

Βασικοί Τύποι Μιγαδικών

$$Z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Μέτρο, Απόλυτη Τιμή}$$

$$\theta = \tan^{-1} y/x \quad \text{Γωνία, Όρισμα του Z}$$

Τύπος Euler :

$$e^{j\theta} = (\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$Z = r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta}$$

$$\text{Καρτεσιανή Μορφή : } z = x + jy$$

$$\text{Τριγωνομετρική : } z = r(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$$

$$\text{Εκθετική Μορφή : } z = re^{j\vartheta}$$

$$\text{Πολική Μορφή : } z = r\angle\vartheta$$

Πράξεις Μιγαδικών

Συζυγής

$$z = x + jy \quad z^* = x - jy$$

$$z = r(\cos \vartheta + \sin \vartheta) \quad z^* = r(\cos \vartheta - \sin \vartheta)$$

$$z = re^{j\vartheta}$$

$$z = r\angle\theta \quad z^* = r\angle-\theta$$

Πρόσθεση, Αφαίρεση

$$z_1 = x_1 + jy_1 \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

Πολλαπλασιασμός

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Διαίρεση

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x^2 + y^2}$$

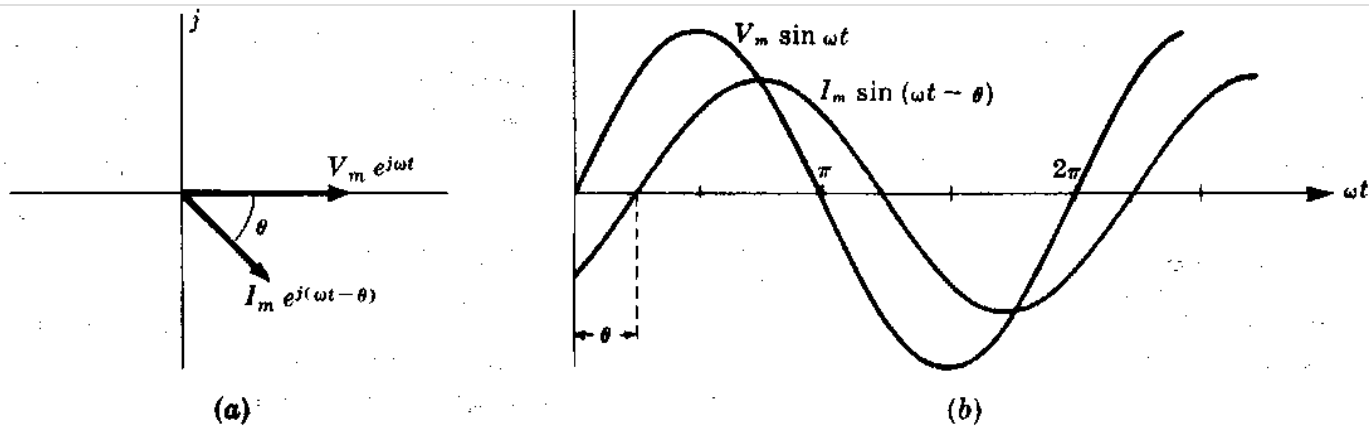
Στρεφόμενα διανύσματα

- Λύση στο πεδίο χρόνου

$$V = V_0 e^{j(\omega t + a)}$$

$$Z = Z_0 e^{j\theta}$$

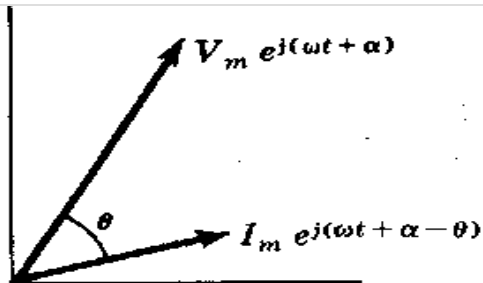
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + a)}}{Z_0 e^{j\theta}} = I_0 e^{j(\omega t + a - \theta)}$$



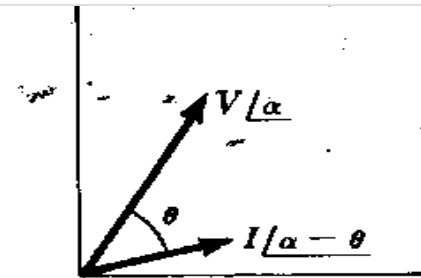
Στρεφόμενα διανύσματα

□ Λύση στο πεδίο συχνοτήτων

$$\frac{V_0 e^{j\alpha}}{\sqrt{2} Z_0 e^{j\theta}} = \frac{I_0 e^{j(\alpha-\theta)}}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{V_{\varepsilon\nu} \angle \alpha}{Z \angle \theta} = I_{\varepsilon\nu} \angle \alpha - \theta$$



(α) Πεδίο χρόνου



(β) Πεδίο συχνότητας

Μιγαδική σύνθετη αντίσταση

□ Μιγαδική Αναπαράσταση.

□ Η τάση γράφεται $V = V_0 e^{j\omega t}$

□ Ισχύει $V = V_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t)$

Παράδειγμα: κύκλωμα με αντίσταση και πηνίο.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 e^{j\omega t}, \quad i = ke^{j\omega t} \quad \leftarrow \text{Λύση}$$

$$\Rightarrow Rke^{j\omega t} + Lk j\omega e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow Rk + j\omega Lk = V_0 \Rightarrow k = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \Rightarrow Z = \frac{v(t)}{i(t)} = R + j\omega L,$$

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \tan^{-1} \theta = \frac{\omega L}{R}$$

↑
Μέτρο

↑
Όρισμα

Μιγαδική σύνθετη αντίσταση

- Κύκλωμα με αντίσταση και πυκνωτή.

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_0 e^{j\omega t}$$

$$i = ke^{j\omega t}$$

$$Rke^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} ke^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t} \Rightarrow kR + \frac{k}{j\omega C} = V_0$$

$$\Rightarrow k = \frac{V_0}{R - \frac{j}{\omega C}}, \quad i(t) = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z = R - \frac{j}{\omega C},$$

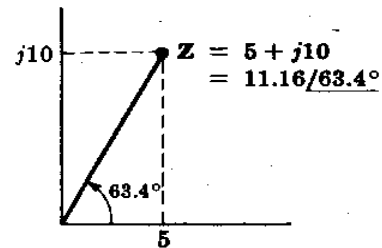
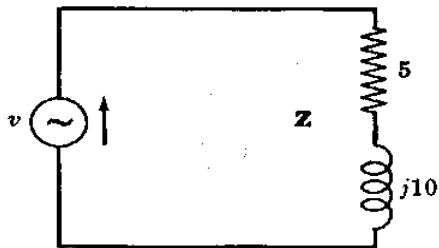
$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$

Παραδείγματα

Αριθμητικό Παράδειγμα:

$R=5\Omega$, $L=2\text{mH}$, $V=150\sin(5000t)$

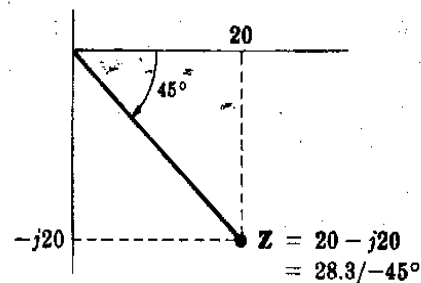
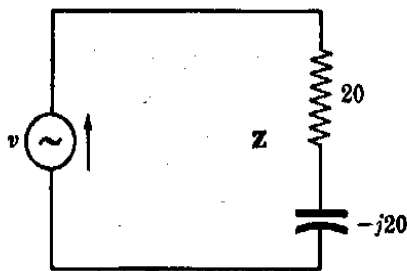
Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή.



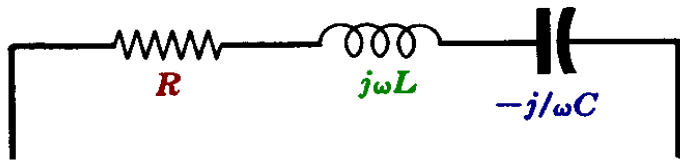
Αριθμητικό Παράδειγμα:

$R=20\Omega$, $C=5\mu\text{F}$, $V=150\sin(10000t)$

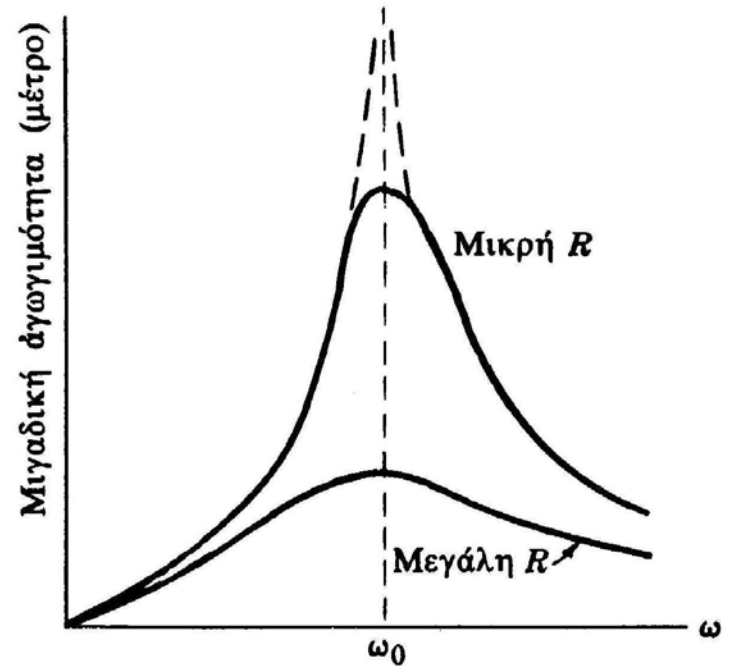
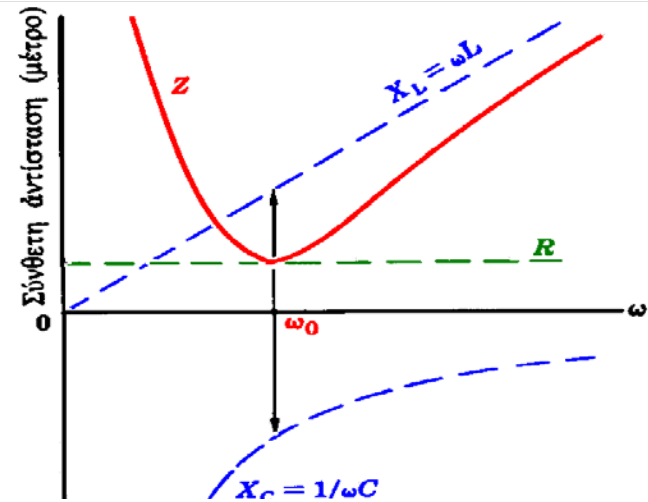
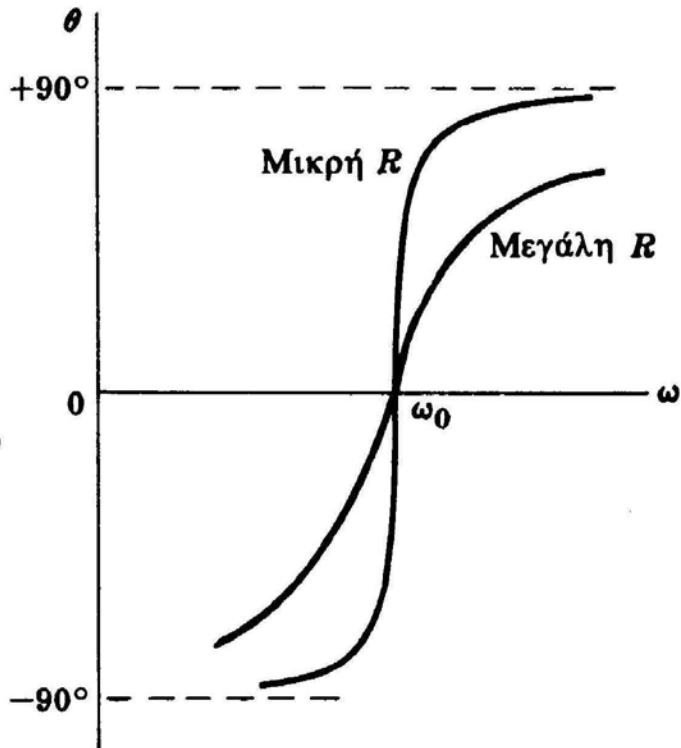
Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή



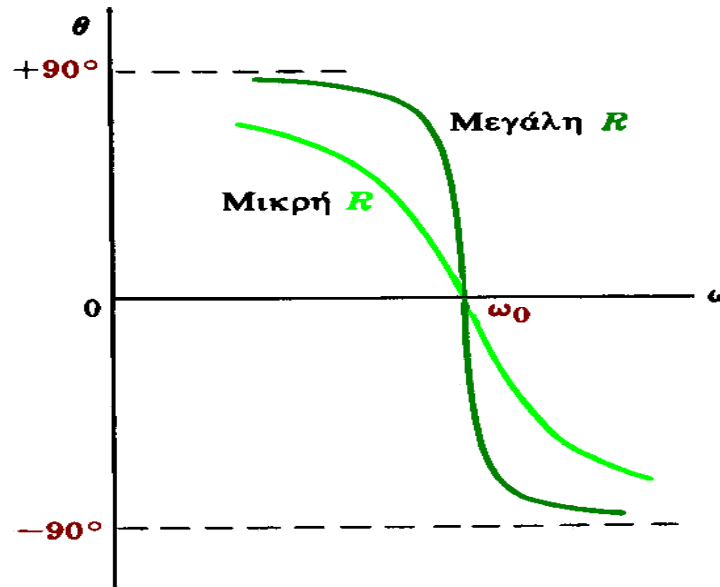
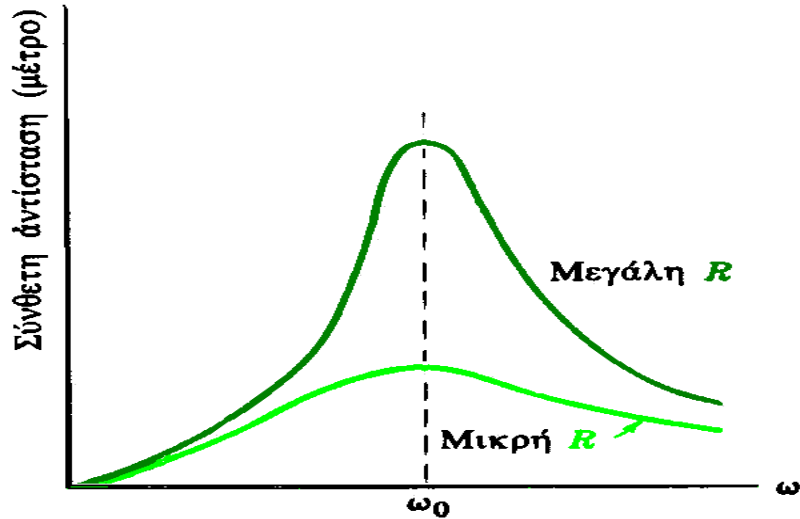
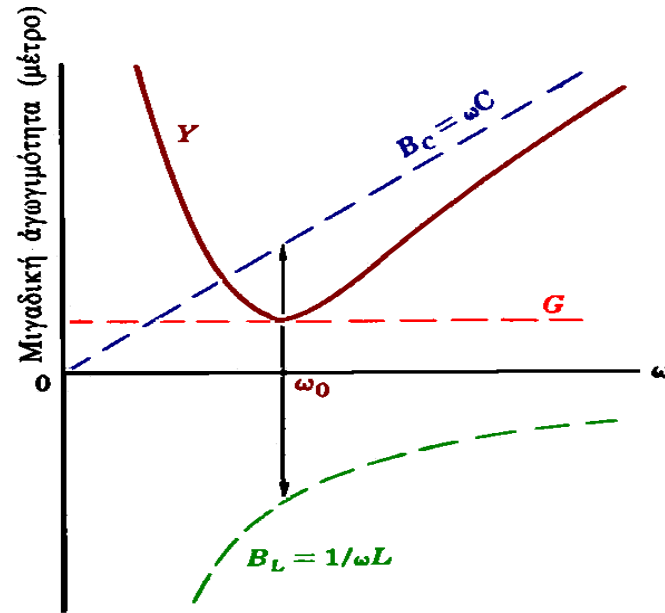
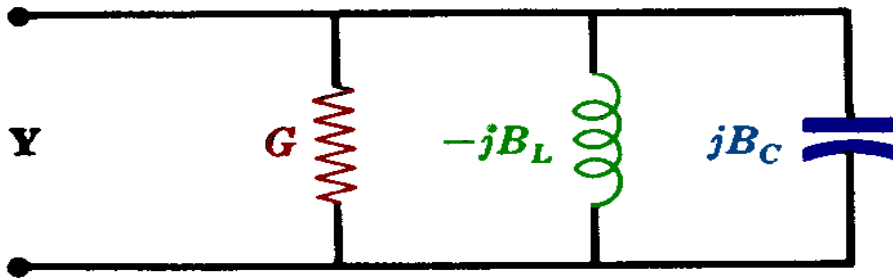
Συντονισμός σε Κύκλωμα RLC σε σειρά.



Συμ 8-1



Συντονισμός σε κύκλωμα RLC Παράλληλα



Αριθμητικό Παράδειγμα: Χωρητικότητα

- $R=20\Omega$, $C=5\mu\text{F}$ $V=150\sin(10000t)$
- Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή.

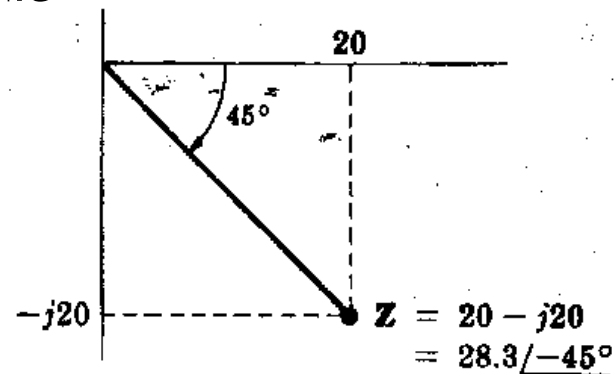
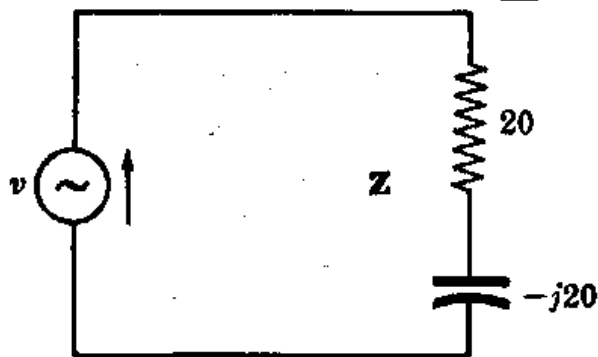
$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10000 \cdot (5 \cdot 10^{-6})} = 20\Omega$$

$$Z = 20 - j20\Omega$$

$$r = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28,3$$

$$\tan^{-1} \theta = 45^\circ$$

$$Z = 28,3 \angle -45^\circ$$



Αριθμητικό Παράδειγμα: Αυτεπαγωγή

- $R=5\Omega$, $L=2\text{mH}$, $V=150\sin(5000t)$
- Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή.

$$X_L = \omega L = 5000(2 \cdot 10^{-3}) = 10\Omega$$

$$Z = 5 + j10\Omega$$

$$z = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11,16$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{10}{5}\right) = 63,4^\circ$$

$$Z = 11,16 \angle 63,4^\circ$$

