Μέγιστα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x$

Χωρίς Απόδειξη:

$$(\sin x)' = \cos x$$

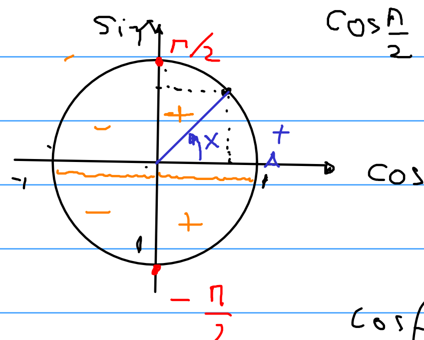
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

~ . ~

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x.$

$\Pi.O. = \mathbb{R}$

$f'(x) = (\sin x)' = \cos x =$



$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \pi/2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) > 0 \qquad 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) < 0 \qquad 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \qquad x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

Για $x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad f \nearrow$

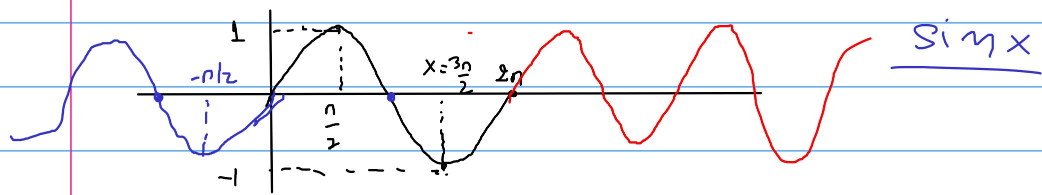
$x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ $\quad f \swarrow$

και $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ η f έχει τοπικό ελάχιστο

$f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

για $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ η f έχει τοπικό μέγιστο,

$$f\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$



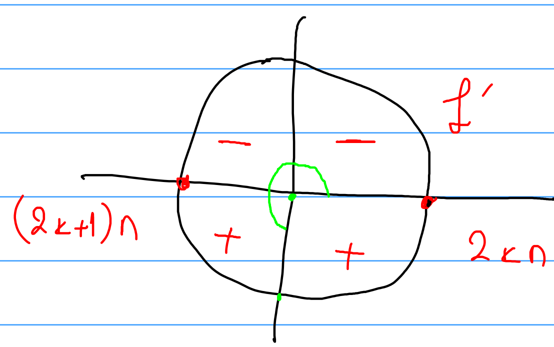
Ομοίως

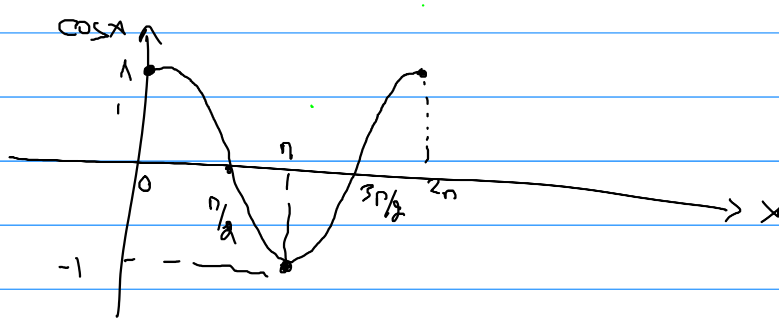
$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \kappa\pi \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

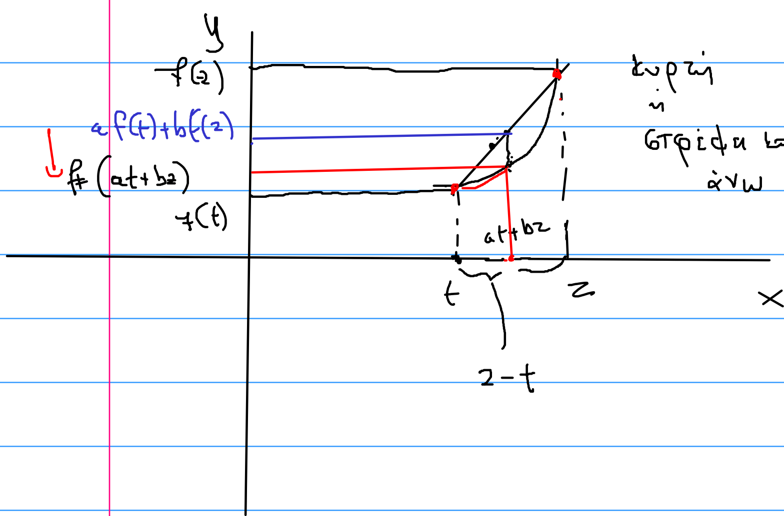




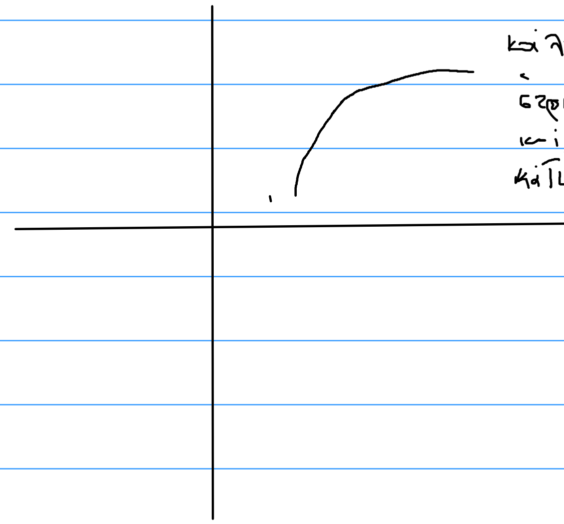
$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

Κοίλες και κυρτές συναρτήσεις



κυρτή
ή
στρέφει κοίλα
άνω



κοίλη
ή
στρέφει
κοίλα
κάτω.

Για κάθε $a>0$, $b>0$ με $a+b=1$

$$f(at+bz) \leq a f(t) + b f(z) \qquad (1)$$

$a = 1-b$, $\alpha>0$

$$at+bz = (1-b)t + bz$$
$$= t + b(z-t) \qquad b>0,\ b<1$$

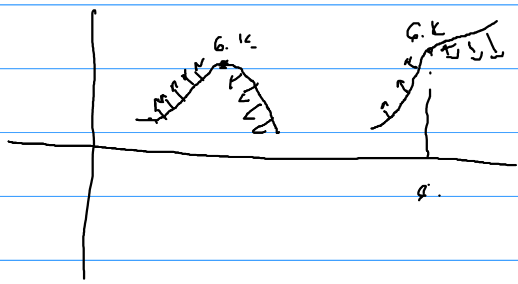
Ομοίως

$$af(t) + bf(z) = f(t) + b\big(f(z)-f(t)\big)$$

Θεώρημα Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I ανοικτό διάστημα (a,b) και f δύο φορές παραγωγίσιμη στο I

- f κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) ανν $f''(x) \geq 0$ $x \in I$
- f κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) ανν $f''(x) \leq 0$ $x \in I$

Ορσ. Αν $c \in I$ και για $x = c$ η f'' αλλάζει πρόσημο τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x = c$.



Παράδειγμα

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$\Pi.O. = \mathbb{R}$

- $f(x) = x^3 - 3x^2$
- $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
- $f''(x) = 6x - 6$

Θα βρω πρώτα τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης, της 1ης και 2ης παραγώγου

- $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 3$

  $f(0) = 0$ $\quad f(3) = 0$

- $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$

  $f'(0) = 0$ $\quad f'(2) = 0$

• $6x-6=0 \Rightarrow x=1$

$f''(1)=0$

Θα ελέγξω το πρόσημο της f', f'' στα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f			0 max		-2		-4 min		0		
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

$f'(-1)=3+6=9>0$

$f'(1)=3-6=-3<0$

$f'(3)=27-18=9>0$

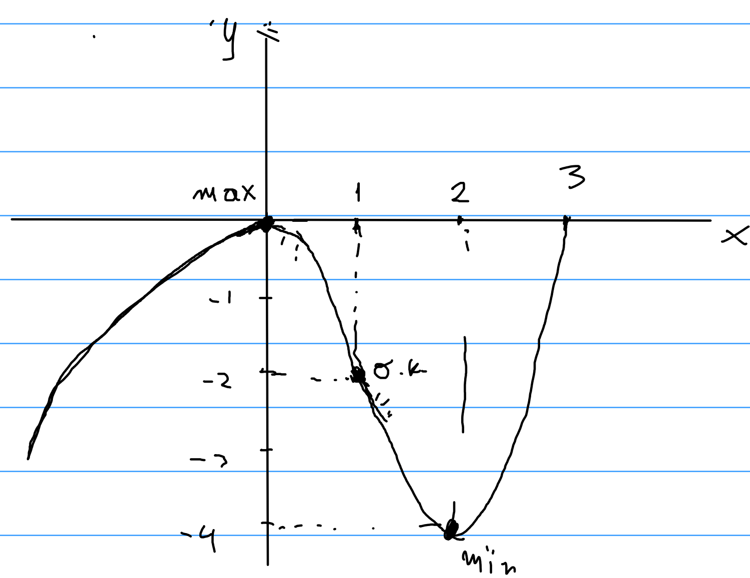
Άρα $x=0$ η συνάρτηση τοπικό μέγιστο

$x=2$ η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο

$f''(0)=-6<0$ άρα στο $(-\infty,1)$ η f είναι κοίλη

$f''(2)=12-6=6>0$ άρα στο $(1,+\infty)$ η f είναι κυρτή

$y=f(x)$



$f(x) = \tan x$ $\qquad\qquad$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Pi.O. = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad\qquad$ $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

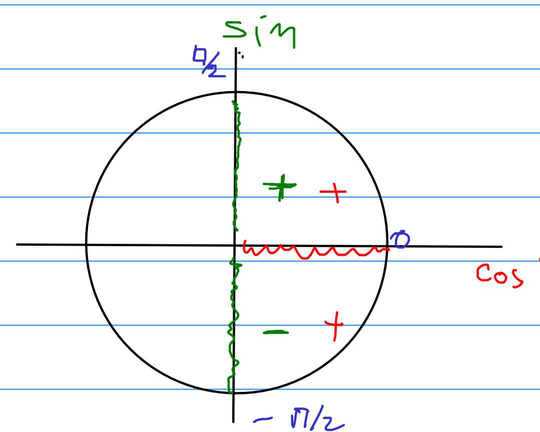
$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{-(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{-2\cos x(\cos x)'}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

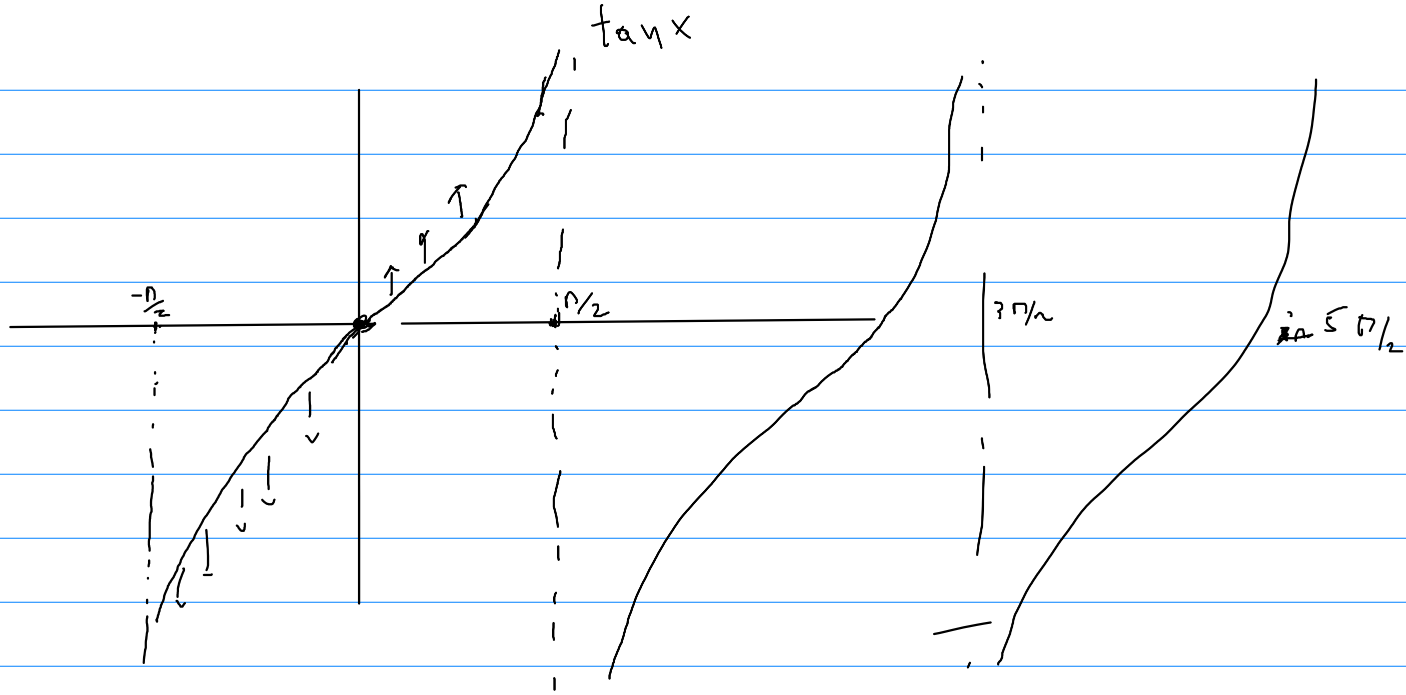
Θα βρούμε τα χαρακτηριστικά σημεία της f στο Π.Ο. της.

- $\tan(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ εφόσον το $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
- Δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f'(x) = 0$ άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
- $f''(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
f			0		
f'		$+$		$+$	
f''		$-$	0	$+$	



Για $x = 0$ έχουμε σημείο καμπής.



Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)=x^2-8\sqrt{x}$ στο σημείο $x=4$ $\quad x\geq 0$.

$y-y_0=m(x-x_0)$ η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από σημείο (x_0,y_0)

$f(4)=4^2-8\sqrt{4}=16-16=0$ άρα λοιπόν η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y-0=m(x-4)$$

Γνωρίζουμε ότι η κλίση της εφαπτομένης της f σε σημείο a του Π.Ο. της είναι η $f'(a)$

άρα για $x=4$ θα υπολογίσω της $f'(4)$

$$f'(x)=(x^2-8\sqrt{x})'=2x-8\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x\neq 0$$

άρα $f'(4)=8-8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}=6$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y=6x-24$