Τι είναι η Κβαντική Σύμπλεξη;

Χρυσοβαλάντης Στεργίου

0.1. **Εισαγωγή.** Η **κβαντική σύμπλεξη** αποτελεί εκδήλωση της κβαντικής συμπεριφοράς σε σύνθετα φυσικά συστήματα. Προκύπτει από το γεγονός δεν είναι δυνατόν να αποδοθούν διανυσματικές καταστάσεις στα συνιστώντα κβαντικά υποσυστήματα για κάθε διανυσματική κατάσταση του σύνθετου κβαντικού συστήματος.

0.2. **Ο χώρος καταστάσεων των σύνθετων συστημάτων.** Ο χώρος των καταστάσεων ενός σύνθετου κβαντικού συστήματος $M = M_1 + M_2$ που αποτελείται από δύο υποσυστήματα M_1, M_2 είναι το **τανυστικό γινόμενο** $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ δύο χώρων Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ οι οποίοι αναπαριστούν το χώρο των καταστάσεων των υποσυστημάτων M_1, M_2,αντίστοιχα.

0.3. **Τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert, διανύσματα και τελεστές.** Για λόγους απλότητας δεν παραθέτουμε τον ορισμό του τανυστικού γινομένου δύο χώρων Hilbert. Θα δώσουμε όμως κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητές του:

- Για δύο διανύσματα $\phi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$ το διάνυσμα $\phi \otimes \psi$ είναι ένα διάνυσμα του τανυστικού γινομένου $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Σε συμβολισμό Dirac, αν $|\phi\rangle$ και $|\psi\rangle$ τα αντίστοιχα ket , τότε το διάνυσμα του $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ γράφεται ως $|\phi\rangle\,|\psi\rangle$.
- Το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι γραμμικό ως προς αμφότερες τις θέσεις του. Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}, \phi, \eta \in \mathcal{H}_1, \psi, \mu \in \mathcal{H}_2$
  (1) $(a\phi + b\eta) \otimes \psi = (a\phi) \otimes \psi + (b\eta) \otimes \psi$
  (2) $\phi \otimes (a\psi + b\mu) = \phi \otimes (a\psi) + \phi \otimes (b\mu)$
  (3) $a(\phi \otimes \psi) = (a\phi) \otimes \psi = \phi \otimes (a\psi)$
- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\phi \otimes \psi$ και $\eta \otimes \mu$ με $\phi, \eta \in \mathcal{H}_1, \psi, \mu \in \mathcal{H}_2$

  $$(\phi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\phi, \eta)_{\mathcal{H}_1} (\psi, \mu)_{\mathcal{H}_2}$$

  Θεώρημα. *Αν $\{\phi_k\}$ και $\{\psi_l\}$ ορθοκανονικές βάσεις των χώρων Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ αντίστοιχα, τότε το σύνολο $\{\phi_k \otimes \psi_l\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Άρα, κάθε διάνυσμα $\psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$* μπορεί να γραφεί ως εξής:

  $$\psi = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}\phi_k \otimes \psi_l$$

- Ωστόσο, υπάρχουν διανύσματα του χώρου $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ τα οποία δεν μπορούν να γραφούν ως τανυστικό γινόμενο οποιωνδήποτε δύο διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στους χώρους $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ αντίστοιχα,

$$\exists \psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \text{ τέτοια ώστε } \forall \psi_1 \in \mathcal{H}_1, \forall \psi_2 \in \mathcal{H}_2, \quad \psi \neq \psi_1 \otimes \psi_2$$

0.4. **Μη διαχωρισιμότητα των κβαντικών καταστάσεων.** Οι καταστάσεις που δεν έχουν τη μορφή γινομένου ονομάζονται **σύμπλεκτες καταστάσεις.** Λόγω της ύπαρξης των σύμπλεκτων καταστάσεων συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν καταστάσεις του σύνθετου συστήματος που δεν επιγίγνονται των καταστάσεων των συνιστωσών του. Με άλλα λόγια, υπάρχουν δυνατοί κόσμοι στους οποίους οι καταστάσεις των συνιστωσών του φυσικού συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή ταυτίζονται και οι καταστάσεις του σύνθετου συστήματος είναι διαφορετικές. Άρα, η κβαντική μηχανική προβλέπει τη **μη διαχωρισιμότητα των κβαντικών καταστάσεων.**

0.5. **Τελεστές σε χώρους τανυστικό γινόμενο και παρατηρήσιμα σύνθετου συστήματος.** Μπορούμε να ορίσουμε τανυστικά γινόμενα τελεστών. Συγκεκριμένα αν $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ τελεστές επί των χώρων Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, αντίστοιχα, το τανυστικό γινόμενο $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ ορίζεται καταρχάς σε διανύσματα γινόμενο $\psi_1 \otimes \psi_2$, $\psi_1 \in \mathcal{H}_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$,

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)\psi_1 \otimes \psi_2 := (\hat{A}_1\psi_1) \otimes (\hat{A}_2\psi_2)$$

και ακολούθως επεκτείνεται για κάθε $\psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος,

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)\psi := \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} c_{kl}(\hat{A}_1\phi_k) \otimes (\hat{A}_2\psi_l).$$

Όμοια με την περίπτωση των διανυσμάτων υπάρχουν τελεστές που δρουν επί του $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ και δεν μπορούν να γραφτούν ως γινόμενο τελεστών $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$. Ωστόσο, όλοι οι τελεστές μπορούν να γραφούν ως άθροισμα γινομένων τελεστών.

Έστω σύνθετο σύστημα $M = M_1 + M_2$. Τα παρατηρήσιμα σε κάθε υποσύστημα του σύνθετου συστήματος μπορούν να αναπαρασταθούν ως τανυστικά γινόμενα τελεστών στο σύνθετο σύστημα. Έτσι, ένα παρατηρήσιμο A_1 στο σύστημα M_1 περιγράφεται από τον τελεστή $\hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}$ που δρα επί του $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ και, αντίστοιχα, ένα παρατηρήσιμο A_2 στο σύστημα M_2 περιγράφεται από τον τελεστή $\mathbb{I} \otimes \hat{A}_2$ που δρα επί του $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$:

$$\left(\hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}\right)\psi_1 \otimes \psi_2 = \left(\hat{A}_1\psi_1\right) \otimes \psi_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\mathbb{I} \otimes \hat{A}_2\right)\psi_1 \otimes \psi_2 = \psi_1 \otimes \left(\hat{A}_2\psi_2\right)$$

Τα παρατηρήσιμα αυτά είναι **συμβατά** με τετριμμένο τρόπο:

$$\left[\hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}, \mathbb{I} \otimes \hat{A}_2\right] = 0$$

0.6. **Πιθανότητα να.** Έστω $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ μια κατάσταση γινόμενο και $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ οι τελεστές που αναπαριστούν τα παρατηρήσιμα A_1, A_2 στα υποσυστήματα M_1 και M_2 ενός σύνθετου συστήματος $M = M_1 + M_2$. Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι στους τελεστές $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ δεν υπάρχει εκφυλισμός.