Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της ~~10ης Σεπτεμβρίου 2013~~ 28ης Ιανουαρίου 2014. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\boldsymbol{r})$$

όπου $k = \{n, l, m\}$ ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή n = 1, 2, 3, … είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, l = 0, 1, 2, … , n–1 είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και m = –l, –l+1, … , l–1, l είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι

$$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(2-\frac{r}{a_0})\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{21\pm1}(r,\theta,\varphi) = (64\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{300}(r,\theta,\varphi) = (19683\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2})\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς l,m.
R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr.

1. Να χαρακτηριστούν όλες οι παραπάνω δεδομένες κυματοσυναρτήσεις (π.χ. η πρώτη είναι η 1s) και να ελεγχθεί αν είναι άρτιες ή περιττές.

2. Να αποφανθείτε αν μηδενίζονται ή όχι τα ολοκληρώματα $\boldsymbol{r}_{k_1k_2} \coloneqq \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανάλογα με τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p} = (-e)\boldsymbol{r}$, δηλαδή $\boldsymbol{p}_{k_1k_2} \coloneqq \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})(-e)\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$.
   Εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.

3. Προβλέψτε λοιπόν ποιες από τις μεταβάσεις μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων που δίνονται επιτρέπονται και ελέγξτε αν ισχύουν οι «κανόνες επιλογής» Δl = ±1, Δm = 0, ±1.

4. Ελέγξτε αν οι δεδομένες $\Phi_k(\boldsymbol{r})$ είναι ορθογώνιες.

5. Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$.

6. Είναι τα μέτρα των $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$ ίσα;

Θεωρείστε δεδομένα

Α) $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$ όπου n = 1, 2, 3, . . . και γ > 0.

Β) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές r′ = r, θ′ = π – θ, και φ′ = φ + π.

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:
$\mathbf{r} = \frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{x}-i\hat{y})\,\mathrm{e}^{i\varphi} + (\hat{x}+i\hat{y})\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\right] + r\cos\theta\,\hat{z}.$

Θέμα 2.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{JC}^{m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger})$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει.
2. Να υπολογιστούν τα $< \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+\hat{S}_- >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m >$, $<\hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger}>$ για την κατάσταση: $|\psi_E(t) > = \ c_1(t) \mid \downarrow, n+1 > \ + c_2(t) \mid \uparrow, n >$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=0$, $c_2(0)=1$.

3. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
$$i\begin{pmatrix}\dot{c_1}\\ \dot{c_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(n+1)\omega_m & g^m\sqrt{n+1}\\ g^m\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_{n+1} = [\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)]^{1/2}$, όπου για απλότητα θέσαμε τη «συχνότητα Rabi» $g^m = g$. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι $|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t)$.

4. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
6. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος και (II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων στις «ταλαντώσεις Rabi».

Θέμα 3.

Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

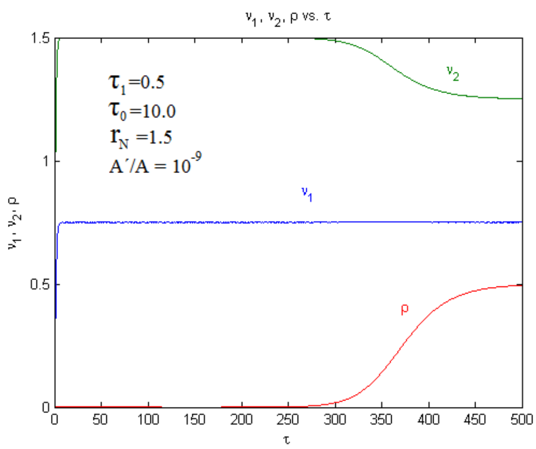
$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

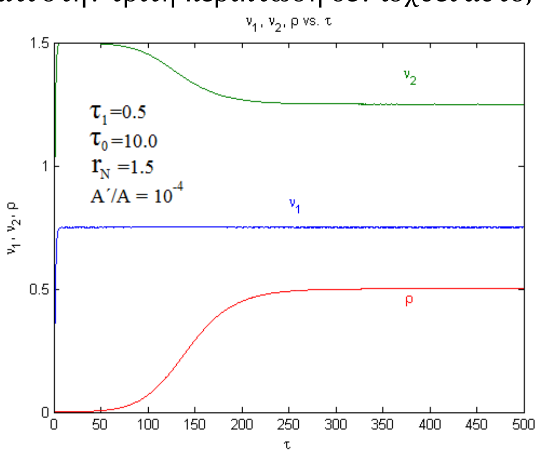
$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

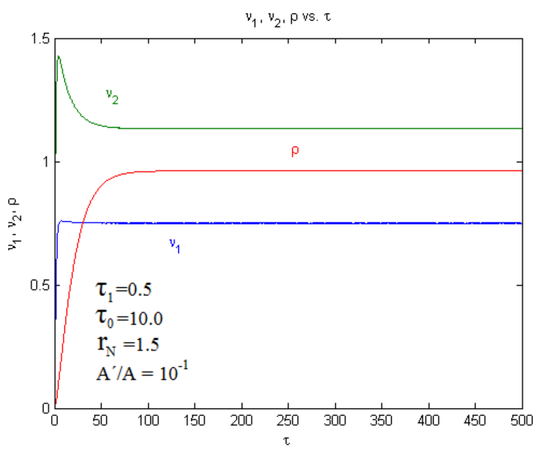
$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα.
2. Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;
3. Εξηγήστε τι σημαίνει στάσιμη κατάσταση.
4. Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση, στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$; Γιατί στην τρίτη περίπτωση δεν ισχύει αυτό;







ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
Εξετάσεως 28 ΙΑΝ 2014 (10 ΣΕΠ 2013)

Θέμα 1ο

1. ψ_{100} $n=1$ $l=0$ $m=0$ 1s

ψ_{200} $n=2$ $l=0$ $m=0$ 2s

ψ_{210} $n=2$ $l=1$ $m=0$ 2p πρόκειται για την $2p_z$

$\psi_{21\pm1}$ $n=2$ $l=1$ $m=\pm1$ 2p από γραμμικό συνδυασμό τους με + ή − προκύπτουν οι $2p_x$ με +, $2p_y$ με −

ψ_{300} $n=3$ $l=0$ $m=0$ 3s

Ο έλεγχος αρτιότητας γίνεται με τη βοήθεια της σχέσεως Β) που δίνεται δηλαδή η πράξη $\vec{r}\to\vec{r}'=-\vec{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές $r'=r$, $\theta'=\pi-\theta$, και $\varphi'=\varphi+\pi$.

Επομένως

- $\psi_{100}(-\vec{r})=\psi_{100}(\vec{r})$ επειδή εξαρτάται μόνο από το r και αυτό δεν αλλάζει με την πράξη $\vec{r}\to\vec{r}'=-\vec{r}$

  ΑΡΤΙΑ

- $\psi_{200}(-\vec{r})=\psi_{200}(\vec{r})$ για τον ίδιο ακριβώς λόγο

  ΑΡΤΙΑ

- $\psi_{210}(-\vec{r})=-\psi_{210}(\vec{r})$ επειδή εξαρτάται όχι μόνο από το r (που δεν αλλάζει με την πράξη $\vec{r}\to\vec{r}'=-\vec{r}$) αλλά και από το $\cos\theta$ το οποίο θα γίνει $\cos\theta'=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

  ΠΕΡΙΤΤΗ

- $\psi_{21\pm1}(-\vec{r})=-\psi_{21\pm1}(\vec{r})$ εξαρτάται από το r που δεν επηρεάζεται από την πράξη, από το $\sin\theta$ που πάει στο $\sin\theta'=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ άρα ούτε αυτό επηρεάζεται από την πράξη, ΚΑΙ από το $e^{\pm i\varphi}$

  ΠΕΡΙΤΤΗ

$$e^{+i\varphi}\to e^{i\varphi'}=e^{i(\varphi+\pi)}=e^{i\varphi}e^{i\pi}=-e^{i\varphi}$$
$$e^{-i\varphi}\to e^{-i\varphi'}=e^{-i(\varphi+\pi)}=e^{-i\varphi}e^{-i\pi}=-e^{-i\varphi}$$

- $\psi_{300}(-\vec{r})=\psi_{300}(\vec{r})$ εξαρτάται από το r που δεν επηρεάζεται από την πράξη

  ΑΡΤΙΑ

Δηλαδή όπως άλλωστε γνωρίζουμε "εγκυκλοπαιδικά", οι τύπου s είναι ΑΡΤΙΕΣ κ οι τύπου p είναι ΠΕΡΙΤΤΕΣ

2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ $\vec{r}_{k_1k_2} := \int_{\text{παντού}} \Phi^*_{k_1}(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_{k_2}(\vec{r})$, ΑΡΤΙΑ (Α), ΠΕΡΙΤΤΗ (Π)

κ 3.

$k_1=(n_1,l_1,m_1)$	$k_2=(n_2,l_2,m_2)$	$\Phi^*_{k_1}(\vec{r})$	$\Phi_{k_2}(\vec{r})$	$\Phi^*_{k_1}(\vec{r})\vec{r}\Phi_{k_2}(\vec{r})$	$\vec{r}_{k_1k_2}$	Δl	Δm	υπακούει στους κανόνες επιλογής $\Delta l=\pm1$, $\Delta m=\emptyset,\pm1$
100 1s	200 2s	Α	Α	Π	ΑΠΑΓ. $\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ΝΑΙ
100 1s	210 $2p_z$	Α	Π	Α	ΕΠΙΤΡ. $\neq\emptyset$	1	$\emptyset$	ΝΑΙ
100 1s	21±1 $2p_{x k y}$	Α	Π	Α	ΕΠΙΤΡ. $\neq\emptyset$	1	±1	ΝΑΙ
100 1s	300 3s	Α	Α	Π	ΑΠΑΓ. $\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ΝΑΙ
200 2s	210 $2p_z$	Α	Π	Α	επιτρ. $\neq\emptyset$ ✱	1	$\emptyset$	ΝΑΙ
200 2s	21±1 $2p_{x k y}$	Α	Π	Α	επιτρ. $\neq\emptyset$ ✱	1	±1	ΝΑΙ
200 2s	300 3s	Α	Α	Π	ΑΠΑΓ. $\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ΝΑΙ
210 $2p_z$	21±1 $2p_{x k y}$	Π	Π	Π	ΑΠΑΓ. $\emptyset$	$\emptyset$	±1	ΝΑΙ
210 $2p_z$	300 3s	Π	Α	Α	ΕΠΙΤΡ. $\neq\emptyset$	−1	$\emptyset$	ΝΑΙ
21±1 $2p_{x k y}$	300 3s	Π	Α	Α	ΕΠΙΤΡ. $\neq\emptyset$	−1	∓1	ΝΑΙ

✱ όμως στο άτομο του υδρογόνου η αρχική και η τελική κατάσταση αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια, είναι δηλ. εκφυλισμένες δηλ. επί της ουσίας δεν υπάρχουν τέτοιες μεταβάσεις

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΕΩΝ (δεν ζητήθηκε)

$$100100 := \int dV\, \Psi^*_{100}\Psi_{100} = (\pi a_0^3)^{-1}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, e^{-\frac{2r}{a_0}} =$$

$q=\frac{r}{a_0}$

$$= \frac{a_0^3}{\pi a_0^3}\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-2q}\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-2q}\cdot 4\pi = 4\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-2q}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δίνεται στη σχέση Α)

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$$

$n = 1,2,3,\ldots$ κ $\gamma > \emptyset$

$q \to r$
$2 \to n$
$2 \to \gamma$

Άρα $100100 = 4\cdot 2^{-(2+1)}\, 2! = \frac{4\cdot 2}{8} = 1$

Δηλαδή η Ψ_{100} είναι κανονικοποιημένη όπως αναμενόταν

Ομοίως υπολογίζονται και τα υπόλοιπα, ήτοι 200200

210210

21±121±1

300300

4. $100200 := \int dV\, \Psi^*_{100}\Psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{32}}(\pi a_0^3)^{-1}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$

$$= \frac{1}{4\sqrt2}\frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi}$$

$$= \frac{\cancel{a_0^3}}{\sqrt2\, \cancel{a_0^3}}\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-q}(2-q)e^{-\frac{q}{2}} = \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\infty dq\,(2q^2-q^3)\, e^{-\frac{3q}{2}}$$

$$= \sqrt2\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-\frac{3q}{2}} - \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\infty dq\, q^3 e^{-\frac{3q}{2}}$$

Ο τύπος αυτός των ολοκληρωμάτων δίνεται στη σχέση Α)

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ κ $\gamma > 0$

$q \to r$, $2 \to n$, $\frac{3}{2} \to \gamma$

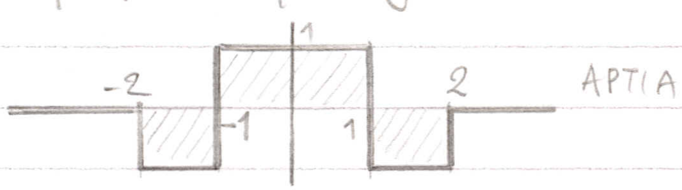
$q \to r$, $3 \to n$, $\frac{3}{2} \to \gamma$

Άρα $100200 = \sqrt2\left(\frac{3}{2}\right)^{-(2+1)} 2! - \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+1)} 3! = 2^{1/2}\frac{2^3}{3^3}2 - \frac{1}{2^{1/2}}\frac{2^4}{3^4}2\cdot 3 \Rightarrow$

$100200 = \frac{2^{9/2}}{3^3} - \frac{2^{9/2}}{3^3} = 0 \Rightarrow$ ορθογώνιες όπως αναμενόταν

Ομοίως υπολογίζονται και τα υπόλοιπα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων, που πράγματι μηδενίζονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας ΑΡΤΙΑΣ συναρτήσεως δεν είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται π.χ



ΕΝΩ Το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας ΠΕΡΙΤΤΗΣ συναρτήσεως εκ ταυτότητας ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ διότι π.χ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{0}dx\, f(x) + \int_{0}^{+\infty}dx\, f(x) = \int_{+\infty}^{0}d(-y)\, f(-y) + \int_{0}^{+\infty}dx\, f(x) = -\int_{0}^{+\infty}dy\, f(y) + \int_{0}^{+\infty}dx\, f(x) = 0$$

$q = \frac{r}{a_0}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta \ell = 1\\ \Delta m = \emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow$ αναμένεται επιτρεπτή

5.

$$\langle 1\emptyset\emptyset|\vec{r}|21\emptyset\rangle = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\; e^{-\frac{r}{a_0}} \left(\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\, r \,\cdot$$

$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

$$= (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} a_0^4 \cdot \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cdot$$

$$\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

• Το ολοκλήρωμα στα $q = \frac{r}{a_0}$ γίνεται $\int_0^\infty dq\cdot q^4 e^{-\frac{3q}{2}}$ το οποίο σύμφωνα με το δεδομένο A) για $q \leftrightarrow r$, $4 \leftrightarrow n$, $\frac{3}{2} \leftrightarrow \gamma$

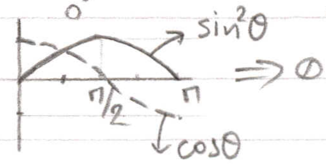
γίνεται $\left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \frac{2^5}{3^5}\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2 = \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

• η σταθερά πριν από τα ολοκληρώματα γίνεται $\frac{a_0^4}{a_0^3\pi\sqrt{16\cdot 2}} = \frac{a_0}{\pi 4\sqrt{2}} = \frac{a_0}{\pi 2^{5/2}}$

• Τα ολοκληρώματα με θ, φ γίνονται

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right] + \int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\hat{z}$$

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{2} = \frac{1}{2}\int_0^0 \sin^2\theta\, d(\sin\theta) = \emptyset$$ ή



$\Rightarrow \emptyset$

$$\text{ή } \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\cdot\sin^2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\sin^2\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin^2\theta\, d(\sin\theta) + \frac{1}{2}\int_1^0 \sin^2\theta\, d(\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0\right] = \emptyset$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right] = (\hat{x}-i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\varphi} + (\hat{x}+i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varphi} = \emptyset$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^2\theta = -\int_1^{-1}\cos^2\theta\, d(\cos\theta) = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{-1} = -\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ $\langle 1\emptyset\emptyset|\vec{r}|21\emptyset\rangle = \frac{a_0}{\cancel{\pi}\, 2^{5/2}}\,\frac{2^8}{3^4}\cdot\frac{2}{3}\,\hat{z}\, 2\cancel{\pi} = \frac{a_0\hat{z}\cdot 2^{15/2}}{3^5} \Rightarrow \boxed{\langle 1\emptyset\emptyset|\vec{r}|21\emptyset\rangle = \frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}a_0\hat{z}}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta l = 1\\ \Delta m = \pm 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{αναμένεται επιτρεπτή} \qquad q=\frac{r}{a_0}$$

$$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}(64\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} r$$

$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\} =$$

$$=(64\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} a_0^4\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$\cdot\int_0^\pi d\theta\sin^2\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{\pm i\varphi}\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

• η σταθερά πριν από τα ολοκληρώματα γίνεται $\frac{a_0^4}{8\pi a_0^3}=\frac{a_0}{8\pi}$

• το ολοκλήρωμα στα $q=\frac{r}{a_0}$ γίνεται $\int_0^\infty dq\, q^4 e^{-\frac{3q}{2}}$ το οποίο σύμφωνα με το δεδομένο A) για $q \leftrightarrow r$, $4 \leftrightarrow n$, $\frac{3}{2}\leftrightarrow \gamma$

γίνεται $\left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \frac{2^5}{3^5}2\cdot 3\cdot 2^2 = \frac{2^8}{3^4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$

• τα ολοκληρώματα με θ,φ γίνονται

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^3\theta}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{\pm i\varphi}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\int_0^\pi d\theta\sin^2\theta\cos\theta\cancel{\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{\pm i\varphi}}^{\,0}\hat{z}$$

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^3\theta}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right]=\frac{2}{3}$$

ΑΝ $\oplus$

$$(\hat{x}-i\hat{y})\cancel{\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{2i\varphi}}^{\,0}+(\hat{x}+i\hat{y})\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi(\hat{x}+i\hat{y})$$

ΑΝ $\ominus$

$$(\hat{x}-i\hat{y})\int_0^{2\pi}d\varphi+(\hat{x}+i\hat{y})\cancel{\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{-2i\varphi}}_{\,0}=2\pi(\hat{x}-i\hat{y})$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ:

$$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle=\frac{a_0}{8\pi}\cdot\frac{2^8}{3^4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi(\hat{x}\pm i\hat{y})=a_0\frac{2^7}{3^5}(\hat{x}\pm i\hat{y})\Rightarrow \boxed{\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle=\frac{2^7}{3^5}a_0(\hat{x}\pm i\hat{y})}$$

6. $\left|\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle\right| = \frac{2^7}{3^5}a_0\sqrt{2}\ \left(\text{διότι } |\hat{x}\pm i\hat{y}|=\sqrt{2}\right)=\frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}a_0=\left|\langle 100|\vec{r}|210\rangle\right|$

Θέμα 2ο

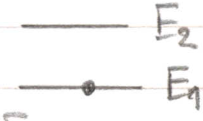
Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummigs $\hat{H}^{m}_{JC} = \hbar\omega_m \hat{a}^{\dagger}_m \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}^{\dagger}_m)$

1.

m: δηλώνει τον τρόπο ταλάντωσης (mode) του ΗΜ πεδίου $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$: η κυκλική συχνότητα που αντιστοιχεί στον m τρόπο

$\hat{a}^{\dagger}_m, \hat{a}_m$: τελεστές δημιουργίας και καταστροφής φωτονίων του m τρόπου



Ω : η κυκλική συχνότητα που αντιστοιχεί στο διστάθμικό άτομο, δηλ

$\hat{S}_+, \hat{S}_-$: τελεστές αναβιβάσεως ή καταβιβάσεως του ηλεκτρονίου $\hbar\Omega = E_2 - E_1$
μεταξύ των δύο σταθμών E_1 ή E_2

g^m : συχνότητα Rabi του m τρόπου $g^m = \frac{\wp E_0^m}{\hbar}$ $\wp$: διπολική ροπή $= -eX_{12}$

E_0^m: πλάτος ηλεκτρικού πεδίου m τρόπου

E

$$\langle \hat{a}_m^+ \hat{a}_m \rangle_E = \langle \psi_E(t) | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \}$$

$$= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle$$

$$+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle$$

$$= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \, n \, \underbrace{\langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle}_{0}$$

$$+ c_2^* c_1 (n+1) \underbrace{\langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle}_{0} + |c_2|^2 n \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle =$$

$$= |c_1|^2 (n+1) + n |c_2|^2 = n \left(|c_1|^2 + |c_2|^2 \right) + |c_1|^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^+ \hat{a}_m \rangle_E = n + |c_1(t)|^2} \checkmark \qquad (4.60)$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_E = \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{S}_- \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \}$$

$$= |c_1|^2 \cdot 0 + c_1^* c_2 \underbrace{\langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle}_{0} + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_E = |c_2(t)|^2} \checkmark \qquad (4.60)$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_E = \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \}$$

$$= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle +$$

$$+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle$$

$$= |c_1|^2 \underbrace{\langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle}_{0} \sqrt{n+1} + c_1^* c_2 \cdot 0 + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \sqrt{n+1} + |c_2|^2 \cdot 0$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_E = c_2^*(t) \, c_1(t) \cdot \sqrt{n+1}}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^+ \rangle_E = \langle \psi_E(t) | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_- \hat{a}_m^+ \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \}$$

$$= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \uparrow, n \rangle$$

$$+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \uparrow, n \rangle =$$

$$= |c_1|^2 \underbrace{\langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n+2 \rangle}_{0} \sqrt{n+2} + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle \sqrt{n+1}$$

$$+ c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \underbrace{\langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle}_{0} \sqrt{n+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^+ \rangle_E = c_1^*(t) \cdot c_2(t) \cdot \sqrt{n+1}}$$

ΑΡΑ $\boxed{\langle \hat{a}_m^+ \hat{a}_m \rangle_E + \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_E = n+1}$ ✓ (4.61)

3. $|\psi_E(t)\rangle = c_1(t)\,|\downarrow, n+1\rangle + c_2(t)\,|\uparrow, n\rangle$ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΦΩΤΟΝΙΟΥ

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi_E(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi_E(t)\rangle$

$\hat{H} = \hat{H}^m_{JC} = \hbar\omega_m \hat{a}^+_m \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}^+_m)$

Α.Σ. $c_1(0)=0$, $c_2(0)=1$ (4.59)

$A' = i\hbar \frac{\partial |\psi_E(t)\rangle}{\partial t} = i\hbar\dot{c}_1 |\downarrow, n+1\rangle + i\hbar \dot{c}_2 |\uparrow, n\rangle$

$$\Delta' = \left(\hbar\omega_m \hat{a}^+_m\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}^+_m)\right)\left(c_1|\downarrow, n+1\rangle + c_2|\uparrow, n\rangle\right) =$$
$$= \hbar\omega_m c_1 (n+1)|\downarrow, n+1\rangle + \hbar\Omega c_1\cdot 0 + \hbar g^m c_1 |\uparrow, n\rangle\sqrt{n+1} + \hbar g^m c_1 \cdot 0$$
$$+ \hbar\omega_m c_2 n |\uparrow, n\rangle + \hbar\Omega c_2 |\uparrow, n\rangle + \hbar g^m c_2 \cdot 0 + \hbar g^m c_2 |\downarrow, n+1\rangle\sqrt{n+1} =$$
$$= \hbar\omega_m c_1(n+1)|\downarrow, n+1\rangle + \hbar g^m c_1\sqrt{n+1}\,|\uparrow, n\rangle$$
$$+ \hbar\omega_m c_2 n|\uparrow, n\rangle + \hbar\Omega c_2|\uparrow, n\rangle + \hbar g^m c_2\sqrt{n+1}\,|\downarrow, n+1\rangle$$

επί $\langle\downarrow, n+1|$: $A' = i\hbar\dot{c}_1$, $\Delta' = \hbar\omega_m c_1(n+1) + \hbar g^m c_2\sqrt{n+1}$ $\Rightarrow i\dot{c}_1 = \omega_m(n+1)c_1 + g^m\sqrt{n+1}\,c_2$

επί $\langle\uparrow, n|$: $A' = i\hbar\dot{c}_2$, $\Delta' = \hbar g^m c_1\sqrt{n+1} + \hbar\omega_m c_2 n + \hbar\Omega c_2$ $\Rightarrow i\dot{c}_2 = g^m\sqrt{n+1}\,c_1 + (n\omega_m + \Omega)\,c_2$

Δηλαδή
$$\boxed{i\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(n+1)\omega_m & g^m\sqrt{n+1}\\ g^m\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}}$$
σύστημα διαφορικών εξισώσεων

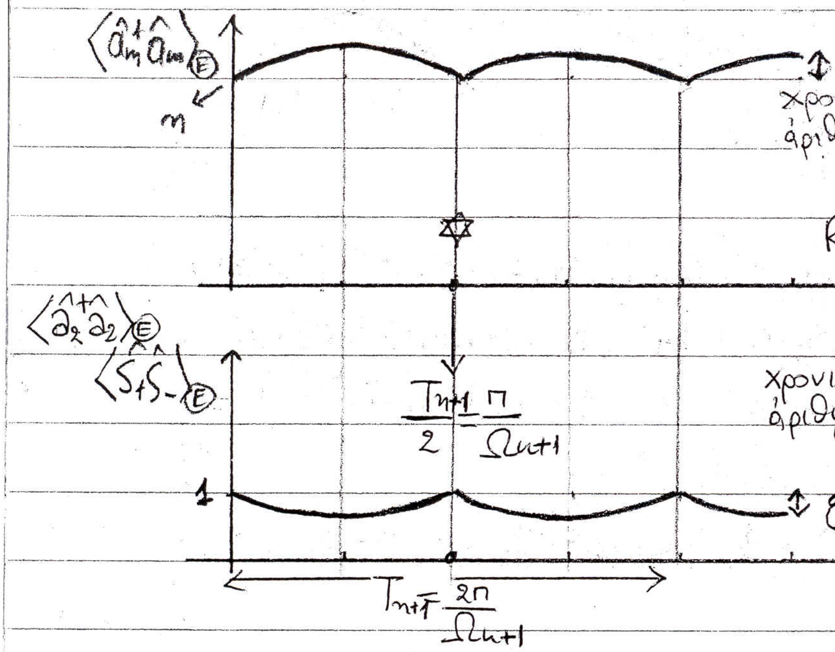
$$\boxed{\Omega_{n+1} = \left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)\right]^{1/2}}$$
γενικευμένη συχνότητα Rabi (4.64)

ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ ΑΛΛΟΥ
$$c_1(t) = \exp\left[-i\left((n+1)\omega + \frac{\Omega-\omega}{2}\right)t\right]\left[-i\,\frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}}\sin(\Omega_{n+1}t)\right] \quad (4.62)$$
$$c_2(t) = \exp\left[-i\left((n+1)\omega + \frac{\Omega-\omega}{2}\right)t\right]\left[\cos(\Omega_{n+1}t) - i\,\frac{\Omega-\omega}{2\Omega_{n+1}}\cdot\sin(\Omega_{n+1}t)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{|c_1(t)|^2 = \frac{g^2(n+1)}{\Omega^2_{n+1}}\sin^2(\Omega_{n+1}t)} \quad \text{και} \quad |c_2(t)|^2 = 1 - |c_1(t)|^2 = \ldots \quad (4.63)$$

4. ΑΡΑ $\langle \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m\rangle_{(E)} = n + \dfrac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t)$

5. $\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_{(E)} = 1 - \dfrac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2}\cdot\sin^2(\Omega_{n+1}t)$



$g^2(n+1)/\Omega_{n+1}^2 = \mathcal{A}$

χρονική εξέλιξη αναμενόμενης τιμής αριθμού φωτονίων στην κοιλότητα

RABI OSCILLATIONS

χρονική εξέλιξη αναμενόμενης τιμής αριθμού ηλεκτρονίων στην E_2 στάθμη δηλ. στην άνω στάθμη

$g^2(n+1)/\Omega_{n+1}^2 = \mathcal{A}$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{pmatrix} = (-i)\begin{pmatrix}(n+1)\omega & g\sqrt{n+1}\\ g\sqrt{n+1} & \Omega+n\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

ΜΟΡΦΗΣ $\dot{\vec{X}}(t) = \overleftrightarrow{A}\,\vec{X}(t)$

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{pmatrix}\dot{c}_1(t)\\ \dot{c}_2(t)\end{pmatrix} \qquad \vec{X}(t) = \begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix} \qquad \overleftrightarrow{A} = (-i)\begin{pmatrix}(n+1)\omega & g\sqrt{n+1}\\ g\sqrt{n+1} & \Omega+n\omega\end{pmatrix}$$

6. $\mathcal{A} = \dfrac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} = \dfrac{g^2(n+1)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)}$

ΑΡΑ για $\Omega = \omega \Rightarrow \mathcal{A} = 1$ (συντονισμός)

για $\Omega \neq \omega \Rightarrow \mathcal{A} < 1$ (μη συντονισμός)

Η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος $\mathcal{A} = \dfrac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} = \dfrac{g^2(n+1)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)}$

(II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων $\dfrac{T_{n+1}}{2} = \dfrac{\pi}{\Omega_{n+1}}$

βλέπε ΣΧΗΜΑ

δ) Ας ξαναθυμηθούμε τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις (E1)(E2)(E3) μετατρέποντάς τες με τη βοήθεια των μεγεθών $\boxed{n_i := \frac{N_i}{V}}$ (n) και $\boxed{r := \frac{R}{V}}$ (r) ρυθμών laser

$$\frac{dn_1}{dt} = An_2 + B\rho(n_2 - n_1) - \frac{n_1}{t_1} \quad (E1')$$

ορίζουμε και $r_c := \frac{R_c}{V} = \frac{1}{Bt_0(t_2-t_1)h\nu F(\nu)}$

$$\frac{dn_2}{dt} = r + B\rho(n_1 - n_2) - An_2 \quad (E2')$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left\{A'n_2 + B\rho(n_2 - n_1)\right\} h\nu F(\nu) \quad (E3')$$

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (E1')(E2')(E3') είτε ως έχει είτε κάνοντάς τις πρώτα αδιάστατες. Για το λόγο αυτό ορίζουμε μερικά βοηθητικά αδιάστατα μεγέθη

$$n_0 := t_2 r_c \qquad [n_0] = s \cdot \frac{1}{sm^3} = \frac{1}{m^3} \qquad \nu_i := \frac{n_i}{n_0} \Longleftrightarrow n_i = \nu_i n_0 \qquad [\nu_i] = \frac{\frac{1}{m^3}}{\frac{1}{m^3}} = 1$$

$$\wp = B\rho t_2 \qquad [\wp] = \frac{m^3}{Js^2} \cdot \frac{Js}{m^3} \cdot s = 1 \qquad \tau := \frac{t}{t_2} \Longleftrightarrow t = t_2\tau$$

ΘΕΜΑ 3.1

$$\varpi := Vt_2 r \qquad \varpi_c := Vt_2 r_c \qquad \frac{\varpi}{\varpi_c} = \frac{r}{r_c} := r_N \qquad t_1 = \frac{t_1}{t_2} t_2 = \tau_1 t_2 \qquad t_0 = \frac{t_0}{t_2} t_2 = \tau_0 t_2$$

ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ θέμα 3.1

(E1') $$\frac{d(\nu_1 n_0)}{d(t_2\tau)} = \frac{\nu_2 n_0}{t_2} + \frac{\wp}{t_2}(\nu_2 - \nu_1)n_0 - \frac{\nu_1 n_0 t_2}{t_1 t_2} \Rightarrow \boxed{\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \wp(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1}} \quad (\varepsilon 1)$$

(E2') $$\frac{d(\nu_2 n_0)}{d(t_2\tau)} = \frac{\varpi n_0}{Vt_2 n_0} + \frac{\wp}{t_2}(\nu_1 n_0 - \nu_2 n_0) - \frac{\nu_2 n_0}{t_2} \Rightarrow \boxed{\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \wp(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2} \quad (\varepsilon 2)$$

(E3') $$\frac{d\wp}{d\tau}\frac{1}{Bt_2^2} = -\frac{\wp}{Bt_2^2 \frac{t_0}{t_2}} + \left\{A'\nu_2 n_0 + \frac{\wp}{t_2}(\nu_2 n_0 - \nu_1 n_0)\right\}\frac{h\nu F(\nu)\, Bt_2^2}{Bt_2^2}$$

$$\frac{d\wp}{d\tau} = -\frac{\wp}{\tau_0} + \left\{\frac{A'\nu_2 n_0 t_2}{t_2} + \frac{\wp}{t_2} n_0 (\nu_2 - \nu_1)\right\} h\nu F(\nu) B t_2^2$$

$$\frac{d\wp}{d\tau} = -\frac{\wp}{\tau_0} + \left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \wp(\nu_2 - \nu_1)\right\} n_0 h\nu F(\nu) B t_2$$

$$t_2 r_c h\nu F(\nu) B t_2 \overset{(5)}{=} \frac{h\nu F(\nu) B t_2^2}{Bt_0(t_2 - t_1) h\nu F(\nu)} = \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}$$

οπότε $$\boxed{\frac{d\wp}{d\tau} = -\frac{\wp}{\tau_0} + \left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \wp(\nu_2 - \nu_1)\right\} \cdot \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}} \quad (\varepsilon 3)$$

Τώρα η λύση των διαφορικών εξισώσεων (ε1)(ε2)(ε3) για τα $\nu_1, \nu_2, \wp$ εξαρτάται μόνο από τα $\tau_1, r_N, \tau_0, \frac{A'}{A}$.

Τις λύνουμε στο matlab με τη βοήθεια των αρχείων laser.m και call_laser_commands.m

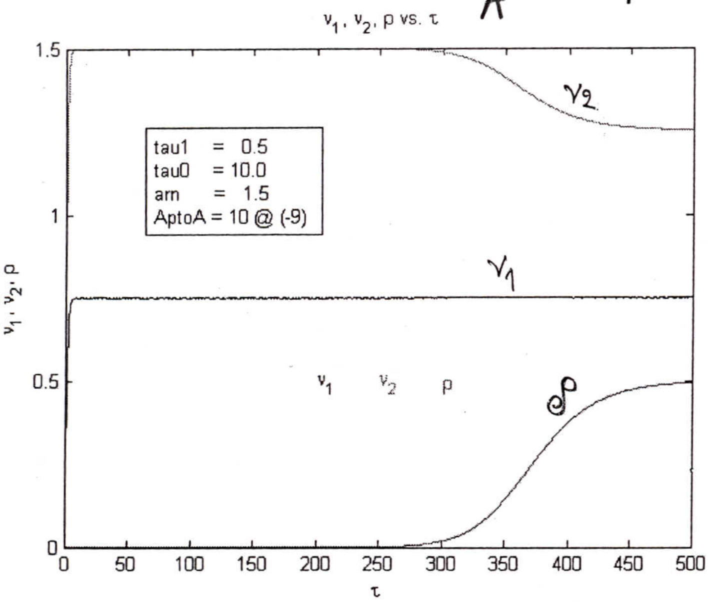
Τρέξιματα laser.m κ call_laser_commands.m

για $\tau_1=0.5$ $\tau_0=10.0$ $r_N=1.5$ $\frac{A'}{A}=10^{-9}$ ή 10^{-4} ή 10^{-1}

ΘΕΜΑ 3.2

8

σελ. 11



$\boxed{\frac{A'}{A}=10^{-9}}$

• σε μερικά $\tau=\frac{t}{t_2}$ π.χ. $\tau=10$ $\left\{\begin{array}{l}\nu_2=1.5=r_N\\ \nu_1=0.75\end{array}\right.$ $\left(\tau_1=\frac{t_1}{t_2}=0.5\right)$

αλλά $\rho=0$

διότι σε τ πολύ μικρά...

$$\frac{d\nu_1}{d\tau}=\overset{\text{μικρό}}{\nu_2}+\cancel{\rho(\nu_2-\nu_1)}\overset{\text{αρνητ.}}{-\frac{\nu_1}{\tau_1}} \quad (E1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau}=r_N+\cancel{\rho(\nu_1-\nu_2)}\overset{\text{μικρό}}{-\nu_2} \quad (E2)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau}=-\cancel{\frac{\rho}{\tau_0}}+\left\{\frac{A'}{A}\nu_2+\cancel{\rho(\nu_2-\nu_1)}\right\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \quad (E3)$$

↑ η άντληση σχεδόν αμέσως δημιουργεί $\nu_2\neq 0 \Rightarrow \nu_1\neq 0$

και μάλιστα $\nu_2=1.5=r_N$

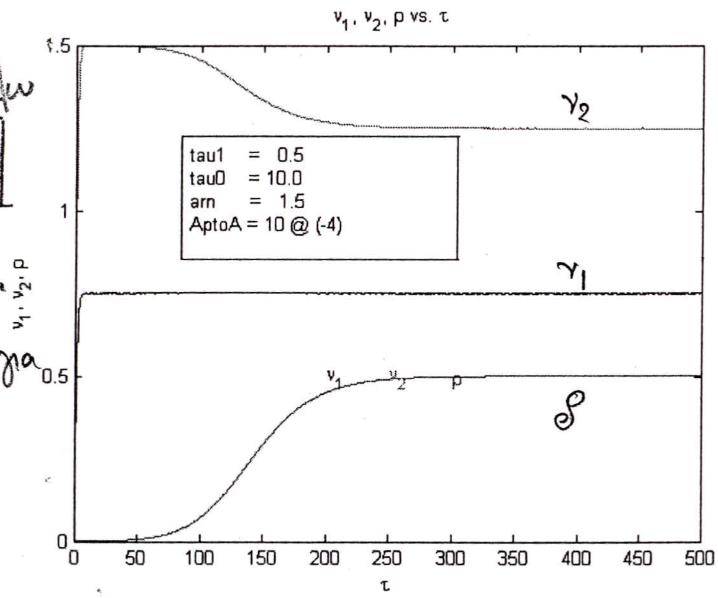
$\nu_1=0.75=\frac{r_N}{2}$ $\left(\tau_1=\frac{t_1}{t_2}=0.5\right)$

$$\Delta\nu=0.75$$

Όμως στην (Ε3) ο μόνος όρος που θα κινήσει αρχικά την $d\rho/d\tau$ είναι ο $\frac{A'}{A}\nu_2\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}$ αλλά $\frac{A'}{A}=10^{-9}$ (ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΟ) οπότε αργεί να κινηθεί ο μηχανισμός παραγωγής ακτινοβολίας

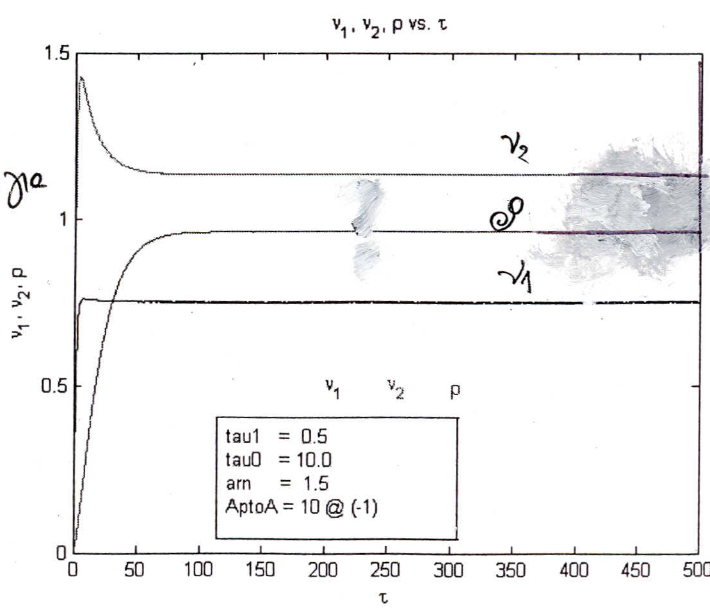
Αν όμως βάλω $\boxed{\frac{A'}{A}=10^{-4}}$ όλα γίνονται γρηγορότερα

ρ αισθητή για $\tau\simeq 40$



$\boxed{\frac{A'}{A}=10^{-1}}$

ρ αισθητή για $\tau\simeq 0$



• Βλέπουμε ότι μετά το $\tau\simeq 250$ αρχίζει

να γίνεται αισθητή η ρ καθώς η ν_2 μικραίνει ✱

η ν_1 παραμένει ~"σταθερή" ήδη από $t >$ μερικά t_2

και πάμε προς τη στάσιμη κατάσταση

$\nu_1=0.75$ $\nu_2=1.25$ $\rho=0.5$

όπως άλλωστε προβλέπουν οι εξ (Λ1'')(Λ2'')(Λ3'')

✱ θεριεύει ο μηχανισμός εξαναγκασμένης εκπομπής

ΘΕΜΑ 3.3

Στάσιμη κατάσταση σημαίνει $\frac{d\nu_1}{d\tau} = \frac{d\nu_2}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} = 0$

ΘΕΜΑ 3.4

Στη στάσιμη κατάσταση

$$\nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} = 0 \qquad \boxed{\Sigma K1}$$

$$r_N + \rho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 = 0 \qquad \boxed{\Sigma K2}$$

$$-\frac{\rho}{\tau_0} + \left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1)\right\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} = 0 \qquad \boxed{\Sigma K3}$$

$$\boxed{\Sigma K1} + \boxed{\Sigma K2} \Rightarrow r_N - \frac{\nu_1}{\tau_1} = 0 \Rightarrow \nu_1 = r_N \tau_1 = 1.5 \cdot 0.5 \Rightarrow \boxed{\nu_1 = 0.75} \quad \Lambda\nu_1$$

και όπως φαίνεται στα διαγράμματα αυτή η ποσότητα δεν αλλάζει στις διαφορετικές περιπτώσεις

$$\boxed{\Sigma K1} - \boxed{\Sigma K2} \Rightarrow 2\nu_2 - r_N - \frac{\nu_1}{\tau_1} + 2\rho(\nu_2 - \nu_1) = 0 \qquad \boxed{\Sigma K4}$$

Αν στην $\boxed{\Sigma K3}$ αγνοήσουμε το $\frac{A'}{A}\nu_2$ (A) πράγμα που μπορεί να γίνει κατά προσέγγιση για τις περιπτώσεις $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ και $\frac{A'}{A} = 10^{-1}$, τότε

$$-\frac{\rho}{\tau_0} + \rho(\nu_2 - \nu_1)\frac{1}{\cancel{\tau_0}(1-\tau_1)} = 0 \Rightarrow \rho = \rho(\nu_2 - \nu_1)\frac{1}{1-\tau_1} \quad \text{και για } \rho \neq 0 \Rightarrow \quad 1 \neq \tau_1$$

$$1 - \tau_1 = \nu_2 - \nu_1 \qquad \boxed{\Sigma K5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\Sigma K5}\\ \boxed{\Lambda\nu_1}\end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0.5 = \nu_2 - 0.75 \Rightarrow \nu_2 = 0.75 + 0.5 \Rightarrow \boxed{\nu_2 = 1.25} \quad \Lambda\nu_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\Sigma K4}\\ \Lambda\nu_1\\ \Lambda\nu_2\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1.25 - 1.5 - \frac{0.75}{0.5} + 2\rho(1.25 - 0.75) = 0$$

$$2.5 - 1.5 - 1.5 + 2\rho\, 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0.5} \quad \Lambda\rho$$

Όταν το $\frac{A'}{A}$ δεν είναι αμελητέο η απλοποίηση (A) δεν μπορεί να γίνει οπότε $\nu_2 \neq 1.25$ κ $\rho \neq 0.5$