ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ.

Άσκηση 1

Βρείτε το ***E*** στο σημείο P(1,1,1), που προκαλείται από 4 ταυτόσημα φορτία 3-nC που βρίσκονται στις θέσεις P_1 (1,1,0), P_2 (-1,1,0), P_3(-1,-1,0), P_4(1-1,0).

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \quad \vec{E}_2 = \frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \quad \vec{E}_3 = \frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_3)}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3} \quad \vec{E}_4 = \frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_4)}{|\vec{r}-\vec{r}_4|^3}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{3 \bullet 10^{-9}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} = 26.96\, V \cdot m$$

$$\vec{E}_1 = 26.96 \cdot \frac{(1,1,1)-(1,1,0)}{|(1,1,1)-(1,1,0)|^3} = \frac{(0,0,1)}{1}\, 26.96\, V/m$$

$$\vec{E}_2 = 26.96 \cdot \frac{(2,0,1)}{5^{\frac{3}{2}}} = (2,0,1)\frac{26.96}{5^{\frac{3}{2}}} V/m$$

$$\vec{E}_3 = 26.96 \cdot \frac{(2,2,1)}{9^{\frac{3}{2}}} = (2,2,1)\frac{26.96}{9^{\frac{3}{2}}} V/m$$

$$\vec{E}_4 = 26.96 \cdot \frac{(0,2,1)}{5^{\frac{3}{2}}} = (0,2,1)\frac{26.96}{5^{\frac{3}{2}}} V/m$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = (6.82 \quad 6.82 \quad 32,8)\, V/m$$

Αν $\vec{E} = -5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \quad kV/m$, βρείτε το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά φορτίου q=5mC από P (2,-1,3) σε Q (2,01,-1,3).

$$d\vec{r} = (2,-1,3) - (2.01,-1,3) = (-0.1,0,0)$$

$$q\vec{E}d\vec{r} = 0,005(-5,3,-2)(-0.1,0,0) = -0,25\, C \cdot V \cdot m = -0,25\, J$$

Αν $\vec{E} = -50y\hat{i} + -50x\hat{j} + 30\hat{k} \quad V/m$, βρείτε το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά φορτίου q=5μC σε απόσταση ds=5 μm κατά τη διεύθυνση P (1,2,3) σε Q (2,4,1).

$$\Delta\vec{r} = \vec{Q} - \vec{P} = (2,4,1) - (1,2,4) = (1,2,-2)m$$

$$d\hat{r} = \frac{(1,2,-2)}{3}$$

$$d\vec{r} = \frac{(1,2,-2)}{3} \cdot 5 \cdot 10^{-6} m$$

$$W = \vec{E}d\hat{r} = 5 \cdot 10^{-6}(-50,-50+30)\frac{(1,2,-2)}{3} 5 \cdot 10^{-6} = 13,4 \cdot 10^{-6}\, J$$

Άσκηση 2

Δίνεται ένα σημειακό φορτίο 200 $\pi\varepsilon_0$ C στη θέση A(3,-1,2), ένα γραμμικό φορτίο 40 $\pi\varepsilon_0$ C/m στον άξονα x , ένα επιφανειακό φορτίο 8 ε_0 C/m^2 σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x στη θέση x=3. Υπολογίστε το δυναμικό στη θέση P(5,6,7) αν V=0 στη θέση Q(0,0,1).

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το δυναμικό που δημιουργούν το φορτίο και οι κατανομές. Το δυναμικό στο σημείο P θα είναι το άθροισμα των δυναμικών. Τα δυναμικά αυτά δεν έχουν το κοινό σημείο αναφοράς αλλά χρησιμοποιούμε το σημείο Q για να υπολογίσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

Για το δυναμικό που δημιουργεί το σημειακό φορτίο q, έχουμε υπολογίσει:

$V_q = k\frac{q}{r}$ Όπου r η απόσταση του σημείου P από το A.

Υπολογίζουμε την απόσταση r:

$$\vec{r} = \vec{P} - \vec{A} = (5-3, 6+1, 7-2) = (2,7,5)$$

$$r = \left|\vec{P} - \vec{A}\right| = \sqrt{4+49+25} = \sqrt{78} = 8{,}8\, m$$

Η απόσταση ρ από την γραμμική κατανομή $\rho = \sqrt{49+36} = \sqrt{85} = 9{,}2\, m$

Η απόσταση d από την επιφανειακή κατανομή: d=5-3=2 m

Το ηλεκτρικό πεδίο που έχουμε υπολογίσει για τον ευθύγραμμο αγωγό:

$$E = 2k\frac{\lambda}{\rho}$$

Όπου ρ η απόσταση του P από τον αγωγό και υπολογίζουμε το δυναμικό ολοκληρώνοντας κατά μήκος του ρ.

$$V_l = -\int 2k\frac{\lambda}{\rho}d\rho + c_1 = -2k\frac{\lambda}{\rho}\ln(\rho) + c_1$$

Για το φορτισμένο επίπεδο, το πεδίο έχει υπολογιστεί :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα των x όποτε χρησιμοποιούμε κατ ευθείαν το x.

$$V_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + c_2$$

Το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών γίνεται :

$$V = k\frac{q}{r} - 2k\frac{\lambda}{\rho}\ln(\rho) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + C$$

Από την συνθήκη V=0 στο σημείο Q(0,0,1) θα υπολογίσουμε την σταθερά C. Η απόσταση από το σημείο Q :

$r = \left|\vec{Q} - \vec{A}\right| = \sqrt{9+1+1}$=$\sqrt{11}$=3,32 m

Από τον αγωγό: ρ=1 m

Από το επίπεδο: x=3 m

$$0 = \frac{50}{3.3} + 20\ln(1) + 8 * 1 + C$$
$$\rightarrow C = -39\ V$$

Τελικά στο P(5,6,7): $V = \frac{50}{8{,}8} - 20 * ln9{,}2 + 8 * 2 - 39 = -52\ V$

Άσκηση 3

Ένα φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε έναν σφαιρικό όγκο ακτίνας R. Βρείτε το ηλεκτροστατική ενέργεια αυτής της κατανομής με κάθε μία από τις ακόλουθες τρεις μεθόδους:
α) Υπολογίστε το έργο που έχει γίνει παραχθεί για να δημιουργήσετε τη σφαίρα "στρώμα μετά το στρώμα" φέρνοντας την απαιτούμενη ποσότητα φορτίου από άπειρη απόσταση. β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της πυκνότητας $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2$ όπου ***E*** είναι το ηλεκτρικό πεδίο, πάνω στον όγκο της σφαίρας. γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όγκου του $dU = \dfrac{1}{2}\rho dV$, όπου ρ είναι η πυκνότητα φορτίου και V είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Συζητήστε τις διαφορές με την προσέγγιση που χρησιμοποιείται στο β) και γ).

Α) Θεωρούμε ότι κατασκευάζουμε την κατανομή φέρνοντας ένα φορτίο dq από το άπειρο και το απλώνουμε ομοιόμορφα σε έναν φλοιό πάχους dr . Έστω ότι κάποια στιγμή η κατανομή έχει φορτίο q ακτίνα r .
Το έργο που παράγεται :

$$dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r)\,dq}{r} \quad (1)$$

όταν η ακτίνα είναι r , το φορτίο είναι :

$$q(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$$
$$dq = 4\pi r^2 \rho dr$$

Αντικαθιστώντας στην 1 :

$$dW = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}r^4\rho^2 dr$$

Το συνολικό έργο:

$$W = \int_0^R \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}r^4\rho^2 dr = \frac{4}{15\varepsilon_0}\rho^2 R^5$$

Όμως $\quad Q = \dfrac{4\pi}{3}R^3\rho$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

Η ολική ενέργεια είναι ίση με:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

β) Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε μία κλειστή επιφάνεια, παράγεται από τα φορτία που περικλείονται από την επιφάνεια.

Έχουμε υπολογίσει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα:

$$r < R \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

$$r > R \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

Αν ολοκληρώσουμε μέσα και έξω από την σφαίρα,

$$dU = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 dV \qquad U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}^2 dV$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^R\left(\frac{r}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty\left(\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\frac{4\pi}{5R} + \frac{4\pi}{R}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{5R}$$

γ) Έχουμε υπολογίσει το δυναμικό σφαίρας φορτισμένης ομοιόμορφα:

$$r < R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R}\right)$$

$$r > R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

dU είναι η Ενέργεια σε στοιχειώδη όγκο dV:

$$dU = \frac{1}{2}\rho dV \qquad U = \frac{1}{2}\int_V \rho dV$$

Επειδή δεν υπάρχει φορτίο έξω από τον όγκο της σφαίρας, δηλ:
Για r>R ρ=0 , αρκεί να ολοκληρώσουμε από 0 ως R.

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\rho\int_0^R\left(-\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R}\right)4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q}{4\varepsilon_0}\frac{Q}{4\pi R^3/3}\left(-\frac{R^2}{5} + R^2\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{R}$$

Γ. Βούλγαρης

Προφανές ότι λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα, η διαφορά είναι ότι στη διαδικασία β), η ενέργεια επεκτείνεται στο άπειρο ενώ στην γ) ολοκληρώνουμε πάνω σε έναν καθορισμένο όγκο!

Άσκηση 4

Χάλκινη σφαίρα ακτίνας 4 cm είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με ολικό φορτίο 5 μC και ευρίσκεται στο κενό. α) Υπολογίστε το Ε στην επιφάνεια της σφαίρας. β)Υπολογίστε την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο. γ)Από τη σχέση $U=Q^2/2C$ υπολογίστε τη χωρητικότητα της σφαίρας.

Α) Από τον νόμο του Gauss:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}=9\times10^9\frac{5\times10^{-6}}{r^2}\hat{r}=45\times10^3\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Β)

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}^2 dV$$

$$dV=4\pi r^2 dr$$

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}$$

$$U=2.81\,\mathrm{J}$$

Γ)

$$U=\frac{Q^2}{2C}\ \rightarrow\ C=\frac{Q^2}{2U}$$

$$C=\frac{\left(5\times10^{-6}\right)^2}{2\times2,81}=4,45\times10^{-12}\,\mathrm{F}$$

Άσκηση 4

Μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας **r=4 cm** , είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με φορτίο **q=20 μC/m²** . Υπολογίστε την ακτίνα $\mathbf{r_A}$, έτσι ώστε η ενέργεια που περικλείεται ανάμεσα σε **0,06< r<** $\mathbf{r_A}$ είναι ίση **με 1 mJ**

Υπολογίζουμε την ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου από τον νόμο του Gauss:

$$\int_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \sigma A \;\rightarrow$$

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 E = \sigma 4\pi r_0^2 \rightarrow E = \frac{\sigma r_0^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{20\times 10^{-6}\times(0,04)^2}{8,85\times 10^{-12}}\frac{1}{r^2} = 3,6\times 10^3\frac{1}{r^2}$$

$$k = 3,6\times 10^3 \text{ Vm} \qquad E = k\frac{1}{r^2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_a^b k^2\frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{k^2\varepsilon_0 4\pi}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\rightarrow$$

$$10^{-6}\text{ J} = 73,5\times 10^{-5}\left(\frac{1}{0,04}-\frac{1}{r_b}\right)\rightarrow$$

$$r_b = 0,065 \quad \text{m}$$

Άσκηση 5

Κυλινδρική κατανομή φορτίου πυκνότητας όγκου ρ_v , ακτίνας α, μεγάλου μήκους περιβάλλεται από ομόκεντρο αγωγό ακτίνας b . Μεταξύ των δύο αγωγών υπάρχει αέρας. Να υπολογίσετε την τιμή του δυναμικού σαν συνάρτηση του r , αν ο εξωτερικός αγωγός έχει δυναμικό V=0.

Περιοχή Ι 0<r<a

Εφαρμόζω ν. Gauss

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \quad 2\pi r l E = \frac{\rho_V \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} r$$

Διαφορά Δυναμικού:

$$V_{ar} = -\int_r^a \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\, dr \rightarrow$$

$$V_r - V_a = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2} r^2 \Big|_r^a = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2)$$

$$V_r = V_a - -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2)$$

Περιοχή ΙΙ $a < r \leq b$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r l E = \frac{\rho_V \pi a^2 l}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$V_{br} = -\int_r^a \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\frac{dr}{r} \rightarrow$$

$$V_r - V_b = -\frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln r \Big|_r^b = -\frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$$

$$V_r = V_b - -\frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r} = \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$$

$$V_b = 0$$

Για r=a λόγω συνέχειας πρέπει οι δύο σχέσεις να δίδουν την ίδια τιμή.

$$V_a + \frac{\rho_V}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2) = \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r} \rightarrow$$
$$V_a = -\frac{\rho_V}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2) + \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$$
$$r = a \rightarrow$$
$$V_a = \frac{\rho_V a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$$

Άσκηση 6

Μια γραμμική κατανομή φορτίου κατά μήκος του άξονα z και πυκνότητας λ C/m. Ένα κυλινδρικό αγώγιμο κέλυφος, ακτίνας b, με το άξονα του κατά μήκος του άξονα z περιβάλει τη γραμμική κατανομή. Το κέλυφος βρίσκεται σε δυναμικό V_b=0. Στην περιοχή ρ<b η συνάρτηση δυναμικού δίνεται: $V(\rho) = k - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\rho)$ όπου k είναι σταθερά. (α) Υπολογίστε το k σύμφωνα με τα δεδομένα, (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο ***E*** για ρ<b (γ) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο ***E*** για ρ>b. (δ) Υπολογίστε την αποθηκευμένη ενέργεια ανά μονάδα μήκους στο χώρο που ορίζεται από την ακτίνα a<ρ<b.

Άσκηση 7

Ένας κυλινδρικός πυκνωτής έχει μήκος L ακτίνα εσωτερικού αγωγού α και εξωτερικού αγωγού β. Ο εσωτερικός αγωγός φέρει επιφανειακή πυκνότητα ρs ενώ ο εξωτερικός αγωγός είναι γειωμένος. α)Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των αγωγών και την αποθηκευμένη ενέργεια. β) Αν υποθέσουμε ότι το φορτίο είναι κατανεμημένο σε ένα λεπτό στρώμα πάχους t (και χωρικής πυκνότητας ρs/t) στην περιοχή από (a-t/2) μέχρι (a+t/2) Υπολογίστε την ενέργεια χρησιμοποιώντας τη διαφορά δυναμικού.

Τα 2 προηγούμενα προβλήματα , είναι παραλλαγές του πρώτου προβλήματος. Λύνονται χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις.

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$
$$2\pi r l E = \frac{\rho_S 2\pi a l}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$dU = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 dV \qquad U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \vec{E}^2 dV$$

$$dV = 2\pi l r dr$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b \left(\frac{\rho_S a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)^2 2\pi l r dr = \varepsilon_0 \pi l \left(\frac{\rho_S a}{\varepsilon_0}\right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r}^2$$

$$U = \varepsilon_0 l \left(\frac{\rho_S a}{\varepsilon_0}\right)^2 \ln\frac{b}{a} = \frac{\rho_S{}^2 a^2 l}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Ενδιαφέρον έχει το δεύτερο ερώτημα του προηγούμενου προβλήματος.

Μετατρέπουμε την επιφανειακή πυκνότητα σε χωρική: $\rho_v = \rho_s S/V = \rho_s/t$.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho_v V dV \qquad \rho_v = {}^{\rho_S}\!/_{t} \qquad dV = 2\pi a L dt$$

$$V_a = \frac{{}^{\rho_S}\!/_{t}\, a^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r} \qquad r = a \quad V_a = \frac{{}^{\rho_S}\!/_{t}\, a^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t}\,\frac{\rho_S a^2}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) 2\pi a\, L dr = \frac{\rho_S^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\varepsilon_0}\pi L$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma: \quad Q = 2\pi a\, L \rho_S$$

$$\text{Τελικά}: \quad U = \frac{1}{2} Q V_a$$

Άσκηση 8

Δύο ομογενείς αγώγιμες σφαίρες ακτίνας α= 6 και b=16 cm έχουν ίσα και αντίθετα φορτία 10^{-8} C η εσωτερική και -10^{-8} C η εξωτερική. Μεταξύ των σφαιρών υπάρχει αέρας με διηλεκτρική σταθερά, περίπου ε_0. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του E μεταξύ των σφαιρών και την ολική αποθηκευμένη ενέργεια.

r>b , r<a E=0

$a \le r < b$

$$\varepsilon_0 \int_S \vec{E} d\vec{s} = Q \quad \to 4\pi\varepsilon_0 E r = Q \quad \to E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Η ένταση γίνεται μέγιστη για r=a .
Για την ενέργεια χρησιμοποιώ τη σχέση:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b \vec{E}^2 dV \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b \frac{Q^2}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)^2} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Ή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή και κατόπι την : $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Άσκηση 9 ρεύμα ηλεκτρονίων

Ένα ρεύμα ηλεκτρονίων κινείται κατα μήκος του άξονα x σε κενό χώρο με δυναμικό $V=150x^{4/3}$ V για x>0 και $\varepsilon=\varepsilon_0$.α) Υπολογίστε το E και το ρ σαν συνάρτηση του x. Αν η ταχύτητα των φορτίων είναι $u_x = 6\ 10^6\ x^{2/3}$ m/s υπολογίστε το J_x στη θέση x=0 και x=1m.

Εφαρμογή του νόμου Child-Lagmuire.

Άσκηση 10 Σύγχροτρον

Σε ένα κύκλοτρο για επιτάχυνση πρωτονίων, το μαγνητικό πεδίο είναι 0,45 T και η ακτίνα 1,2 m . Ποία είναι η μέγιστη συχνότητα του κυκλότρου; Ποιά είναι η μέγιστη ενέργεια που αποκτούν τα πρωτόνια ; ($q=1,6\ 10^{-19}$ C, $m = 1,67\ 10^{-37}$ kg).

Γ. Βούλγαρης

Το πρωτόνιο διαγράφει καμπύλη τροχιά, με κεντρομόλο τη δύναμη Laplace που είναι κάθετη προς την ταχύτητα. Αν η ταχύτητα ήταν σταθερή η τροχιά θα ήταν κυκλική. Όμως το εναλλασσόμενο Ηλεκτρικό Πεδίο ανάμεσα στους δύο θαλάμους D επιταχύνει το πρωτόνιο και η ακτίνα αυξάνεται μέχρι το πρωτόνιο να εξέλθει από τον θάλαμο επιτάχυνσης.

Η Γύρο-ακτίνα είναι ίση με : $R = \frac{m\upsilon}{eB}$

Η Συχνότητα περιστροφής: $f = \frac{\upsilon}{2\pi R} = \frac{eB}{2\pi m} \quad Hz$ ανεξάρτητη από την ακτίνα

Η Ενέργεια γίνεται μέγιστη όταν η ακτίνα γίνει ίση με την ακτίνα του θαλάμου.

$$\upsilon_{\max} = \frac{eB}{m} R_{\max}$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{\max}^2$$

$$f = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0,45}{6,28 \times 1,67 \times 10^{-27}} = 6,7\ MHz$$

$$\upsilon_{\max} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 0,45 \times 1,2}{1,67 \times 10^{-27}} = 5,1 \times 10^7\ m/s$$

$$E_{\max} = 0,5 \times 1,67 \times 10^{-27} \times (5,1 \times 10^7)^2 = 0,22 \times 10^{-11}\ J = \frac{0,22 \times 10^{-11}}{1,6 \times 10^{-19}} = 14\ MeV$$

Οι υπολογισμοί έγιναν στην μη σχετικιστική προσέγγιση.

Γ. Βούλγαρης

Χρόνος αποκατάστασης

Αν τοποθετήσουμε ένα φορτίο στο εσωτερικό ενός αγωγού, το φορτίο θα μετακινηθεί στην επιφάνεια . Εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται για τη ισορροπία. (Χρόνος αποκατάστασης, relaxation time)

Αν σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού, ο νόμος του Ohm

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Αν ρ_v η πυκνότητα όγκου των ελεύθερων φορτίων :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$1\eta \ \ \varepsilon\xi i\sigma\omega\sigma\eta \ Maxwell: \quad \varepsilon \vec{\nabla} \vec{E} = \rho_v$$

$$\Rightarrow \rho_v = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \Rightarrow \rho_v = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

$$\tau_R = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Παράδειγμα Αποσταγμένο νερό:

$\sigma = 2x10^{-4} \ \Omega^{-1} \ m^{-1}$ $\varepsilon_\rho = 80$ $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\rho$ $\varepsilon/\sigma = 3{,}54 \ \mu S$