11/1/2022

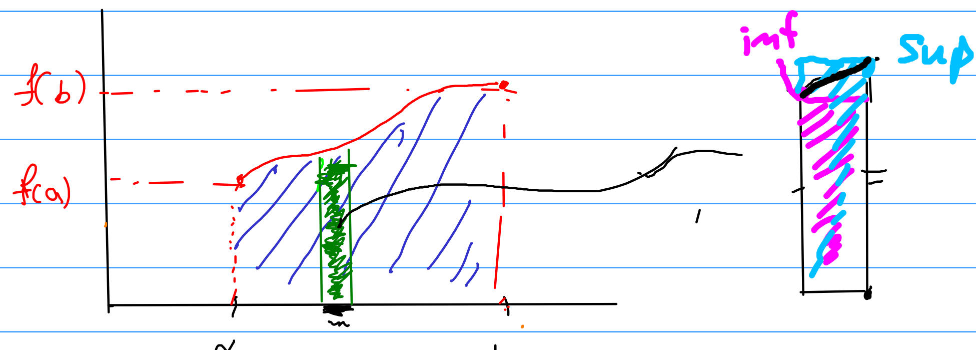
Ολοκληρώματα.

1) Εποπτική προσέγγιση

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ (παραδοχή για λόγους ευκολίας)

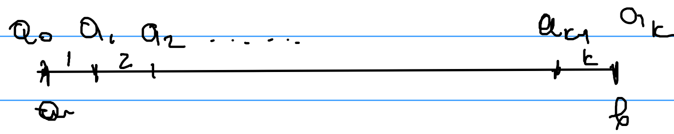
f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$

Γράφημα



Πρόβλημα: Υπολογισμός εμβαδού γραμμοσκιασμένου χωρίου

1)



Διαμερίζω το ευθ. τμήμα σε k-μέρη

2) Ορίζουμε ορθογώνια με τα k ευθ. τμήματα και ύψος

$$\mu_n = \inf\{ f(x) : x \in [a_{n-1}, a_n] \} \qquad n = 1, \dots, k$$

$$M_n = \sup\{ f(x) : x \in [a_{n-1} - a_n] \}$$

3) Το εμβαδό κάθε μικρού ορθογωνίου είναι είτε:

α) $\mu_n (a_n - a_{n-1})$ $\quad n = 1, \dots, k$

β) $M_n (a_n - a_{n-1})$

4) Λαμβάνουμε, έτσι, δύο προσεγγίσεις του ζητούμενου εμβαδού,

Σ (sum)

καθ' υπερβολή προσέγγιση

$$U = M_1(a_1 - a_0) + M_2(a_2 - a_1) + \dots + M_k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{n=1}^{k} M_n(a_n - a_{n-1})$$

κατ' έλλειψη προσέγγιση

$$L = \mu_1(a_1 - a_0) + \mu_2(a_2 - a_1) + \dots + \mu_k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{n=1}^{k} \mu_n(a_n - a_{n-1})$$

5) Τι γίνεται αν το $k \to \infty$

Τα αθροίσματα U, L προσεγγίζουν μία μοναδική τιμή

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

Βοηθητικές έννοιες

1) Διαμέριση:

Ονομάζουμε διαμέριση P ενός διαστήματος $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών $P=\{a_0, \dots a_k\}$ τ.ώ.

α) $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_k = \beta$

β) $a_{n-1} < a_n \quad n=1,\dots,k$

2) Λεπτότητα της διαμέρισης P, $\lambda(P)$

$$\lambda(P) = \max\{d_1, \dots, d_k)$$

$$d_n = a_n - a_{n-1} \qquad n=1,\dots,k$$

μήκος του διαστήματος $[a_{n-1}, a_n]$

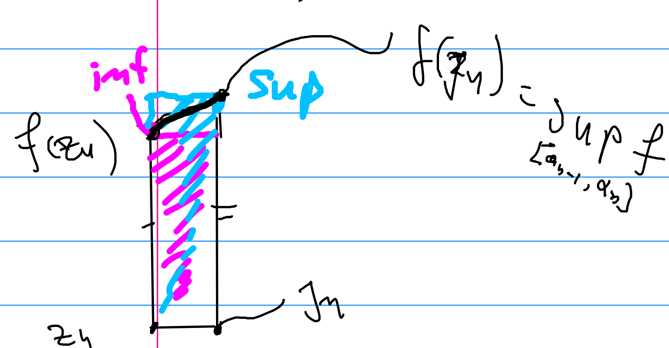
3) Άνω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση P

$$U(f,P) = \sum_{n=1}^{k} M_n (a_n - a_{n-1})$$

όπου $M_n = \sup\{f(x) : x \in [a_{n-1}, a_n]\}$ = επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής =

$n=1,\dots,k$

$= f(\xi_n)$, $\xi_n \in [a_{n-1}, a_n]$



4) Κάτω άθροισμα της f ως προς διαμέριση P

$$L(f,P) = \sum_{n=1}^{k} m_n (a_n - a_{n-1})$$

$$m_n = \inf\{f(x) : x \in [a_{n-1}, a_n]\} = f(z_n)$$

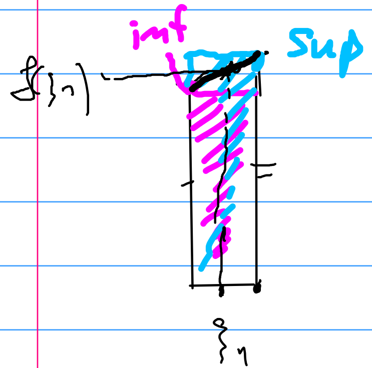
$z_n \in [a_{n-1}, a_n]$

5) Ενδιάμεσο άθροισμα της f ως προς P

$$S(f,P) = \sum_{n=1}^{k} f(\xi_n)(a_n - a_{n-1})$$

για τυχούσα επιλογή σημείο ξ_n

$$a_{n-1} \le \xi_n \le a_n$$



$$L(f,P) \le S(f,P) \le U(f,P)$$

Θεώρημα ύπαρξης ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a,b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$. Θεωρήστε μια ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του διαστήματος $[a,b]$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) =$$

$$= I(f) \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: ότι ο $I(f)$ δεν εξαρτάται από την ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αρκεί $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$.

Ορισμός

Ο πραγματικός αριθμός $I(f)$ για μια συνάρτηση συνεχή στο $[a,b]$ ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a μέχρι το b

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

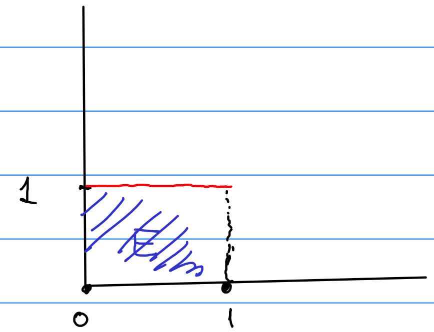
$a; b$: άκρα ολοκλήρωσης

x : μεταβλητή ολοκλήρωσης

f: Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$

Παραδείγματα

1) $f:[0,1]\to \mathbb{R}$, $f(x)=1$



Συνεχής συνάρτηση

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = \text{εμβαδόν } E = (1-0)\cdot 1 = 1$$

Για κάθε διαμέριση $P = \{0=a_0, a_1, \dots, a_k=1\}$ $\alpha_{n-1} < \alpha_n$, $n=1,\dots,k$.

$$U(f,P) = \sum_{n=1}^{k} M_k (a_n - a_{n-1}) = \sum_{n=1}^{k} 1\cdot(a_n - a_{n-1})$$

$$= (\cancel{\alpha_1} - \alpha_0) + (\cancel{\alpha_2} - \cancel{\alpha_1}) + \cancel{\dots} + (a_k - \cancel{\alpha_{k-1}})$$

$$= \alpha_k - \alpha_0 = 1$$

$$L(f,P) = 1$$

$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = I(f)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$f(x)=1$, $x\in[a,b]$

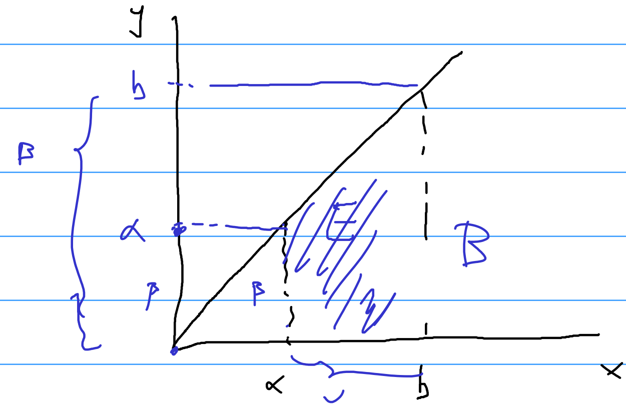
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b-a$$

2ο παράδειγμα

$f(x) = x \qquad x \in [a,b]$

η f είναι συνεχής

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} x = x_0$



$\int_\alpha^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx$ = Εμβαδόν $E = \dfrac{(\alpha+\beta)(\beta-a)}{2} =$

↓

Τραπέζιο

$E_{τραπ.} = \dfrac{(B+\Delta)\upsilon}{2}$

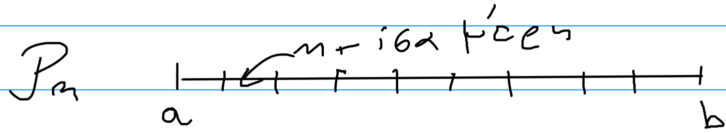
$= \frac{1}{2}(b^2-\alpha^2)$

~ - ~

Πράγματι έστω η ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$P_n = \{ a, \alpha + 1\cdot\frac{b-a}{n}, \alpha + 2\cdot\frac{b-a}{n}, \dots, \alpha + (n-1)\frac{b-a}{n}, b \}$

Κάθε διαμέριση της ακολουθίας P_n χωρίζει το $[a,b]$ σε n ίσα μέρη $n=1,2,3,4\dots$



Για το τυχόν υποδιάστημα του $[a,b]$

$\alpha_k - \alpha_{k-1} = \alpha + k\frac{b-a}{n} - \left(\alpha + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) =$

$$a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \lambda(P_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[a \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot k \right] =$$

κοινός παράγοντας

$$= a \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot 1 + a \cdot \frac{(b-a)}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot 2 + \dots$$

$$+ a \cdot \frac{(b-a)}{n} + n \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2} = n \cdot a \frac{(b-a)}{n} +$$

$$\frac{(b-a)^2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \cancel{n} \cdot \frac{a(b-a)}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}}$$

$$= a(b-a) + \frac{n+1}{n} \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = a(b-a) + 1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Από Θεώρ.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$