25/11/2021

16.1

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \not\to 0 \quad \text{όταν} \quad x \to 0$$

Λύση

Ορσ. ορίου: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$ τ.ώ. $0<|x-a|<\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Άρα θ.δ.ό.

$\exists \varepsilon>0,\ \forall \delta>0,\ \exists x\in\mathbb{R}$, έστω x_0, τ.ώ. $|x_0-a|<\delta$ και $|f(x_0)-\ell|\geq\varepsilon$

συγκεκριμένα για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και για $x_0=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $k\in\mathbb{N}$

$\forall \delta>0$, $|x_0-0|<\delta$ και $\sin(1/x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$= \sin\pi/2 = 1 > \frac{1}{2}$

~ · ~

$a=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

16.2(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \quad (1)$$

Για να βρούμε το $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ εφαρμόζουμε την εξής

ιδιότητα:

Αν $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ και $\lim_{x\to m} f(x) = f(m)$

τότε $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(m)$

όπου θέτουμε

$g(x) = 3x$, οπότε $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$ οπότε $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

εξ υποθέσεως.

Οπότε,

$$\lim_{x\to 0} f(3x) = f(\lim_{x\to 0} 3x) = f(0) = a \quad ②$$

Επομένως

από ①, ② έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3\cdot a.$$

■

— · —

16 2.(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{bx} \cdot \frac{bx}{\sin bx}$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \quad ①$$

Έχουμε δείξει 15.2 (i) ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \alpha\cdot\alpha = \alpha^2$$

Οπότε, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha^2$ (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\beta x}} = \frac{1}{\alpha b}$$ (3)

Συνεπώς, από (1),(2),(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin bx} = \frac{\alpha}{b}\cdot\alpha^2\,\frac{1}{\alpha b} = \frac{\alpha^2}{b^2}$$

$\blacksquare$

~·~

27.1)

Ν.δ.ό.

(i) $\lim_{x\to +\infty} x^\nu = +\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Πρέπει ν.δ.ό.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>\delta \Rightarrow x^\nu>\varepsilon$

$x^\nu>\varepsilon \Rightarrow x>\sqrt[\nu]{\varepsilon}$

$\delta=\sqrt[\nu]{\varepsilon}$ οπότε $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\sqrt[\nu]{\varepsilon}$ τ.ω.

αν $x>\delta \Rightarrow x^\nu>\varepsilon$.

(ii) Ν.δ.ό $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0 \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

Πρέπει ν.δ.ό.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. αν $x > \delta$ τότε $\left| \frac{1}{x^\nu} - 0 \right| < \varepsilon$

Έστω ότι $\left| \frac{1}{x^\nu} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|^\nu} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x|^\nu > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}} \ (<0) \\ \text{ή} \\ x > \frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}} \end{cases}$

Άρα, θέτουμε $\delta = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}} > 0$ οπότε

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}}$, τ.ω.

αν $x > \frac{1}{\sqrt[\nu]{\varepsilon}}$ τότε $\left| \frac{1}{x^\nu} \right| < \varepsilon$

$\blacksquare$