Εξέταση της 1ης Αυγούστου 2014

Θέμα 1. Θεωρήστε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Rabi μετά την Rotating Wave Approximation

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t)\frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar}e^{-i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t)\frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar}e^{i(\Omega-\omega)t}$$

τις οποίες θέλουμε να λύσουμε με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$.
(α′) Κάνοντας το μετασχηματισμό

$$C_1(t) = \mathcal{C}_1(t)e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$C_2(t) = \mathcal{C}_2(t)e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

αποδείξτε ότι προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{C}_1(t)} \\ \dot{\mathcal{C}_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix},$$

όπου ορίσαμε ως αποσυντονισμό το $\Delta := \omega - \Omega$ και συχνότητα Rabi το $\Omega_R := \frac{E_0\mathcal{P}}{\hbar}$.
(β′) Ορίστε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

και τον πίνακα

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} = -i\mathrm{A} = -i\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων γίνεται $\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\vec{x}(t)$. Δοκιμάστε λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\tilde{\lambda}t}$ και αποδείξτε ότι εν τέλει έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών $\mathrm{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ όπου $\tilde{\lambda} = -i\lambda$.
(γ′) Λύστε το πρόβλημα για $\Delta = 0$, δηλαδή βρείτε τα $|C_1(t)|^2$ και $|C_2(t)|^2$.

Θέμα 2. Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}^\dagger\rangle$, για τις καταστάσεις $|\downarrow, n\rangle$ και $|\uparrow, n\rangle$.

Θέμα 3. Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών laser στην αδιάστατη μορφή

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \quad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left\{ \frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) \right\} \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \quad (\varepsilon_3)$$

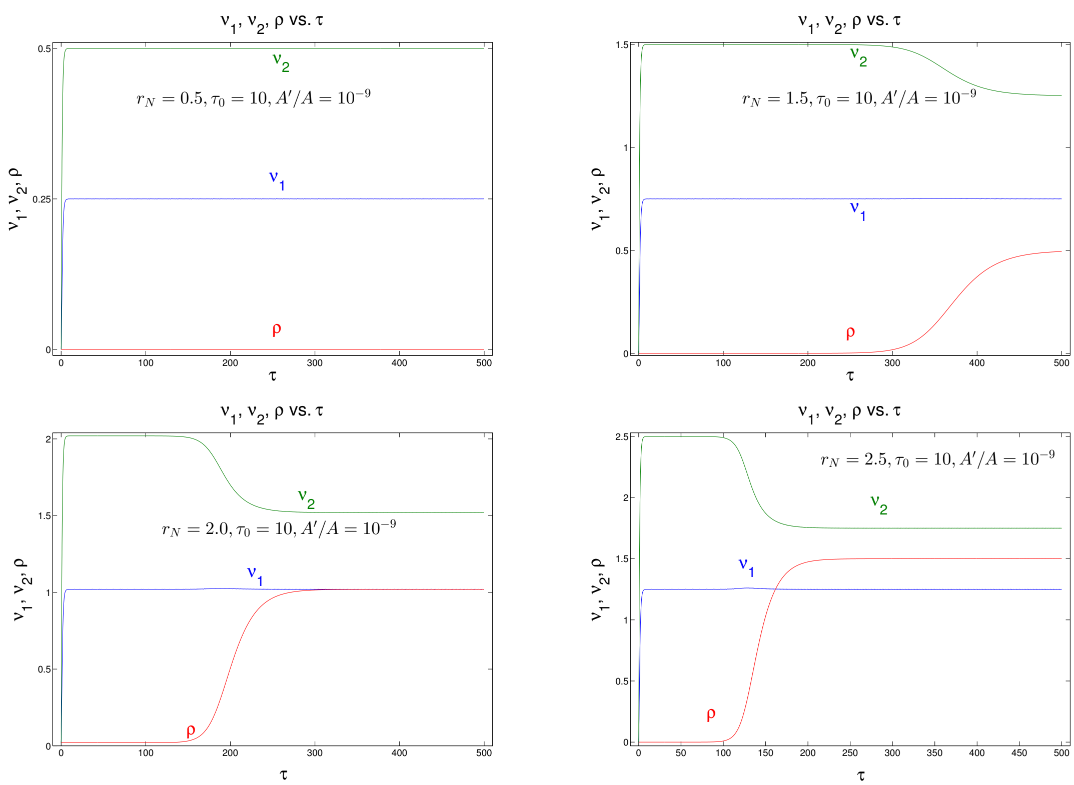
(α′) Εξηγήστε όλα τα σύμβολα.
(β′) Εξηγήστε τι σημαίνει στάσιμη κατάσταση.
(γ′) Αποδείξτε ότι εάν $\frac{A'}{A} << 1$, τότε στη στάσιμη κατάσταση ισχύουν οι εξισώσεις

$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall\, r_N \quad (\Lambda_1'')$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall\, r_N < 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall\, r_N > 1 \end{cases} \quad (\Lambda_2'')$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall\, r_N < 1 \\ r_N - 1, & \forall\, r_N > 1 \end{cases} \quad (\Lambda_3'')$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση των εξισώσεων (ε_1), (ε_2), (ε_3).
(δ′) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;
(ε′) Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;



Μετασχηματισμός ... για να πάρουμε σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές

$$C_1(t) = \mathcal{C}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$C_2(t) = \mathcal{C}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$\dot{C}_1(t) = \dot{\mathcal{C}}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathcal{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$\dot{C}_2(t) = \dot{\mathcal{C}}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathcal{C}_2(t)\, \frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

οπότε το (H) γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{C}}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathcal{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} = \mathcal{C}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{\mathcal{C}}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathcal{C}_2(t)\, \frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} = \mathcal{C}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, e^{i(\Omega-\omega)t} \end{cases}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t) + \mathcal{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) = \mathcal{C}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, e^{-i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t) + \mathcal{C}_2(t)\, \frac{i(\Omega-\omega)}{2} = \mathcal{C}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, e^{i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t) + \mathcal{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) = \mathcal{C}_2(t)\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t) + \mathcal{C}_2(t)\, \frac{i(\Omega-\omega)}{2} = \mathcal{C}_1(t)\, \frac{iE_0\wp}{2\hbar}$$

μάλλον

$$\wp_{z21} = \wp$$

$$\wp_{z12} = \wp_{z21}^* = \wp^*$$

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t) = +\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, \mathcal{C}_1(t) + \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, \mathcal{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t) = \frac{iE_0\wp}{2\hbar}\, \mathcal{C}_1(t) - \frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, \mathcal{C}_2(t)$$

$$\Delta := \omega - \Omega$$

$$\Omega_R := \frac{E_0\wp}{\hbar}$$

(*)

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2}\, \mathcal{C}_1(t) + \frac{i\Omega_R}{2}\, \mathcal{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t) = \frac{i\Omega_R}{2}\, \mathcal{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2}\, \mathcal{C}_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{C}}_1(t) \\ \dot{\mathcal{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R^*}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\,\vec{x}(t)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

Δοκιμάζω λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{\tilde{\lambda} t}$

$$\vec{u}\,\tilde{\lambda}\, e^{\tilde{\lambda} t} = \tilde{A}\vec{u}\, e^{\tilde{\lambda} t} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \tilde{A}\vec{u} = \tilde{\lambda}\vec{u} \\ \tilde{\lambda} := -i\lambda \end{array}\right\} -iA\vec{u} = -i\lambda\vec{u} \Rightarrow \boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

πρόβλημα ιδιοτιμών

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow A\vec{u} - \lambda I\vec{u} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{u} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2} - \lambda & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\Delta}{2} - \lambda\right)\left(\frac{\Delta}{2} + \lambda\right) - \frac{\Omega_R^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\Delta^2}{4} - \lambda^2\right) - \frac{\Omega_R^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta^2}{4} + \lambda^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

...

Έχοντας ελέγξει ότι τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματός μας είναι:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k \vec{u}_k\, e^{\underbrace{-i\lambda_k}_{\tilde{\lambda}_k} t}$$

Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα c_k.

ΝΑ ΠΩ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ

Αν $\overset{\text{υποθέσουμε}}{\Delta} := \omega - \Omega = 0$ τότε $A = \begin{bmatrix} \emptyset & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & \emptyset \end{bmatrix}$ και $\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$ (12)

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ για } \Delta = \emptyset}$

για $\boxed{\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}}$ $\begin{bmatrix} \emptyset & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = -\frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2} U_{21} &= -\frac{\Omega_R}{2} U_{11} \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{11} &= -\frac{\Omega_R}{2} U_{21} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{21} = U_{11}$

οπότε το κανονικοποιημένο $\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

για $\boxed{\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}}$ $\begin{bmatrix} \emptyset & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2} U_{22} &= \frac{\Omega_R}{2} U_{12} \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{12} &= \frac{\Omega_R}{2} U_{22} \end{aligned} \right\} U_{22} = -U_{12}$

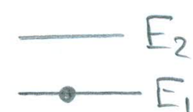
οπότε το κανονικοποιημένο $\vec{U}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Άρα $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{U}_1 e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \vec{U}_2 e^{-i\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(t) e^{i\frac{(\Omega-\omega)t}{2}} \\ C_2(t) e^{-i\frac{(\Omega-\omega)t}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{\text{υποθέσαμε}}{(\Delta = \emptyset)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix}$$

έστωσαν ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ



$C_1(\emptyset) = 1$ κ $C_2(\emptyset) = \emptyset$

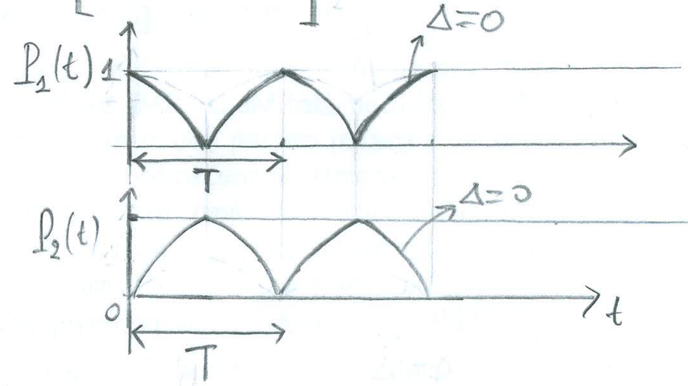
Άρα $\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 = \sqrt{2} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} = \emptyset &\Rightarrow c_1 = c_2 \end{aligned} \right\}$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\end{bmatrix}$$

Άρα $\left|C_1(t)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$

$\left|C_2(t)\right|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$



$$T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$

στο συντονισμό ($\omega=\Omega \Leftrightarrow \Delta=0$) το πλάτος των ταλαντώσεων είναι $a=1$ (αλλιώς το πλάτος εξαρτάται από το detuning π.χ $a = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2+\Omega_R^2}$)

Δείτε επόμενες σελίδες...

ΘΕΜΑ 2 Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}\rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}^\dagger\rangle$

για τις καταστάσεις $|\downarrow n\rangle$ και $|\uparrow n\rangle$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\downarrow n\rangle = n\langle \downarrow n|\downarrow n\rangle = n$$

$$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\uparrow n\rangle = n\langle \uparrow n|\uparrow n\rangle = n$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\downarrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \downarrow n|\hat{a}|\downarrow n+1\rangle = \sqrt{n+1}^{\,2}\langle \downarrow n|\downarrow n\rangle = n+1$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\uparrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \uparrow n|\hat{a}|\uparrow n+1\rangle = \sqrt{n+1}^{\,2}\langle \uparrow n|\uparrow n\rangle = n+1$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow n\rangle = \langle \downarrow n|\hat{S}_+|0\, n\rangle = \langle \downarrow n|0\, n\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow n\rangle = \langle \uparrow n|\hat{S}_+|\downarrow n\rangle = \langle \uparrow n|\uparrow n\rangle = 1$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow n\rangle = \langle \downarrow n|\hat{S}_-|\uparrow n\rangle = \langle \downarrow n|\downarrow n\rangle = 1$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow n\rangle = \langle \uparrow n|\hat{S}_-|0\, n\rangle = \langle \uparrow n|0\, n\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_+\hat{a}|\downarrow n\rangle = \sqrt{n}\,\langle \downarrow n|\uparrow n-1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}|\uparrow n\rangle = \sqrt{n}\,\langle \uparrow n|0\, n-1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_-\hat{a}|\downarrow n\rangle = \sqrt{n}\,\langle \downarrow n|0\, n-1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}|\uparrow n\rangle = \sqrt{n}\,\langle \uparrow n|\downarrow n-1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}^\dagger\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_-\hat{a}^\dagger|\downarrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \downarrow n|0\, n+1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}^\dagger\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}^\dagger|\uparrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \uparrow n|\downarrow n+1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}^\dagger\rangle_{|\downarrow n\rangle} = \langle \downarrow n|\hat{S}_+\hat{a}^\dagger|\downarrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \downarrow n|\uparrow n+1\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}^\dagger\rangle_{|\uparrow n\rangle} = \langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}^\dagger|\uparrow n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle \uparrow n|0\, n+1\rangle = 0$$

ΘΕΜΑ 3 ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α') ν_1, ν_2 αδιάστατοι πληθυσμοί σταθμών 1 κ 2

ϱ αδιάστατη πυκνότητα ακτινοβολίας

τ_1 αδιάστατος χρόνος ζωής της στάθμης 1

τ_0 αδιάστατη παράμετρος που περιγράφει τις απώλειες στα κάτοπτρα

r_N αδιάστατη άντληση

τ αδιάστατος χρόνος σε μονάδες χρόνου ζωής της στάθμης 2

όγκος κοιλότητας

άντληση   κρίσιμη άντληση   χρόνος ζωής της στάθμης 2

$r := \frac{R}{V}$ $r_c := \frac{R_c}{V}$ $n_0 := t_2 r_c$

$\nu_1 := \frac{n_1}{n_0}$ $\nu_2 := \frac{n_2}{n_0}$ $n_i := \frac{N_i}{V}$

πληθυσμοί σταθμών

$\tau := \frac{t}{t_2}$

$\tau_1 := \frac{t_1}{t_2}$ $\tau_0 = \frac{t_0}{t_2}$

$\varrho = B t_2 \rho$ $r_N := \frac{r}{r_c}$

$\frac{A'}{A}$ $A = A_{21}$ συντ. αυθ. εκπ. της $2 \to 1$

A' ίδιο για την ακτινοβ. σημασία έχει το τμήμα που κατευθ. στα κάτοπτρα (β') Στάσιμη κατάσταση $\frac{d\nu_1}{d\tau}=\frac{d\nu_2}{d\tau}=0=\frac{d\rho}{d\tau}$ δηλ. δεν μεταβάλλεται χρονικώς η κατάσταση του συστήματος

(γ') αν $\frac{A'}{A}<<1$, τότε οι εξ. (Σ1), (Σ2), (Σ3) στη στάσιμη κατάσταση γίνονται

$$0=\nu_2+\rho(\nu_2-\nu_1)-\frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (1)$$

$$0=r_N+\rho(\nu_1-\nu_2)-\nu_2 \quad (2)$$

(1)(2) πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow r_N=\frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow \boxed{\nu_1=\tau_1\cdot r_N,\ \forall r_N}$ (Λ1'')

$$0=-\frac{\rho}{\tau_0}+\rho(\nu_2-\nu_1)\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \quad (3) \Rightarrow$$

$$\rho(1-\tau_1)=\rho(\nu_2-\nu_1) \quad (4)$$

(2)(4) πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow \rho(1-\tau_1)=r_N-\nu_2 \Rightarrow \rho=\frac{r_N-\nu_2}{1-\tau_1}$ (5)

αν $\rho=0$, τότε (2) $\Rightarrow \nu_2=r_N$ (6)

αν $\rho>0$, τότε (4) $\Rightarrow \nu_2=\nu_1+(1-\tau_1) \Rightarrow \nu_2=\tau_1\cdot r_N+(1-\tau_1)$ (7)

(5)(7) $\rho=\frac{r_N-\tau_1 r_N-(1-\tau_1)}{1-\tau_1}=\frac{r_N(1-\tau_1)-(1-\tau_1)}{1-\tau_1}=r_N-1$ (8)

και $\rho>0 \Rightarrow r_N>1$

Συνοψίζοντας

$$\nu_2=\begin{cases} r_N, & \forall r_N<1 \\ \tau_1 r_N+(1-\tau_1), & \forall r_N>1 \end{cases} \quad (\Lambda 2'') \qquad \rho=\begin{cases} 0, & \forall r_N<1 \\ r_N-1, & \forall r_N>1 \end{cases} \quad (\Lambda 3'')$$

(δ') Στη στάσιμη κατάσταση $\tau_1=\frac{\nu_1}{r_N}$ όπως κοιτώντας τις εικόνες διαπιστώνουμε ότι

$$\tau_1=0.5=\frac{0.25}{0.5}=\frac{0.75}{1.5}=\frac{1}{2}=\frac{1.25}{2.5}$$

(ε') Αυξάνοντας την αδιάστατη άντληση r_N αυξάνεται η ν_2 (λόγω της (Σ2)) $\Rightarrow$ στην (Σ3) αυξάνεται ο όρος $\frac{A'}{A}\nu_2$ που είναι ο μοναδικός που οδηγεί σε $\frac{d\rho}{d\tau}>0$ όταν το ρ είναι αμελητέο.