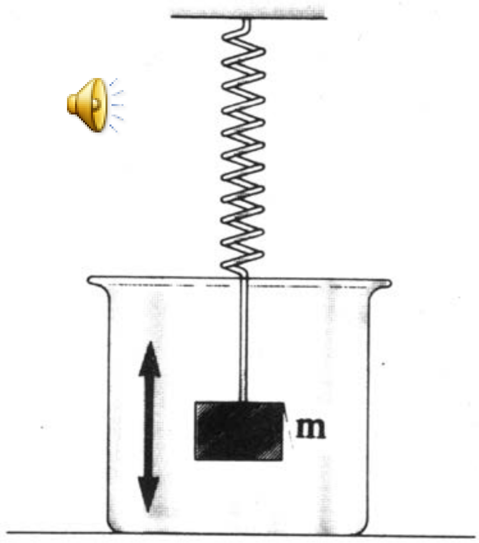
Ταλάντωση με απόσβεση

Η δύναμη τριβής δίνεται από τη σχέση : -kυ.

$\Sigma F_x = -kx - b\upsilon = ma_x$



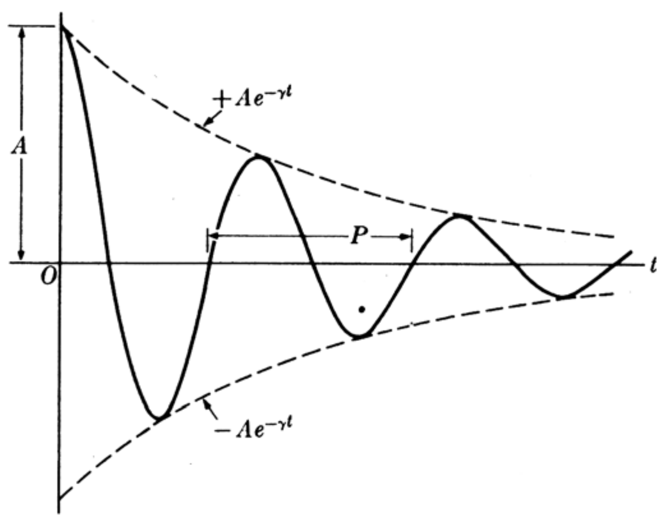
$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$$



Λύση της Διαφορικής

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Δοκιμάζω Λύση της μορφής :

$$x=ce^{zt}$$

$$cz^2e^{zt}+\frac{b}{m}cze^{zt}+\frac{k}{m}e^{zt}=0$$

Πρέπει να ισχύει $\forall\ t$

$$\Rightarrow z^2+\frac{b}{m}z+\frac{k}{m}=0$$

$$z=\frac{b/m\pm\sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}}}{2}$$

$$z=\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$Αν \left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \rightarrow Απόσβεση$$

$$Αν \left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \rightarrow Ταλάντωση$$

Από Μιγαδικές Συναρτήσεις

$$αν: \quad z = x + iy \rightarrow z = re^{i\theta}$$

$$ή: \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$όπου: \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan^{-1}\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\left[\frac{b}{2m}\right]^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{b}{2m}\right]^2 - \frac{k}{m}}$$

Και η Λύση θα είναι :

$$x = Ae^{z} = Ae^{-\frac{b}{2m}t}e^{i\omega t}$$

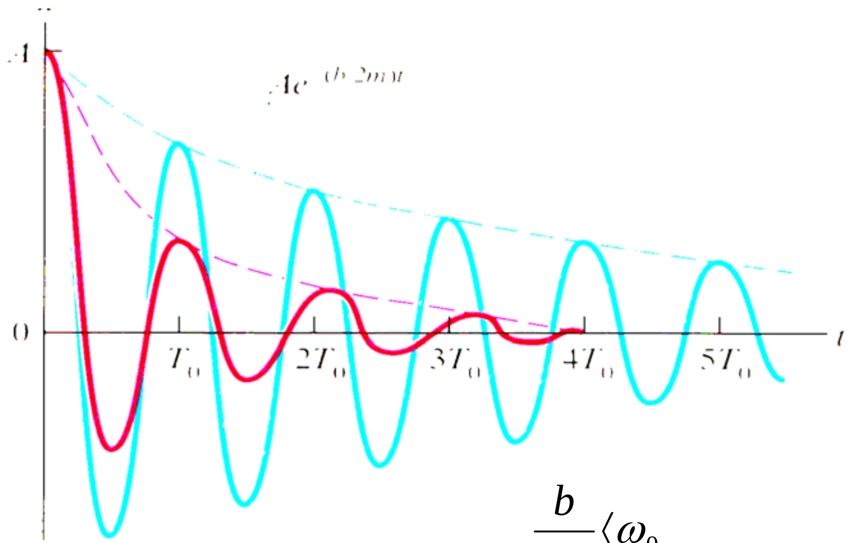
ή :

$$\chi = e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t)$$

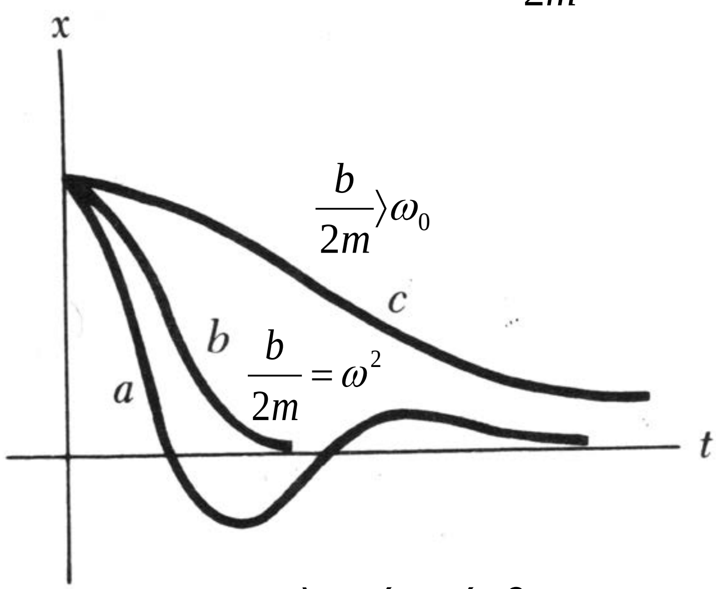
η Ειδική Λύση :

$$\chi = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Ταλάντωση για διαφορετικές τιμές του b



$$\frac{b}{2m}\langle\omega_0$$



Αυξάνοντας τον συντελεστή απόσβεσης:

(α) Η κίνηση παρουσιάζει ακόμη περιοδικότητα

(b)Η κρίσιμη απόσβεση. Ο χρόνος για την επιστροφή στη θέση ισορροπίας γίνεται ελάχιστος.

(c) Η κίνηση γίνεται απεριοδική.

Ταλάντωση με εξωτερική διέγερση, συντονισμός

$$F_0\,cos(\omega t)-kx-b\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

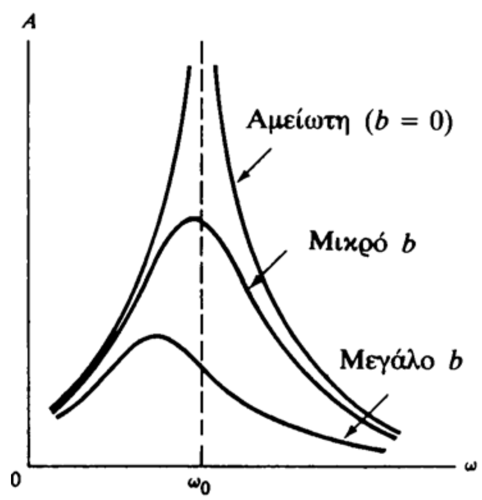
$$\Rightarrow x=A\,cos(\omega t+\delta)$$

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Συντονισμός πλάτους

Το πλάτος γίνεται μέγιστο για:

$$\omega=\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$



Μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης με την συχνότητα της οδηγήτριας δύναμης, για μικρό και μεγάλο b.

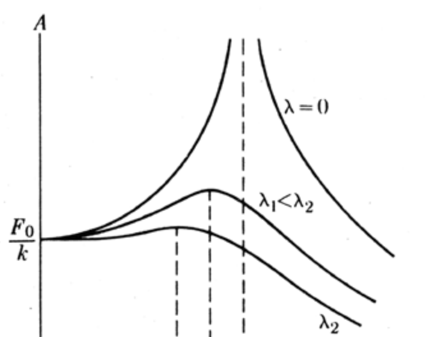
Συντονισμός Ενέργειας

$$F_0 \cos(\omega t)$$

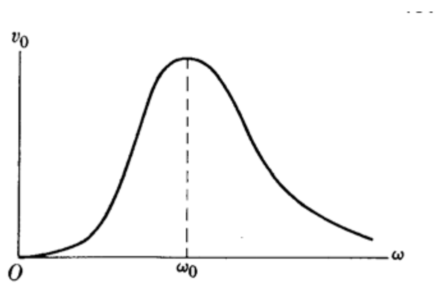
$$\upsilon_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}\,\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Η ταχύτητα και συνεπώς η κινητική ενέργεια του σώματος, μεγιστοποιείται για την συχνότητα $\omega=\omega_0$ δηλαδή την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Στην ίδια συχνότητα η ταχύτητα έχει την ίδια Φάση με την δύναμη. Η ισχύς *Fυ* που αποδίδεται στο σύστημα γίνεται μέγιστη.

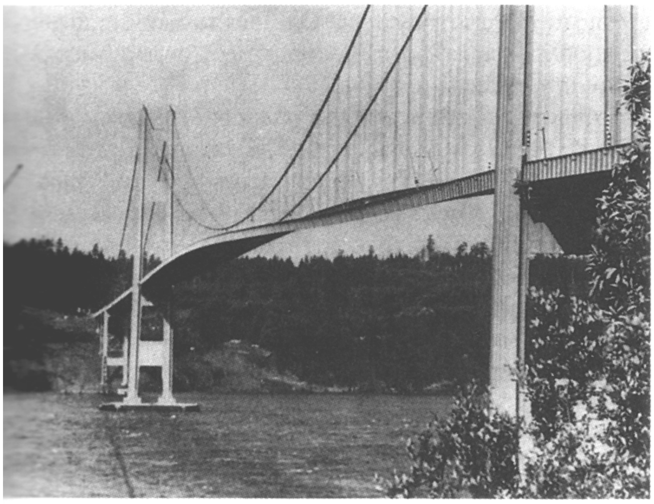


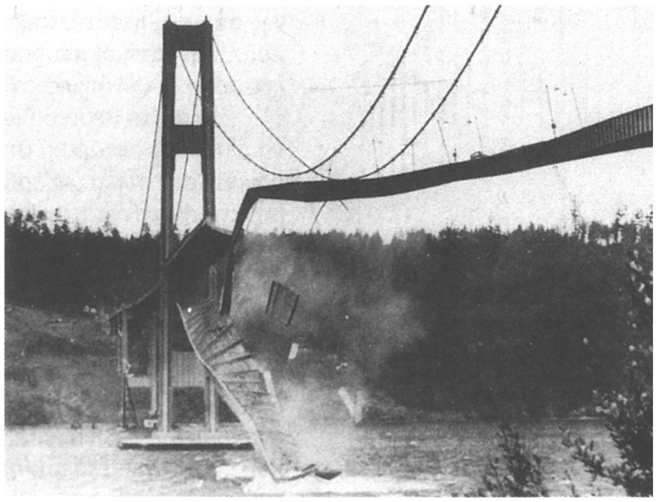
Σχῆμα 12-32.Μεταβολή τοῦ πλάτους τῶν ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων μέ τήν ἀπόσβεση (στό σχῆμα, λ_2 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό λ_1).

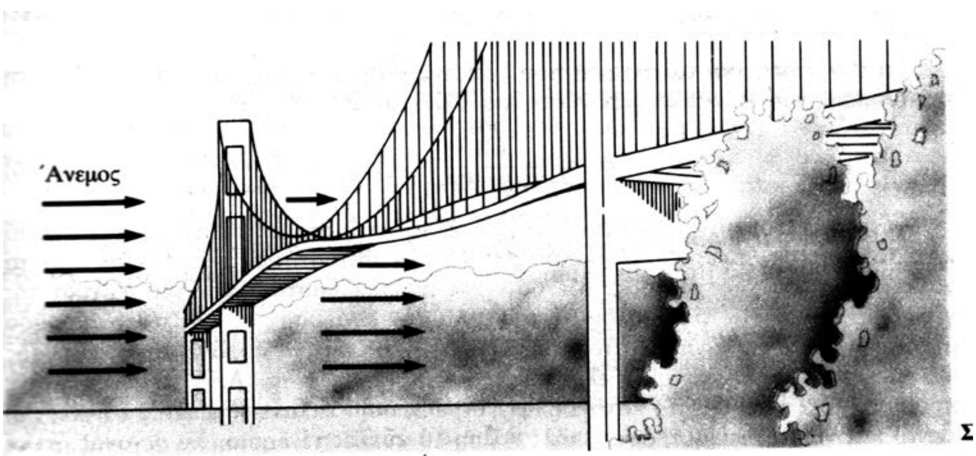


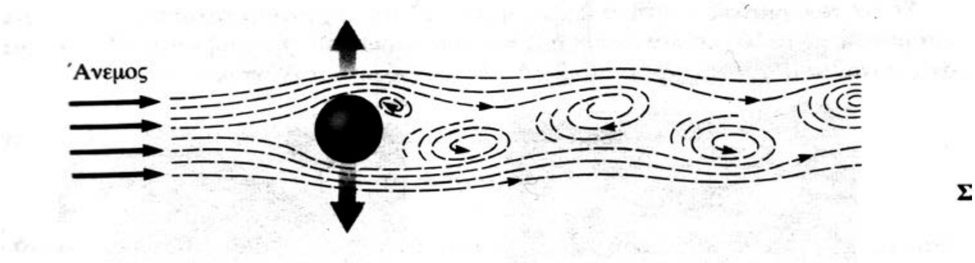
Σχῆμα 12-33.Μεταβολή τοῦ πλάτους τῆς ταχύτητας ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων μέ τή συχνότητα τῆς ἐφαρμοζόμενης δύναμης.

Η γέφυρα στο Tacoma Narrows









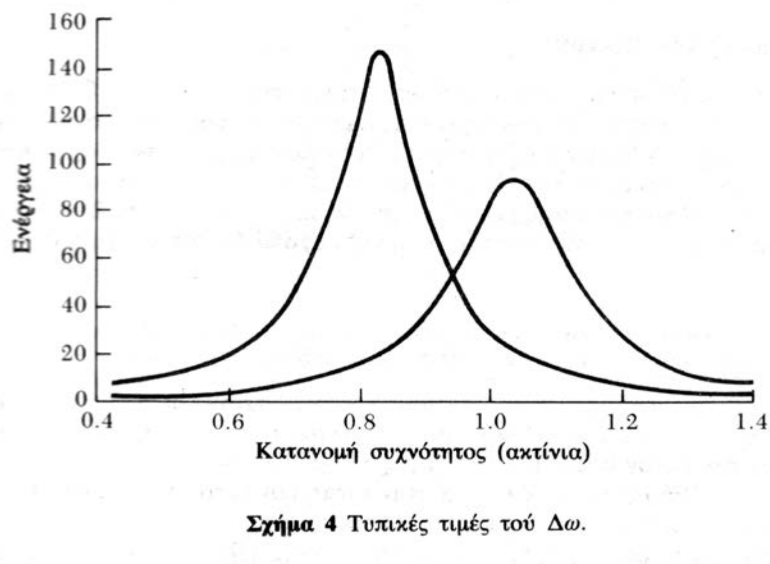
Η συχνότητα απόσπασης των στροβίλων είναι ***: ν=υ/5,5*d***

Ερμηνεία

Ο άνεμος δημιουργούσε στροβίλους, οι οποίοι ασκούσαν στροφικές ροπές στο κατάστρωμα της γέφυρας.

Η ενέργεια από τις στροφικές ταλαντώσεις μεταφέρονταν στις κατακόρυφες ταλαντώσεις

Προκύπτει ότι η κατακόρυφη ταλάντωση είχε συχνότητα **8 /min** και η οριζόντια **10 /min**.



Σχήμα 4 Τυπικές τιμές τού $\Delta\omega$.