16/12/2021

Θεώρημα Αν $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και I διάστημα $I \subseteq A$ και c εσωτερικό σημείο του I

- f'' συνεχής
- $f'(c) = 0$

τότε αν

1) $f''(c) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $c \in I$
2) $f''(c) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο $c \in I$
3) $f''(c) = 0$, το κριτήριο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Παράδειγμα: Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ $[-2, 2]$

ΛΥΣΗ

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 12$$

Η f'' είναι συνεχής διότι είναι πολυωνυμική συνάρτηση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x-1) - 12(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x-1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$f''(1) = 36 - 24 - 12 = 0$ αναποτελεσματικό.

$f''(-1) = 36 + 24 - 12 = 48 > 0$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορσ.

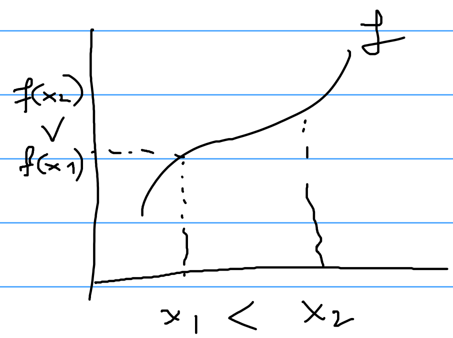
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται

1) (γνησίως) αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

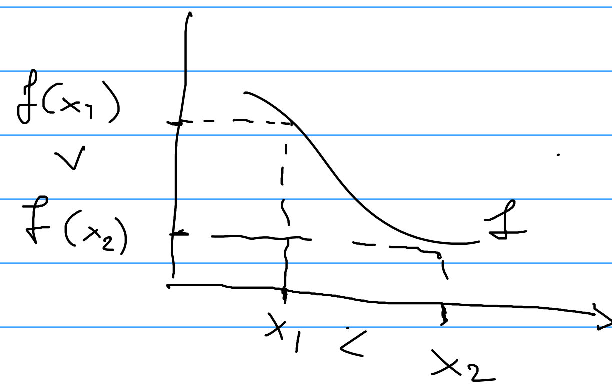
$(f(x_1) > f(x_2))$

2) (γνησίως) φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$(f(x_1) < f(x_2))$



γνησίως αύξουσα



γνησίως φθίνουσα

Θεώρημα: Έστω f συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα I και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του I

Τότε

1) αν $f'(x) \geq 0$, x εσωτερικό σημείο του I τότε η f αύξουσα στο I (αν $f'(x) > 0$, τότε f γνησίως αύξουσα)

Συμπέρασμα $c = -1$ η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο

$c = 1$ δεν μπορώ να πω τίποτα με βάση του προηγούμενου θεώρ.

Ωστόσο

x	-1		0		1	
f'	0	$+$		0		$+$
f''	48				0	

η συνάρτηση δεν έχει τοπικό ακρότατο.

$f'(0) = 12 > 0$

$f'(2) > 0$

- αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I τότε f φθίνουσα στο I

($f'(x) < 0$, f γνησίως φθίνουσα).

Παράδειγμα

$f(x) = x^3 + x + 1$ $\quad$ Π.Ο. $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

Άρα η f γνησίως αύξουσα.

1) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ στο $[-2,2]$

$$f'(x) = \left(x\sqrt{4-x^2}\right)' = (x)'\cdot\sqrt{4-x^2} + x\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

$$= \sqrt{4-x^2} + x\left((4-x^2)^{1/2}\right)' = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}x\,(4-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x)$$

$$\boxed{(g^k)' = k\,g^{k-1}\cdot g'}$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$ $x \neq 2$, $x \neq -2$

$$= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \\ \Delta = b^2-4\alpha\gamma \\ x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\end{gathered}}$$

άρα

$f'(\sqrt{2}) = 0$

$f'(-\sqrt{2}) = 0$

$(-2,2)$

f'

x	-2		$-\sqrt{2}$		$+\sqrt{2}$		2
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
			Τοπ min		Τοπ max		
f		↘		↗		↘	

Στο διάστημα $(-2, -\sqrt{2})$

$f'(x) < 0$ για $x = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$

και η f είναι γνησίως ↘ φθίνουσα

$$f'\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{2\left(2-\frac{9}{4}\cdot 2\right)}{\sqrt{\ }} < 0$$

Στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f'(x) > 0$

και η f είναι γνησίως αύξουσα $\uparrow$

για $x = 0$

$$f'(0) = \frac{2(2-0)}{\sqrt{}} > 0$$

Στο διάστημα $(\sqrt{2}, 2)$

$f'(x) < 0$

και η f είναι

γνησίως φθίνουσα $\downarrow$.

για $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{2\left(2-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2\right)}{\sqrt{4-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2\left(2-\frac{9}{4}\cdot 2\right)}{\sqrt{\ldots}}$$

$$= \frac{2\left(2-\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{\ldots}} < 0$$