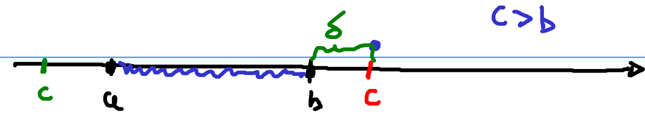

Υποθέτω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c>b$

Αν $x \neq c$ τότε εγγύτερο $x \in \{c\} \cup [a,b]$ θα απέχει από το c απόσταση $\delta \geq (c-b)$

Άρα το x δεν μπορεί να είναι κοντά στο c όσο θέλουμε, δηλαδή να τείνει στο c

Επομένως, το όριο στο c της $f: \{c\} \cup [a,b] \to \mathbb{R}$ δεν είναι καλώς ορισμένο.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \text{ τ.ώ. } \forall x \in \mathbb{R}, \ \underbrace{0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}_{\text{δεν ικανοποιείται } \forall x \in \mathbb{R} \ 0<|x-c|<|c-b|}$$

διότι η f δεν ορίζεται σε αυτά τα σημεία.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το όριο δεν είναι καλώς ορισμένο.

~ • ~

<u>Ορσ.</u> Ένα σημείο $d \in \mathbb{R}$ θα ονομάζεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$, $x \neq d$ τ.ώ. $d - \varepsilon < x < d + \varepsilon \Leftrightarrow |x - d| < \varepsilon$

Στην προηγούμενη άσκηση το $c \in \mathbb{R}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του Π.Ο. της συνάρτησης

Γενικεύοντας, λοιπόν, για να είναι το όριο μιας συνάρτησης καλώς ορισμένο σε κάποιο σημείο θα πρέπει το σημείο αυτό να είναι σημείο συσσώρευσης.

Τα σημεία ενός συνόλου που δεν είναι σημεία συσσώρευσης ονομάζονται απομονωμένα.

— . —

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

Ερώτηση: είναι το $x=0$ σ.σ. του Π.Ο. της συνάρτησης;

ΝΑΙ!

Τα σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου A <u>δεν</u> ανήκουν κατ' ανάγκην στο A.

12.1

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Θέτω $h = x-a$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 0<|h|<\delta \Rightarrow |f(a+h)-\ell|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 0<|h-0|<\delta \Rightarrow |f(a+h)-\ell|<\varepsilon$

άρα $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$

~·~

16.2 viii

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$\sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \cdot \sin h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\cdot\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos x\cdot\sin h}{h}\right) \quad (1)$$

② $\lim\limits_{h\to 0} \cos x \dfrac{\sin h}{h} = \cos x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = \alpha \cos x$ $\left(\text{δεδομένου ότι } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \alpha \ (=1) \right)$

③ $\lim\limits_{h\to 0} \sin x \dfrac{\cosh - 1}{h} = \sin x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cosh - 1}{h}$

Θ.δ.ό το όριο $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cosh - 1}{h} = 0$

Έστω $A = \cosh - 1 = \cosh - (\sin^2 h + \cos^2 h) = -\cosh(\underbrace{\cosh - 1}_{A}) - \sin^2 h$

$(1+\cosh) A = -\sin^2 h \Rightarrow A = -\dfrac{\sin^2 h}{1+\cosh}$ $(\cosh \neq -1)$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cosh - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{\sin^2 h}{h} \cdot \dfrac{1}{1+\cosh} \right)$ ④

Γνωρίζουμε $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

$\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

Από ④ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cosh - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(\sin h \cdot \dfrac{\sin h}{h} \right) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{1+\cosh} \right) =$

$a \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} \cdot \dfrac{1}{1+\underbrace{\cos 0}_{1}} = 0$ ⑤

Επομένως ①, ②, ③, ⑤ έχουμε ότι

Παράγωγος της συνάρτησης ημίτονο

$$\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \alpha \cos x + 0 = \cos x}$$

[ΟΜΩΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \alpha = 1$]