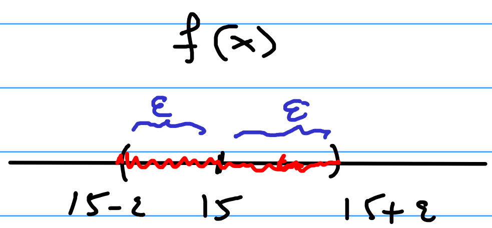
23/11

Όρια Πραγματικών συναρτήσεων

8.1

$f(x) = 3x$ $\qquad$ $f(x)$ τείνει στο 15 όταν το x τείνει στο 5.

$\cancel{f(5) = 3\cdot 5 = 15}$ λάθος



$\varepsilon > 0$ $\qquad$ $15-\varepsilon < f(x) < 15+\varepsilon$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon < f(x) - 15 < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$|f(x)-15| < \varepsilon$

- Το $f(x)$ είναι ε-κοντά στο 15

Αντίστοιχα, για είναι το όριο της f το 15 καθώς το x τείνει στο 5 θα πρέπει το x να είναι κοντά στο 5

- Το x είναι δ-κοντά στο 5, $\delta > 0$ αν $|x-5| < \delta$

Έστω ότι $|f(x) - 15| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |3x-15| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-5| < \frac{\varepsilon}{3}$

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ τ.ω.

αν $0 < |x-5| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ τότε $|f(x)-15| < \varepsilon$

$f(x) = x^2$ τείνει στο 9 για x να τείνει στο 3

$$|f(x) - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x-3)(x+3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\boxed{\text{Αν } |x-3| < 1} \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

και $2+3 < x+3 < 4+3 \Leftrightarrow 5 < x+3 < 7$

$$\Rightarrow |x+3| < 7 \quad (2)$$

Από την (1) $|x-3| \cdot 7 < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$

Αν $\underbrace{|x-3| < 1 \text{ και } |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}}_{\text{πιο κοντά και αυστηρά.}}$ τότε $|x^2 - 9| < \varepsilon$

Θέτω $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ τέτοιο ώστε αν $|x-3| < \delta$ τότε $|f(x) - 9| < \varepsilon$

$f(x) = x$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta, \quad \delta = \varepsilon \quad \text{τ.ω.} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

δ=δ(ε), έστω

$$\Rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

~ . ~

$f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot x =$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ τυχών πραγμ. αριθμός

$$= \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$$

~ . ~

$f(x) = 3x^2$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 3 \cdot x^2 = 3 \cdot \lim_{x \to a} x^2 = 3a^2$$

$x \neq 1$

$f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

11. i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x-1) + (x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^2 + 1 = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 1 =$$

$$= \lim_{x \to 1} x \cdot \lim_{x \to 1} x + 1$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$

$$\left.\begin{aligned} & x \neq 0 \\ & x + 1 \geq 0 \Rightarrow x > -1 \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Όμως, $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x+1} + 1) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+1} + 1 =$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 0}(x+1)} + 1 = 1 + 1 = 2$$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$x \neq 0 \quad 1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff$

$-1 \leq x \leq 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x\,(1+\sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} x}{\lim\limits_{x \to 0}(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{0}{2} = 0$$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

(iv) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - \overset{2^3}{8}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}$

$x \neq 2$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2+2x+4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4$$

$= 12$