1) Ενέργεια πυκνωτή.

Χρησιμοποιώντας μπαταρία, φορτίζουμε επίπεδο πυκνωτή με φορτίο Q_0. Αποσυνδέουμε την μπαταρία και εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς διηλεκτρικό σταθεράς κ. Βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού. Η χωρητικότητα χωρίς διηλεκτρικό είναι 8,5 pF, η τάση της μπαταρίας είναι 12 V , η σταθερά του διηλεκτρικού ε=2,56.

Στο ίδιο κύκλωμα όπως παραπάνω, εισάγουμε το διηλεκτρικό ενώ διατηρούμε τη σύνδεση με την μπαταρία. (α) Υπολογίστε τον λόγο των ενεργειών πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού. (β) Εξηγείστε την αύξηση της αποθηκευμένης ενέργειας. (Τι συμβαίνει με το φορτίο του πυκνωτή;

α) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι ίση με $U = \frac{Q^2}{2C}$

Αποσυνδέοντας τον πυκνωτή από την πηγή δεν μπορεί να προκύψει μεταβολή φορτίου, διότι θεωρούμε ότι η αγωγιμότητα του αέρα και του διηλεκτρικού είναι μηδενικές. Η χωρητικότητα του πυκνωτή στον αέρα είναι $C=\varepsilon_0$ A/d Και με το διηλεκτρικό $C=\varepsilon\varepsilon_0$ A/d . Η ενέργεια του πυκνωτή θα μειωθεί κατά έναν παράγοντα ε. Η υπόλοιπη ενέργεια χρειάζεται για να προσανατολιστούν τα ηλεκτρικά δίπολα του διηλεκτρικού. Επειδή το φορτίο διατηρείται από την σχέση Q=CV συμπεραίνουμε ότι η τάση θα ελαττωθεί κατά 1/ε.

$$CV = C'V' \rightarrow CV = \varepsilon CV' \rightarrow V' = \frac{V}{\varepsilon}$$

β) Επειδή η τάση παραμένει σταθερή, θα χρησιμοποιήσω τη σχέση $U = \frac{1}{2}CV^2$

Επειδή η χωρητικότητα αυξάνεται κατά τον παράγοντα ε, η ενέργεια αυξάνεται με τον ίδιο παράγοντα ε. $C' = \varepsilon C \rightarrow U' = \varepsilon U$

Όπως προηγουμένως, χρειάζεται ενέργεια για τον προσανατολισμό των δίπολων του διηλεκτρικού. Επειδή ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος με την πηγή, η τάση παραμένει σταθερή και το φορτίο στους οπλισμούς γίνεται Q΄ = εCV.

2) Το διηλεκτρικό υλικό καλύπτει μέρος του διακένου.

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C0 όταν δεν υπάρχει διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς. Τοποθετούμε διηλεκτρικό σταθεράς ε και πάχους d/3 ανάμεσα στους οπλισμούς. Υπολογίστε τη νέα χωρητικότητα.

Λόγω της πόλωσης του διηλεκτρικού, στην επιφάνεια του απέναντι από το θετικό φορτίο, θα εμφανιστεί ίσο αρνητικό και αντίστοιχα στην άλλη επιφάνεια ίσο θετικό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διηλεκτρικό χωρίζει τον πυκνωτή σε τρεις πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά. Υπολογίζουμε την χωρητικότητα με τον γνωστό τύπο. βλέπουμε ότι η απόσταση του διηλεκτρικού από τους οπλισμούς δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Για ευκολία χωρίζουμε την απόσταση σε τρεις ίσες αποστάσεις d/3 με τη σειρά, κενό, διηλεκτρικό, κενό. Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την σχετική θέση του διηλεκτρικού. Οι χωρητικότητες θα είναι αντίστοιχα :

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{3A}{d} \quad C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{3A}{d} \quad C_3 = \varepsilon_0 \frac{3A}{d}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \frac{1}{C} = \frac{d}{3\varepsilon_0 A} + \frac{d}{3\varepsilon\varepsilon_0 A} + \frac{d}{3\varepsilon_0 A} = \frac{d}{3\varepsilon_0 A}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$$

$$C = \frac{3\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\right)$$

3) Μεταλλική πλάκα ανάμεσα στους οπλισμούς.

Επίπεδος πυκνωτής έχει οπλισμούς με επιφάνεια A και απόσταση d. Ανάμεσα στους οπλισμούς τοποθετείται μεταλλική πλάκα πάχους α. Υπολογίστε την χωρητικότητα.

Στη επιφάνεια της μεταλλικής πλάκας θα εμφανιστεί φορτίο ίσο και αντίθετο με εκείνο του οπλισμού. Όμως τα φορτία μέσα στη μεταλλική πλάκα είναι ελεύθερα και το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας είναι μηδέν. Εδώ το νέο σύστημα θα είναι ισοδύναμο με δύο πυκνωτές σε σειρά.

$$h = d - a$$

$$h = h_1 + h_2$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{h_1} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{h_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(h_1 + h_2) = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(h) \rightarrow$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{h}$$

Η χωρητικότητα είναι ανεξάρτητη από τη σχετική θέση της μεταλλικής πλάκας.

4) Δύο διηλεκτρικά.

Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο επίπεδες πλάκες μήκους L, που βρίσκονται σε απόσταση d. Ο μισός πυκνωτής γεμίζεται με πολυστυρόλιο (ε=2,56) και το άλλο μισό με καουτσούκ (ε=6,7). Υπολογίστε τη χωρητικότητα της διάταξης, αν L=2 cm και d=0,75 mm.

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα. Υπολογίζουμε την αρχική χωρητικότητα χωρίς υλικό, $C=\varepsilon_0 A/d$ kai στη συνέχεια, τις δύο παράλληλες χωρητικότητες, $C_1= \varepsilon_1\varepsilon_0 A/d$ $C_2= \varepsilon_2\varepsilon_0 A/d$. $C_{total}=C_1+C_2$.

$$C = C_1 + C_2 \qquad C_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad C_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$A = 4 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$C_1 = \frac{2,56 \times 8,91 \times 10^{-9} \times 4 \times 10^{-4}}{0,75 \times 10^{-3}} = 12 \times 10^{-9}\ F$$

$$C_2 = \frac{6,7 \times 8,91 \times 10^{-9} \times 4 \times 10^{-4}}{0,75 \times 10^{-3}} = 32 \times 10^{-9}\ F$$

$$C = 54 \times 10^{-9}\ F$$

5) Υπολογισμός δύναμης ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή.

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει επιφάνεια οπλισμών A που βρίσκονται σε απόσταση d και φορτίζεται με φορτίο q. Υπολογίστε την δύναμη μεταξύ των οπλισμών.

Ξεκινάμε από την επίπεδη κατανομή φορτίου σ= q/A. Δημιουργεί ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $E_s=\sigma/2\varepsilon_0$. Το πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι το άθροισμα των πεδίων που δημιουργούν οι κατανομές των οπλισμών. Άρα το $E_s=E/2$. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες φορτίο dq στον απέναντι οπλισμό, θα ασκηθεί δύναμη $dF=E_s*dq$. Ολοκληρώνοντας και αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$dF = \frac{E}{2} dq \quad \rightarrow \quad F = \frac{E}{2} \int dq = \frac{U}{2d} Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cd}$$

Άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την αρχή του «δυνατού έργου» Αν στον οπλισμό εφαρμόσουμε δύναμη F η οποία μετακινεί τον οπλισμό κατά dx , η ενέργεια του πυκνωτή θα μεταβληθεί κατά dU.

$$dU = -Fdx \quad \rightarrow \quad F = -dU / dx$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow dU = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 A / x} \right) = \frac{1}{2} Q^2 \frac{dx}{\varepsilon_0 A}$$

$$Fdx = \frac{1}{2} Q^2 \frac{dx}{\varepsilon_0 A} \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cx} = \frac{1}{2x} CV^2$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση που ο πυκνωτής παραμένει συνδεμένος την πηγή τάσης V.

$$dU = -Fdx$$
$$dU = -Fdx \quad \rightarrow \quad F = -dU/dx$$
$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}q^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) + \left(q^2\right) = \frac{1}{2}q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{dC}{dx} + \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dx}$$
$$\frac{dC}{dx} = -\frac{C}{x} \qquad \frac{dq}{dx} = V\frac{dC}{dx} = -\frac{VC}{x}$$
$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\frac{1}{x} - qV\frac{1}{x} = \ldots = -\frac{1}{2x}CV^2$$
$$F = \frac{1}{2x}CV^2$$

Προφανώς το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, γιατί τελικά ο οπλισμός παραμένει ακίνητος. Αν όμως είχαμε μια πεπερασμένη μετατόπιση Δx το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό. Στη δεύτερη περίπτωση ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην μετατόπιση χωρίς την πηγή και ο δεύτερος στην μεταφορά φορτίου από την πηγή για να αποκατασταθεί η τάση.

6) Επίπεδος Πυκνωτής, Ενέργεια, Δυνατό έργο.

Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο επίπεδες πλάκες μήκους L, που βρίσκονται σε απόσταση d. Ένα διηλεκτρικό πλακίδιο σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε εισάγεται μεταξύ των οπλισμών σε απόσταση χ από το άκρο του πυκνωτή. (α) Υπολογίστε τη χωρητικότητα της διάταξης. (β) Υπολογίστε την ενέργεια που αποθηκεύτηκε αν η τάση είναι V. (γ) Υπολογίστε την κατεύθυνση και το μέτρο της δύναμης i) αν το φορτίο είναι σταθερό, ii) αν η τάση είναι σταθερή V. Αγνοήστε την τριβή και την παραμόρφωση του πεδίου στα άκρα του.(δ) Υπολογίστε αριθμητικά τη δύναμη αν l=5 cm, V=2000 V, d=2mm και το διηλεκτρικό είναι γυαλί (ε=4,5).

Θεωρούμε ότι το σύστημα αποτελείται από δύο πυκνωτές συνδεμένους παράλληλα. Υπολογίζουμε την χωρητικότητα και την ενέργεια.

$$C = C_1 + C_2 \quad C_1 = \varepsilon\varepsilon_0\frac{wx}{d} \quad C_2 = \varepsilon_0\frac{w(L-x)}{d}$$
$$C = \frac{\varepsilon_0 w}{d}\left((\varepsilon-1)x + L\right)$$
$$U = \frac{1}{2}VC = \frac{1}{2}V\varepsilon_0 w\left(\frac{(\varepsilon-1)x+L}{d}\right)$$

Στην πρώτη περίπτωση, το φορτίο είναι σταθερό και αρκεί να παραγωγίσουμε την χωρητικότητα.

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}(\frac{1}{C}) = \frac{q^2}{2}\frac{1}{C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 w}{d}\left((\varepsilon-1)x + L\right) \quad \frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_0 w}{d}\left(\varepsilon-1\right)$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{8,91\times10^{-12}\times5\times10^{-2}\times3,5}{2\times10^{-3}} = 780\times10^{-12}\,F$$

$$F = 0,5\times4\times10^{6}\times780\times10^{-12} = 1,5\times10^{-3}\,N$$

Επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό για V=σταθερό. Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλεται η χωρητικότητα και το φορτίο, γι αυτό χρησιμοποιούμε την παραγώγιση προς τις δύο μεταβλητές!

$$dU = -Fdx$$

$$dU = -Fdx \quad \to \quad F = -dU/dx$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}q^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) + \left(q^2\right) = \frac{1}{2}q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{dC}{dx} + \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dx} = -V^2\frac{dC}{dx} + \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = \qquad \frac{dq}{dx} = V\frac{dC}{dx}$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}$$

Γιατί θα κινηθεί το διηλεκτρικό; Στα άκρα των οπλισμών οι δυναμικές γραμμές είναι κυρτές καμπύλες, άρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει συνιστώσα παράλληλη με την επιφάνεια των οπλισμών. Η δύναμη που προκαλείται, σπρώχνει το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή. Επειδή είναι δύσκολο να εκφράσουμε αναλυτικά τη δύναμη από την μορφή του ηλεκτρικού πεδίου, την υπολογίζουμε από το αποτέλεσμα της δηλαδή το έργο που παράγει μετατοπίζοντας το διηλεκτρικό. Από την μηχανική γνωρίζουμε ότι dW=F*dx (αρχή δυνατού έργου). Αν το διηλεκτρικό μετατοπιστεί κατά dx αυξάνεται η χωρητικότητα και συνεπώς χρειάζεται επιπλέον φορτίο για να διατηρηθεί η τάση του πυκνωτή. Η δύναμη F παράγει μηχανικό έργο μετακινώντας το διηλεκτρικό αλλά συγχρόνως αλλάζει και τη χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε χρειάζεται να προσφερθεί ενέργεια από την πηγή για να διατηρηθεί η τάση.

Σε τι διαφέρουν οι δύο περιπτώσεις ως προς το αποτέλεσμα; Στην πρώτη περίπτωση η τάση μειώνεται όσο το διηλεκτρικό εισέρχεται άρα η δύναμη μειώνεται αντίστοιχα.

Στη δεύτερη περίπτωση η δύναμη είναι σταθερή.

7) Ομοαξονικός πυκνωτής.

Ένας αγώγιμος κύλινδρος με ακτίνα 1 cm, είναι ομογενώς φορτισμένος με 1 nC σε κάθε μέτρο μήκους του. Ο κύλινδρος καλύπτεται από υλικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_1=2$ και πάχος α_1. Ένα δεύτερο στρώμα με σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_2 και πάχος α_2 συνεχίζει μέχρι έναν εξωτερικό ομοαξονικό αγωγό, ακτίνας β=4 cm . Βρείτε το ε_2, α_1, α_2, έτσι ώστε διαφορά δυναμικού κατά μήκος των στρωμάτων να είναι ίδια και η χωρητικότητα του ομοαξονικού αγωγού να είναι 75 pF/m.

Ξεκινάμε με τον υπολογισμό της χωρητικότητας ομοαξονικού καλωδίου με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b .

Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του καλωδίου είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του. Αν η πυκνότητα φορτίου κατά μήκος του κεντρικού αγωγού είναι λ, εφαρμόζω τον νόμο του Gauss για μια κυλινδρική επιφάνεια με $r_A < r < r_C$.

$$\oint_S \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \rightarrow E\, 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Υπολογίζουμε το δυναμικό και τη χωρητικότητα:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\text{Αν}\ \ \lambda = \frac{Q}{l}$$

$$V = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

Έτσι υπολογίσαμε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους για το κενό.

Για διηλεκτρικό γίνεται: $$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{b}{a}}$$

Το σύστημα που δίνεται είναι ισοδύναμο με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά C_1 και C_2 είναι χωρητικότητες ανά μονάδα μήκους:

C_1 a=1 cm b=a+a_1 ε_1=2

και

C_2 $b=a+a_1$ $c=4$ cm ε_2

Από την εκφώνηση η τάση στα άκρα των πυκνωτών είναι η ίδια:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{C_2} \rightarrow \frac{\ln(b/a)}{\varepsilon_1} = \frac{\ln(c/b)}{e_2}$$

Επίσης οι δύο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Για ευκολία εκφράζουμε τις χωρητικότητες σε pF/m και γράφουμε:

$$\frac{1}{75\ pF} = \frac{1}{55,55\ pF}\left(\frac{\ln(b/a)}{2} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}\right)$$

$\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon:$

$$\ln(b/a) = \frac{55,55}{75} = 0,74 \rightarrow \frac{b}{a} = 2,1 \rightarrow b = 2,1\,cm \rightarrow a_1 = 1,1\,cm \quad a_2 = 1,9 \quad cm$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{\ln(c/b)}{\ln(b/a)} = 2\frac{\ln(4/2,1)}{0,74} = 1,74$$