# Έργο - Ενέργεια

- **Βασική έννοια.**

  Μηχανική, Ηλεκτρομαγνητική, Χημική, Θερμική, Πυρηνική, κ.α.

  Δυνατότητα μετατροπής της μίας μορφής σε άλλη.

- **Μηχανική ενέργεια.**

  Λύση προβλημάτων μηχανικής.

  α) 2ος νόμος Νεύτωνα, δυναμική εξίσωση.

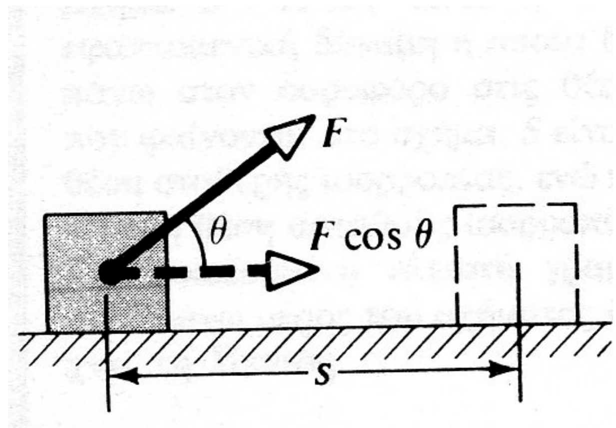
  Χρονική εξέλιξη του συστήματος (θέση σαν συνάρτηση του χρόνου).

  β) εξίσωση έργου ενέργειας όταν ενδιαφέρει η αρχική και η τελική κατάσταση του σώματος (ταχύτητα).

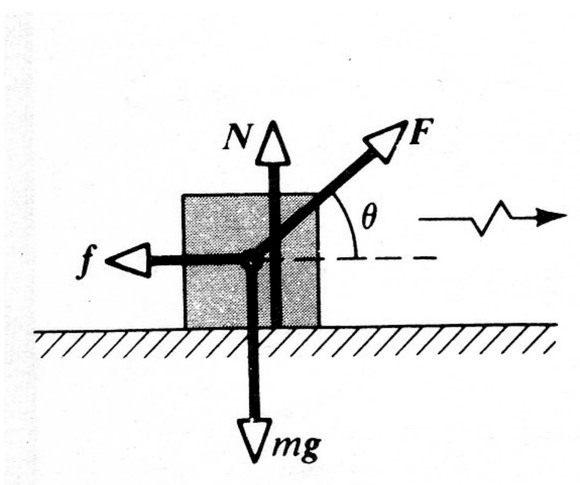
  Συνήθως πιο εύχρηστη π.χ. όταν η δύναμη δεν είναι σταθερή, ή όταν το σύστημα είναι πολύπλοκο.

# Έργο σταθερής δύναμης

$W=(F \cdot \cos\theta) \cdot s$




$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$




Οι δυνάμεις που είναι κάθετες στη μετατόπιση δεν παράγουν έργο.

# Ισχύς

- **Ισχύς**
- Μέση Ισχύς

$$\boxed{\overline{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

- Στιγμιαία

$$\boxed{P \equiv \frac{dW}{dt}}$$

$$\boxed{P = F\frac{ds}{dt} = F \cdot \upsilon}$$

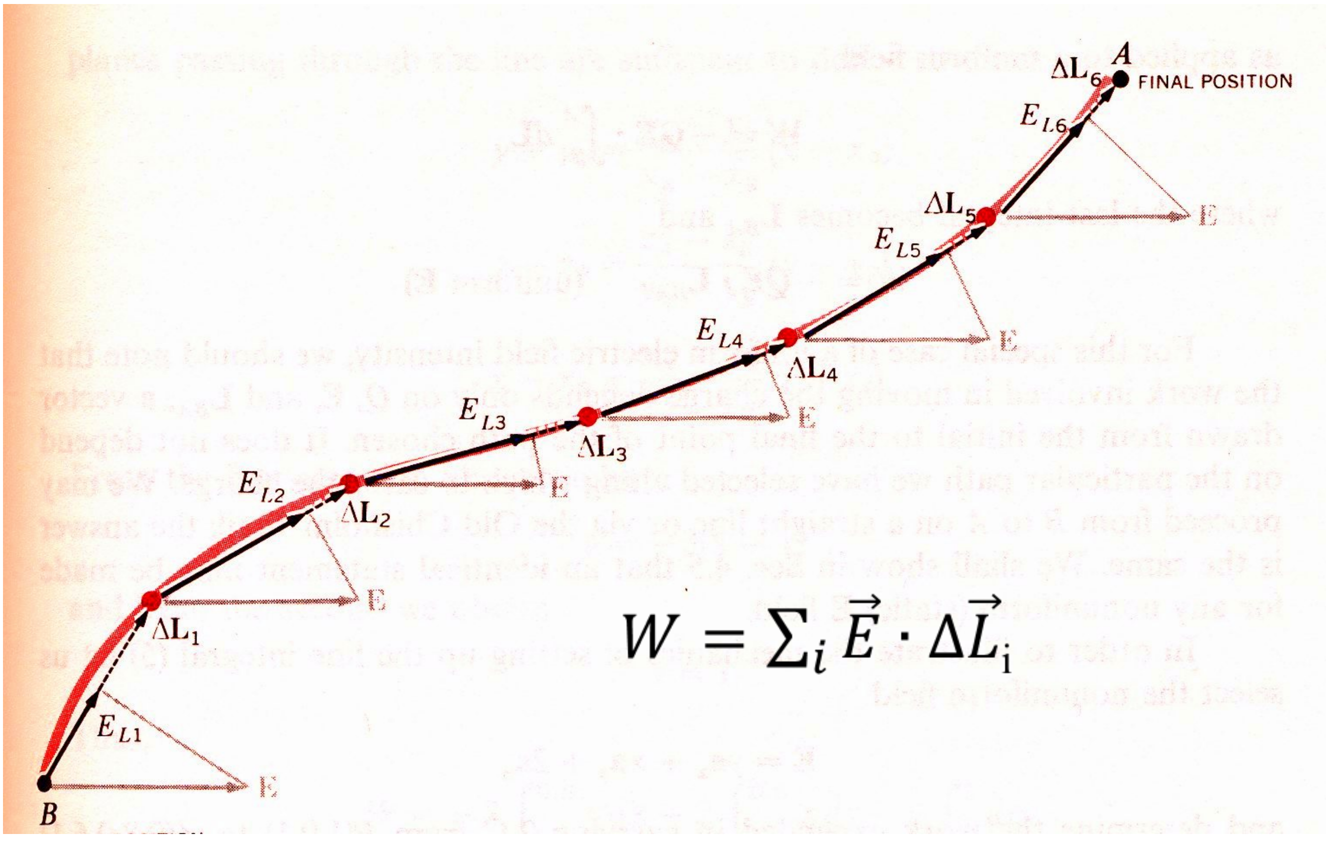
Ισχύς που μεταφέρεται πάνω σε σώμα που κινείται με ταχύτητα υ.
Αν η F δεν είναι σταθερή τότε ο τύπος ισχύει για την μέση ισχύ

# Εφαρμογές

**Παραδείγματα**

| | |
|---|---|
| Αντίσταση αέρα | $F_R = -c\,υ^2$ |
| Αεριωθούμενο | $F_t = λ(υ - υ_{εξ})$ |
| Πύραυλος | $F_t = λυ_{εξ}$ |

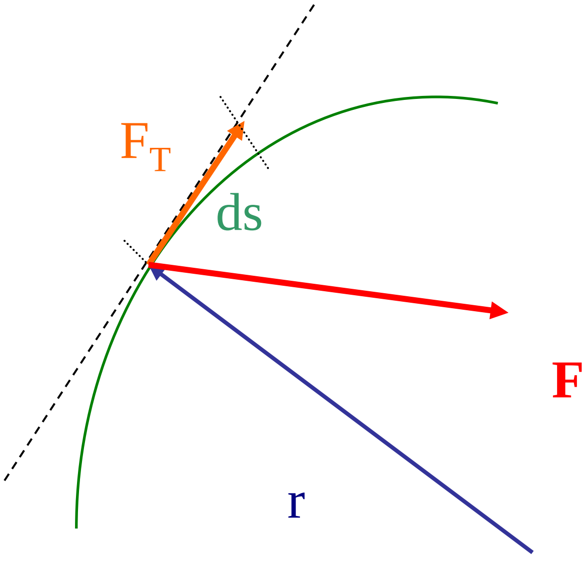
# Μετατόπιση σε καμπύλη




$$W = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{L}_\mathrm{i}$$

Η δύναμη Ε είναι σταθερή σε όλο το χώρο. Το έργο υπολογίζεται από την προβολή της δύναμης στη μετατόπιση $\Delta L_i$.

# Καμπυλόγραμμη Κίνηση




$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$F_r\, dr \Rightarrow dW = 0$$

$$\Rightarrow dW = F_T \cdot ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B F_T \cdot ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

# Κινητική ενέργεια.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dx}$$

$$\Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{d\upsilon}{dt} dx = \int m\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} dx =$$

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon \, d\upsilon = \tfrac{1}{2} m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

Η ποσότητα

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m\upsilon^2}$$

Ονομάζεται Κινητική Ενέργεια

## Θεώρημα έργου ενέργειας.

Το έργο που παράχθηκε είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

# Μονάδες

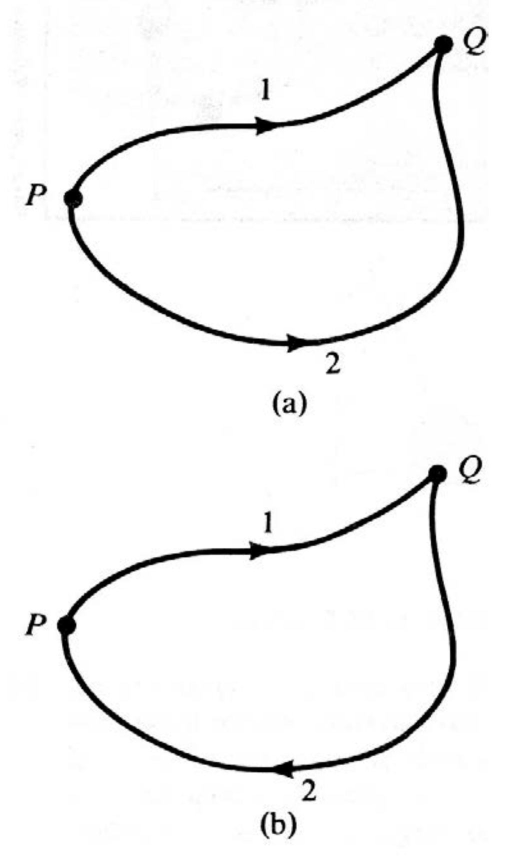
**Μονάδες έργου**

| | |
|---|---|
| 1 (Joule) | 1 J=1 Nt * 1 m |

| | |
|---|---|
| **Μονάδες Ισχύος** | 1W=1J/1s |
| SI | 1 hp=736 W |
| Βρετανικό | 1 hp=746 W |

# Διατηρητικές δυνάμεις

## Ορισμός




(a) $W_{PQ1}=W_{PQ2}$

(b) $W_{PQ}= -W_{QP}$

$W_{ο\lambda}=W_{PQ}+ W_{QP}=0$

$$\oint \vec{F}\,d\vec{s}=0$$

## Παραδείγματα

Διατηρητικές

Βαρύτητα, Ηλεκτροστατικές

Μη διατηρητικές

Τριβή

# Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας

**Αν το παραγόμενο έργο, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από την διαδρομή.**

**Ορίζουμε μία συνάρτηση U(x,y,z) την οποία ονομάζουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. η απλα δυναμική ενέργεια και η οποία είναι συνάρτηση μόνον των συντεταγμένων.**

$$W_c = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx = U(x_i) - U(X_f) = -\Delta U$$

$$U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

**Η $U_i$ μπορεί να μηδενίζεται σε κάποιο αυθαίρετο σημείο αναφοράς**

# Πεδία Δυνάμεων

Τι δυνατότητες μας δίνει η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων δυναμικής ενέργειας.

Από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη που θα ασκηθεί πάνω σε ένα σώμα που θα βρεθεί στη θέση αυτή.

Δηλαδή ορίζουμε ένα πεδίο δυνάμεων δηλ. μία περιοχή του χώρου όπου αν φέρουμε ένα σώμα πάνω του θα ασκηθούν δυνάμεις.

Υπολογίζω την συνάρτηση που δίνει την δύναμη που ασκείται πάνω στη μονάδα μάζας, φορτίου, για κάθε σημείο του χώρου. Την δύναμη αυτή την ονομάζω ένταση του πεδίου ή για συντομία σκέτο πεδίο.

Έτσι περιγράφουμε το πεδίο βαρύτητας με την σχέση , $\vec{F} = km\frac{\hat{r}}{r^2}$

το ηλεκτροστατικό πεδίο με την σχέση : $\vec{F} = kq\frac{\hat{r}}{r^2}$

κ.α. Και στις δύο περιπτώσεις έχω «κρύψει» το πρώτο σώμα στη σταθερή *k.*

Το πλεονέκτημα των είναι ότι απλοποιώ το σύστημα και το χωρίζω ουσιαστικά σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι είναι το πεδίο το οποίο παράγεται από το ένα σώμα και προέρχεται από την βαθμωτή συνάρτηση U(x,y,z). Δηλαδή διαλέγουμε ένα από τα σώματα και το αντικαθιστούμε με το πεδίο δυνάμεων. Συνήθως το χρησιμοποιούμε όταν οι αποστάσεις που χρησιμοποιούμε είναι πολύ μεγαλύτερες από τις διαστάσεις του σώματος , στο οποίο τοποθετούμε την αρχή των συντεταγμένων.

# Πεδία συνέχεια

Έστω ότι στην αρχή των αξόνων τοποθετώ ένα ηλεκτρικό φορτίο και το εξαναγκάζω να κάνει μία παλινδρομική κίνηση. Γύρω του δημιουργείται ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο διαδίδεται στον γύρω χώρο. Αν διακόψουμε την κίνηση η μεταβολή της κατάστασης δεν θα γίνει αμέσως αισθητή σε έναν απομακρυσμένο παρατηρητή και το πεδίο θα εξακολουθήσει να διαδίδεται στο χώρο ανεξάρτητα από την κατάσταση του φορτίου που το δημιούργησε!

Αν τώρα εξετάσουμε το πεδίο που δημιουργείται από ένα αντικείμενο με πολύ μεγάλη μάζα πχ. μία μαύρη τρύπα. Ελέγχουμε την γεωμετρία του χώρου γύρω της χρησιμοποιώντας μία φωτεινή ακτίνα. Διαπιστώνουμε ότι η ακτίνα δεν διαδίδεται ευθύγραμμα! Άρα έχει αλλάξει η γεωμετρία του χώρου!

Στα παραπάνω παραδείγματα ο φυσικός χώρος δεν είναι πιά ο γνωστός Ευκλείδιος χώρος αλλά έχει αποκτήσει φυσικές ιδιότητες που προέρχονται από την παρουσία των σωμάτων.

# Μηχανική Ενέργεια

Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας από την επίδραση Διατηρητικών Δυνάμεων

$$W_C = \Delta K$$

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0$$

Το άθροισμα διατηρείται

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Ε Μηχανική Ενέργεια

$$\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{K} + \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_f$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

# Ελατήριο

F=-kx

Ελαστική δυναμική ενέργεια

U(x)=½ kx2

Τύπος,

Απόδ. Διατηρητική δύναμη.

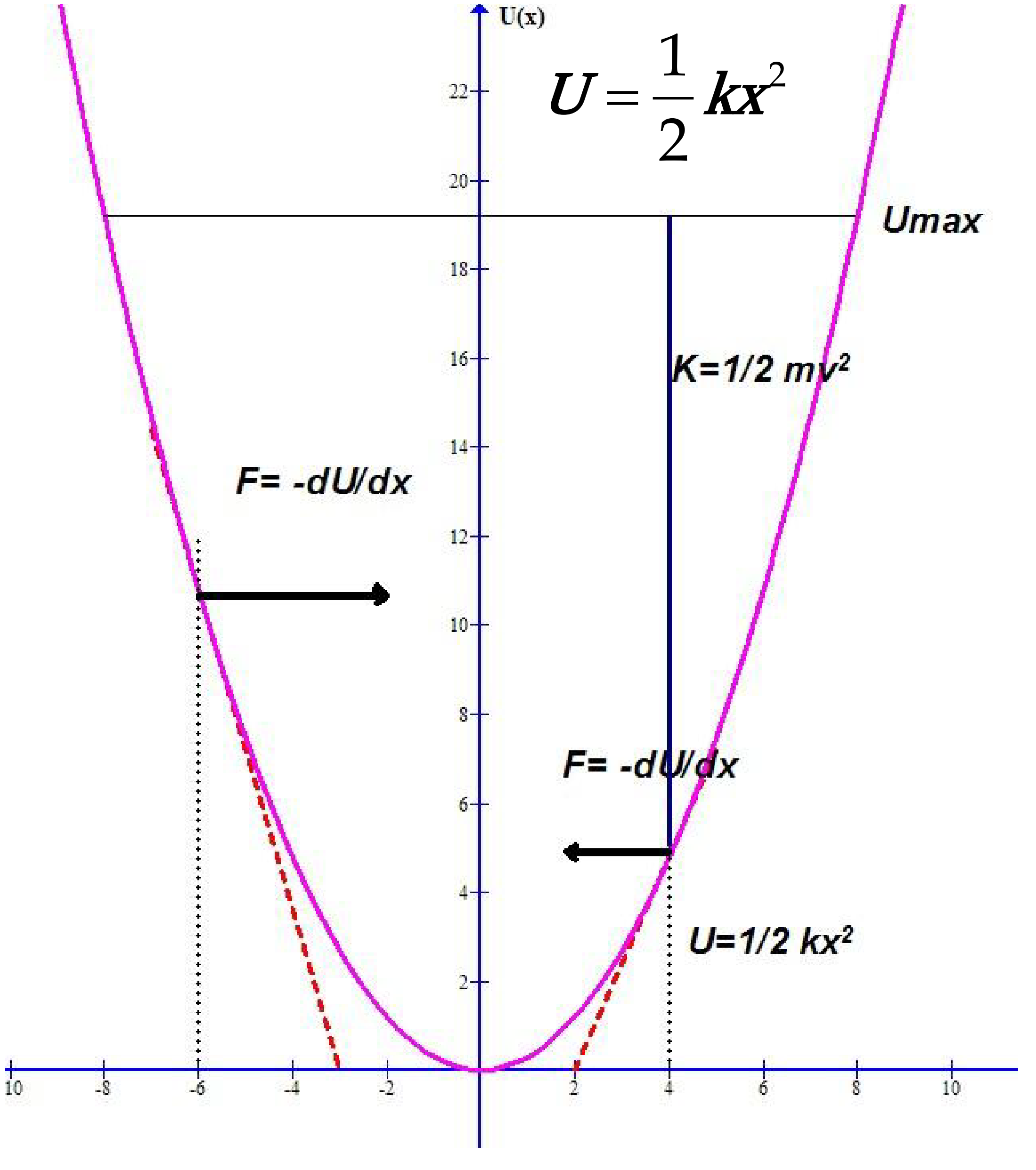
x=x0cos(ωt+ φ)

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t) dt = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\, d\varphi = 0$$

Αν γνωρίζουμε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τότε μπρούμε να υπολογίσουμε την δύναμη από την σχέση :

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

# Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας Αρμονικός Ταλαντωτής



# Δυναμικό Yukawa

$$U(r) = U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}$$

$$\upsilon_{(r)} = -\upsilon_o \frac{r_o}{r} e^{-\frac{r}{r_o}}$$

$$F = -\frac{d\upsilon}{dr}$$

$$F = -\upsilon_o \left(\frac{d}{dr}\left(\frac{r_o}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_o}} + \frac{r_o}{r}\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{r}{r_o}}\right)\right)$$

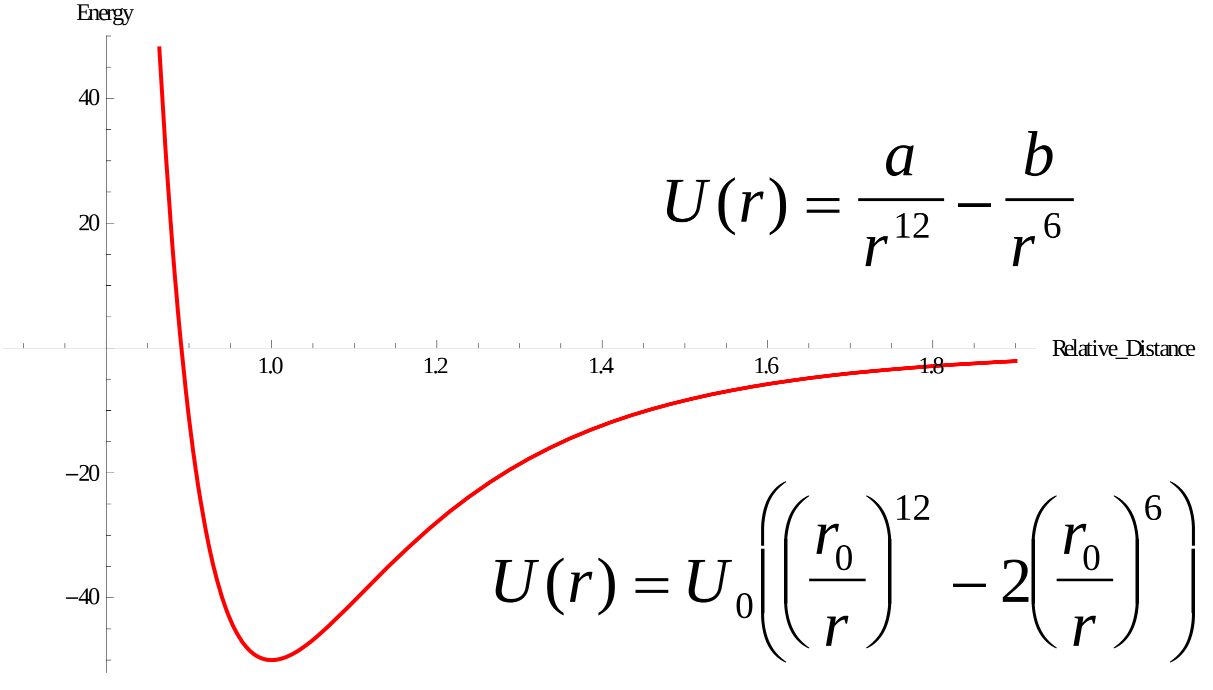
$$= -\upsilon_o \left(-\frac{r_o}{r^2} e^{-\frac{r}{r_o}} - \frac{r_o}{r}\left(-\frac{1}{r_o}\right) e^{-\frac{r}{r_o}}\right)$$

$$= -\upsilon_o \left(\frac{r_o}{r^2} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_o}}$$

Περιγράφει τις πυρηνικές δυνάμεις με την ανταλλαγή μεσονίων

Πολύ στενό και βαθύ πηγάδι δυναμικού

# Συνάρτηση Δυν. Ενέργειας Leanard-Jones




$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}$$

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right)$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow -12\frac{r_0^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_0^{6}}{r^{7}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_0$$

$$U(r_0) = -U_0$$