

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ EINSTEIN PODOLSKY ROSEN;

Χρυσοβαλάντης Στεργίου

0.1. **Εισαγωγή.** Το επιχείρημα αποσκοπεί να δείξει ότι η κβαντική περιγραφή της πραγματικότητας ενός φυσικού συστήματος όπως δίνεται από το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι πλήρης. Το επιχείρημα διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1935 στο άρθρο A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" Phys. Rev. 47 (1935): 777-781. Μια απλούστερη εκδοχή του επιχειρήματος διατυπώθηκε το 1951 στο D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951. Η κριτική του Bohr στο επιχείρημα EPR παρουσιάστηκε στο άρθρο "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" Phys. Rev. 48, 696 (1935).

0.2. **Πληρότητα και πραγματικότητα.** Σύμφωνα με τους EPR, για να είναι μια θεωρία **πλήρης** θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη **αναγκαία συνθήκη**:

C: Κάθε στοιχείο της φυσικής πραγματικότητας θα πρέπει να αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο της φυσικής θεωρίας.

Επίσης, **ικανή συνθήκη** για να είναι κάτι **στοιχείο πραγματικότητας** είναι η εξής:

R: Αν, χωρίς καθόλου να διαταράξουμε το σύστημα, μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα (δηλαδή με πιθανότητα ίση με τη μονάδα) την τιμή μιας φυσικής ποσότητας, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο της φυσικής πραγματικότητας που αντιστοιχεί σε αυτή τη φυσική ποσότητα.

Παρατήρηση. Μια εφαρμογή της *R* είναι η εξής:

- Αν A είναι ένα φυσικό μέγεθος (παρατηρήσιμο) το οποίο αναπαρίσταται από κάποιον αυτοσυζυγή τελεστή \hat{A} , και, το διάνυσμα ψ που αναπαριστά την κατάσταση του συστήματος είναι ιδιοδιάνυσμα του \hat{A} με ιδιοτιμή a , τότε η τιμή του φυσικού μεγέθους A μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα χωρίς να διαταράξουμε το σύστημα (κανόνας Born). Επομένως, από την (*R*), για ένα σύστημα στην κατάσταση ψ υπάρχει ένα στοιχείο της φυσικής πραγματικότητας που αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος A .

Τι γίνεται αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος φυσικών μεγεθών A, B :

- Αν οι αντίστοιχοι τελεστές μετατίθενται, $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$, τότε για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών a, b των τελεστών \hat{A}, \hat{B} αντίστοιχα, υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα ψ των \hat{A}, \hat{B} που αντιστοιχεί σε αυτές τις ιδιοτιμές. Άρα, αν η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα ψ , μπορούμε να προβλέψουμε με απόλυτη βεβαιότητα την τιμή των φυσικών μεγεθών A, B με βάση κανόνα του Born και από την (*R*), για ένα σύστημα στην κατάσταση

ψ υπάρχουν στοιχεία της φυσικής πραγματικότητας που αντιστοιχούν στα φυσικό μεγέθη A, B .

- Αν οι αντίστοιχοι τελεστές δεν μετατίθενται, $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$, τότε τα κοινά ιδιοδιανύσματα των τελεστών \hat{A}, \hat{B} , αν υπάρχουν, ανήκουν στον πυρήνα του μεταθέτη των \hat{A}, \hat{B} , $\ker [\hat{A}, \hat{B}]$.

Στην περίπτωση που ο μεταθέτης $[\hat{A}, \hat{B}]$ είναι πολλαπλάσιο της μονάδας I – όπως στην περίπτωση του μεταθέτη θέσης-ορμής $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar I$ – ισχύει ότι $\ker [\hat{A}, \hat{B}] = \{0\}$. Άρα, σε αυτή την ειδική περίπτωση οι δύο τελεστές δεν έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα.

Προσοχή όμως! Ο μεταθέτης δύο ερμιτιανών τελεστών \hat{A}, \hat{B} μπορεί να είναι πολλαπλάσιο της μονάδας I μόνον όταν οι τελεστές αυτοί δεν είναι φραγμένοι (Wintner, 1947)

Επίσης, $\ker [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_k] = \{0\}$, για τους πίνακες Pauli, σ_i , $i = 1, 2, 3$ που περιγράφουν τις συνιστώσες του spin ενός σωματιδίου με spin 1/2 (δείτε παρακάτω).

Επομένως, στις παραπάνω ειδικές περιπτώσεις, για κανένα ζεύγος ιδιοτιμών a, b των τελεστών \hat{A}, \hat{B} δεν υπάρχει κατάσταση του συστήματος (κοινό ιδιοδιάνυσμα των \hat{A}, \hat{B}) στην οποία να μπορούμε να προβλέψουμε με απόλυτη βεβαιότητα την τιμή των φυσικών μεγεθών A, B με βάση κανόνα του Born.

Αντίθετα, στην περίπτωση του μονοηλεκτρονικού ατόμου, οι συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής, $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$, ικανοποιούν τη σχέση $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ και υπάρχουν διαφορετικές ιδιοκαταστάσεις $|n, 0, 0\rangle$ του ατόμου για τις οποίες ισχύει $\hat{L}_z |n, 0, 0\rangle = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, μολονότι οι \hat{L}_x, \hat{L}_y δεν μετατίθενται έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα τα οποία ανήκουν στον μη τετριμμένο πυρήνα του \hat{L}_z .

0.3. Το επιχείρημα EPR. Το επιχείρημα EPR προκύπτει από το ελάχιστο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής και αποτελείται από τρεις προκείμενες,

- (1) $INC \vee NSV$
- (2) $LOC \supset \sim NSV$
- (3) LOC

οι οποίες συμπεραίνουν παραγωγικά: $C. INC$

όπου

INC: Η κβαντική περιγραφή ενός συστήματος από το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι πλήρης.

NSV: Παρατηρήσιμα που αναπαρίστανται από μη μετατιθέμενους τελεστές και ο πυρήνας του μεταθέτη τους είναι το μηδενικό διάνυσμα δεν μπορούν να έχουν ταυτόχρονη πραγματικότητα.

LOC Αν δύο συστήματα είναι απομονωμένα μεταξύ τους έτσι ώστε να μην αλληλεπιδρούν, καμιά πραγματική αλλαγή στο δεύτερο σύστημα δεν μπορεί να λάβει χώρα ως συνέπεια οποιασδήποτε επέμβασης στο πρώτο σύστημα.

0.4. **Δικαιολόγηση της $INC \vee NSV$.** Οι EPR δείχνουν τη λογικώς ισοδύναμη πρόταση $\sim NSV \supset INC$:

Αν δύο παρατηρήσιμα A, B , τα οποία αντιστοιχούν σε τελεστές \hat{A}, \hat{B} που δεν μετατίθενται και $\ker [\hat{A}, \hat{B}] = \{0\}$, είχαν ταυτόχρονη πραγματικότητα ($\sim NSV$), υπάρχουν στοιχεία της πραγματικότητας τα οποία δεν αναπαρίστανται στη θεωρητική περιγραφή του συστήματος από το διάνυσμα κατάστασης ψ αυτού, διότι δεν υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα των \hat{A}, \hat{B} (INC).

0.5. **Δικαιολόγηση της $LOC \supset \sim NSV$.** Για να αποδείξουν τη συνεπαγωγή, οι EPR θεωρούν ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σωματίδια τα οποία αλληλεπιδρούν κατά τρόπον ώστε να διατηρείται η ολική ορμή του συστήματος σε ορισμένη κατεύθυνση και ακολούθως κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις απομακρυνόμενα κατά τρόπον ώστε να διατηρούνται οι σχετικές θέσεις τους ως προς τη διεύθυνση κίνησης. Σε αυτό το σύστημα μπορούμε να προβλέψουμε τη θέση του ενός σωματιδίου μετρώντας τη θέση του άλλου σωματιδίου καθώς και την ορμή του ενός σωματιδίου μετρώντας την ορμή του άλλου σωματιδίου. Λόγω της χωρικής απομάκρυνσης των σωματιδίων και της *LOC*, η μέτρηση οποιασδήποτε ποσότητας στο ένα σωματίδιο δεν διαταράσσει το άλλο σωματίδιο. Επομένως, από την (R) συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να προβλέψουμε ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή στο ένα σωματίδιο πραγματοποιώντας μετρήσεις στο άλλο σωματίδιο χωρίς να διαταράσσουμε το πρώτο, δηλαδή, ($\sim NSV$).

0.6. **Η κριτική του Bohr.**

Βεβαίως, σε περιπτώσεις όπως αυτή που μόλις εξετάσαμε [EPR] δεν υπάρχει κανένα ζήτημα μηχανικής διαταραχής του υπό εξέταση συστήματος κατά τη διάρκεια του τελευταίου κρίσιμου σταδίου της μετρητικής διαδικασίας. Αλλά ακόμα και σε αυτό το στάδιο υπάρχει ουσιωδώς το ζήτημα κάποιας επίδρασης στις ιδιαίτερες συνθήκες που ορίζουν τους δυνατούς τύπους προβλέψεων που αφορούν τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος. Επειδή οι συνθήκες αυτές συνιστούν ένα ενδογενές στοιχείο της περιγραφής οποιουδήποτε φαινομένου στο οποίο ο όρος «φυσική πραγματικότητα» μπορεί ορθά να αποδοθεί, βλέπουμε ότι η επιχειρηματολογία των αναφερθέντων συγγραφέων δεν δικαιολογεί το συμπέρασμα ότι η κβαντομηχανική περιγραφή είναι ουσιωδώς μη πλήρης. (Bohr 1935)

Η κριτική του Bohr εστιάζεται στο κριτήριο της πραγματικότητας (R) και στο κατά πόσο ικανοποιείται η συνθήκη της μη διαταραχής στο σύστημα των δύο σωματιδίων που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα των EPR. Καταρχάς, ο Bohr αποδέχεται ότι δεν

υπάρχει μηχανική επίδραση ανάμεσα σε χωρικά απομακρυσμένα φυσικά συστήματα. Ωστόσο, διαπιστώνει ένα άλλο είδος διαταραχής το οποίο σχετίζεται με την επιλογή του παρατηρήσιμου που μετράμε κάθε φορά και τις αντίστοιχες προβλέψεις που μπορούμε να κάνουμε.

Πράγματι, η απόρριψη σε κάθε πειραματική διάταξη της μιας ή της άλλης από τις δύο όψεις της περιγραφής των φυσικών φαινομένων, – ο συνδυασμός των οποίων χαρακτηρίζει τη μέθοδο της κλασικής φυσικής και οι οποίες, άρα, μπορούν να θεωρηθούν συμπληρωματικές μεταξύ τους – εξαρτάται ουσιαστικά από την αδυναμία, στο πεδίο της χβαντικής θεωρίας, να ελέγξουμε με ακρίβεια την αντίδραση του αντικειμένου στα όργανα μέτρησης, δηλαδή τη μεταφορά ορμής στην περίπτωση της μέτρησης της θέσης, και της μετατόπισης στην περίπτωση της μέτρησης της ορμής. (Bohr 1935)

Γι αυτό, έχοντας μετρήσει πρώτα τη θέση του ενός σωματιδίου, οι EPR μπορούν να προβλέψουν τη θέση του άλλου σωματιδίου, αλλά όχι την ορμή του, ενώ όταν ακολουθώς μετρούν την ορμή του πρώτου σωματιδίου και προβλέπουν την ορμή του άλλου, διαταράσσουν την προηγούμενη μέτρησης της θέσης του και συνακόλουθα, την αντίστοιχη πρόβλεψη της θέσης του άλλου σωματιδίου. Γι αυτό ο Bohr αναφέρει ότι «υπάρχει ουσιαστικά το ζήτημα κάποιας επίδρασης στις ιδιαίτερες συνθήκες που ορίζουν τους δυνατούς τύπους προβλέψεων που αφορούν τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος.»

Επειδή οι περιορισμοί αυτοί αποτελούν «ενδογενές στοιχείο της περιγραφής οποιουδήποτε φαινομένου», όπως επισημαίνει ο Bohr, η σημασία του όρου «φυσική πραγματικότητα» δεν εννοείται ορθά από τους EPR εφόσον αποδίδεται στο φυσικό σύστημα και μόνο, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η πράξη της παρατήρησης. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει στο άρθρο του 'The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory.' (1928)

... το χβαντικό αίτημα συνεπάγεται ότι κάθε παρατήρηση των ατομικών φαινομένων θα περιλαμβάνει κάποια αλληλεπίδραση με τον ενεργούντα την παρατήρηση την οποία δεν μπορούμε να παραγνωρίσουμε. Αντίστοιχα, κάποια ανεξάρτητη πραγματικότητα με τη συνήθη φυσική σημασία δεν μπορεί να αποδοθεί ούτε στα φαινόμενα ούτε στον ενεργούντα την παρατήρηση.

Επομένως, το συμπέρασμα των EPR για τη μη πληρότητα της χβαντικής περιγραφής εδράζεται σε μια εσφαλμένη θεώρηση της φυσικής πραγματικότητας η οποία αποκόπτει το φυσικό σύστημα που εξετάζουμε από τις συνθήκες παρατήρησής του και οδηγεί στη μη συμπερίληψη της διαταραχής που προκύπτει από την αλληλεπίδραση του συστήματος με τη μετρητική συσκευή κατά την εξέταση του κατά πόσο ικανοποιείται το κριτήριο της πραγματικότητας (R).

0.7. Η εκδοχή του Bohm για το επιχείρημα EPR. Ο Bohm διατύπωσε το επιχείρημα EPR εξετάζοντας τη διάσπαση ενός διατομικού μορίου με spin 0 σε δύο άτομα με spin $\hbar/2$. Το spin είναι ένα μέγεθος της κβαντικής φυσικής. Το εισήγαγε για πρώτη φορά ο W. Pauli το 1925 για να περιγράψει ένα εσωτερικό βαθμό ελευθερίας χαρακτηρίζοντάς το ως «κλασικά μη περιγράψιμη διτιμία». Η κλασική ερμηνεία του spin ως μέγεθος που περιγράφει την ιδιοπεριστροφή του ηλεκτρονίου, σε αντιδιαστολή με την τροχιακή στροφορμή που περιγράφει την κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, ήταν μια ερμηνευτική πρόταση του R. Kronig και, ανεξάρτητα, των S. Goudsmit και G. Uhlenbeck την οποία δεν αποδέχονταν ο Pauli, ο οποίος θεωρούσε το spin γνήσια κβαντικό μέγεθος. Σωματίδια όπως το ηλεκτρόνιο και το νεutrίνο λέμε ότι έχουν spin $1/2$ ή $\hbar/2$. Σε αυτή την περίπτωση, οι συντεταγμένες του spin του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αναπαρίστανται μαθηματικά από τους τελεστές $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$$

όπου $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ οι πίνακες του Pauli.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Για τους τελεστές του spin ισχύουν οι ακόλουθες μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$$

και για τους πίνακες του Pauli,

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$$

$$[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x$$

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y$$

Οι τελεστές των συνιστωσών του spin είναι αυτοσυζυγείς τελεστές με δύο ιδιοτιμές, $\pm \frac{\hbar}{2}$, οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο προβολές του spin σε κάποιον επιλεγμένο άξονα (x ή y ή z). Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές είναι,

$$|+\rangle = |up\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad |-\rangle = |down\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα των δύο σωματιδίων που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα EPR, προκύπτει από τη διάσπαση ενός διεγερμένου μορίου υδρογόνου σε ένα ζεύγος ατόμων υδρογόνου μέσω μια διαδικασίας κατά την οποία διατηρείται η ολική στροφορμή ($J = L + S$). Τα

δύο ατομικά μέρη διαχωρίζονται μετά την αλληλεπίδραση (διάσπαση) και απομακρύνονται κινούμενα προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Στη συνέχεια, σε κάθε πτέρυγα (σωματίδιο) μετρούνται δύο από τις συνιστώσες του spin σε κάθετες χωρικές κατευθύνσεις, π.χ. S_x, S_y . Οι μετρήσεις των συνιστωσών του spin παίζουν το ρόλο της θέσης και της ορμής στην αυθεντική εκδοχή του επιχειρήματος.

Λόγω του τρόπου προετοιμασίας της κατάστασης του συστήματος, για συγκεκριμένη κατεύθυνση (π.χ. τη x -συνιστώσα), τα δύο σωματίδια εκδηλώνουν αντίθετα spin έτσι ώστε το συνολικό spin του συστήματος στην κατεύθυνση αυτή να είναι μηδέν. Επομένως, με δεδομένο ότι τα χωρικά απομακρυσμένα συστήματα δεν αλληλεπιδρούν (*LOC*), είναι δυνατόν να προβλέψουμε την τιμή του spin ενός σωματιδίου του συστήματος, σε ορισμένη κατεύθυνση, μετρώντας την αντίστοιχη συνιστώσα στο δεύτερο σωματίδιο. Με αυτόν τον τρόπο διατυπώνεται η εκδοχή του Bohm για το επίχειρημα EPR.