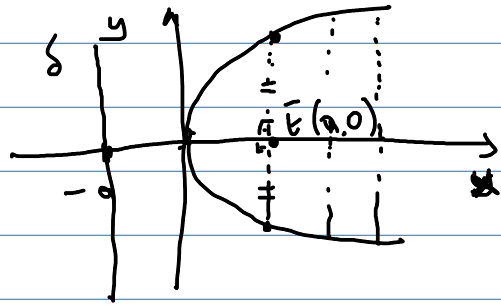


(iv)

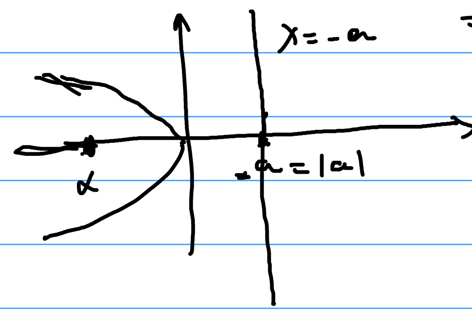
$$y^2 = 4ax \Leftrightarrow y^2 = 2(2a)x$$

$P = 2a$, $E(a,0)$ $\delta: x = -a$

1η περ. $\alpha > 0$



2η περ. $\alpha < 0$ $-a = -(-|a|) = +|a|$



~ . ~

27.1 (i) $x'x$ άξονας συμμετρίας $E(P/2, 0)$ $E(-1,0)$

$P/2 = -1 \Rightarrow p = -2$ $y^2 = 2px \xRightarrow{p=-2} \boxed{y^2 = -4x}$

(ii) $x'x$ άξονας συμμετρίας $\delta: x = \frac{1}{2}$

$\delta: x = \frac{-P}{2} \Rightarrow P = -1$ $y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = -2x$

(iii) $x'x$ άξονας συμμετρίας

$$y^2 = 2px$$

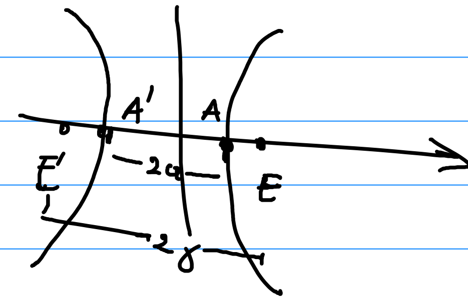
διέρχεται $A(1,2)$ δηλ. το A ικανοποιεί την εξίσωση της παραβολής. Με αντικατάσταση

$$2^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow 4 = 2p \Rightarrow p = 2$$

$$\boxed{y^2 = 4x}$$

31.1 i) $E'(-13,0)$, $E(13,0)$

$A'(-5,0)$, $A(5,0)$



$\gamma = 13$

$\alpha = 5$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$b^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 13^2 - 25 = (13-5)(13+5)$$
$$= 8 \cdot 18 = 144$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$$

ii) $E'(-\sqrt{5}, 0)$ $\quad E(\sqrt{5}, 0)$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$M(2\sqrt{2}, 1)$

$$\gamma = \sqrt{5}$$

$b^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5 - a^2} = 1$$

Διέρχεται $(2\sqrt{2}, 1)$, ικανοποιεί την εξίσωση.

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{1^2}{5-\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{\alpha^2} - \frac{1}{5-a^2} = 1$$

$$8(5-a^2) - a^2 = a^2(5-a^2) \Leftrightarrow 40 - 8a^2 - a^2 = 5\alpha^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 14\alpha^2 + 40 = 0$$

διτετράγωνη εξίσωση: θέτουμε $\kappa = \alpha^2$

$\kappa^2 - 14\kappa + 40 = 0 \iff$ $\Delta = 14^2 - 4 \cdot 40 = 36$

$\kappa_{1,2} = \dfrac{14 \pm 6}{2} = \begin{cases} 10 \\ 4 \end{cases}$

παρένθεση

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

άρα $\alpha^2 = 10$ ή $\alpha^2 = 4$

$\gamma = \sqrt{5} \Rightarrow \gamma^2 = 5$ $\boxed{\text{αφού } \gamma > \alpha \Rightarrow \gamma^2 > \alpha^2}$

συνεπώς η λύση $\alpha^2 = 10$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ

$$\boxed{1.\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1}$$

Πραγματικές συναρτήσεις

Έστω

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 5$$

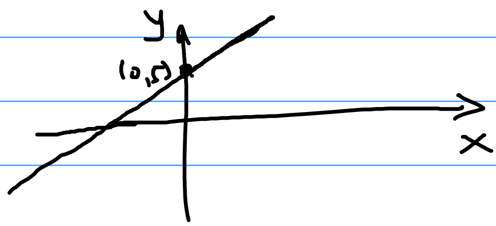
$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

Σε σύστημα καρτεσιανών συντ/νών θέτω

$$y = f(x)$$

οπότε.

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y = 3x+5\}$$



Πράγματι

ο γ.τ. των σημείων της ευθείας

$$y \underbrace{-3x-5}_{-f(x)} = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} Ax + By + C = 0 \\ |A| + |B| \neq 0 \end{array} \right)$$

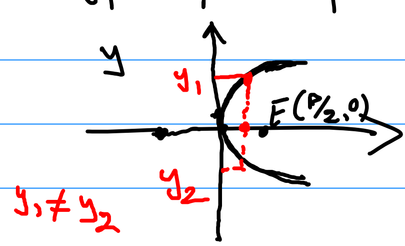
είναι το Graph(f).

~ . ~

Ο γ.τ. μιας τυχούσας εξίσωσης $f(x,y) = 0$

δεν είναι πάντα γράφημα μίας πραγματικής συνάρτησης

διότι



η παραβολή του σχήματος είναι ο γεωμ. τόπος της εξίσωσης $y^2 - 2px = 0$

αλλά δεν είναι το γράφημα μιας συνάρτησης γιατί σε κάποια $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούν δύο τιμές του y

Επομένως, δεν υπάρχει συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας η παραβολή να είναι Graph(f)

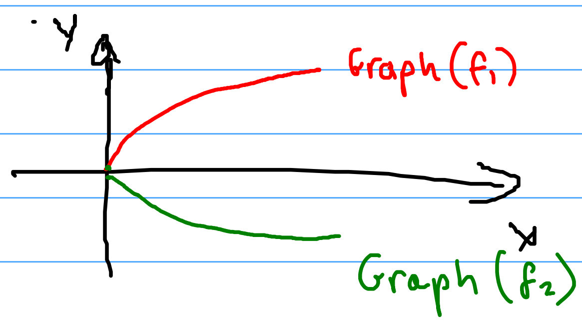
Συγκεκριμένα, η παραβολή του παραδείγματος αντιστοιχεί σε δύο συναρτήσεις

$$y^2 = 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$$

Η μία συνάρτηση είναι η $f_1(x) = \sqrt{2px}$

άλλη συνάρτηση είναι η $f_2(x) = -\sqrt{2px}$

$p > 0$



~ · ~

άσκηση

Δείξτε ότι ο γ.τ. της εξίσωσης $|y| - x = 0$ δεν είναι συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

$|y| = x$ (1)

Θα πρέπει $x \geq 0$

Αν $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$, η (1) γράφεται $y = x$.

Αν $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$, η (1) γράφεται $y = -x$

οπότε

για κάθε $x > 0$ υπάρχουν δύο τιμές του y για τις οποίες ικανοποιείται η (1)

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

δηλ. αν $x = \alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} y = a \\ ή \\ y = -a \end{cases}$

Όμως δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = y$ η οποία να απεικονίζει ένα συγκεκριμένο x $(x = a)$ σε δύο y $(y = a$ ή $y = -a)$.